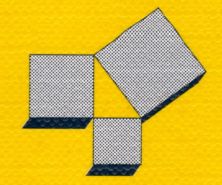
G. Musiol, J. Ranft,
R. Reif, D. Seeliger

Kern- und Elementarteilchenphysik

Verlag Harri Deutsch



Periodisches System der Elemente

Das Periodensystem der Elemente (Atomgewichte bezogen auf ^{12}C)

Periode	Gruppe 0	Gruppe I N	Gruppe I H	Gruppe II N	Gruppe II H	Gruppe III N	Gruppe III H	Gruppe IV N	Gruppe IV H	Gruppe V N	Gruppe V H	Gruppe VI N	Gruppe VI H	Gruppe VII N	Gruppe VII H	Gruppe VIII N	Gruppe VIII H
0	0 Nn		1 H 1,00797 ±0,00001														2 He 4,0026
1	**2 He 4,0026**		3 Li 6,939		4 Be 9,0122		5 B 10,811 ±0,003		6 C 12,01115 ±0,00005		7 N 14,0067		8 O 15,9994 ±0,0001		9 F 18,9984		10 Ne 20,183
2	10 Ne 20,183		11 Na 22,9898		12 Mg 24,312		13 Al 26,9815		14 Si 28,086 ±0,001		15 P 30,9738		16 S 32,064 ±0,003		17 Cl 35,453 ±0,001		18 Ar 39,948
3	**18 Ar 39,948**	29 Cu 63,54	19 K 39,102	30 Zn 65,37	20 Ca 40,08	21 Sc 44,956	31 Ga 69,72	22 Ti 47,90	32 Ge 72,59	23 V 50,942	33 As 74,9216	24 Cr 51,996 ±0,001	34 Se 78,96	25 Mn 54,9380	35 Br 79,909 ±0,002	26 Fe 27 Co 28 Ni 55,847 58,9332 58,71 ±0,003	36 Kr 83,80
4	36 Kr 83,80	47 Ag 107,870 ±0,003	37 Rb 85,47	48 Cd 112,40	38 Sr 87,62	39 Y 88,905	49 In 114,82	40 Zr 91,22	50 Sn 118,69	41 Nb 92,906	51 Sb 121,75	42 Mo 95,94	52 Te 127,60	43 Tc 97*	53 J 126,9044	44 Ru 45 Rh 46 Pd 101,07 102,905 106,4	54 Xe 131,30
5	54 Xe 131,30	79 Au 196,967	55 Cs 132,905	80 Hg 200,59	56 Ba 137,34	57 La 138,91 58···71[1])	81 Tl 204,37	72 Hf 178,49	82 Pb 207,19	73 Ta 180,948	83 Bi 208,980	74 W 183,85	84 Po 209*	75 Re 186,2	85 At 210*	76 Os 77 Ir 78 Pt 190,2 192,20 195,09	86 Rn 222*
6	86 Rn 222*		87 Fr 223*		88 Ra 226*	89 Ac 90···103[2])		104 Ku 259*		105 262*		106 263*		107 261*		108	

[1]) Lanthanide

58 Ce 140,12	59 Pr 140,907	60 Nd 144,24	61 Pm 145*	62 Sm 150,35	63 Eu 151,96	64 Gd 157,25	65 Tb 158,924	66 Dy 162,50	67 Ho 164,930	68 Er 167,26	69 Tm 168,934	70 Yb 173,04	71 Lu 174,97

[2]) Aktinide

90 Th 232,038	91 Pa 231*	92 U 238,03	93 Np 237*	94 Pu 244*	95 Am 243*	96 Cm 247*	97 Bk 247*	98 Cf 251*	99 Es 254*	100 Fm 253*	101 Md 256*	102 No 253* (251*)	103 Lw 257*

Die Elemente sind von links oben beginnend in waagerechten Reihen nach wachsender Ordnungszahl angeordnet. Die waagerechten Reihen heißen *Perioden*, die senkrechten *Gruppen*; diese sind wieder nach *Hauptgruppen* (H) und *Nebengruppen* (N) unterschieden. Die Nebengruppen treten erst von der 4. Periode an in Erscheinung. Besondere Ähnlichkeit zeigen vor allem die untereinanderstehenden Elemente gleicher Hauptgruppen.

* Massenzahl des langlebigsten der bekannten Isotope. [*nach* ABC Physik. — Leipzig: VEB F. A. Brockhaus Verlag 1973.]

Kern- und Elementarteilchenphysik

Kern- und Elementarteilchenphysik

von Gerhard Musiol, Johannes Ranft, Roland Reif und Dieter Seeliger

Verlag Harri Deutsch

Die Deutsche Bibliothek - CIP-Einheitsaufnahme

Kern- und Elementarteilchenphysik / von Gerhard Musiol ... -
2., korrigierte Aufl. - Thun ; Frankfurt am Main : Deutsch, 1995

ISBN 3-8171-1404-4
NE: Musiol, Gerhard

ISBN 3-8171-1404-4

2. Auflage 1995

Druck: Präzis-Druck GmbH, Karlsruhe

Aus dem Vorwort zur 1. Auflage

Seit dem Beginn der Erforschung der subatomaren Materie entwickeln sich Kern- und Elementarteilchenphysik in enger wechselseitiger Beziehung. So konnte einerseits der grundlegende Kernaufbau erst nach der Entdeckung der Nukleonen erkannt werden, andererseits ergaben sich aus der Untersuchung von Kernzerfällen wichtige Erkenntnisse für die Theorie der schwachen Wechselwirkung von Elementarteilchen. Viele andere Beispiele ließen sich anführen, darunter die neuesten Erkenntnisse der Elementarteilchenphysik zur Quarkstruktur der Hadronen, die rückwirkend einen neuen Zugang zum Verständnis der Struktur der Atomkrerne eröffnen. Auch in experimenteller und methodischer Hinsicht gibt es viele Gemeinsamkeiten, seien es die Detektoren, Beschleuniger oder verschiedene mathematische Methoden, um nur einige zu nennen. Davon ausgehend haben die Autoren den Versuch einer zusammenhängenden Darstellung der Kern- und Elementarteilchenphysik unternommen, der zugleich auch den Fortschritt beider Gebiete in den letzten Jahren sichtbar machen soll.

Parallel zur wissenschaftlichen Vertiefung der beiden Gebiete entwickelten sich vielfältige Anwendungen von Nuklearprozessen oder -methoden zur Lösung praktischer Probleme. Die Autoren haben es sich zur Aufgabe gestellt, auch diese — wenigstens in den grundlegenden Zügen — sichtbar zu machen, ebenso wie den Beitrag der Kern- und Elementarteilchenphysik zur schrittweisen Vervollkommnung der menschlichen Erkenntnis über die Vorgänge im Kosmos und dessen Entstehung.

Mit dem vorliegenden Werk soll ein Lehrbuch angeboten werden, das für die Ausbildung an Universitäten und Hochschulen und für die Weiterbildung von Hochschulabsolventen geeignet ist. Als Nutzer ist an Physikstudenten, aber auch an die Lehrenden gedacht, die häufig nicht selbst auf diesem Gebiet arbeiten. Hinzu kommen die in der physikalischen Forschung Tätigen, die sich über die Zusammenhänge mit benachbarten Entwicklungen und deren Grundlagen informieren wollen. Auf Grund der wachsenden Ausstrahlungskraft der Kern- und Elementarteilchenphysik auf andere Teilgebiete der Physik sowie andere Natur- und Technikwissenschaften, wie Chemie, Biologie, Medizin, Landwirtschaft, Elektronik, Elektrotechnik, Energetik, Werkstoffwissenschaften, Maschinenbau und das Militärwesen, um nur einige zu nennen, besteht ein breiter Bedarf an Informationen auch für die Weiterbildung bei Fachleuten und Studenten dieser Gebiete. Da die Kern- und Elementarteilchenphysik die Grenze unseres Wissens und Verständnisses im Mikrokosmos, und im Zusammenwirken mit der Kosmologie auch im Makrokosmos ständig erweitern, sollten auch Physiklehrer an allgemeinbildenden Schulen sowie naturwissenschaftlich-philosophisch Interessierte zu den Lesern des Buches gehören.

In den Kapiteln 1 bis 6 werden die Grundbegriffe und Methoden einheitlich für Kern- und Elementarteilchenphysik beschrieben. Das gilt auch für die Kapitel 11 und 12, die den Anwendungen gewidmet sind. Die Kapitel 7 bis 11 behandeln hauptsächlich Probleme der Kernphysik und die Kapitel 13 bis 15 Probleme der Elementarteilchenphysik. Die Anhänge enthalten einige theoretische und methodische Grundlagen für beide Gebiete.

Bei der Erarbeitung des Buches lag die Federführung für die Kapitel 1, 2, 3, 6, 8.1 bis 8.5, 9, 12, Anhänge B 1 bis B 3 sowie D 1 bis D 4 bei G. Musiol, für die Kapitel 4, 5, 10.1, 10.2, 10.4, 10.7, 10.8, 11, und 15.1 bis 15.4 bei D. Seeliger, für die Kapitel 7, 8.6, 10.3, 10.5, 10.6, 10.9, 10.10 und die Anhänge A, B 4 bis B 6 und C bei R. Reif und für die Kapitel 13, 14, und 15.5 bis 15.11 bei J. Ranft.

Dresden, im März 1985

Gerhard Musiol
Johannes Ranft
Roland Reif
Dieter Seeliger

Vorwort zur 2. Auflage

Die 1. Auflage der "Kern- und Elementarteilchenphysik", die 1988 zugleich beim Deutschen Verlag der Wissenschaften in Berlin und bei der VCH Verlagsgesellschaft Weinheim, New York, Cambridge, Basel, erschien, hatte schnell bei einer großen Nutzerschaft reges Interesse gefunden.
In der vorliegenden 2. Auflage wurden alle bekanntgewordenen Druckfehler korrigiert und einige Passagen überarbeitet. Eine grundlegende Überarbeitung erschien uns verfrüht, da die jüngsten Fortschritte den in der 1. Auflage dargestellten Erkenntnisstand lediglich kontinuierlich erweitern. Zu ihnen gehören die Weiterentwicklung der Beschleunigertechnik sowie anderer Methoden und Anwendungen und besonders die Bestätigung des Standardmodells der Elementarteilchenphysik, man denke z.B. an den experimentellen Nachweis des Top-Quarks und die Relativistische Kernphysik, wo die Suche nach dem Quark-Gluonen-Plasma im Gange ist.
Die Autoren, die auf langjährige Lehrerfahrungen zurückblicken, danken dem Verlag Harri Deutsch insbesondere für die Bereitschaft, das Buch in dieser Auflage als preiswerte Studentenausgabe herauszubringen, um so einem vielfach an uns herangetragenen Wunsch entgegenzukommen.

Dresden im April 1995

GERHARD MUSIOL
JOHANNES RANFT
ROLAND REIF
DIETER SEELIGER

Kontakte zu den Autoren über:
Verlag Harri Deutsch
Gräfstraße 47/51
D-60486 Frankfurt am Main
Tel: 069/775021
Fax: 069/7073739
E-mail: verlag@harri-deutsch.de

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung

1.1. Gegenstand der Kern- und Elementarteilchenphysik

Die Atome bestehen aus einem positiv geladenen Kern und einer diesen umgebenden, seine Ladung nach außen hin kompensierenden Wolke bewegter Elektronen, der Hülle. Die Eigenschaften der Hülle hängen unmittelbar von einigen Charakteristika des Kerns ab. Ihr Studium und ihre Erklärung setzen aber die genaue Kenntnis aller Eigenschaften des Kerns sowie seiner Struktur nicht voraus. Umgekehrt setzt die Untersuchung des Atomkerns bei weitem nicht immer die genaue Kenntnis der Struktur der Atomhülle voraus. In den Fällen, in denen sich die Eigenschaften von Hülle und Kern gekoppelt äußern, kann man sie hinreichend genau voneinander trennen. Daher konnten sich die Atom- oder Hüllenphysik einerseits und die Kernphysik andererseits als relativ selbständige Teilgebiete der Physik entwickeln.

Die Kernphysik befaßt sich mit der experimentellen und theoretischen Erforschung der Eigenschaften und der Struktur der Atomkerne und aller kernphysikalischen Erscheinungen. Der Atomkern erwies sich als komplexes Gebilde, das in sehr guter Näherung als aus Protonen und Neutronen, den Nukleonen, aufgebaut verstanden werden kann, zwischen denen die Wechselwirkungen von den Mesonen vermittelt werden. Nukleonen und Mesonen gehören zu den Elementarteilchen, so daß die Gesetze der Kernphysik mit den Erkenntnissen der Elementarteilchenphysik zu begründen sind. Damit besteht im Unterschied zum Verhältnis zwischen Hüllen- und Kernphysik eine engere Bindung zwischen Kern- und Elementarteilchenphysik.

Die Elementarteilchenphysik, die oft auch Hochenergiephysik genannt wird, beschäftigt sich mit der experimentellen und theoretischen Erforschung der Elementarteilchen und ihrer Wechselwirkungen. Der Inhalt des Begriffs Elementarteilchen hat sich im Laufe der Zeit gewandelt. In den letzten zwanzig Jahren zeigte sich, daß solche Elementarteilchen, wie Nukleonen und Mesonen eine innere Struktur besitzen und aus noch elementareren Teilchen, den Quarks, aufgebaut sind. Heute gelten im eigentlichen Sinne des Wortes nur die Quarks und die Leptonen als elementare Teilchen. Dazu kommen noch die Feldquanten, wie Photonen, Gluonen und Vektorbosonen, die die Wechselwirkungen der Elementarteilchen vermitteln. Besonders seit der Inbetriebnahme von Beschleunigern im Gigaelektronenvolt (GeV)-Energiebereich in den fünfziger Jahren ist die Elementarteilchenphysik zu einer selbständigen Disziplin geworden.

1.2. Entwicklung der Kern- und Elementarteilchenphysik

Kern- und Elementarteilchenphysik sind junge, längst nicht abgeschlossene Gebiete der Physik. Infolge von drei, im subatomaren Bereich wesentlich beteiligten fundamentalen Wechselwirkungsarten mit sehr komplizierten Eigenschaften — der starken, der schwachen und der elektro-

magnetischen Wechselwirkung — ist die Vielfalt der Erscheinungen außerordentlich groß und die Geschichte reich an unerwarteten Entdeckungen. Es ist schwer, diese Geschichte kurz zu fassen. Wir führen in den Tabellen 1.1 und 1.2 Angaben über wichtige und grundlegende physikalische und methodische Erkenntnisse und Entdeckungen auf und geben dazu einige Erläuterungen.

Tabelle 1.1
Historische Daten aus der Entwicklung der Kern- und Elementarteilchenphysik

Jahr	Entdecker	Entdeckung, Effekt, Erkenntnis
1885	W. C. Röntgen	Entdeckung nach ihm benannter Strahlung. Nobelpreis 1901
1896	H. Becquerel	Von Uranerzen ausgehende Strahlen schwärzen photographische Platten. Nobelpreis 1903
1897	J. J. Thomson	Die Katodenstrahlen sind ein Elektronenstrom; Entdeckung des ersten Elementarteilchens über e/m-Messung. Nobelpreis 1906
1898	Marie Skłodowska-Curie, P. Curie	Entdeckung zweier intensiv strahlender chemischer Elemente, Polonium und Radium. Nobelpreis 1903
1902	E. Rutherford, F. Soddy	Erklärung des Auftretens der radioaktiven Strahlung als Folge der spontanen Umwandlung radioaktiver Substanzen. Nobelpreis für Chemie 1908
1903	Ph. Lenard	Elektronen können metallische Folien durchdringen. Nobelpreis 1905
1905	A. Einstein	Zwischen Energie und Masse gibt es eine Äquivalenzbeziehung. Nobelpreis 1921
1905	E. v. Schweidler	Der radioaktive Zerfall ist ein statistischer, ein Wahrscheinlichkeitsprozeß
1909	E. Rutherford	Abschluß der sicheren Charakterisierung der α-, β- und γ-Strahlung
1909	H. Geiger, R. Marsden	Untersuchung der Streuung der α-Teilchen in metallischen Folien mit der Szintillatormethode
1911	E. Rutherford	Vorschlag eines Atommodells mit Hülle und Kern
1911	J. J. Thomson	Erklärung der Isotopie auf der Grundlage von e/m-Bestimmungen
1911	V. F. Hess, W. Kolhörster	Entdeckung der Höhenstrahlung. Nobelpreis 1936 an V. F. Hess
1913	K. Fajans, F. Soddy	Aufstellung der radioaktiven Verschiebungssätze. Nobelpreis für Chemie an F. Soddy 1921
1913	N. Bohr	Entwicklung eines Atommodells mit um den kernkreisenden Elektronen. Nobelpreis 1922
1914	E. Rutherford	Indentifizierung der Rückstoßatome beim Beschuß von Wasserstoff mit Elektronen als Protonen
1918	Emmy Noether	Entdeckung eines Zusammenhangs zwischen Raumsymmetrien und Erhaltungsgrößen
1919	F. W. Aston	Isotopie ist eine über das ganze Periodensystem verbreitete Erscheinung. Nobelpreis für Chemie 1922
1919	E. Rutherford	Nachweis der ersten künstlich mit α-Teilchen an Stickstoff ausgelösten Kernreaktion mit Hilfe einer Ionisationskammer, Vorschlag des ersten Kernmodells mit Protonen und Elektronen

Tabelle 1.1 (Fortsetzung)

Jahr	Entdecker	Entdeckung, Effekt, Erkenntnis
1921	O. STERN, W. GERLACH	Nachweis der Richtungsquantelung von Atomstrahlen. Nobelpreis 1943
1922	A. H. COMPTON	Entdeckung der elastischen Streuung von Photonen an freien Elektronen (Compton-Effekt). Nobelpreis 1927
1924	P. BLACKETT	Sichtbarmachung von Kernreaktion in der Nebelkammer. Nobelpreis 1948
1924	E. RUTHERFORD u. a.	Entdeckung der Kernkraft auf der Grundlage der Analyse der Energiebilanzen von Kernreaktionen
1925	LISE MEITNER	Die γ-Strahlung wird im Gefolge von α- oder β-Zerfall bei der Abregung der Tochterkerne emittiert
1927	E. BACK, S. A. GOUDSMIT	Erklärung der Hyperfeinstrukturaufspaltung der Spektrallinien von Atomen durch Einführung des Kernspins
1927	P. A. M. DIRAC	Begründung der Quantenelektrodynamik mit der relativistischen Gleichung des Elektrons, aus der die Existenz des Antiteilchens folgt. Nobelpreis 1933
1928	1. G. GAMOV 2. E. U. D. CONDON R. W. HENRY	Erklärung des α-Zerfalls mit Hilfe des Tunneleffekts als erstes Beispiel der Anwendung der Quantenmechanik auf den Atomkrern
1928	H. POSE	Entdeckung des Resonanzcharakters von Kernreaktionen
1932	J. CHADWICK	Entdeckung des Neutrons in Nebelkammerexperimenten. Nobelpreis 1935
1932	D. D. IVANENKO	Der Atomkern besteht aus Protonen und Neutronen
1932	W. HEISENBERG	Neutron und Proton sind zwei Ladungszustände eines Teilchens, des Nukleons; Einführung des Isospins. Nobelpreis 1932 für Schaffung der Quantenmechanik
1932	C. D. ANDERSON	Entdeckung des Positrons mit der Nebelkammer als erstes Antiteilchen. Nobelpreis 1936
1933	J. E. TAMM, D. D. IVANENKO	Die Kernkräfte werden durch Feldquanten vermittelt; sie besitzen Austauschcharakter
1933	W. PAULI	Postulierung eines neuen Elementarteilchens, des Neutrinos zur Erklärung des β-Zerfalls. Nobelpreis 1945 für das Ausschließungsprinzip
1934	E. FERMI	Schaffung der ersten Theorie des β-Zerfalls
1934	P. A. ČERENKOV	Entdeckung der Čerenkov-Strahlung. Nobelpreis 1958
1934	IRÈNE CURIE, F. JOLIOT	Entdeckung der künstlich erzeugten Radioaktivität und des β^+-Zerfalls. Nobelpreis für Chemie 1935
1934	E. FERMI u. a.	Mit langsamen Neutronen lassen sich effektiv neue Nuklide erzeugen. Nobelpreis 1938
1935	H. YUKAWA	Mesonenhypothese zur Erklärung der Kernkraft. Nobelpreis 1949

Tabelle 1.1 (Fortsetzung)

Jahr	Entdecker	Entdeckung, Effekt, Erkenntnis
1935	1. L. V. KURČATOV L. V. MYSOVSKIJ L. I. RUSINOV 2. C. F. VON WEIZSÄCKER, LISE MEITNER	Untersuchung und Erklärung der Kernisomerie
1935	C. F. VON WEIZSÄCKER	Tröpfchenmodell zur Berechnung der Kernmasse
1936	N. BOHR	Compoundkernhypothese als Kernreaktionsmechanismus
1936	1. JA. I. FRENKEL 2. E. FERMI 3. H. BETHE	Einführung des Begriffs der Kerntemperatur
1937	P. A. ČERENKOV I. M. FRANK, I. E. TAMM	Erklärung des Čerenkov-Effekts. Nobelpreis 1959
1937	L. W. ALVAREZ	Entdeckung des Elektroneneinfangs als β-Zerfallsart
1937	C. D. ANDERSON S. N. NEDDERMAYER	Entdeckung des Myons mit der Nebelkammer in der Höhenstrahlung
1937	1. N. BOHR, F. KALCKAR 2. JA. I. FRENKEL 3. L. D. LANDAU	Hydrodynamisches Tröpfchenmodell des Atomkerns
1938	H. BETHE, C. F. VON WEIZSÄCKER	Zyklische Reaktionskette zur Erklärung der in den Sternen frei werdenden Energie. Nobelpreis 1967 an H. BETHE für die Entwicklung der Theorie der Kernreaktionen, insbesondere energieerzeugender in den Sternen
1939	O. HAHN, F. STRASSMANN	Entdeckung der Kernspaltung mit Neutronen. Nobelpreis für Chemie 1944
1939	O. FRISH, LISE MEITNER	Erste Erklärung der Kernspaltung
1939	1. IRENE CURIE, F. JOLIOT, L. KOWARSKI, H. v. HALBAN 2. G. N. FLEROV, L. I. RUSINOV 3. E. FERMI, L. S. SZILLARD	Experimenteller Nachweis der Spaltneutronen
1939	1. N. BOHR, J. A. WHEELER 2. JA. I. FRENKEL	Theorie der Kernspaltung auf der Grundlage des hydrodynamischen Kernmodells
1939	J. SCHINTLMEISTER, K. CZULIUS	Erster experimenteller Nachweis der Spaltprodukte des Uran
1939	R. B. ROBERTS u. a.	Entdeckung der verzögerten Neutronen
1939	JU. B. CHARITON, JA. B. SELDOVIČ	Formulierung der Bedingungen für eine Kettenreaktion mit Neutronen
1940	G. N. FLEROV, K. A. PETRŽAK	Entdeckung der spontanen Kernspaltung des ^{238}U
1940	E. M. MCMILLAN, P. M. ABELSON	Entdeckung des ersten transuranen Elements $_{93}Np$ als Produkt der Reaktion langsamer Neutronen mit Uran. Nobelpreis für Chemie 1951 an E. M. MCMILLAN
1940	G. T. SEABORG u. a.	Entdeckung des zweiten transuranen Elements $_{94}Pu$ als Produkt der Reaktion von Deuterium mit Uran, Nobelpreis für Chemie 1951 an G. T. SEABORG
1947	C. F. POWELL, C. M. G. LATTES, G. P. S. OCCIALINI	Entdeckung der Pionen, der Yukawa-Teilchen mit Spurenplatten in der Höhenstrahlung. Nobelpreis 1950 an C. F. POWELL

Tabelle 1.1 (Fortsetzung)

Jahr	Entdecker	Entdeckung, Effekt, Erkenntnis
1948	1. O. HAXEL, J. H. D. JENSEN, H. E. SUESS 2. MARIA GOEPPERT-MAYER	Weiterentwicklung des Kernschalenmodells durch Einführung der Spin-Bahn-Kopplung der Kernkraft. Nobelpreis 1963 an M. GOEPPERT-MAYER und J. H. D. JENSEN
1949	E. FERMI, C. N. YANG	Erstes Hadronenmodell für Pionen aus Nukleonen und Antinukleonen
1949	1. S. TOMONAGA 2. J. SCHWINGER 3. R. P. FEYNMAN	Vollendung der Quantenelektrodynamik. Nobelpreis 1965
1950	J. RAINWATER, A. BOHR, B. MOTTELSON	Entwicklung eines Kollektiv- und Teilchenaspekts vereinigenden Kernmodells, Nobelpreis 1975
1952	E. FERMI, K. ANDERSON	Entdeckung der ersten Elementarteilchenresonanz
1953	M. GELL-MANN, K. NISHIJIMA	Einführung der Quantenzahl Seltsamkeit
1954	H. FESHBACH, H. C. PORTER, V. F. WEISSKOPF	Einführung des optischen Modells zur Beschreibung der Riesenresonanzen
1954	C. N. YANG, R. L. MILLS	Entwicklung nichtabelscher Eichfeldtheorien
1955	G. T. SEABORG u. a.	Zwischen 1940 und 1955 gelangen Synthese und der Nachweis von Isotopen der transuranen Elemente 93 bis 101
1955	R. L. HOFSTADTER	Beginn der Untersuchung der elektromagnetischen Struktur der Kerne und Nukleonen mit schnellen Elektronen. Nobelpreis 1961 an R. L. HOFSTADTER
1955	O. CHAMBERLEIN, E. SEGRE, u. a.	Entdeckung des Antiprotons. Nobelpreis 1959
1956	B. CORK u. a.	Entdeckung des Antineutrons
1956	R. REINES, C. L. COWAN	Direkter Nachweis des Antineutrinos an einem Kernreaktor
1956	S. G. NILSSON	Kollektives Kernmodell in Einteilchennäherung für deformierte Kerne
1956	T. D. LEE, C. N. YANG	Hypothese über die Nichterhaltung der räumlichen Parität bei der schwachen Wechselwirkung. Nobelpreis 1957
1956	1. S. SAKATA 2. L. B. OKUN	Systematisierung der Hadronen in Supermultipletts auf der Grundlage von fundamentalen Teilchen und Antiteilchen
1957	C. S. WU u. a.	Experimenteller Nachweis der Nichterhaltung der räumlichen Parität beim β-Zerfall
1957	1. L. D. LANDAU 2. T. D. LEE, C. N. YANG 3. A. SALAM	Einführung der kombinierten CP-Invarianz anstelle der getrennten C- und P-Invarianz
1958	R. L. MÖSSBAUER	Entdeckung der rückstoßfreien Resonanzabsorption der Gammastrahlung in Festkörpern (MÖSSBAUER-Effekt). Nobelpreis 1963
1959	S. T. BELJAJEV	Anwendung der Suprafluiditätstheorie auf die Nukleonen des Atomkerns
1959	V. G. SOLOVJOV	Entwicklung des Kern-Suprafluiditätsmodells
1961	M. GELL-MANN, Y. NEEMAN	Klassifizierung der Hadronen mit Hilfe der unitären Symmetriegruppe SU(3) und Vorhersage des Ω^--Hyperons
1961	S. L. GLASHOW	Erste Formulierung einer elektroschwachen Eichfeldtheorie

Tabelle 1.1 (Fortsetzung)

Jahr	Entdecker	Entdeckung, Effekt, Erkenntnis
1962	L. M. LEDERMAN u. a.	Nachweis der Nichtindentität des elektrischen und myonischen Neutrinos auf der Grundlage eines Vorschlages von B. PONTECORVO
1963	1. V. A. KARNAUCHOV, G. N. FLEROV 2. R. BARTON u. a.	Entdeckung der Emission verzögerter Protonen
1963	E. P. J. WIGNER	Nobelpreis 1963 für Beiträge zur Entwicklung der Kerntheorie, insbesondere fundamentaler Symmetrieprinzipien
1964	J. H. CHRISTENSON, J. W. CRONIN, W. L. FITCH, R. TURLEY	Nachweis der Verletzung der CP-Invarianz beim Zerfall neutraler Kaonen. Nobelpreis 1980 an J. W. CRONIN und W. L. FITCH
1964	1. M. GELL-MANN 2. G. ZWEIG	Aufstellung der Quarkhypothese. Nobelpreis 1969 an M. GELL-MANN
1964 bis 1980	1. G. N. FLEROV u. a. 2. A. GHIORSO u. a.	Synthese und Nachweis von Isotopen der transuranen Elemente 102 bis 108
1964	1. P. W. HIGGS 2. F. ENGLERT, R. BROUT 3. T. W. KIBBLE	Formulierung der spontanen Symmetriebrechung nichtabelscher Eichfeldtheorien (Higgs-Mechanismus)
1965	A. A. PENZIAS, R. W. WILSON	Entdeckung der kosmischen 3-k-Mikrowellenstrahlung
1967	H. A. BETHE	Nobelpreis 1967 für Beiträge zur Theorie der Kernreaktionen
1967	1. S. WEINBERG 2. A. SALAM	Formulierung der elektroschwachen Eichfeldtheorie. Nobelpreis 1979 an S. WEINBERG, S. GLASHOW, A. SALAM
1967	L. FADEEV, V. N. POPOV	Wichtige Beiträge zur Quantisierung nichtabelscher Eichfeldtheorien
1968	L. W. ALVAREZ	Nobelpreis 1968 für Beiträge zur Elementarteilchenphysik, insbesondere für die Entdeckung vieler Resonanzen
1968	W. K. H. PANOWSKI u. a.	Entdeckung der Nukleonenstruktur in tiefunelastischen Elektron-Proton-Streuexperimenten am SLAC-Linearbeschleuniger
1969	J. D. BJORKEN	Hypothese über die Maßstabsinvarianz
1970	S. L. GLASHOW	Einführung der Quantenzahl Charm. Nobelpreis für S. L. GLASHOW 1979
1970	JU. D. PROKOŠKIN u. a.	Synthese des Antiheliums-3 am 76-GeV Synchroton in Serpuchow
1971	A. M. BALDIN u. a.	Entdeckung des kumulativen Effekts
1971	G. T'HOOFT	Nachweis der Renormierbarkeit nichtabelscher Eichfeldtheorien
1973	A. B. MIGDAL	Hypothese über die Existenz eines Mesonenkondensats im Kern
1973	F. J. HASERT u. a., Gargamelle-Gruppe von CERN	Experimenteller Nachweis der Existenz neutraler Ströme der schwachen Wechselwirkung über myonenlose Neutrinoreaktionen
1973	1. H. D. POLITZER 2. D. J. GROSS, F. WILCZEK	Entdeckung der asymptotischen Freiheit nichtabelscher Eichfeldtheorien als wichtigste Voraussetzung für die Formulierung der Quantenchromodynamik, der Eichfeldtheorie der starken Wechselwirkung

Tabelle 1.1 (Fortsetzung)

Jahr	Entdecker	Entdeckung, Effekt, Erkenntnis
1974	1. S. TING u. a. 2. S. RICHTER u. a.	Entdeckung des J/Ψ-Teilchens, eines Mesons, das aus Quark und Antiquark mit Charm zusammengesetzt ist. Nobelpreis 1976 an S. TING und B. RICHTER
1974	JU. D. PROKOŠKIN u. a.	Synthese des Antitritiums in Serpuchov am 76-GeV-Synchrotron
1974	H. GEORGI, S. L. GLASHOW	Formulierung der ersten Großen einheitlichen Eichfeldtheorie mit Hilfe der SU(5)-Gruppe
1974	K. G. WILSON	Erste Formulierung von Eichfeldtheorien auf einem diskreten Raum-Zeit-Gitter. Nobelpreis 1982
1975	M. L. PERL u. a.	Experimenteller Nachweis des τ-Leptons
1977	S. W. HERB, L. LEDERMAN u. a.	Experimenteller Nachweis des γ'''-Mesons, einem Quark-Antiquark-Paar mit Bottom-Quantenzahl
1981	A. GUTH	Kosmologisches Modell der Inflation
1982	A. LINDE	
1983	S. CHANDIASEKHAR, W. A. FOWLER	Nobelpreis für Theorie der Struktur und Evolution der Sterne und Kernreaktionen in den Sternen sowie Bildung der Elemente
1983	UA1-Experiment im CERN, C. RUBBIA u. a. UA2-Experiment im CERN, P. DARRIULAT u. a.	Experimenteller Nachweis der Existenz der $W^{\pm}$- und Z^0-Eichbosonen der elektroschwachen Wechselwirkung am CERN-SPS-Proton-Antiproton-Kollider. Nobelpreis 1984 an C. RUBBIA und S. VAN DER MEER

Tabelle 1.2
Historische Daten zu methodischen Entwicklungen und Anwendungen der Kern- und Elementarteilchenphysik

Jahr	Entdecker	Effekt, Gerät, Anlage, Ereignis
1896	H. BECQUEREL	Schwärzung photografischer Schichten durch Strahlungen radioaktiver Substanzen. Nobelpreis 1903
1897	J. J. THOMSON	Elektronen werden durch ein zur Bewegungsrichtung transversales Magnetfeld proportional zu e/m abgelenkt
1903	1. J. ELSTER, H. GEITEL 2. W. CROOKES	Schnelle α-Teilchen rufen in lumineszierenden Substanzen Lichtblitze hervor
1908	E. RUTHERFORD, H. GEIGER	Entwicklung des ersten Ionisationsdetektors
1909	E. RUTHERFORD	α- und β-Strahlung werden durch Magnetfelder abgelenkt
1911	C. T. R. WILSON	Entwicklung der Expansionsnebelkammer. Nobelpreis 1927
1911	J. J. THOMSON	Erster Massenspektrograph
1913	G. HEVESY, F. PANETH	Begründung der Radioindikatoranalyse. Nobelpreis für Chemie 1944 an G. HEVESY
1925	P. L. KAPICA, D. W. SKOBELCYN	Erstmalige Kombination der Nebelkammer mit einem transversalen Magnetfeld. Nobelpreis 1978 an P. L. KAPICA für fundamentale Beiträge zur Tieftemperaturphysik

Tabelle 1.2 (Fortsetzung)

Jahr	Entdecker	Effekt, Gerät, Anlage, Ereignis
1928	H. GEIGER, W. MÜLLER	Entwicklung des nichtselbstlöschenden Zählrohres
1928	W. BOTHE	Einführung der Koinzidenzmethode. Nobelpreis 1954
1928	R. WIDEROE	Vorschlag des Betatronprinzips
1931	VAN DE GRAAFF	Inbetriebnahme eines Potentialbeschleunigers mit Reibungselektrizität
1932	J. D. COCKROFT, E. WALTON	Inbetriebnahme eines Potentialbeschleunigers mit Kaskadenschaltung. Nobelpreis 1951
1932	E. O. LAWRENCE, S. LIVINGSTON	Inbetriebnahme des ersten Zyklotrons. Nobelpreis 1939 an E. O. LAWRENCE
1932	G. HERTZ	Isotopentrennung mit Diaphragmen-Trennstufen in Kaskadenschaltung. Nobelpreis 1925 für Elektronenstoßversuche von 1913
1933	J. SCHINTLMEISTER	Erfindung der dE/dx-Methode und der Gitter-Ionisationskammer
1933	J. MATTAUCH	Inbetriebnahme eines Massenspektrographen mit Richtungs- und Geschwindigkeitsfokussierung
1937	L. G. ALCHAZOV, L. V. KURČATOV, L. V. MYSOVSKIJ, V. N. RUKAVIŠNIKOV	Inbetriebnahme des ersten europäischen Zyklotrons in Leningrad
1938	K. CLUSIUS, G. DICKEL	Anwendung der Thermodiffusion zur Isotopentrennung
1938	I. RABI	Bestimmungsmethode für magnet. Kerndipolmomente mit der Kernresonanz. Nobelpreis 1944
1940	L. V. MYSOVSKIJ, N. A. PERFILOV, G. B. ŽDANOV	Entwicklung der Methode der Kernemulsionen
1942	E. FERMI u. a.	Inbetriebnahme des ersten Kernreaktors in Chikago
1943	E. O. LAWRENCE	Elektromagnetische Massentrennung der Uranisotope im industriellen Maßstab mit dem Calutron
1944/1945	1. V. J. VEKSLER 2. E. M. MCMILLAN	Erfindung des Synchrotronprinzips und Entdekkung der Phasenfokussierung oder Autophasierung
1945	USA-Militärs	Verbrecherischer Abwurf je einer Kernspaltungsbombe über Hiroshima und Nagasaki
1946	1. F. BLOCH 2. E. M. PURCELL	Anwendung der Kernresonanzmethode auf flüssige und feste Proben. Nobelpreis 1952
1946	J. V. KURČATOV u. a.	Inbetriebnahme des ersten sowjetischen Kernreaktors
1947	H. KALLMANN u. a.	Entwicklung des Szintillationsdetektors mit Photoelektronenvervielfacher
1948	J. W. KEUFEL	Entwicklung der Funkenkammer
1950	D. H. WILKINSON	Inbetriebnahme eines Impulshöhenanalysators mit dem Prinzip der Analog-Digitalwandlung
1950	J. E. TAMM u. a.	Vorschlag des Prinzips der Magneto-Thermo-Isolation für die steuerbare Kernfusion
1952	1. N. CHRISTOFILOS 2. E. D. COURANT, M. S. LIVINGSTON, H. S. SNYDER	Vorschlag des AG-Prinzips für Ringbeschleuniger

Tabelle 1.2 (Fortsetzung)

Jahr	Entdecker	Effekt, Gerät, Anlage, Ereignis
1952	D. GLASER	Inbetriebnahme der ersten Blasenkammer. Nobelpreis 1960
1954	L. A. ARCIMOVIČ, L. N. GOLOVIN, N. A. JAVLINSKIJ	Beginn der Entwicklung der Tokamak-Fusionsanlagen
1954	N. G. BASOV, O. N. KROCHIN	Vorschlag der Kernfusion mit Laserstrahlen
1954	E. K. SAVOJSKIJ, L. J. RUDAKOV	Vorschlag der Kernfusion mit Elektronenstrahlen
1956	V. J. VEKSLER	Vorschlag der Methode der kollektiven Teilchenbeschleunigung
1958	V. P. DMITRIEVSKIJ, V. P. DŽELEPOV	Inbetriebnahme des ersten Isochronzyklotrons
1960	J. M. FRANK, D. J. BLOCHINCEV u. a.	Inbetriebnahme des ersten Impulsreaktors mit schnellen Neutronen in Dubna
1960	1. Novosibirsk 2. Stanford	Inbetriebnahme der ersten Elektron-Positron-Kollider
1960	E. M. PELL	Herstellung funktionstüchtiger p-i-n-Halbleiterdetektoren für die β- und γ-Spektrometrie
1963	G. V. ČIKOVANI, B. A. DOLGOŠEIN	Inbetriebnahme der ersten Streamerkammer
1964	G. T. EWAN, A. J. TAVENDALE	Einsatz von Halbleiterdetektoren in der experimentellen Kernphysik
1966	G. I. BUDKER	Vorschlag des Prinzips der Elektronenkühlung von Teilchenstrahlen (Realisierung 1975 in Novosibirsk)
1968	S. VAN DER MEER	Vorschlag des Prinzips der stochastischen Kühlung von Teilchenstrahlen (Realisierung 1976/77 im CERN). Nobelpreis 1984
1968	G. CHARPAK,	Entwicklung der Proportional-Koordinatenkammer
1971	CERN	Inbetriebnahme des ersten Proton-Proton-Kolliders ISR
1973	UdSSR	Inbetriebnahme eines 1000-MW-Reaktors mit schnellen Neutronen zur Versorgung der Stadt Ševčenko mit Elektroenergie und entsalztem Wasser
1981	CERN	Inbetriebnahme des SPS-Proton-Antiproton-Kolliders

In den zwei Jahrzehnten nach der Entdeckung der Radioaktivität war die kernphysikalische Forschung auf die Untersuchung der Strahlungsarten, der Suche nach den Ursachen und der Natur der Radioaktivität, der Erarbeitung eines brauchbaren Atommodells sowie der Ermittlung einiger grundlegender Eigenschaften der Atomkerne, wie der Masse und der Ladung gerichtet. Die Entwicklung der speziellen Relativitätstheorie zu Beginn des Jahrhunderts und die im zweiten und dritten Jahrzehnt folgende Entwicklung der Quantentheorie und Quantenmechanik wurden zu einer wichtigen Voraussetzung für das Verständnis der ersten Forschungsergebnisse.

Das dritte Jahrzehnt kernphysikalischer Forschung wurde durch die erstmalige künstliche Auslösung einer Kernreaktion eingeleitet. Es brachte die Erkenntnis, daß außer der elektromagnetischen eine weitere Kraft bei Kernumwandlungen beteiligt sein muß, die Kernkraft. Weiter führte es zu ersten Vorstellungen über den Mechanismus des α- und β-Zerfalls.

Das Jahr 1932 leitete das vierte Jahrzehnt mit der Entdeckung eines neuen Kernbausteins und Elementarteilchens, des Neutrons, ein. Danach gelang es, brauchbare Modelle über den

Aufbau des Atomkerns zu entwickeln, die Kernmodelle. Durch die Einführung zweier weiterer neuer Elementarteilchen, des Mesons und des Neutrinos gelang es, einen Ansatz zur Beschreibung der Kernkraft zu formulieren und eine erste Erklärung für den Mechanismus des β-Zerfalls zu geben. In dieses Jahrzehnt fällt auch die Entdeckung der künstlich erzeugbaren Radioaktivität, des ersten Antiteilchens sowie der beginnende Einsatz von Teilchenbeschleunigern.

Einen neuen Aufschwung erfuhr die Kernphysik durch die Entdeckung der Kernspaltung. Es wurde eine Entwicklung ausgelöst, die von der Inbetriebnahme des ersten Kernreaktors über die auf das schärfste zu verurteilende Zündung zweier Kernspaltungsbomben über Japan bis zur Inbetriebnahme des ersten Kernkraftwerks führte. Die Realisierung der Kettenreaktion setzte intensive Forschungen über die Wechselwirkungen von Neutronen mit Atomkernen voraus. Neben der Kernspaltung erlangte die Kernfusion Bedeutung für die Beherrschung intensiv Energie freisetzender Prozesse. Dies drückte sich in der Zündung von Kernfusionswaffen aus sowie in den ersten Erfolgen auf dem Gebiet der gesteuerten Kernfusion.

Neue Erfindungen zur Beschleunigung geladener Teilchen machten den Bau von Hochenergiebeschleunigern möglich und damit die Untersuchung der Eigenschaften vieler Elementarteilchen, die bereits in der kosmischen Strahlung nachgewiesen worden waren sowie die Entdeckung neuer Elementarteilchen und deren Antiteilchen. Zu den ersten Erfolgen der Elementarteilchenphysik gehört die Ausarbeitung der Quantenelektrodynamik (QED) und die Klassifikation der Elementarteilchen und der fundamentalen Wechselwirkungen. Von großer Bedeutung ist auch der Beginn der Untersuchung der elektromagnetischen Struktur der Atomkerne und Nukleonen mit Elektronen.

Auf dem Gebiet der Kernphysik sind die fünfziger Jahre durch die Entwicklung neuer Kernmodelle gekennzeichnet, die eine ganze Reihe von Eigenschaften der Atomkerne und deren Umwandlungen zu erklären gestattete und damit eine intensive experimentelle Forschung auf den Gebieten der Zerfalls- und Reaktionsspektroskopie auslösten. Das Ziel bestand darin, die Eigenschaften der Kerne in den stationären Zuständen und bei Übergängen zwischen diesen nicht nur phänomenologisch, sondern in steigendem Maße wenigstens halbmikroskopisch zu erklären. In den sechziger Jahren wurden diese Untersuchungen auf Nuklide ausgedehnt, die weit ab vom Beta-Stabilitätsband erzeugt werden können und auf Anregungszustände mit immer höherer Energie. Als Geschoßteilchen wurden neben den Nukleonen immer schwerere Ionen bis hin zum Uran eingesetzt sowie massenbehaftete Leptonen und Mesonen. Die Schwerionenphysik wurde zu einem etablierten Gebiet der Kernphysik. Der in den fünfziger Jahren erreichte Fortschritt ermöglichte die experimentelle Bestätigung der fundamentalen Erkenntnis, daß die räumliche Parität in Umwandlungen, die über die schwache Wechselwirkung ablaufen, keine Erhaltungsgröße ist. Diese Entdeckung war ein wichtiger Schritt bei der weiteren Erforschung der Elementarteilchenwelt.

Die Anwendung der kernphysikalischen Erkenntnisse und Methoden in den Natur- und Technikwissenschaften sowie in der Technik ist in diesen Jahren in vielen Ländern zum Alltag geworden. Auf dem Gebiet der Kernenergetik entstanden auf der Basis thermischer Kernreaktoren konkurrenzfähige Kernkraftwerke. Auch der schnelle Reaktor wird systematisch für die industrielle Praxis erprobt. Die steuerbare Kernfusion wird mit neuen Mitteln, wie mit Laser- und Elektronen- sowie mit Schwerionenstrahlen auszulösen versucht. Die Vorbereitung des Einsatzes der schnellen Reaktoren und die Entwicklung der Fusionsreaktoren sind der Grund für viele kernphysikalische Forschungen.

Der gegenwärtige Stand der Kerntheorie ist durch die Verwendung der nichtrelativistischen Schrödinger-Gleichung für das quantenmechanische Vielkörperproblem der Nukleonen als Grundgleichung zur Erklärung der Kernstruktur sowie des Ablaufs von Kernumwandlungen gekennzeichnet. Ausgangspunkt ist die elementare Nukleon-Nukleon-Wechselwirkung, deren

lang- und mittelreichweitige Anteile durch den Einpionen- bzw. Mehrpionenaustausch verstanden werden kann. Bei sehr kleinen Nukleonenabständen können Fortschritte nur im Rahmen der Quantenchromodynamik erwartet werden, die die Quarkstruktur der Nukleonen berücksichtigt. Ein wesentlicher Schritt im Verständnis der Nukleonenbewegung im komplexen Kern war die Einführung des Schalenmodells mit Spin-Bahn-Kopplung der Kernkraft und mit mittlerem Potential sowie phänomenologischer Restwechselwirkung zwischen den Nukleonen. Es gestattet die Berechnung von Teilchen- und Kollektivanregungen des Kerns sowie seiner dynamischen und permanenten Deformationen.

Die Theorie der Kernumwandlungen entwickelte sich in engem Zusammenhang mit der Verbesserung der Kernstrukturmodelle. Nach den ersten einfachen Mechanismen des α-, β- und γ-Zerfalls entstand das Compoundkernmodell, in dessen Rahmen die Bildung langlebiger quasistationärer Zustände des Gesamtsystems als Zwischenzustände der Kernreaktionen angenommen wird. Die Erfassung dieses physikalischen Bildes gelang mit der R-Matrix-Theorie. Die Fortsetzung des Schalenmodells ins Kontinuum führte auf das Optische Modell mit Imaginäranteil des mittleren Potentials. Eine explizite Berücksichtigung der Restwechselwirkung gestattete es, auch die schnell ablaufenden direkten Reaktionen zu erfassen. Eine Beschreibung nicht nur als Grenzfall der direkten oder Compoundkernreaktionen gestattet die formale Theorie der Kernreaktionen. Im Zusammenhang mit der Kernphysik schwerer Ionen, besonders hoher Energien, werden noch klassisch-makroskopische Modelle und Methoden der statistischen Physik herangezogen.

Die Elementarteilchenphysik ist seit Beginn der sechziger Jahre durch die Entdeckung einiger hundert Hadronenresonanzen, d. h. kurzlebiger, über die starke Wechselwirkung zerfallender Teilchen, in das Stadium der spektroskopischen Untersuchung übergegangen. Zur Atom- und Kernspektroskopie ist die Elementarteilchenspektroskopie hinzugekommen. Die Klassifizierung der Elementarteilchen gelang mit Hilfe der SU(3)-Symmetrie und des Quarkmodells. Weitere wichtige experimentelle Entwicklungen der sechziger Jahre sind die Verletzung der CP-Invarianz in Zerfällen neutraler K-Mesonen und das Auffinden der Quark-Parton-Struktur der Nukleonen in tiefunelastischen Elektron-Proton-Streuexperimenten. In den siebziger Jahren wurden das vierte und fünfte Quarkteilchen mit den Quantenzahlen Charm C und Bottom b eingeführt und die neutrale Form der schwachen Wechselwirkung, die sogenannten neutralen Ströme entdeckt. Schließlich folgten in den achtziger Jahren die experimentelle Entdeckung der Eichbosonen der schwachen Wechselwirkung sowie erste experimentelle Hinweise auf die Existenz des sechsten Quarkteilchens mit der Quantenzahl Top t.

Die wichtigsten theoretischen Ergebnisse der letzten Jahrzehnte auf dem Gebiet der Elementarteilchen sind die Entwicklung der nichtabelschen Eichfeldtheorien, auf deren Grundlage es gelang, die einheitliche Eichfeldtheorie der elektromagnetischen und schwachen Wechselwirkung sowie die Eichfeldtheorie der starken Wechselwirkung, die Quantenchromodynamik (QCD) zu formulieren, die seither allen experimentellen Prüfungen standhalten. Durch diese Entwicklungen besitzen wir jetzt eine Theorie der Elementarteilchen und ihrer Wechselwirkungen. Die Elementarteilchenphysik bleibt damit jedoch nicht stehen. Man sucht nach den Grenzen der Eichfeldtheorien, man entwickelt einheitliche Theorien aller Wechselwirkungen der Elementarteilchen und man experimentiert, um die Voraussagen dieser einheitlichen Theorien zu überprüfen.

1.3. Bedeutung der Kern- und Elementarteilchenphysik

Kern- und Elementarteilchenphysik haben große Bedeutung für die Entwicklung des wissenschaftlich-technischen Fortschritts. Wir wollen nur vier Aspekte nennen, die Bedeutung für die Physik selbst, den Zusammenhang mit den Natur- und Technikwissenschaften und damit mit

wissenschaftlichen und technischen Anwendungen, den Zusammenhang mit der Philosophie und schließlich für einen neuen Stil der wissenschaftlichen Arbeit haben.

Von Bedeutung für die Physik insgesamt ist das Erkennen und die Lösung einiger fundamentaler Probleme. Schließlich ist die Physik hier in die bisher kleinsten Raum- und Zeitgebiete vorgedrungen. Aus einer großen Zahl möglicher Belege dafür sollen nur einige wenige angeführt werden.

Der Atomkern ist ein grundlegender, bestimmender Baustein der Natur. Seine Ladung gibt die Zahl der Elektronen in der Hülle vor, seine Masse ist fast identisch mit der Masse des gesamten Atoms. Somit bestimmen Ladung und Masse des Atomkerns den Aufbau der Atomhülle und damit nicht nur die physikalischen, sondern auch die chemischen Eigenschaften der Atome. Mit Hilfe der Quantenmechanik kann das periodische System der Elemente erklärt werden. Eine Aufgabe einer allgemeinen Kerntheorie ist es, solche Vorgaben wie Ladung und Masse zu begründen. Dabei geht man gegenwärtig von den bekannten Wechselwirkungsarten und den als Kernbausteine erkannten Elementarteilchen aus. Eine geschlossene allgemeine Theorie, die alle Eigenschaften der Atomkerne beschreibt, gibt es aber gegenwärtig noch nicht. Man ist auf dem Wege dorthin zunächst von phänomenologischen Modellen ausgegangen, befindet sich jetzt bei halbmikroskopischen Modellen und ist bestrebt, zu vollständig mikroskopischen Modellen vorzustoßen. Aus anderen Teilgebieten der Physik ist bekannt, welch großen Nutzen nicht nur die allgemeinen Theorien gebracht haben, sondern auch die Zwischenstufen dorthin. Es sei an solche allgemeinen Theorien erinnert, wie den Lagrange-Hamiltonschen Formalismus, die Maxwellschen Gleichungen, die Relativitätstheorie, die Quantenmechanik und andere. Im Zusammenhang mit dem Atomkern muß an das Vielkörperproblem erinnert werden, das heute in der gesamten modernen Physik zu einem zentralen Problem geworden ist. Es tritt in der Physik der kondensierten Materie und des Plasmas auf, bei Untersuchungen chemischer Verbindungen und biomolekularer Objekte und neuerdings auch in der Elementarteilchenphysik. Einer der interessantesten Fälle ist der Atomkern. Bei ihm ist die Zahl der ihn aufbauenden Teilchen nicht so groß, daß man zu Näherungen für unendlich viele Teilchen übergehen kann; sie liegt zwischen 1 und weniger als 300. Zwischen diesen Teilchen besteht nicht nur, wie in anderen Bereichen, die elektromagnetische, sondern zusätzlich noch die weit kompliziertere starke und schwache Wechselwirkung. Im Gegensatz zur Atomhülle erfolgt hier die Wechselwirkung zwischen den Nukleonen nicht in einem Zentralfeld, und die Wechselwirkung zwischen ihnen kann auch nicht, wie bei den Hüllenelektronen, vernachlässigt werden: sie ist im Gegenteil der bestimmende Anteil. Die bei der Entwicklung des Schalenmodells gemachte Annahme eines zentralen mittleren Feldes ist nur eine sehr grobe Näherung. Man kann hier also den allgemeinsten Fall der Mikrostruktur des Vielkörperproblems studieren. Diese Aufgabe geht in ihrer Bedeutung weit über die Untersuchung von Elementarakten des Zweikörperproblems hinaus, da sie auch über die Vielkörperkräfte Informationen liefert. Darin muß also eine Bedeutung der vielen Untersuchungen über Zerfalls- und Reaktionsmechanismen für die gesamte Physik gesehen werden.

Die Erkenntnisse vom mikroskopischen Aufbau der Materie, die von der Kern- und Elementarteilchenphysik gewonnen werden, sind von Bedeutung für die Physik insgesamt. Das gilt auch für die theoretischen Modelle und Rechenmethoden, die für die Zwecke der Kern- und Elementarteilchenphysik entwickelt wurden. Hier kann an erster Stelle die Quantenfeldtheorie und ihre störungstheoretische Auswertung über die Feynman-Diagramme genannt werden. Diese Methode hat sich auch in der statistischen und in der Festkörperphysik als außerordentlich fruchtbar erwiesen. Weiterhin sind die bedeutende Weiterentwicklung des Symmetriebegriffs und die Einsichten über die Rolle der Symmetrie in der Natur zu nennen, die im Verlaufe der letzten Jahrzehnte gefunden wurden. Einerseits hat sich herausgestellt, daß Symmetrien in der Natur verletzt werden, die zunächst als selbstverständlich angesehen wurden, wie die

Symmetrie des Raumes hinsichtlich der Links-, bzw. Rechtshändigkeit, d. h. die Verletzung der räumlichen Parität P. Andererseits bedeutet diese Verletzung Invarianz gegenüber der kombinierten CP-Symmetrie, wobei C für Ladungs- oder Teilchen-Antiteilchen-Symmetrie steht. CP-Verletzung ist über das CPT-Theorem, einer zweiten neuen Symmetrie, gleichzeitig äquivalent zu einer Verletzung der Zeitumkehrsymmetrie T in den Grundgleichungen.

Die Erfolge bei der Klassifizierung der Elementarteilchen haben die große Rolle der unitären Symmetrie in der Physik gezeigt. Mit der Formulierung der Eichfeldtheorien ist eine wichtige Erweiterung des Symmetriebegriffs insgesamt gelungen. Kannte man zuvor nur globale Symmetrieoperationen, bei denen eine bestimmte Symmetrietransformation gleichzeitig im gesamten Raum ausgeführt wird, so beinhaltet die lokale Symmetrie der Eichfeldtheorien Symmetrietransformationen, die sich in jedem Punkt des Raumes unterscheiden. Es ist bemerkenswert, daß diese lokale Symmetrie notwendig die Form der Wechselwirkungen der Elementarteilchen ergibt. Sehr intensiv wird gegenwärtig theoretisch die experimentell noch nicht in der Natur gefundene Supersymmetrie untersucht. Dabei handelt es sich um eine Erweiterung des Symmetriebegriffs hinsichtlich der Umwandlung von Fermionen und Bosonen und umgekehrt.

Die Elementarteilchenphysik nutzt natürlich auch Methoden und Erfahrungen, die ursprünglich auf anderen Gebieten der Physik gewonnen wurden. Ein hervorragendes Beispiel dafür sind die auf einem diskreten Raum-Zeit-Gitter definierten Gittereichtheorien. Es besteht die Hoffnung, daß damit, insbesondere durch die Computersimulation dieser Gittereichtheorien, eine Methode gefunden wurde, die es erlaubt, Folgerungen aus Feldtheorien in Bereichen zu ziehen, wo die störungstheoretische Auswertung versagt.

Im Verlaufe der letzten Jahre haben sich einige Beziehungen zwischen Elementarteilchenphysik, Kosmologie und Astrophysik ergeben. Die wichtigste Entwicklung ist dabei zweifellos das kosmologische Modell der Inflation, das die wesentlichsten Inkonsistenzen des veralteten Modells des Urknalls zu Zeiten kleiner als eine Sekunde nach dem Urknall beseitigt. Das Modell der Inflation deutet erstmals an, daß der beobachtbare Teil des Kosmos nur ein winziger Teil des Ganzen ist, daß in den Frühphasen der Entwicklung des Kosmos physikalische Prozesse abgelaufen sind, die wir mit fortschreitenden Erkenntnissen über die Wechselwirkung der Elementarteilchen immer besser erkennen können. Zu weiteren Ergebnissen und Hypothesen der Elementarteilchenphysik, die für das Verständnis des Kosmos wichtig sind, zählen alle Teilchen und Teilcheneigenschaften, die in der Lage sind, das Problem der dominierenden unsichtbaren Materie im Kosmos zu lösen. Genannt seien Neutrinos mit nichtverschwindender Masse, magnetische Monopole, supersymmetrische Teilchen oder Quarkmaterie im Kosmos. Auch der von den einheitlichen Theorien vorausgesagte Protonenzerfall spielt eine wichtige Rolle im Kosmos, wenn nicht für das Verständnis der Vergangenheit, so doch zumindest beim Erkennen der zukünftigen Entwicklung des Kosmos.

Neben den rein physikalisch-fundamentalen Erkenntnissen haben Kern- und Elementarteilchenphysik das Arsenal der experimentellen Methoden der Physik wesentlich bereichert und so die Voraussetzung für viele neuartige und leistungsfähige Anwendungen in Physik, Natur- und Technikwissenschaften sowie in der Technik selbst geschaffen. Dabei ist diese Entwicklung längst nicht abgeschlossen, da diese Gebiete noch stark im Flusse sind. Gerade auf den experimentellen Methoden und Technologien beruht ein wichtiger Zusammenhang zwischen der Physik und den anderen Natur- und Technikwissenschaften und der Technik. Es gibt aber noch einen zweiten und ebenso wichtigen Zusammenhang zwischen ihnen. Alle Gesetze in Natur und Technik gründen sich trotz aller qualitativer Unterschiede schließlich und letztlich auf physikalische Gesetze. Es gibt keine Natur- und Technikwissenschaft, für die die Gesetze der Physik unwesentlich sind. Geradezu ein Maß für den Vertiefungsgrad einer Natur- und Technikwissenschaft ist der Grad, in dem es gelungen ist, strukturspezifische Effekte auf der Grundlage physikalischer

Gesetze, insbesondere aus dem Bereich der Mikrophysik, zu erklären. Diese Verknüpfung der physikalischen mit anderen naturwissenschaftlichen und technischen Gesetzen ist es, die den Gesetzen der Kern- und Elementarteilchenphysik neben ihrer Bedeutung im eigenen Fachgebiet allgemeine und besonders große Ausstrahlungskraft gibt.

Diese Ausstrahlungskraft zu sichern, gehört zu den Aufgaben der auf diesen Gebieten arbeitenden Physiker, indem sie immer wieder Zwischenergebnisse der Grundlagenforschung in andere Glieder der Überführungskette und in die materielle Produktion einzuspeisen versuchen oder Möglichkeiten dafür aufzeigen. Das ist nicht immer leicht, da einerseits die Anwendungsmöglichkeiten gefundener Erkenntnisse meist um so weniger offensichtlicher sind, je weiter vorn sie in der Erkennungskette liegen, und da andererseits die Überlegenheit neuer Erkenntnisse, Methoden und Technologien im Vergleich zu herkömmlichen nachgewiesen werden muß. Diese Überlegenheit hängt von vielen Faktoren ab, u. a. auch von ökonomischen. Viele Anwendungen kernphysikalischer Erkenntnisse, Methoden und Technologien haben sich als sehr vorteilhaft und anderen überlegen erwiesen. Sie reichen von feinsten Meßverfahren über nuklearmedizinische Diagnostik und Therapie bis hin zur Energieumwandlung im volkswirtschaftlichen Maßstabe. Im Jahre 1990 sollen die Kernkraftwerke 20 bis 30% des Welt-Elektroenergiebedarfs produzieren.

Die ungeheuren, in der subatomaren Welt gebundenen Energien können zum Wohle und zum Verderben der Menschheit eingesetzt werden. Die Entwicklungsgeschichte der Kernwaffen und ihr alles übertreffende Vernichtungspotential erinnern an die ständige Bedrohung der Existenz der Menschheit. Zur Abwendung dieser globalen Gefahr sollten sich alle Wissenschaftler und Ingenieure dem Beispiel des Göttinger Appells folgend für das Verbot aller Kernwaffen einsetzen.

Der Bezug der Kern- und Elementarteilchenphysik zur Philosophie wird auf mindestens vier Ebenen deutlich. Die besonderen Bedingungen, unter denen in diesem Bereich der Physik Erkenntnisse gewonnen werden (z. B. kleinste Raum-Zeit-Bereiche, Quanteneffekte), bringen bei ihrer philosophischen Reflexion neue Aspekte für erkenntnistheoretische Fragestellungen. Der Vorstoß in Strukturbereiche der Materie, die bisher nicht untersucht wurden, hat auch neue Erkenntnisse zu solchen ontischen Fragestellungen wie Unendlichkeit und Unerschöpflichkeit der Materie, Zusammenhang zwischen Raum, Zeit und Materie und nach den verschiedenen Bewegungsformen und ihren Wechselbeziehungen gebracht. Der Versuch der einheitlichen Beschreibung aller Phänomene der Elementarteilchen und die enge Verknüpfung zwischen Elementarteilchenphysik und Kosmologie hat neuen Stoff zu solchen wissenschaftstheoretischen Fragestellungen wie nach der Rolle vereinheitlichender Grundprinzipien bei der Theorienentwicklung und letztlich nach der Einheit der Physik geliefert. Nicht zuletzt muß der ethische Aspekt genannt werden, der vor allem durch die Anwendungen der Kernphysik für die Physiker schlaglichtartig die gesellschaftlichen Relevanz ihres Tuns offenbarte.

Als letztem Aspekt der Bedeutung der Kern- und Elementarteilchenphysik sei auf den neuen Arbeitsstil hingewiesen, der in diesem Wissenschaftszweig notwendig wurde. Die Wissenschaft ist hier erstmalig in ein Stadium eingetreten, das durch Großanlagen wie Beschleuniger-, Reaktor-, Nachweis- und Rechentechnik großen Maßstabes gekennzeichnet ist. Man spricht von industriellen Maßstäben der Forschung. Kollektives Zusammenarbeiten der Wissenschaft sowie internationale Zusammenarbeit sind zur Voraussetzung für die erfolgreiche Lösung vieler Aufgaben geworden. In solchen Instituten wie dem westeuropäischen Institut für Hochenergiephysik CERN bei Genf, dem Vereinigten Institut für Kernforschung in Dubna bei Moskau sowie dem Institut für Theoretische Physik in Triest zeigen sich die Vorteile dieser internationalen Zusammenarbeit auf dem Gebiet der Grundlagenforschung in den erzielten Ergebnissen.

Literaturhinweise zu Kapitel 1
Buc 73, Chr 83, Dor 79, Got 68, Got 74, Hör 64, Hör 71, Igo 75, Ked 73, Kud 82, Loh 81, Mar 71, May 79, Mos 75, Muc 74, Nau 84, Oku 84, Ome 62, Osm 70, Pet 73, Pet 76, Ran 76, Šir 72, Sol 71, Tri 74, Tur 77

2. Grundbegriffe

2.1. Nuklide (Übersicht)

1. Atomkerne bestehen aus Z Protonen und N Neutronen, d. h. aus $A = Z + N$ Nukleonen. Man nennt Z die Kernladungszahl, N die Neutronenzahl und A die Massenzahl. Zur eindeutigen Charakterisierung der Atomkerne wird am Elementesymbol X oben links A, unten links Z und unten rechts N angegeben. Der Platz oben rechts wird für die Angabe des Ionisationsgrades z der entsprechenden Atomsorte genutzt: ${}^{A}_{Z}X^{(z)}_{N}$. Atome mit bestimmtem Wert von A, Z und N nennt man Nuklide. Sie können in Isobare, Isotope und Isotone eingeteilt werden. Isobare sind Nuklide mit gleichem A, aber unterschiedlichem Z und N. Isotope zeichnen sich durch gleiches Z, aber unterschiedliches A und N aus. Isotone sind Nuklide mit gleichem N und verschiedenen Z- und A-Werten. Weiter unterteilt man die Nuklide in gg-, ug-, gu- und uu-Kerne. Dabei stehen g und u als Abkürzung für gerad-, bzw. ungeradzahlige Protonen-, bzw. Neutronenzahl. Für ug- und gu-Kerne schreibt man auch uA-Kerne.

2. Da unterschiedliche Nuklide durch ihren Z- und N-Wert charakterisiert werden können, läßt sich ihre Gesamtheit in einem Z-über-N-Diagramm einzeichnen. Die Abb. 2.1 zeigt ein derartiges Diagramm. Die äußere Kurve umschließt das Gebiet, in dem alle denkbaren Nuklide enthalten sein müßten. Die Kurve ist durch verschwindende Bindungsenergie des Protons, $E_B^{(p)} = 0$, und des Neutrons, $E_B^{(n)} = 0$, sowie verschwindende Energie der Spaltbarriere, $E_f = 0$, gekennzeichnet. Wir kommen auf diese Begriffe in 6.3.2. bzw. 10.8.2. zurück. Alle

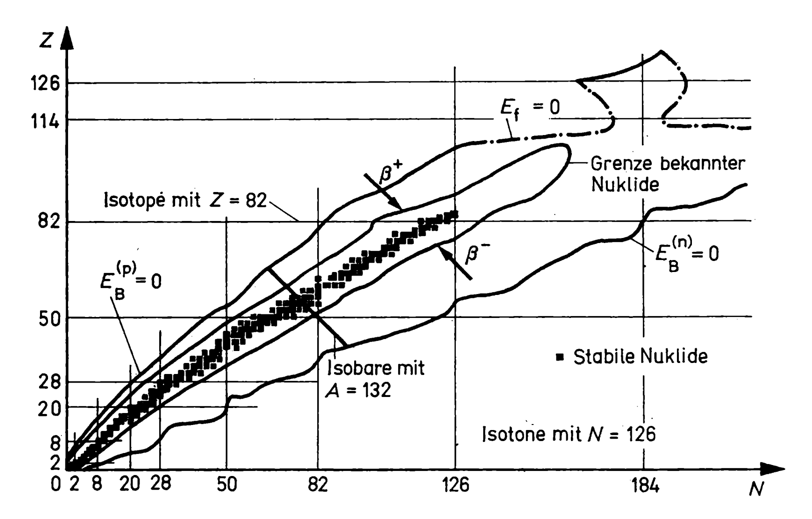


Abb. 2.1
Z- über N-Diagramm der Nuklide

stabilen Nuklide sind durch schwarze Quadrate gekennzeichnet. Das von ihnen gebildete β-Stabilitätsband endet bei $Z = 83$. Oberhalb von $Z = 83$ gibt es nur instabile, d. h. sich durch radioaktiven Zerfall in andere Nuklide umwandelnde, Atomkerne. Mit merklicher Häufigkeit kommen Nuklide nur bis $Z = 92$ vor. Die oberhalb von $Z = 92$ gelegenen (sie entstehen in Kernreaktionen) nennt man Transurane. Die mittlere Kurve umrandet das Gebiet aller bis zur Gegenwart untersuchten Nuklide. Es sind etwa 1800. Wenn der Verlauf der äußeren Kurve, der auf der Grundlage von Kernmodellen berechnet wurde, annähernd richtig ist, dann können insgesamt etwa 5000 Nuklide erzeugt werden.

3. Wenn die Bindungsenergien eines Nukleons in einem Nuklid oder die Spaltbarriere gleich Null sind, dann würde ein durch Anlagerung eines weiteren Nukleons entstehendes neues Nuklid sofort zerfallen; es wäre nicht existenzfähig. Man spricht dann von Nukleoneninstabilität der Nuklide. Die Zeit, innerhalb der dieser Zerfall erfolgen würde, kann man auf einfache Weise abschätzen. Man geht vom kleinsten Kernradius aus (siehe Abschnitt 6.2.2.), der für $A = 1$ wegen $R = r_0 \sqrt[3]{A}$ etwa $1{,}3 \cdot 10^{-15}$ m ist, und von der etwaigen Nukleonengeschwindigkeit im Kern, von der bekannt ist, daß sie etwa 1/30 der Lichtgeschwindigkeit c ausmacht. Es ergibt sich dann für die sogenannte Kernzeit

$$t_K \approx 4{,}3 \cdot 10^{-22}\,\mathrm{s}\,. \tag{2.1}$$

Diese Kernzeit ist gleichzeitig ein Zeitmaßstab für alle im Kern ablaufenden Prozesse.

4. Oberhalb und unterhalb des Stabilitätsbandes befinden sich die instabilen neutronendefiziten bzw. neutronenangereicherten Nuklide. Defizit und Überschuß werden in bezug auf das N/Z-Verhältnis auf dem Stabilitätsband verstanden. Der radioaktive Zerfall erfolgt in Richtung Stabilitätsband. Dabei ist im Mittel die mittlere Lebensdauer[1]) der Nuklide um so kleiner, je größer die Entfernung vom Stabilitätsband ist. Berechnungen auf der Grundlage von Kernmodellen haben zu dem Schluß geführt, daß auch oberhalb von $Z = 100$ Nuklide mit Lebensdauern größer als die Kernzeit vorhanden sein oder synthetisiert werden könnten. Es ist gelungen, einige Nuklide dieser schweren Transurane bis hin zu $Z = 108$ zu erzeugen. Man vermutet bei den Nukleonenzahlen $(Z, N) = (114, 186)$ und $(126, 186)$ Nuklidinseln mit großer Lebensdauer.

5. Außer durch die Massen-, Kernladungs- und Neutronenzahl werden Nuklide durch ihre Radien, Masse oder Ruhenergie, Lebensdauer oder Halbwertszeit, Eigendrehimpuls oder Spin, magnetisches Dipol- und elektrisches Quadrupolmoment sowie durch Isospin und Parität gekennzeichnet. In den verschiedenen energetischen Zuständen der Nuklide können die Atomkerne unterschiedliche Werte dieser Charakteristika annehmen. Die Atomkerne haben sphärisch symmetrische oder, wenn sie deformiert sind, rotationselliptische Form. In einigen Fällen treten Ellipsoide mit drei verschiedenen großen Hauptachsen auf.

2.2. Elementarteilchen (Übersicht)

1. Man kennt heute sehr viele Elementarteilchen. Eine erste Übersicht vermittelt die Abb. 2.2. In einer Tabelle in Anhang D4. sind die Eigenschaften einer Auswahl der wichtigsten Elementarteilchen angegeben.

Elementarteilchen sind entweder stabil oder instabil. Instabile Teilchen werden durch ihre

---

[1]) Der Einfachheit halber wird das Wort mittlere im täglichen Sprachgebrauch weggelassen.

mittlere Lebensdauer τ (2.45, 47) und ihre Zerfallskanäle, d. h. die Teilchen, in die sie zerfallen, charakterisiert. Anstelle der mittleren Lebensdauer τ gibt man bei extremkurzlebigen Teilchen häufig die Zerfallsbreite Γ an. Beide sind durch die Heisenberg'sche Unschärferelation miteinander verknüpft. Aus

$$\Delta E \cdot \Delta t \geqq \hbar \tag{2.2}$$

ergibt sich

$$\Gamma \cdot \tau \geqq \hbar ; \qquad \tau \geqq \frac{\hbar}{\Gamma} . \tag{2.3}$$

Man mißt τ in Sekunden, Γ in Energieeinheiten, meist in MeV. Es ist als Breite auf halber Höhe der Resonanzkurve definiert, d. h. als Halbwertsbreite.

Weitere wichtige Eigenschaften der Elementarteilchen sind ihre Masse m, die meist unter Zuhilfenahme der Einsteinschen Beziehung

$$E_0 = mc^2 \tag{2.4}$$

in Energieeinheiten, geteilt durch das Quadrat der Lichtgeschwindigkeit c^2 (z. B. in MeV/c^2) angegeben wird oder als Ruhenergie in Energieeinheiten wie MeV oder GeV., die elektrische Ladung Q und das magnetische Diplomoment μ, die inneren Quantenzahlen Leptonenzahl L und

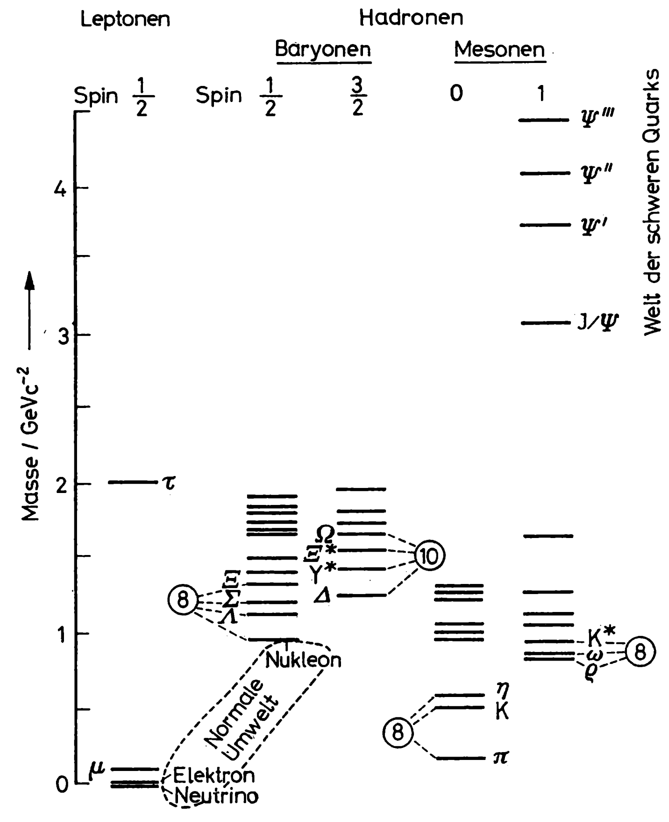


Abb. 2.2
Massenspektren der Leptonen und Hadronen (siehe auch Abb. 14.1)

Baryonenzahl B, der Spin oder Eigendrehimpuls I, die räumliche Parität P und die Ladungskonjugation C, die G-Parität G, der Isospin T und seine dritte Komponente T_3, die Quantenzahlen der Seltsamkeit S, Charm C, Bottom b und Top t.

Teilchen mit ganzzahligem Spin $(0, \hbar, 2\hbar, ...)$ werden Bosonen genannt, Teilchen mit halbzahligem Spin $(\frac{1}{2}\hbar, \frac{3}{2}\hbar, ...)$ Fermionen. Unabhängig von der Art ihrer Wechselwirkung genügen Bosonen der Bose-Einstein-, Fermionen der Fermi-Dirac-Statistik. Die Statistik bestimmt die Symmetrie der Wellenfunktion. Die Wellenfunktion eines Paares indentischer Bosonen ist bei der Vertauschung der beiden Teilchen symmetrisch:

$$\Psi(1, 2) = \Psi(2, 1), \tag{2.5a}$$

die eines Paares von Fermionen antisymmetrisch:

$$\Psi(1, 2) = -\Psi(2, 1). \tag{2.5b}$$

Zu jedem Teilchen gibt es ein Antiteilchen. Beispiele sind das Elektron (e^-) und das Positron (e^+), das Proton (p) und das Antiproton ($\bar{p}$). Teilchen und Antiteilchen unterscheiden sich durch das Vorzeichen solcher additiven Quantenzahlen, wie Ladung Q, Baryonenzahl B, Leptonenzahl L, Seltsamkeit S, Charm C usw. Hinsichtlich der Masse m und des Spins I unterscheiden sich Teilchen und Antiteilchen nicht. Einige neutrale Bosonen, wie das Photon (γ) und das π^0- und η-Meson sind mit ihrem Antiteilchen identisch. Fermionen und Antifermionen lassen sich immer nur paarweise erzeugen oder vernichten, Bosonen hingegen in beliebiger Zahl, vorausgesetzt, die Reaktion ist mit den Erhaltungssätzen für Energie, Impuls und alle additiven und multiplikativen Quantenzahlen konsistent.

Teilchen, die der starken Wechselwirkung nicht unterliegen, nennt man Leptonen, Teilchen, die ihr unterliegen, Hadronen. Zu den Hadronen gehören die Mesonen und die Baryonen. Die Baryonen werden in die Nukleonen und die Hyperonen eingeteilt. Die Bezeichnungen Leptonen, Mesonen, Baryonen und Hyperonen standen ursprünglich für leichte, mittelschwere, schwere und überschwere Teilchen. Obgleich diese Zuordnung heute nicht mehr zutreffend ist, hat man die Worte beibehalten. Bei ihrem Gebrauch muß man sich über ihren historischen Charakter im klaren sein.

2. Während bis 1950 von den Hadronen nur die Nukleonen und die π- und K-Mesonen bekannt waren, wurden in den 50iger und 60iger Jahren hunderte weiterer Hadronen, besonders

Tabelle 2.1
Die Quarks

1. Spin $I = 1/2$; Baryonenzahl $B = 1/3$
2. Antiquarks haben gleiche Masse und gleichen Spin, aber entgegengesetzte Baryonenzahl, Ladung, Isospinkomponente T_3, Seltsamkeit S, Charm C, Bottom b und Top t

Name	Symbol	Ladung/ e	Masse/ $GeVc^{-2}$	T_3	S	C	b	t
Up	u	2/3	0,006	1/2	0	0	0	0
Down	d	−1/3	0,010	−1/2	0	0	0	0
Strange	s	−1/3	0,15	0	−1	0	0	0
Charm	c	2/3	1,5	0	0	1	0	0
Bottom	b	−1/3	4,5	0	0	0	1	0
Top*	t	2/3		0	0	0	0	1

* 1984 wurden experimentelle Hinweise auf die Existenz des t-Quarks gefunden

Hadronenresonanzen entdeckt. Hadronenresonanzen sind angeregte Zustände der Nukleonen und leichter Mesonen. Das erfolgreichste Klassifikationsschema faßt die Hadronen als zusammengesetzte Teilchen auf. Ihre Bausteine sind die Quarks, die sich durch ungewöhnliche Eigenschaften auszeichnen wie etwa gebrochene Ladungen. In Tabelle 2.1 sind die Quarks und ihre Eigenschaften zusammengestellt. Zum Aufbau der meisten bekannten Hadronen werden nur 2 (u und d)-, höchstens 3 (u, d, s)-Quarks benötigt. Die Quarks c (Charm) und b (Bottom) wurden erst 1974, bzw. 1977 eingeführt. Alle beobachteten Multipletts der Baryonen und Mesonen lassen sich auf diese Weise verstehen, die Baryonen als gebundene Zustände dreier Quarks, die Mesonen als Quark-Antiquarkpaare, ähnlich dem Positronium. Die Massen der gebräuchlichsten Quarks u und d sind sehr klein, die der übrigen viel größer. So erklärt sich, daß ihre Effekte erst bei viel höheren Energien und damit später nachgewiesen wurden. Neben dem erfolgreichen Systematisierungsschema der Hadronen mit Hilfe der Quarks gibt es auch experimentelle Hinweise auf die Quarks auch wenn diese selbst experimentell nie beobachtet wurden und vielleicht nie isoliert werden können. Als letztes wurden experimentelle Hinweise auf den t-(Top)-Quark 1984 gefunden. Zu den experimentellen Hinweisen auf die Quarks zählen vor allem die Experimente zur tiefunelastischen Streuung von Elektronen, Myonen und Neutrinos an Protonen, in denen punktförmige Streuzentren innerhalb des Protons, die Partonen, eine Rolle spielen.

Die unbestreitbar großen Erfolge der Quarkhypothese legen es nahe, nicht die Hadronen als elementare Teilchen anzusehen, sondern die Quarks. Damit sind es die Kräfte zwischen den Quarks, die für die Bindung zu Proton, Neutron, Pimeson usw. ausschlaggebend sind, und — ähnlich wie die Coulomb-Kraft die Van Der-Waals-Kräfte zwischen den Molekülen verursacht — können die Bindungskräfte im Kern auf die Kräfte zwischen den Quarks zurückgeführt werden. Die Tatsache, daß die Quarks nicht als freie Teilchen beobachtet werden, könnte eine neue Qualität in der Hierarchie der Materiestrukturen bedeuten, den Teilcheneinschluß und damit ihre Strukturlosigkeit. Wären sie als freie Teilchen beobachtbar, dann könnten sie selbst wieder Struktur aufweisen, die durch eine nächste Hierarchie fundamentalerer Teilchen bewirkt wird.

Die bisher erwähnten Quarks u, d, s, c, b und t genügen zur Beschreibung elektromagnetischer und schwacher Prozesse. Für die Erfassung der starken Wechselwirkung hingegen ist ihre Zahl zu klein. Theoretische Argumente und experimentelle Befunde fordern, daß jeder hier genannte Quark für ein Triplett steht. Eine neue Quantenzahl, genannt die Farbe, unterscheidet die Quarkzustände innerhalb dieses Tripletts voneinander; wir nennen sie rot, blau und gelb. Dann gibt es z. B. den u-Quark als Farbtriplett (u_r, u_b, u_g) und analoges gilt für jeden Quark. Natürlich hat der Begriff Farbe hier keine Beziehung zum Farbempfinden unseres Auges.

Neben den Quarks bilden die Leptonen die zweite Gruppe von Elementarteilchen. Sie sind in Tabelle 2.2 aufgeführt. Ihr bekanntester Vertreter ist das Elektron e^-. Sein elektrisch neutraler Partner ist das Neutrino. Die Masse des Elektrons ist seit langem recht genau bekannt, von der des Neutrinos kann man sagen, daß sie ursprünglich identisch Null angenommen wurde und daß sie sicher nicht größer als 50 eV/c^2 [1]) ist. Man nennt dieses Neutrino das „Elektronenneutrino" ν_e. Beide Teilchen genügen zum Verständnis der häufigsten elektromagnetischen und schwachen Prozesse. Sie haben jedoch Duplikate, von denen die geladenen eine viel größere Masse besitzen als das Elektron. Es sind dies das μ^-- und das τ^--Teilchen. Das mit dem Myon gekoppelte Neutrino, das Myonenneutrino ν_μ, ist seit 1962 bekannt. Der Symmetrie wegen erwartet man auch, daß es ein Tauneutrino ν_τ gibt. Man kann die Leptonen in drei Generationen von Dubletts einteilen:

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ e^- \end{pmatrix}_L ; \quad \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu^- \end{pmatrix}_L ; \quad \begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau^- \end{pmatrix}_L . \tag{2.6}$$

[1]) Auf der Grundlage der Theorie der großen Vereinigung schätzt man m_ν zu 0,01 eV ab.

Tabelle 2.2
Die Leptonen
1. Spin I = 1/2; Baryonenzahl $B = 0$; Leptonenzahl $L = 1$
2. Antileptonen haben gleiche Masse und gleichen Spin, aber entgegengesetzte Leptonenzahl und Ladung

Name	Symbol	Ladung/e	Masse*
Elektron	e	−1	$0{,}511 \cdot 10^{-3}$ GeVc^{-2}
Elektronneutrino	ν_e	0	(20—50) eVc^{-2}
Myon	μ	−1	0,105 GeVc^{-2}
Myonneutrino	ν_μ	0	$0{,}27 \cdot 10^{-3}$ GeVc^{-2}
Tauon	τ	−1	1,784 GeVc^{-2}
Tauneutrino	ν_τ	0	0,035 GeVc^{-2}

* Bei der Massenangabe für die Neutrinos handelt es sich um die derzeit experimentell bestimmten oberen Grenzwerte (siehe Fußnote auf S. 36)

Jede höhere Generation erweist sich bei größeren Energien als Wiederholung der ersten auf neuer Ebene, so daß sie einander ersetzen können. Daher ist es z. B. möglich, Atome zu erzeugen, sogenannte Myonenatome, in deren Hülle ein μ^- den Platz eines e^- einnimmt (siehe 6.1.1.).

Die für die schwache Wechselwirkung charakteristische Verletzung der Erhaltung der räumlichen Parität bewirkt, daß die masselosen Neutrinos nur in einem Zustand existieren, in dem ihr Spin und ihre Bewegungsrichtung eine Linksschraube bilden. Das wurde durch den Index L in (2.6) ausgedrückt. Sollte die Neutrinomasse jedoch nicht identisch Null sein, dann wäre auch eine Rechtsschraube möglich. Die geladenen Leptonen existieren in beiden Zuständen, in den L-Zuständen als Dubletts und in den R-Zuständen als Singuletts e_R^-, μ_R^- und τ_R^-. Diese Teilchen sind nicht mit den Antileptonen zu verwechseln, von denen es zu jedem Lepton eins gibt.

Hinsichtlich der schwachen Wechselwirkung findet man bei den Quarks ähnliche Regelmäßigkeit wie bei den Leptonen. Deshalb wurden auch die Quarks in Generationen von Dubletts angeordnet:

$$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix}. \tag{2.7}$$

2.3. Wechselwirkungsarten

1. Zum unmittelbaren Gegenstand der Kern- und Elementarteilchenphysik gehören die in diesem Bereich der Materie wirkenden fundamentalen Wechselwirkungsarten. Während hier die Gravitationswechselwirkung meist vernachlässigt werden kann, spielen die starke, danach die elektromagnetische und die schwache Wechselwirkung eine entscheidende Rolle. Dazu kommt, daß die starke und die schwache Wechselwirkung in anderen Gebieten der Physik gar nicht, die elektromagnetische dort jedoch bei weitem nicht in allen und vor allem nicht in einigen wichtigen Eigenschaften untersucht werden konnten. Erst die Kern- und die Elementarteilchenphysik gaben dazu die Möglichkeiten. Sie führten zur Entdeckung der starken und der schwachen Wechselwirkung und zu vertieften Vorstellungen über den Mechanismus der Kraftübertragung, auch bei der elektromagnetischen Wechselwirkung.

Als elektroschwache Eichfeldtheorie ist eine einheitliche Beschreibung der elektromagnetischen und der schwachen Wechselwirkung gelungen. In der Form großer einheitlicher Theorien versucht man eine einheitliche Beschreibung aller drei Wechselwirkungen.

Die jetzt in der Mikrophysik bevorzugte Benutzung des Begriffs der Wechselwirkung anstelle der Kraft steht mit der Erkenntnis des Vermittlungsmechanismus in Zusammenhang.

In der Nahwirkungstheorie wird davon ausgegangen, daß die Ausbreitung einer Wirkung nicht schneller als mit Lichtgeschwindigkeit erfolgen kann. Eine mathematische Erfassung müßte eine unendliche Kette von Kraftaustauschprozessen zwischen zwei Objekten berücksichtigen. Zur Umgehung dieser Schwierigkeit ordnet man jedem Raum-Zeit-Punkt ein für die entsprechende Kraft charakteristisches Feld mit einer bestimmten Feldstärke zu, das sich ohne stofflichen Träger ausbreitet. Im Rahmen dieser Feldtheorie erfolgt die Kraftausübung zwischen zwei Teilchen über die Kette Teilchen—Feld—Teilchen. In der modernen Theorie kann die Übertragung der Kraft nicht durch klassische, d. h. stetige, Felder beschrieben werden. Sie müssen durch den Teilchenaspekt ergänzt, d. h. quantisiert werden. Danach sind nicht nur jedem Teilchen ein oder mehrere Felder zuzuordnen, für die es eine Quelle darstellt, sondern auch jedem eine bestimmte Kraft übertragenden Feld spezielle Feldquanten. Die Kraftübertragung, d. h. die Wechselwirkung, erfolgt durch Austausch dieser Feldquanten in sogenannten virtuellen Prozessen. Im Unterschied zu den gewöhnlichen Teilchen besitzen die Feldquanten immer ganzzahligen Spin, sind also Bosonen.

Die Vermittlung einer Kraft durch spezielle Feldquanten, für die die miteinander wechselwirkenden Objekte die Quellen sind, steht im Sinne der klassischen Physik im Widerspruch zum Energiesatz, da die Emission eines solchen Feldquants für das emittierende Teilchen einen Energieverlust, für das absorbierende Teilchen einen Energiezuwachs bedeutet. Man spricht daher von virtuellen Feldquanten und virtuellen Austauschprozessen. Quantenmechanisch betrachtet sind virtuelle Prozesse durchaus zulässig, solange die Energieverletzung im Rahmen des durch die Unbestimmtheitsrelation vorgegebenen Zeitintervalls, nennen wir es Verletzzeit, bleibt. Mit ΔE als Energieänderung und Δt als Verletzzeit gilt die Heisenberg'sche Unschärferelation in der Schreibweise von (2.2).

Die wichtigsten Eigenschaften der vier fundamentalen Wechselwirkungen sind in Tabelle 2.3 zusammengestellt. Besonders auffallend sind die großen Unterschiede in der Stärke, die jeweils durch eine dafür charakteristische dimensionslose Konstante beschrieben wird. Auch die Reichweiten unterscheiden sich grundlegend. So erscheint die schwache Wechselwirkung bis zu Reichweiten von 10^{-16} cm punktförmig, während die starke auf die Kernabmessungen beschränkt bleibt. Jede dieser Wechselwirkungsarten unterliegt bestimmten Erhaltungssätzen. Ihre Zahl ist bei der starken Wechselwirkung am größten. Prozesse der schwachen Wechselwirkung sind häufig nur dadurch beobachtbar, daß sie Erhaltungssätze verletzen, die die anderen stärkeren Wechselwirkungen auszeichnen.

2. Die Gravitationswechselwirkung scheint zunächst vom bekannten Erscheinungsbild her gesehen die einfachste der bekannten vier fundamentalen Wechselwirkungsarten zu sein. Sie wirkt im gesamten, mit r^{-2} abnehmenden Wirkungsbereich nur anziehend. Es handelt sich um eine Zentralkraft, die alle massebehafteten Teilchen erfaßt. Die Feldquanten der Gravitationswechselwirkung sind die zunächst noch hypothetischen Gravitonen. Wegen ihrer außerordentlich geringen Stärke wird die Gravitationswechselwirkung aus den meisten Betrachtungen der Hochenergiephysik herausgelassen. Ihre Rolle kommt erst beim Zusammenspiel von Elementarteilchenprozessen im Kosmos zum Tragen.

3. Die elektromagnetische Wechselwirkung ist komplizierter. Sie nimmt in ihrer Stärke auch mit r^{-2} ab, aber sie kann, je nach dem Vorzeichen der wechselwirkenden Ladungen, anziehend oder abstoßend wirken. Bei der Geschwindigkeit Null liegt der mathematische Analogfall zur Gravitationswechselwirkung, die Elektrostatik, vor. Für von Null verschiedene Geschwindigkeiten ergeben sich die elektromagnetischen Effekte, für beschleunigte Ladungen Strahlungseffekte. Die elektromagnetische Wechselwirkung erfaßt nur geladene Teilchen sowie neutrale Teilchen mit magnetischem Moment. Die Feldquanten der elektromagnetischen Wechselwirkung sind die Photonen.

Tabelle 2.3
Die Arten der Wechselwirkung, ihre Eigenschaften und Erhaltungssätze

Name der Kraft	Stärke	Reichweite	Beispiel	Teilchen auf die die Kraft wirkt	Feldquanten	Erhaltungssätze										Typische Lebensdauer/s
						L	B	CPT	CP, T	C	P	S	T_3	T	G	
starke	1	kurz (10^{-13}–10^{-14}) cm	Proton als gebundener Zustand von drei Quarks	Quarks	8 Gluonen	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	$<10^{-21}$
starke	1	kurz (10^{-13}–10^{-14}) cm	Kern als gebundener Zustand von Nukleonen	Hadronen	Mesonen	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	$<10^{-21}$
elektromagnetische	10^{-2}	lang (∞)	Atomhülle	elektrisch geladene Teilchen	Photon	×	×	×	×	×	×	×	×			$>10^{-20}$
schwache	10^{-5}	kurz $\ll 10^{-14}$ cm	Kern-β-Zerfall; Radioaktivität	Quarks Leptonen	Vektorbosonen $W^{\pm}$, Z^0	×	×	×								$>10^{-10}$
Gravitation	10^{-39}	lang (∞)	Schwerkraft, Planetenbewegung	alle Teilchen	Graviton?											

Mit der Entwicklung der Quantenelektrodynamik (QED) gelang es erstmalig, eine der vier Wechselwirkungsarten der Elementarteilchen theoretisch zu beschreiben. Die Stärke wird mit Hilfe der Feinstrukturkonstanten angegeben:

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 \hbar c} \approx \frac{1}{137} \approx 7{,}3 \cdot 10^{-3} . \tag{2.8}$$

Typische hochenergetische Prozesse, die durch die elektromagnetische Wechselwirkung vermittelt werden, wie die Elektron-Photon- oder Compton-Streuung, die Streuung von Elektronen am elektrischen Potential, auch Mott-Streuung genannt, die Photoerzeugung von Hadronen, z. B. in der Reaktion $\gamma p \to \pi^0 p$, haben Wirkungsquerschnitte in der Größenordnung von $10^{-29}\,\mathrm{cm}^2 = 10^{-2}\,\mathrm{mb}$. Die Lebensdauer des π^0-Mesons, das elektromagnetisch gemäß $\pi^0 \to \gamma\gamma$ zerfällt, beträgt etwa 10^{-16} s.

4. Die schwache Wechselwirkung wurde zuerst in der Form des Betazerfalls der Atomkerne beobachtet, als β^--, β^+-Zerfall und Elektroneneinfang:

$${}^A_Z X_N \to {}^{A}_{Z+1} X_{N-1} + e^- + \bar{\nu}_e , \tag{2.9 a}$$

$${}^A_Z X_N \to {}^{A}_{Z-1} X_{N+1} + e^+ + \nu_e , \tag{2.9 b}$$

$${}^A_Z X_N \to {}^{A}_{Z-1} X_{N+1} + \bar{\nu}_e . \tag{2.9 c}$$

Dabei handelt es sich um den Zerfall eines gebundenen Neutrons oder Protons, wobei die Energie zur Erzeugung der Leptonen aus der Änderung der Kernbindungsenergie kommt. Die erste über die schwache Wechselwirkung ablaufende Reaktion

$$\bar{\nu}_e + p \to e^+ + n \tag{2.10}$$

wurde 1959 beobachtet; sie gilt als direkter Nachweis des Antineutrinos.

In der ersten Theorie der schwachen Wechselwirkung wurde ihre Stärke durch die Fermi-Kopplungskonstante

$$G = 1{,}02 \cdot 10^{-5} \hbar c \left(\frac{\hbar}{m_p c}\right)^2 \tag{2.11 a}$$

beschrieben, wobei m_p die Protonenmasse ist. G hat die Einheit Energie · Volumen. Heute weiß man, daß die geladene Form der schwachen Wechselwirkung, die in (2.9, 10) vorliegt durch den Austausch der geladenen massebehafteten Vektorbosonen $W^\pm$ vermittelt wird. Die Fermi-Konstante läßt sich mit Hilfe der Masse des W-Bosons ausdrücken:

$$G = \left(\frac{g^2}{4\pi}\right) \left(\frac{\hbar}{m_W c}\right)^2 , \tag{2.11 b}$$

so daß eine dimensionslose Größe eingeführt werden kann, die die Stärke der schwachen Wechselwirkung beschreibt:

$$\frac{g^2}{4\pi\hbar c} = 1{,}02 \cdot 10^{-5} \left(\frac{m_W}{m_p}\right)^2 . \tag{2.11 c}$$

Seit 1973 ist bekannt, daß es neben geladenen auch eine neutrale Form der schwachen Wechselwirkung gibt, die durch das neutrale Vektorboson Z^0 vermittelt wird. Sie ist z. B. für die elastische Neutrino-Proton-Streuung

$$\nu + p \to \nu + p \tag{2.12}$$

verantwortlich. Die Vektorbosonen $W^{\pm}$ und Z^0, also die Feldquanten der schwachen Wechselwirkung, sind mit den Massen $m_W \approx 81$ GeV/c^2 und $m_Z \approx 93$ GeV/c^2 gegenwärtig die massivsten Elementarteilchen, die wir kennen.

In der Form der elektroschwachen Eichfeldtheorie gelang eine einheitliche Beschreibung der elektromagnetischen und der schwachen Wechselwirkung und damit gleichzeitig erstmalig eine befriedigende theoretische Formulierung der schwachen Wechselwirkung. Bisher haben wir die Prozesse der schwachen Wechselwirkung als Prozesse zwischen Leptonen und Nukleonen beschrieben. Auf elementarem Niveau handelt es sich um die Wechselwirkung zwischen Leptonen und den Quarks, die die Hadronen aufbauen. So erklärt sich die Reaktion (2.10) durch

$$\bar{\nu}_e + u \to e^+ + d \tag{2.13}$$

und die Reaktion (2.12) durch

$$\nu_\mu + u \to \nu_\mu + u\,. \tag{2.14}$$

5. Nachdem man weiß, daß die Hadronen aus den Quarks aufgebaut sind, wird die starke Wechselwirkung als Wechselwirkung zwischen den Quarks aufgefaßt, die zur Bindung der Quarks in den Hadronen führt. Die starke Wechselwirkung zwischen den Hadronen, die sich z. B. in der Kernkraft zwischen den Nukleonen äußert, ist in diesem Bild keine elementare Wechselwirkung, sondern eine abgeleitete Kraft, ähnlich der Van-der-Waals-Kraft zwischen neutralen Molekülen, die eine von der elektromagnetischen Wechselwirkung abgeleitete Kraft darstellt.

Die Kraft zwischen den Quarks verhält sich völlig anders als z. B. die elektromagnetische Kraft zwischen Ladungen. Sie wächst mit wachsendem Abstand zwischen den Quarks an, ähnlich wie wir es von der Kraft in einer gespannten Feder kennen. Daraus ergeben sich zwei Konsequenzen: zum einen verhalten sich die Quarks bei sehr kleinen Abständen als wären sie frei. Das folgt aus der Unschärferelation in der Form

$$\Delta p \cdot \Delta x \gtrsim \hbar\,, \tag{2.15}$$

wenn $\Delta x \approx r$ mit dem Abstand und $\Delta p \approx |\boldsymbol{q}| = Q$ mit dem übertragenen Impuls beim Eindringen von Sonden in die Hadronen identisch sind. Den kleinen Abständen entsprechen dann große Impulsübertragungen oder große Streuwinkel. Diese Eigenschaft wird asymptotische Freiheit genannt; sie kennzeichnet das Verhalten der Quarks in einem Hadron. Zum anderen ergibt sich die Konsequenz, daß Quarks nicht isoliert werden können. Diese Eigenschaft bezeichnet man als Quarkeinschluß.

Man nennt diese neuartigen Kräfte auch Farbkräfte, da es die Farbladungen der Quarks sind, an die die starke Wechselwirkung koppelt. Die Wechselwirkung der Quarks wird durch die Quantenchromodynamik (QCD) beschrieben. Die Übertragung der Kraft erfolgt hier durch acht Vektorteilchen, die man Gluonen nennt.

6. Wir haben damit im Bereich der Elementarteilchen zwei Kräfte kennengelernt. Das ist erstens die mit den Farbkräften der Quarks verbundene starke Wechselwirkung, beherrscht durch die QCD. Zweitens ist das die elektroschwache Wechselwirkung, die allerdings erst bei Energien von mehr als 10^2 GeV als eine einheitliche Kraft wirkt, bei niedrigeren Energien jedoch getrennt als elektromagnetische und als schwache Wechselwirkung. Es gibt Spekulationen, nach denen diese beiden Kräfte bei sehr hohen Energien gleiche Stärke haben sollen. Diese Hypothese der „Großen Vereinigung" wird durch die asymptotische Freiheit der starken Wechselwirkung im Rahmen der QCD nahegelegt, die vielleicht bei etwa 10^{15} GeV auf die gleiche Stärke führt, wie die extrapolierte schwache Wechselwirkung. Solche Vorstellungen gründen sich auf die Ähnlichkeiten der Theorie beider Wechselwirkungen. Es sind beides sogenannte nichtabelsche Eichtheorien. Die wichtigste Voraussetzung der Hypothese der „Großen Vereinigung" betrifft das ein-

zige, bisher als absolut stabil angesehene Hadron, das Proton. Für diese sagt sie eine endliche, wenn auch sehr große, das Alter des Kosmos in Jahren ausgedrückt um 20 Größenordnungen übertreffende Lebensdauer von mehrmals 10^{32} a voraus. An der experimentellen Überprüfung dieser Vorhersage wird zur Zeit sehr intensiv gearbeitet.

2.4. Experimente in der Kern- und Elementarteilchenphysik

1. Die geometrischen Ausdehnungen der Atomkerne und der Elementarteilchen liegen bei 10^{-15} m und weniger. Man benutzt daher auch als Einheit der Längenmaße in der Kern- und Elementarteilchenphysik das Fermi (Fm) oder das Femtometer (fm): 1 Fm = 1 fm = 10^{-15} m. Im Zusammenhang mit der Kleinheit der Abmessungen entsteht die Frage, wie man über die Struktur und die Eigenschaften der Kerne und Elementarteilchen hinreichend detaillierte Informationen erlangen kann. Das wichtigste methodische Prinzip der Kern- und Elementarteilchenphysik ist die Untersuchung der Umwandlungen der Kerne und Elementarteilchen über die Umwandlungsprodukte. Während die spontanen Umwandlungen, also die Zerfälle, selbsttätig ablaufen, werden die Reaktionen einschließlich der Streuungen durch geeignete Geschoßteilchen, manchmal auch Sonden genannt, ausgelöst. Ganz allgemein gilt, daß die Energie der Sondenteilchen um so größer sein muß, desto kleiner die zu untersuchenden Objekte oder Strukturen sind. Das wird an Hand der Heisenbergschen Unschärferelation in der Form (2.15) klar, wonach die Mindestimpulse der Teilchen $\Delta p \approx \hbar/\Delta x$ betragen müssen, um Informationen über Strukturen mit linearen Ausdehnungen der Größe Δx zu erhalten. So genügen zur Erkundung der Struktur der Atomhülle Energien von einigen eV. Zur Untersuchung der Atomkerne benötigt man Energien von mindestens einigen MeV und zur Erforschung der Struktur der Elementarteilchen braucht man Energien im GeV- und TeV-Gebiet.

Die Untersuchung der Teilcheneigenschaften erfolgt unter Ausnutzung von Feldern in Detektoren und Spektrometern. Es kommen vor allem elektrische und magnetische Felder in Betracht und zwar als statische und als Wechselfelder. In ihnen werden z. B. die Bewegung, die Ablenkung der Teilchen oder ihre Orientierung untersucht. Aus solchen Untersuchungen lassen sich Ladungen, Massen, Impulse, Drehimpulse, Energien, elektrische und magnetische Momente und andere Größen bestimmen.

2. Da die Kernphysik in den Anfängen meist nur den radioaktiven Zerfall untersuchen konnte und auch später, als es möglich war, künstlich radioaktive Nuklide zu erzeugen, deren Zerfall unabhängig von der vorausgegangenen Kernreaktion untersuchte, bürgerte sich für diese Art der Untersuchung der Begriff Zerfallsspektroskopie ein. Sie untersucht die Eigenschaften der Zerfallsprodukte der natürlichen und künstlich erzeugten radioaktiven Strahler. Beim Zerfall der natürlichen radioaktiven Nuklide treten α-, β-, γ-, EX-Strahlungen, Neutrinos sowie Spaltprodukte und Neutronen auf. Die α-Teilchen wurden als Heliumkerne, die Betateilchen als Elektronen und die Gammastrahlen als Photonen identifiziert. EX-Strahlungen sind charakteristische Röntgenstrahlen, Spaltprodukte hochionisierte Atomkerne meist mittlerer Massenzahl A. Von den künstlich erzeugten radioaktiven Nukliden können zusätzlich Protonen, Neutronen, Deuteronen und andere Kerne emittiert werden. Experimentell bestimmt werden hauptsächlich Massen, Ladungen, Impulse, Energien, Lebensdauern bzw. Halbwertszeiten von Grund- und Anregungszuständen und damit Übergangswahrscheinlichkeiten, Winkelverteilungen, magnetische Dipol- und elektrische Quadrupolmomente, Drehimpulse, Paritäten und andere Eigenschaften.

Die Reaktionsspektroskopie geht von den Eigenschaften der Geschoß-, Target- und Produktteilchen der Kernreaktionen aus und untersucht vor allem letztere. Die verbreitetsten Geschoß-

teilchen sind Protonen, Neutronen, Deuteronen, Helionen, d. h. ^{3}He-Kerne, α-Teilchen, viele andere Ionen stabiler Nuklide bis hin zum Uran, sogenannte schwere Ionen, die wir mit SI abkürzen, Elektronen, Myonen, Pionen, Kaonen, Photonen und andere Elementarteilchen. Zusätzlich zu den mit zerfallsspektroskopischen Methoden bestimmbaren Größen sind hier die Wirkungsquerschnitte und deren Abhängigkeiten von verschiedenen Größen, wie z. B. die Abhängigkeit von der Geschoßteilchenenergie, d. h. die Anregungsfunktion, sowie Schwellwertenergien ermittelbar.

Die in der Zerfalls- und Reaktionsspektroskopie ermittelbaren Größen lassen sich über die Umwandlungs-, d. h. über die Zerfalls- und Reaktionsmechanismen, mit der Kernstruktur in Verbindung bringen.

3. In der Elementarteilchenphysik haben sich die Begriffe Zerfalls- und Reaktionsspektroskopie nicht eingebürgert, weil der Zerfall der in den Reaktionen entstehenden Teilchen im allgemeinen so schnell erfolgt, daß sich die Reaktionsprodukte nicht von der Makromenge des Targetmaterials abtrennen und gesondert untersuchen lassen, wie das in der Zerfallsspektroskopie der Kernphysik üblich ist. Zu den Geschoßteilchen gehören heute alle langlebigen Elementarteilchen, darunter heute auch die elementaren Leptonen, insbesondere Elektronen, Myonen und Neutrinos.

In der Elementarteilchenphysik, die ursprünglich aus der Kernphysik hervorgegangen ist, waren zunächst Experimente mit Hilfe der Höhenstrahlung wichtig und führten zur Entdeckung vieler Teilchen. Mit der Inbetriebnahme von Hochenergiebeschleunigern konnten diese Experimente wesentlich systematischer fortgesetzt werden. Für die anfängliche Untersuchung der starken Wechselwirkung der Elementarteilchen dienten hauptsächlich elastische und unelastische Streuexperimente mit Hadronen. Die wichtigsten Kenntnisse über die schwache Wechselwirkung wurden zunächst durch die Untersuchung der schwachen Zerfälle instabiler Elementarteilchen, später auch über Streuexperimente mit Neutrinos gewonnen. Bei der Überprüfung neuer Hypothesen und Theorien spielt die experimentelle Untersuchung insbesondere auch seltener Zerfälle und Zerfallskanäle eine bedeutende Rolle, so heute z. B. die Untersuchung des möglichen Zerfalls der Protonen.

Seit die Quarks und die Leptonen als die elementaren Teilchen erkannt wurden, spielen Experimente mit ihnen die wichtigste Rolle für die Elementarteilchenphysik. Deshalb sind heute Elektron-Positron-Stöße in Elektron-Positron-Kollidern von überragender Bedeutung, da beide Teilchen im Anfangszustand elementar sind. Zur Untersuchung der Hadronenstruktur sind Lepton-Hadron-Stöße, wie Neutrino-Hadronen- oder Myonen-Hadronen-Stöße besonders aufschlußreich. Die Untersuchung der Quark-Quark-Wechselwirkung erfolgt über Hadron-Hadron-Stöße bei höchstmöglichen Energien und Impulsübertragungen, hauptsächlich in Proton-Proton- oder Proton-Antiproton-Kollidern. Bei diesen Energien verhalten sich die Hadronen näherungsweise wie Quark- und Gluonen-Strahlen. In solchen Quark-Quark-Stößen mit großer Impulsübertragung entstehen z. B. Leptonenpaare, Paare schwerer Quarks und schwere Eichbosonen.

2.5. Energieverhältnisse bei einfachen Umwandlungen von Kernen und Elementarteilchen

1. Zur Erfassung der Energieverhältnisse von Kern- und Elementarteilchenumwandlungen kann man vom Energie- und Impuls-Vierervektor und seinen Eigenschaften ausgehen. Der Energie-Impuls-Vierervektor p eines Teilchens oder Systems wird mit Hilfe der relativistischen Gesamtenergie

$$E = \sqrt{(cp)^2 + (mc^2)^2} = \sqrt{(cp)^2 + E_0^2} = E_k + E_0 \qquad (2.16)$$

und des Dreiervektors $\boldsymbol{p}$ definiert, wobei man an Stelle der Ruhmasse m_0 häufig die Ruhenergie

$$E_0 = m_0 c^2 = \sqrt{E^2 - c^2 \boldsymbol{p}^2} \tag{2.17}$$

einsetzt:

$$p = p(E, c\boldsymbol{p}) . \tag{2.18}$$

Die Vorteile bestehen darin, daß bei jeder Umwandlung von Kernen und Elementarteilchen alle Komponenten des Vierervektors erhalten bleiben und weiterhin sein Quadrat

$$p^2 = \frac{1}{c^2}[E^2 - c^2\boldsymbol{p}^2] = \frac{1}{c^2} E_0^2 = \frac{1}{c^2}(m_0 c^2)^2 = \text{invariant} \tag{2.19}$$

eine relativistische Invariante und damit unabhängig vom gewählten Bezugssystem ist, ebenso wie die Ruhenergie

$$E_0^2 = m_0^2 c^4 = E^2 - (c\boldsymbol{p})^2 = \text{invariant} . \tag{2.20}$$

2. In Zweiteilchenzerfällen von Kernen oder Elementarteilchen mit der Ruhemasse M_0 des Mutterteilchens gemäß $M_0 \to m_{01} + m_{02}$; $E_0 \to E_{01} + E_{02}$ mit

$$c^2 p_1^2 = E_1^2 - (c\boldsymbol{p}_1)^2 = m_{01}^2 c^2 ; \qquad c^2 p_2^2 = E_2^2 - (c\boldsymbol{p}_2)^2 = m_{02}^2 c^2 \tag{2.21}$$

erhält man

$$M_0^2 c^4 = (E_1 + E_2)^2 - (\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2)^2 \cdot c^2 . \tag{2.22}$$

Wenn das Mutterteilchen ruht, ist infolge Impulserhaltung $\boldsymbol{p}_1 = -\boldsymbol{p}_2$ und nach Zerlegung der Gesamtenergie in kinetische und Ruhenergie

$$E_0(M_0) = M_0 c^2 = E_{k1} + E_{k2} + E_{01} + E_{02} . \tag{2.23}$$

Da immer $E_k \geqq 0$, folgen daraus die Ungleichungen

$$E_{k1} + E_{k2} > 0 ; \qquad E_{01} + E_{02} < E_0(M_0) . \tag{2.24a; b}$$

Nur wenn die Ruhenergie des zerfallenden Teilchens größer ist als die Summe der Ruhenergien der Zerfallsteilchen, kann es — muß es jedoch nicht — zu einem Zerfall kommen. Der Differenzbetrag, der als kinetische Energie der Zerfallsprodukte auftritt, wird Zerfallsenergie E_Q genannt:

$$E_Q = \Delta E_0 = E_{k1} + E_{k2} > 0 . \tag{2.25}$$

Ist in (2.24b) die Ruhenergie des Mutterteilchens kleiner als die Summe der Ruhenergien der Zerfallsprodukte, dann kann ein Zerfall erzwungen werden, indem von außen Energie in Höhe der Differenz zugeführt wird. Man spricht dann im Unterschied zum spontanen vom erzwungenem Zerfall.

Beispiele für den Zweiteilchenzerfall sind der α-Zerfall mit der Zerfallsgleichung

$$^{A}_{Z}X_N \to {}^{A-4}_{Z-2}X_{N-2} + {}^{4}_{2}\mathrm{He} \tag{2.26}$$

oder der γ-Zerfall

$$^{A}_{Z}X^*_N \to {}^{A}_{Z}X_N + \gamma . \tag{2.27}$$

Der Stern am Elementesymbol X bedeutet eine Kernanregung, deren Energie von dem γ-Quant weggeführt wird.

3. Eine der wichtigsten Gruppen von Umwandlungen der Kern- und Elementarteilchenphysik, an der einige grundlegende kinematische Gesetzmäßigkeiten über Impulse und Energien erläutert werden können, sind Reaktionen mit zwei Teilchen im Eingangs- und zwei im Ausgangskanal:

$$a_1 + A_2 \rightarrow B_3 + b_4\,; \qquad A_2(a_1, b_4)\,B_3\,. \tag{2.28}$$

Wegen der Invarianz des Quadrats des Viererimpulses (2.19) sowie der Ruhenergie (2.20) erhält man für diese Reaktion (siehe auch B 3.1.)

$$\begin{aligned} s = c^2p^2 = c^2p^{(m)2} = E_m^2 &= c^2(p_1 + p_2)^2 = c^2(p_3 + p_4)^2 \\ &= (E_1 + E_2)^2 - (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2)^2c^2 \\ &= (E_3 + E_4)^2 - (\mathbf{p}_3 + \mathbf{p}_4)^2c^2\,. \end{aligned} \tag{2.29}$$

Das Teilchen A_1 ruht gewöhnlich im Laborsystem (L-System), man nennt es Targetteilchen, das bewegte Teilchen a_1 wird Projektil-, Geschoß-, Inzidenz- oder Stoßteilchen genannt. Wegen $\mathbf{p}_2 = E_{k2} = 0$ folgt aus (2.29)

$$s = E_{01}^2 + E_{02}^2 + 2E_{02}E_1 = (E_{01} + E_{02})^2 + 2E_{02}E_{k1}\,. \tag{2.30}$$

Aus der Erhaltung des Dreierimpulses ergibt sich für das L-System

$$\mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_3 + \mathbf{p}_4\,. \tag{2.31}$$

Die Variable s ist eine von drei Invarianten, die aus den Viererimpulsen p_1, p_2, p_3 und p_4 gebildet werden können:

$$\begin{aligned} s &= c^2(p_1 + p_2)^2\,; \quad & t &= c^2(p_1 - p_3)^2\,; \quad & u &= c^2(p_1 - p_4)^2\,; \\ s &= c^2(p_3 + p_4)^2\,; \quad & t &= c^2(p_2 - p_4)^2\,; \quad & u &= c^2(p_2 - p_3)^2\,. \end{aligned} \tag{2.32}$$

Man nennt diese Größen auch Mandelstam-Variable[1]). Nur zwei von ihnen können im Stoß (2.28) unabhängige Größen sein. Das Massenmittelpunktsystem (M-System) ist durch

$$\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = 0\,; \qquad |\mathbf{p}_1| = |\mathbf{p}_2|\,, \tag{2.33}$$

definiert. In diesem System gilt

$$s = (E_1 + E_2)^2 - c^2(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2)^2 = (E_1 + E_2)^2 = E_M^2\,. \tag{2.34}$$

Für die Summe der Quadrate der Ruhenergien gilt hier

$$s + t + u = \sum_{i=1}^{4} E_{0i}^2\,. \tag{2.35}$$

4. Bei der Einteilung der Kernreaktionen nach Energiegesichtspunkten geht man von (2.28) aus. Wegen Energieerhaltung gilt für die kinetische und die Ruhenergie

$$E_0(a + A) + E_k(a + A) = E_0(B + b) + E_k(B + b)\,. \tag{2.36}$$

Durch Umstellung nach der Differenz der Ruh- bzw. kinetischen Energie erhält man

$$E_0(a + A) - E_0(B + b) = E_k(B + b) - E_k(a + A) = E_Q\,. \tag{2.37}$$

Die in der Reaktion auftretende Änderung der kinetischen oder der Ruhenergie E_Q wird Reaktionsenergie, Q-Wert oder in Anlehnung an die Chemie auch Wärmetönung genannt. Man muß drei wichtige Fälle unterscheiden:

[1]) Häufig erscheint in diesen Definitionsgleichungen das c^2 nicht, weil $c = 1$ gesetzt wurde.

$E_Q = 0$ Es liegt elastische Streuung vor, d. h., nicht nur die Gesamt-, sondern auch die kinetische Energie ist eine Erhaltungsgröße. Die Reaktionsgleichung lautet dann

$$a + A \rightarrow a + A\,; \qquad A(a, a)\,A\,. \tag{2.38}$$

$E_Q > 0$ Die Reaktion ist exotherm, d. h., die kinetische Energie nimmt auf Kosten der Ruhenergie zu.

$E_Q < 0$ Die Reaktion ist endotherm, d. h., die Ruhenergie nimmt auf Kosten der kinetischen Energie zu.

Im Unterschied zur elastischen Streuung enthalten die Fälle $E_Q \lessgtr 0$ auch die unelastische Streuung. Sie ist dadurch gekennzeichnet, daß das einlaufende und das auslaufende Teilchen zwar identisch sind, daß sich aber während des Wechselwirkungsprozesses seine Energie geändert hat, d. h., daß einer der Reaktionspartner angeregt wurde. Man schreibt dann

$$a + A \rightarrow a' + A'\,; \qquad A(a, a')\,A'\,. \tag{2.39}$$

5. Wir betrachten erneut die Zweiteilchenreaktion (2.28), diesmal im Massenmittelpunktsystem, um das Kolliderexperiment zu erfassen. Hier sind die Impulse der Teilchen a_1 und A_2, bzw. B_3 und b_4 in Übereinstimmung mit (2.33) entgegengesetzt gleich:

$$\boldsymbol{p}_1(\mathrm{M}) + \boldsymbol{p}_2(\mathrm{M}) = \boldsymbol{p}_3(\mathrm{M}) + \boldsymbol{p}_4(\mathrm{M}) = 0\,. \tag{2.40}$$

Aus (2.29) erhält man

$$\sqrt{s} = E_{\mathrm{k}1}^{(\mathrm{M})} + E_{\mathrm{k}2}^{(\mathrm{M})} + E_{01} + E_{02} = E_{\mathrm{k}3}^{(\mathrm{M})} + E_{\mathrm{k}4}^{(\mathrm{M})} + E_{03} + E_{04}\,. \tag{2.41}$$

Die Reaktion ist also nur möglich, wenn die folgende Ungleichung erfüllbar ist:

$$E_{\mathrm{k}1}^{(\mathrm{M})} + E_{\mathrm{k}2}^{(\mathrm{M})} + E_{01} + E_{02} \geqq E_{03} + E_{04}\,. \tag{2.42}$$

2.6. Umwandlungswahrscheinlichkeiten

1. Der Zerfall von Teilchen und Kernen ist ein spontaner, rein statistischer Prozeß. Es läßt sich nicht voraussagen, welcher Atomkern oder welches Elementarteilchen aus einer Anzahl in einem bestimmten Zeitintervall zerfällt. Gemessen wird lediglich die Zahl der Zerfallsprodukte $\mathrm{d}N$ in diesem Zeitintervall $\mathrm{d}t$. Man nennt

$$A = \left|\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}\right| = \dot{N} = \lambda N \tag{2.43}$$

die Aktivität. Ihre Einheit ist das Becquerel, wobei $1\ \mathrm{Bq} = \mathrm{s}^{-1}$ ist. Wenn $\mathrm{d}N$ die Zahl einer einzigen, für den Zerfall charakteristischen Zerfallsproduktsorte ist, dann entspricht $\mathrm{d}N$ gleichzeitig der Zahl der zerfallenden Teilchen. Aus der Messung dieser Aktivität als Funktion der Zeit ist bekannt, daß von einer, dem spontanen Zerfall unterliegenden Substanz pro Zeitintervall im Mittel stets der gleiche Bruchteil der vorhandenen Mutterteilchen N einer bestimmten Sorte zerfällt, d. h. $\mathrm{d}N/\mathrm{d}t$ ist proportional zu N:

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = -\lambda N\,. \tag{2.44}$$

Das Minuszeichen bringt zum Ausdruck, daß die Zahl der vorhandenen Teilchen N um $\mathrm{d}N$ abnimmt. Der Proportionalitätsfaktor λ, die Zerfallskonstante, ist eine Zerfallswahrscheinlichkeit pro Zeit. Zwischen λ und der mittleren Lebensdauer τ besteht die Beziehung

$$\lambda = \frac{1}{\tau} = -\frac{1}{N}\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}\,. \tag{2.45}$$

Damit gibt λ die negative relative Zahl $-\mathrm{d}N/N$ der im Mittel pro Zeitintervall $\mathrm{d}t$ zerfallenden Teilchen an. Die mittlere Lebensdauer τ ist für alle zerfallenden Kerne oder Elementarteilchen einer bestimmten Sorte eine feste Zahl. Sie ist wie λ ein Charakteristikum, das nur aus den Zerfallseigenschaften einer sehr großen Zahl instabiler Kerne oder Elementarteilchen einer Sorte ermittelt werden kann.

Integriert man (2.14), so ergibt sich das Grundgesetz des radioaktiven Zerfalls

$$N = N_0 \, \mathrm{e}^{-\lambda t}, \tag{2.46}$$

wobei N_0 die Zahl der zur Zeit t_0 vorhandenen Atomkerne oder Elementarteilchen der zerfallenden Sorte bedeutet und N die Zahl der zur Zeit t noch vorhandenen.

Nach dem gleichen Gesetz nimmt die Aktivität ab. In Abb. 2.3a ist die Funktion (2.46) dargestellt. Auf der Abszisse wurde die Zeit in Einheiten der Halbwertszeit $T_{1/2}$ abgetragen. Man versteht darunter die Zeit, in der die Hälfte einer Anzahl von Kernen oder Elementarteilchen einer bestimmten Sorte zerfällt. Diese Zeit ist unabhängig vom Absolutwert von N_0, denn es ist mit $N/N_0 = 1/2$

$$T_{1/2} = \frac{1}{\lambda} \ln 2 = \frac{0{,}693}{\lambda}. \tag{2.47}$$

Da die Atomkerne und Elementarteilchen den Gesetzen der Quantenmechanik, bzw. der Quantenfeldtheorie unterliegen, ist λ eine quantenmechanische Übergangswahrscheinlichkeit pro Zeit. Sie wird aus dem Quadrat einer Übergangsamplitude C gebildet, die ihrerseits aus dem Quadrat des Matrixelements des Übergangs von einem Anfangs- (i) in einen Endzustand (f) berechnet werden kann:

$$\lambda = |C|^2 = |\langle \Psi_\mathrm{f} | \mathrm{O} | \Psi_\mathrm{i} \rangle|^2. \tag{2.48}$$

Hier kennzeichnen Ψ_i und Ψ_f den Anfangs- und Endzustand, O ist der Operator, der beim Übergang zur Wirkung kommenden Wechselwirkungsenergie. Die Übergangsamplituden hängen damit von den fundamentalen Naturkonstanten, den Wellenfunktionen und der Wechselwirkungsenergie ab. In den Wellenfunktionen ist der Zugang zur Struktur der am Zerfall beteiligten Kern- oder Elementarteilchenzustände enthalten, in der Wechselwirkungsenergie die Art der fundamentalen Wechselwirkung sowie der Mechanismus des Übergangs.

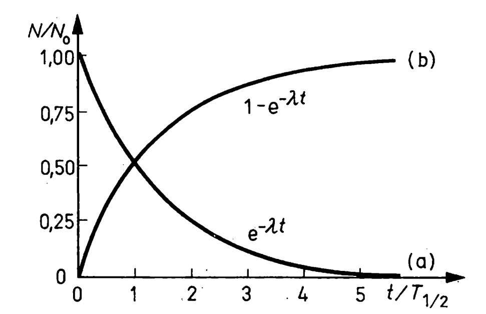


Abb. 2.3
Relative Zahl der einem spontanen Zerfall unterliegenden Mutterteilchen, bzw. relative Aktivität, als Funktion der Zeit
a) beim reinen Zerfall
b) bei gleichzeitiger Erzeugung mit konstantem Inzidenzteilchenstrom

Wie das nach der experimentell gefundenen Unabhängigkeit der Zerfallskonstanten λ von makroskopischen Größen, wie Temperatur, Druck, elektrische und magnetische Feldstärke, nicht anders zu erwarten ist, enthält das Matrixelement diese Größen nicht.

2. Für Teilchen- und Kernreaktionen wird die Umwandlungswahrscheinlichkeit durch den Begriff des Wirkungsquerschnitts gefaßt. Trifft ein Teilchenstrom $\dot{N}_0/\mathrm{s}^{-1}$ geeigneter Energie auf ein Target der Dicke $\Delta x/\mathrm{m}$, die klein sein soll, verglichen mit der Reichweite der Geschoßteilchen in dem Targetmaterial, dann ruft nur ein geringer Teil Kernreaktionen mit der Reaktionsrate $\Delta\dot{N}/\mathrm{s}^{-1}$ hervor. Die Abb. 2.4a zeigt die Verhältnisse schematisch. Der größte Teil der Geschoßteilchen wechselwirkt mit den Targetatomen über die in Kapitel 4. zu besprechenden Effekte und verläßt das Target wieder. Ist der Teilchenstrom gleichmäßig auf die Fläche S/m^2 verteilt, dann ergibt sich für den das Target verlassenden Inzidenzteilchenstrom

$$\dot{N} = \dot{N}_0 - \Delta\dot{N}\,. \tag{2.49}$$

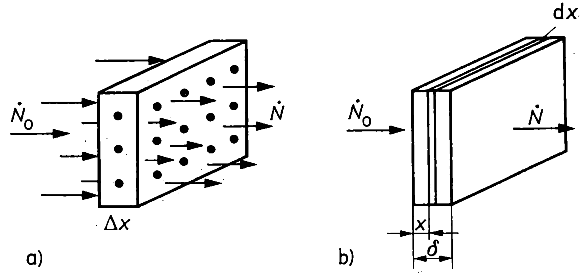


Abb. 2.4
Schematische Darstellung eines Targets mit Geschoßteilchenstrom
a) dünnes Target
b) dickes Target

Das Verhältnis

$$Y = \frac{\Delta\dot{N}}{\dot{N}_0} \tag{2.50}$$

wird Ausbeute der Reaktion genannt. Im allgemeinen ist $Y \ll 1$, z. B. 0,01, so daß in (2.49) $\dot{N} \approx \dot{N}_0$ wird. Die Reaktionsrate ist um so größer, je größer $\dot{N}_0$ und die Zahl der Targetkerne in der Schichtdicke x sind. Mit N_V/m^{-3} als Zahl der Targetkerne pro Volumen und N_S/m^{-2} als Zahl der Targetkerne pro Targetfläche, d. h. als Flächendichte, kann man für die Reaktionsrate schreiben:

$$\Delta\dot{N} = \sigma\dot{N}_0\,\Delta x N_V = \sigma\dot{N}_0 N_S\,. \tag{2.51}$$

Der Proportionalitätsfaktor σ wird effektiver Wirkungsquerschnitt genannt. Seine Einheit ist m^2. Das ist der Grund dafür, daß er oft vereinfachend als Fläche der Targetkerne in Richtung Geschoßteilchen aufgefaßt wird. Die dabei entstehende Zielscheibe (Target) mit dem Kernradius R hat die Fläche

$$\sigma = \pi R^2\,. \tag{2.52}$$

Unter Berücksichtigung der Größe der Kernradien von $R \lessapprox 10^{-14}$ m wurde als Einheit des Wirkungsquerschnitts in der Kernphysik das „barn" eingeführt: 1 barn (1 b) $= 10^{-28}\ \mathrm{m}^2$. In dieser Deutung ist $\sigma S N_S$ die gesamte, den Geschoßteilchen vom Target dargebotene Kernfläche, wenn S die vom Inzidenzstrahl getroffene Targetfläche ist.

Hat das Target die Dicke $\delta \gg \Delta x$ und kann man weiterhin die Wechselwirkungseffekte mit den Hüllenelektronen der Targetatome, die in Kapitel 4. besprochen werden, vernachlässigen, dann ändert sich der Teilchenstrom $\dot{N}$ als Funktion von der Eindringtiefe x. In Übereinstimmung mit (2.52) ergibt sich für die differentielle Reaktionsrate $\mathrm{d}\dot{N}$ am Ort x in der Targetschicht $\mathrm{d}x$ und dem Inzidenzteilchenstrom $\dot{N}(x)$ die folgende Differentialgleichung und deren Lösung:

$$\mathrm{d}\dot{N} = -\sigma \dot{N}(x)\, N_V\, \mathrm{d}x\,; \qquad \dot{N}(x) = \dot{N}_0\, \mathrm{e}^{-\sigma N_V x}\,. \tag{2.53a; b}$$

Die Inzidenzteilchenzahl nimmt also exponentiell ab. Für den Wirkungsquerschnitt erhält man daraus mit $N_S = N_V x$

$$\sigma = \frac{-1}{N_S} \ln \frac{\dot{N}(\delta)}{\dot{N}_0}\,. \tag{2.54}$$

Die Gleichungen (2.49) und (2.54) erlauben eine Bestimmung des Wirkungsquerschnitts aus einer Teilchenstrom-Differenz- oder auch Transmissionsmessung. Die Gleichung (2.54) trifft unter anderem besonders auch für schnelle Neutronen zu. Daher kann man über (2.54) und (2.52) auf der Grundlage einer Transmissionsmessung für schnelle Neutronen den Kernradius ermitteln. Wir kommen darauf in Abschnitt 6.2.2. zurück.

Die vereinfachte Deutung des Wirkungsquerschnitts als Fläche ist nicht exakt. Das wird besonders bei solchen Kernreaktionen offenbar, in denen $\sigma \gg 1$ barn ist. Ein wichtiges Beispiel dafür ist die zur Reaktorvergiftung führende Reaktion $^{135}\mathrm{Xe}(\mathrm{n}, \gamma)\, ^{136}\mathrm{Xe}$. Ihr Wirkungsquerschnitt beträgt für thermische Neutronen mit einer Energie von $E_\mathrm{k}(\mathrm{n}) = 0{,}025$ eV etwa $3 \cdot 10^6$ barn. Den Ausweg liefert die quantenmechanische Deutung. Danach ist der Wirkungsquerschnitt σ die Wahrscheinlichkeit für das Stattfinden einer Kernreaktion. Die Definitionsgleichung lautet in Übereinstimmung mit (2.51):

$$\sigma = \frac{\Delta \dot{N}}{\dot{N}_0 N_S}\,. \tag{2.55}$$

Nach den Gesetzen der Quantenmechanik ist ein Teilchen mit dem Impuls p örtlich nicht streng lokalisiert. Es hat Welleneigenschaften. Ein Maß für die Abweichung vom klassischen Teilchenbild ist die Materie- oder De-Broglie-Wellenlänge eines Teilchens

$$\lambda\!\!\!^{-} = \frac{\hbar}{p}\,. \tag{2.56}$$

Der effektive Radius für die Reaktionszone ist nun nicht mehr R, wie das der Fall wäre, wenn ein Kern und ein ausdehnungsloses Geschoßteilchen miteinander wechselwirken würden, sondern $R + \lambda\!\!\!^{-}$. Damit berechnet man den Wirkungsquerschnitt zu

$$\sigma = \pi (R + \lambda\!\!\!^{-})^2\,. \tag{2.57}$$

Für nichtrelativistische Nukleonen (N) erhält man mit p aus (B. 3c) für

$$\lambda\!\!\!^{-}_\mathrm{N}/\mathrm{m} = 4{,}5 \cdot 10^{-15}/\sqrt{E_\mathrm{k}(\mathrm{N})/\mathrm{MeV}}\,, \tag{2.58}$$

so daß sich für thermische Neutronen $\lambda\!\!\!^{-}_\mathrm{N} = 2{,}85 \cdot 10^{-11}$ m ergibt. Der Radius des Xe-Kerns beträgt $7{,}21 \cdot 10^{-15}$ m, kann also in (2.57) vernachlässigt werden. Auf diese Weise berechnet man den Wirkungsquerschnitt der oben genannten Reaktion zu $2{,}6 \cdot 10^6$ barn. Das ist ein Wert, der dem gemessenen sehr nahekommt.

Im Experiment wird meist nicht σ, sondern der differentielle Wirkungsquerschnitt $(\mathrm{d}\sigma/\mathrm{d}\Omega)_\vartheta$ bestimmt. Mit einem Detektor der Fläche $\mathrm{d}S$, die ein Raumwinkelelement $\mathrm{d}\Omega = \sin\vartheta\, \mathrm{d}\vartheta\, \mathrm{d}\varphi = \mathrm{d}S/r^2$ erfaßt, wird der senkrecht auf $\mathrm{d}S$ unter den Winkeln ϑ und φ zur Primärstrahlrichtung aus dem Target kommende Teilchenstrom $\mathrm{d}\dot{N}_\mathrm{D}$ mit dem Detektor D gemessen. Die Abb. 2.5 zeigt die Geometrie eines derartigen Experiments. Für den gesamten Raumwinkel

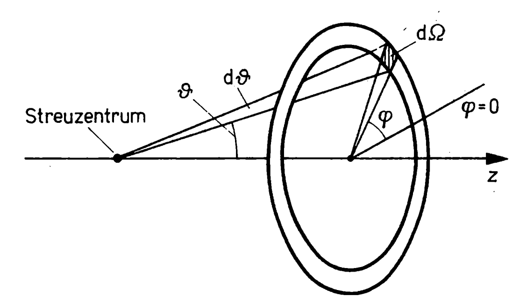


Abb. 2.5
Geometrische Darstellung zur Erklärung des Raumwinkels und des Wirkungsquerschnitts

ergibt sich (2.55) aus (2.51). In den differentiellen Raumwinkel $\mathrm{d}\Omega$ fällt nur der Teil $\mathrm{d}\dot{N}_D$, der aus σ den Teil $\mathrm{d}\sigma$ ausmacht. Es gilt daher

$$\left(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\right)_\vartheta = \frac{\dfrac{\mathrm{d}\dot{N}_D}{\mathrm{d}\Omega}}{\dot{N}_0 N_S}. \tag{2.58}$$

Die Einheit des differentiellen Wirkungsquerschnitts ist barn pro Steradient (b/sr). Ein Steradient ist der Raumwinkel, bei dem ein vom Kugelmittelpunkt ausgehender Kegel im Abstand $r = 1$ m auf der Kugeloberfläche 1 m² ausschneidet. Es ist dann $1\ \mathrm{sr} = [S]/[r]^2 = 1\ \mathrm{m}^2/1\ \mathrm{m}^2 = 1$.

Der Gesamtwirkungsquerschnitt σ wird durch Integration über den vollen Raumwinkel berechnet. Man erhält

$$\sigma = \int \left(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\right)_\vartheta \mathrm{d}\Omega. \tag{2.59}$$

Im allgemeinen ist der Wirkungsquerschnitt eine Funktion der Teilchenenergie. Man nennt diese Abhängigkeit in der Kernphysik Anregungsfunktion.

Der quantenmechanischen Deutung entsprechend ist der Wirkungsquerschnitt eine Wahrscheinlichkeit W_{fi} für den Übergang aus einem Anfangs- in einen Endzustand. Sie wird aus dem Quadrat einer Wahrscheinlichkeitsamplitude $|S_{fi}|^2$ berechnet, d. h. aus dem Quadrat des Übergangsmatrixelements. Dieses hängt seinerseits von den Wellenfunktionen der beteiligten Zustände ab, sowie vom Operator **S** der Wechselwirkungsenergie. In den Wellenfunktionen ist die Struktur des Anfangs- und des Endzustandes enthalten, im Operator **S** die Wechselwirkungsenergie, die Art der fundamentalen Wechselwirkung und der Übergangsmechanismus. Man kann somit für σ schreiben:

$$\sigma_{fi} = W_{fi} = |S_{fi}|^2 = |\langle \Psi_f |\mathbf{S}| \Psi_i \rangle|^2. \tag{2.60}$$

Literaturhinweise zu Kapitel 2

Buc 73, Bal 59, Bal 68, Byc 73, Fle 70, Fre 78, Her 60/66, Loh 81, Mar 71, May 79, Muc 74, Nau 84, Oku 84, Ran 76, Šir 72

3. Beschleuniger

Beschleuniger sind im allgemeinen Sinne des Wortes alle Geräte, mit denen geladenen Teilchen größere kinetische Energien erteilt werden. In diesem Sinne gehören dazu viele der Experimentiereinrichtungen, die bei der Entwicklung der Atomhüllenphysik entstanden sind. Beispiele dafür sind das Kanalstrahlrohr, die Elektronenstrahlröhre, die Röntgenröhre, der Massenspektrograph und das Elektronenmikroskop. In der Kern- und Elementarteilchenphysik haben die Beschleuniger ebenfalls breite Anwendung gefunden. Die meisten Kenntnisse über die Atomkerne und die Elementarteilchen verdanken wir Experimenten, in denen Teilchen genügend hoher Energien aus Beschleunigern verwendet wurden. In den ersten Experimenten zur Kernphysik verwendete man die α-Teilchen aus radioaktiven Präparaten. Ihre Energieströme und Teilchenstromdichten reichten aber zur Lösung der meisten Probleme nicht aus. Viele Elementarteilchen wurden erstmals als Bestandteile der Höhenstrahlung entdeckt. Zur Untersuchung der meisten ihrer Eigenschaften erwiesen sich aber auch hier Ströme und Teilchenstromdichten als unzureichend. Daher entstand der Wunsch, Teilchen in geeigneten Anlagen auf die erforderlichen Energien mit ausreichender Stromstärke zu beschleunigen. Heute gibt es eine große Vielfalt von speziell für die Kern- und Elementarteilchenphysik entwickelten Beschleunigern. Sie sind gemeint, wenn wir im engeren Sinne von Beschleunigern sprechen. Beschleuniger bestehen aus der Elektronen- oder Ionenquelle, der Beschleunigungsstrecke, der Strahlausführung und dem Target, auf das der Teilchenstrahl aufprallt.

3.1. Anforderungen an Beschleuniger

3.1.1. Teilchenenergie

1. In allen bisher in der Praxis eingesetzten Beschleunigern wird die Energie zur Vergrößerung des Impulses geladener Teilchen, also ihrer kinetischen Energie, aus einem elektrischen Feld entnommen. Auf die punktförmige Ladung ze wirkt in einem Feld mit der elektrischen Feldstärke $\boldsymbol{E}$ und der magnetischen Induktion $\boldsymbol{B}$ die Kraft

$$\boldsymbol{F} = \dot{\boldsymbol{p}} = ze(\boldsymbol{E} + [\boldsymbol{vB}]) \tag{3.1 a}$$

Die Lorentz-Kraft

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{L}} = ze[\boldsymbol{vB}] \tag{3.1 b}$$

steht senkrecht auf der durch $\boldsymbol{v}$ und $\boldsymbol{B}$ aufgespannten Ebene und verrichtet somit in einem

Bezugssystem, in dem das Feld mit $\boldsymbol{B}$ ruht, keine Arbeit. Sie wird zur Strahlführung und -fokussierung genutzt. Im Unterschied dazu wird von der elektrischen Kraft

$$\boldsymbol{F}_e = ze\boldsymbol{E} \tag{3.1c}$$

an der Ladung eine Arbeit verrichtet, die den Gewinn an kinetischer Energie darstellt. Durch Multiplikation von (3.1c) mit $\boldsymbol{v}$ und unter Berücksichtigung von

$$\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}\boldsymbol{p} = \mathrm{d}E_k \quad \text{und} \quad \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \boldsymbol{v}\,\mathrm{d}t\,, \tag{3.2}$$

wobei $\boldsymbol{r}$ die Teilchenortskoordinate ist, erhält man

$$\mathrm{d}E_k = ze\boldsymbol{E}\,\mathrm{d}\boldsymbol{r}\,. \tag{3.3}$$

Wess es sich um ein zeitunabhängiges, also statisches Feld mit einem Potential handelt, das der Gleichung

$$\boldsymbol{E} = -\operatorname{grad} U \tag{3.4}$$

genügt, dann ergibt sich durch Integration von (3.3) der Energiesatz in der Form

$$E_k + zeU = \text{const}\,. \tag{3.5}$$

Die Potentialbedingung bedeutet, daß der Energiezuwachs unabhängig vom zurückgelegten Weg ist und nur von der durchlaufenen Potentialdifferenz ΔU abhängt:

$$E_k = ze \cdot \Delta U\,. \tag{3.6}$$

Der maximale Energiezuwachs ist proportional zum maximalen Potentialunterschied, der in der Praxis zwischen 10 und 20 MV liegt. Den prinzipiellen Aufbau eines Potentialbeschleunigers zeigt die Abb. 3.1. Größere Energien werden durch mehrmaliges Durchlaufen der Spannungsdifferenz erreicht.

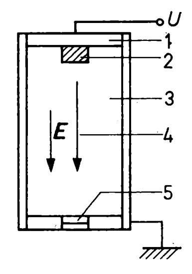


Abb. 3.1
Prinzipieller Aufbau eines Potentialbeschleunigers
1 Hochspannungselektrode, 2 Ionenquelle, 3 Vakuum- oder Beschleunigungskammer, 4 Teilchenstrahl, 5 Fenster zur Strahlherausführung

Als Einheit der Energie verwendet man in der Kern- und Elementarteilchenphysik das Elektronenvolt (eV). Das ist die Energie, die ein Teilchen der Ladung e beim Durchlaufen einer Spannungsdifferenz von 1 V aufnimmt. Für den Zusammenhang des eV mit den anderen SI-Einheiten folgt aus der Gleichheit von 1 Nm = 1 VAs, aus (3.6) und der Größe der elektrischen Elementarladung von $1{,}602 \cdot 10^{-19}$ As die Beziehung

$$1\ \text{eV} = 1{,}602 \cdot 10^{-19}\ \text{VAs}\,. \tag{3.7}$$

2. Eine zweite Möglichkeit der Teilchenbeschleunigung basiert auf der Nutzung eines quasistatischen elektrischen Feldes, d. h. eines Feldes, das sich während der Flugdauer der Ladungen nur langsam ändert. Die Potentialbedingung (3.4) muß hier fallengelassen werden, weil es sich um ein elektrisches Wirbelfeld handelt, das gemäß der Maxwellschen Gleichung

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = -\dot{\boldsymbol{B}} \tag{3.8}$$

mit der zeitlichen Änderung der magnetischen Induktion im Zusammenhang steht. Man spricht daher auch von Induktionsbeschleunigung. Zur Berechnung des Energiezuwachses ΔE_k gehen wir von einem hinreichend langsam zeitlich veränderlichen Magnetfeld aus, so daß seine Feldlinien wie in Abb. 3.2 dargestellt, in sich geschlossen sein können. Entlang des Teilchenweges in diesem Magnetfeld wirkt zwischen den Punkten A und B die elektrische Feldstärke $\boldsymbol{E}$.

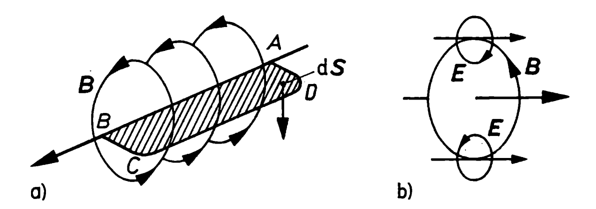


Abb. 3.2
Zum Prinzip der Induktionsbeschleunigung: a) magnetische Feldlinien und Integrationsfläche zwischen A, B, C, D, A, b) gegenseitige Orientierung von $\boldsymbol{B}$ und $\boldsymbol{E}$

Durch Integration von (3.8) entlang des Teilchenweges AB und unter Einschluß der Magnetfeldlinien in einer Fläche S erhält man die elektromagnetische Kraft entlang AB. Mit Hilfe des Stokesschen Satzes kann man schreiben

$$\oint_{ABCD} \boldsymbol{E}\, \mathrm{d}\boldsymbol{r} = -\int_S \dot{\boldsymbol{B}}\, \mathrm{d}\boldsymbol{S} - \dot{\Phi} \tag{3.9}$$

wobei Φ der Magnetfluß $\int \boldsymbol{B}\, \mathrm{d}\boldsymbol{S}$ durch die schraffierte Fläche ist. Die Annahme, daß es sich um ein quasistationäres Feld handelt ermöglicht die Berechnung des Energiezuwachses des Teilchens zwischen A und B durch Integration von (3.3), was auf

$$\Delta E_k = -ze\dot{\Phi} \tag{3.10}$$

führt. Damit für ein positives Teilchen der Energiezuwachs positiv ist, muß $\boldsymbol{B}$ dem Flächenelement $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ entgegengesetzt gerichtet sein und im Absolutbetrag anwachsen oder in Richtung $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ weisen und abnehmen. Im Unterschied zur Potentialbeschleunigung hängt bei der Induktionsbeschleunigung der Energiezuwachs auch von der Teilchenbahn ab. Man nennt den Induktionsbeschleuniger auch oft Transformatorbeschleuniger. Das hängt damit zusammen, daß der Teilchenstrahl als Sekundärwicklung aufgefaßt werden kann, die zur Erzeugung des Magnetfeldes erforderliche Spule als Primärwicklung.

3. In (3.1 a) wird ein Teilchen mit verschwindenden elektrischen und magnetischen Momenten zugrunde gelegt. Tatsächlich ist das elektrische Dipolmoment der Atomkerne und Elementarteilchen gleich null. Das magnetische Dipolmoment hat aber oft einen von null verschiedenen Wert. Die Energie eines magnetischen Dipols mit dem magnetischen Dipolmoment $\boldsymbol{\mu}$ ergibt sich zu $E_m = -\boldsymbol{\mu}\boldsymbol{B}$. Das Minuszeichen steht für die antiparallele Einstellung von $\boldsymbol{\mu}$ und $\boldsymbol{B}$. Um einen Vergleich des Energiezuwachses über die elektrische Ladung einerseits und das magnetische Dipolmoment andererseits zu ermöglichen, nehmen wir an, daß $\boldsymbol{\mu}$ und $\boldsymbol{B}$ nur eine z-Komponente haben. Dann ist $E_m = -\mu_z B_z$ und $\mathrm{d}E_m/\mathrm{d}z = -\mu_z(\mathrm{d}B/\mathrm{d}z)$. Setzen wir μ dem Kernmagneton $\mu_K = 3{,}152 \cdot 10^{-14}$ MeV/T gleich (siehe 6.4.1.) und $B = 2T$, dann ergibt sich eine magnetische Energie von $6{,}3 \cdot 10^{-8}$ eV und somit $\mathrm{d}E_m/\mathrm{d}z = 10^{-8}$ eV/cm. Da man in Beschleunigern elektrische Feldstärken von 10^5 V/cm erzeugen kann, liegen die Energiegewinne bei Beschleunigung über die elektrische Ladung e bei 10^5 eV/cm. Das magnetische Dipolmoment geladener Teilchen trägt somit fast nicht zur Beschleunigung bei. Das gleiche gilt auch für

die Beschleunigung über das elektrische Quadrupolmoment der Kerne; man kann sie vernachlässigen.

4. In den meisten Kernreaktionen sollen die Geschoßteilchen in die Targetkerne eindringen. Das ist nur möglich, wenn die Coulomb-Barriere überwunden wird, die bei der Annäherung zweier geladener Teilchen auftritt. Erst dann beginnen die Kernkräfte zu wirken. Zur Berechnung der erforderlichen kinetischen Mindestenergie betrachten wir den allgemeinen Fall der Reaktion zwischen zwei Kernen X_1, X_2 mit den Ladungen Z_1e und Z_2e. Die Massenzahl sei A_1 und A_2. Die Reaktionsgleichung soll lauten

$$X_1(Z_1, A_1) + X_2(Z_2, A_2) \rightarrow X(Z = Z_1 + Z_2, A = A_1 + A_2)\,. \tag{3.11}$$

Setzt man den Kernradius gemäß (6.30) zu $R = r_0 A^{1/3}$ mit $r_0 = 1{,}29 \cdot 10^{-15}$ m an, so gelangen zwei Kerne bei

$$R = R_1 + R_2 = r_0(A_1^{1/3} + A_2^{1/3}) \tag{3.12}$$

in den Bereich der Kernkräfte. Die Energie der Coulomb-Barriere an dieser Stelle ist

$$E_C = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\varepsilon_0 R} \approx \frac{Z_1 Z_2}{A_1^{1/3} + A_2^{1/3}}\ \text{MeV}\,. \tag{3.13}$$

Die zur Auslösung der Reaktion erforderliche kinetische Mindestenergie verteilt sich auf E_C und die Bewegungsenergie des Massenmittelpunktes (vgl. Abb. 3.3). In dem hier betrachteten Fall ist E_C mit der Reaktionsenergie (2.37) identisch. Da E_Q auch negativ, E_k nur positiv sein kann, setzen wir $|E_Q|$ ein und erhalten ganz allgemeingültig

$$E_{k,\min}(1) = E_C + E_k(M)\,. \tag{3.14a}$$

Über die Impulse im M-System (2.33), d. h. über $|\boldsymbol{p}_1| = |-\boldsymbol{p}_2|$ sowie mit Hilfe von $E_k(M) - p_M^2/2m = p_1^2/2(m_1 + m_2)$ findet man die Schwellwertenergie

$$E_{k,\min}(1) = |E_Q| \left(1 + \frac{E_{01}}{E_{02}}\right) = |E_Q|\,\frac{A_1 + A_2}{A_2}\,. \tag{3.14b}$$

Im speziellen Fall des Stoßes zweier Urankerne mit $Z_1 = Z_2 = 92$ und $A_1 = A_2 = 238$ sind $E_C = 667$ MeV und $E_{k,\min}(1) = 1334$ MeV. Man gibt die kinetische Energie der schweren Ionen oft bezogen auf das einzelne Nukleon in MeV pro Nukleon an. In diesem Falle sind das 5,6 MeV/Nukleon. In Abb. 3.3 ist $E_{k,\min}$ für die Fälle $Z_1 = Z_2$ sowie für Z_1 variabel und $Z_2 = 92$ über A_1 in MeV/Nukleon eingezeichnet.

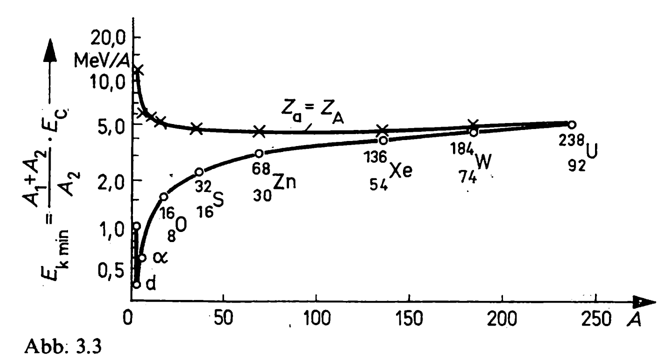


Abb. 3.3
Kinetische Energie E_k in MeV/A zur Überwindung des Coulomb-Walls als Funktion von A_1 für $Z_1 = Z_2$ (oben) Z_1 variabel, $Z_2 = 92$ (unten)

5. Mit beschleunigten Teilchen lassen sich auch Strukturuntersuchungen durchführen. Die Grundlagen haben viel Ähnlichkeit mit den aus der Optik bekannten Gesetzmäßigkeiten über Interferenz und Beugung. Von dort ist bekannt, daß Beugungserscheinungen dann deutlich auftreten, wenn die Wellenlänge des verwendeten Lichts λ und die Breite eines Spalts oder Hindernisses d der Ungleichung

$$\lambda \ll d \tag{3.15}$$

genügen. Fällt das Licht auf ein Gitter mit der Gitterkonstanten g, so findet man unter dem Beobachtungswinkel α hinter dem Gitter Hauptmaxima der Intensität gemäß

$$\sin\alpha = \pm n\lambda/g\,; \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)\,. \tag{3.16}$$

Die Laufzahl n heißt Ordnung des Hauptmaximums. Auf Grund des eindeutigen Zusammenhangs zwischen der Form des Beugungsgegenstandes und des Beugungsbildes lassen sich um so feinere Strukturen, beim Gitter um so kleinere Gitterkonstanten bestimmen, je kleiner λ ist. In der Optik wird weiter gezeigt, daß das Auflösungsvermögen eines Gitters $\lambda/\Delta\lambda_{\mathrm{min}}$ proportional ist zur Zahl der Gitterspalten N:

$$\lambda/\Delta\lambda_{\mathrm{min}} = nN\,. \tag{3.17}$$

Bei der Anwendung auf die Kernphysik behalten die Gleichungen (3.15) und (3.16) ihre Gültigkeit. An die Stelle der Lichtwelle tritt lediglich die Materiewelle. Aussagen über die Struktur eines Objekts im Abmessungsbereich der Kerne und Elementarteilchen R sind daher nur zu erwarten, wenn die Bedingung (3.15) für die Materiewellenlänge und R erfüllt wird. Meist gibt man hier nicht λ, sondern die durch 2π geteilte Materiewellenlänge an. Sie berechnet sich über

$$\lambdabar = \hbar/p\,. \tag{3.18}$$

Setzt man den Impuls gemäß (B. 4) ein, so erhält man

$$\lambdabar = \hbar c\left[E_0\sqrt{\left(\frac{E_\mathrm{k}}{E_0}\right)^2 + 2\left(\frac{E_\mathrm{k}}{E_0}\right)}\right]^{-1} \tag{3.19a}$$

Im ultrarelativistischen Falle mit $E_\mathrm{k} \gg E_0$ ergibt sich daraus

$$\lambdabar = \hbar c E_\mathrm{k}^{-1}\,, \tag{3.19b}$$

und im nichtrelativistischen Falle mit $E_\mathrm{k} \ll E_0$ folgt

$$\lambdabar = \hbar c(2E_0E_\mathrm{k})^{-1/2}\,. \tag{3.19c}$$

In Tabelle 3.1 sind für einige wichtige Teilchenarten Energie und Materiewellenlänge aufgeführt. Ausführungen über den Zusammenhang zwischen Beugungsgegenstand und Beugungsbild sind im Abschnitt 6.2. und im Anhang B 4. bis B 6. enthalten.

Die Analogie zu (3.17) ist nicht so offensichtlich. In der Optik werden Spaltzahlen von etwa 10^5 erreicht. In der Kernphysik tritt an die Stelle der Spaltzahl N die Zahl der Kerne oder Elementarteilchen im Target. Dabei handelt es sich um sehr große Zahlen. In der Optik lassen sich die Möglichkeiten von (3.17) voll ausschöpfen, da sehr monochromatisches Licht mit $\Delta\lambda/\lambda \ll 10^5$ verwendet werden kann. In der Kern- und Elementarteilchenphysik geht das nicht. Hier ist die Monochromazität der an den Beschleunigern zur Verfügung stehenden Teilchenstrahlen $E_\mathrm{k}/\Delta E_{\mathrm{k,\,min}}$ infolge einer erheblichen Energieunschärfe ΔE_k bestenfalls von der Größenordnung 10^4. Damit mehr Feinheiten einer Struktur erkannt werden können, ist es daher ein ausgesprochenes Ziel vieler Beschleunigerentwicklungen, die Monochromazität so groß als nur möglich zu machen.

Tabelle 3.1
Energie-, Wellenlängen- und Strukturvergleich

Teilchenart	Elektronen			Photonen	
Struktur	E_k/eV	v/cm · s^{-1}	$\bar{\lambda}$/cm	E_k/eV	$\bar{\lambda}$/cm
Moleküle Gitterkonstanten $(10^{-7} \div 10^{-8})$ cm	10^{-2}	$5{,}93 \cdot 10^6$	$1{,}97 \cdot 10^{-7}$	10^2	$1{,}99 \cdot 10^{-7}$
Nukleonen- und Kernradien $(1 \cdots 8) \cdot 10^{-13}$ cm	10^8	$0{,}997c$	$1{,}97 \cdot 10^{-13}$	10^8	$1{,}99 \cdot 10^{-13}$
Reichweite der schwachen Wechselwirkung 10^{-14} cm	10^{10}	$0{,}999c$	$1{,}99 \cdot 10^{-15}$	10^{10}	$1{,}99 \cdot 10^{-15}$

Teilchenart	Nukleonen		
Struktur	E_k/eV	v/cm · s^{-1}	$\bar{\lambda}$/cm
Moleküle Gitterkonstanten $(10^{-7} \div 10^{-8})$ cm	10^{-3}	$4{,}4 \cdot 10^4$	$1{,}46 \cdot 10^{-8}$
Nukleonen- und Kernradien $(1 \cdots 8) \cdot 10^{-13}$ cm	$10^6 \cdots 10^8$	$(1{,}39 \cdots 9{,}3) \times 10^9$	$(4{,}57 \cdots 0{,}35) \times 10^{-13}$
Reichweite der schwachen Wechselwirkung 10^{-14} cm	10^{10}	$0{,}952c$	$1{,}91 \cdot 10^{-15}$

6. In Kernreaktionen können Teilchen erzeugt werden, weil kinetische Energie in Ruhenergie umgewandelt werden kann und umgekehrt. Diese Erkenntnis wurde erstmals 1924 von E. RUTHERFORD bei der Bilanzierung von Kernreaktionen gewonnen. Er stellte fest, daß der Einsteinsche Zusammenhang $E = mc^2$ die quantitative Grundlage liefert. Daß bei den Umwandlungen eine Reihe von Erhaltungssätzen gilt, wird in späteren Kapiteln behandelt. Die Kinematik solcher Prozesse wird in Anhang B erörtert. Hier soll lediglich auf der Grundlage der Erhaltung von Energie und Impuls die Minimalenergie zur Teilchenerzeugung berechnet werden. Für einen unelastischen Stoßprozeß zwischen zwei Teilchen X_1 und X_2 mit den Ruhenergien E_{01} und E_{02} gemäß

$$X_1 + X_2 \to X_3 + X_4 + \cdots + X_n, \tag{3.20}$$

wobei die erzeugten Teilchen die Ruhenergien E_{0i} mit $i = 3, 4, \ldots$ haben, beträgt die kinetische Minimal- oder Schwellwertenergie für den Fall, daß nur X_1 Bewegungsenergie besitzt

$$E_{k,\min} = \frac{\left(\sum_{j=3}^{n} E_{0j}\right)^2 - (E_{01} + E_{02})^2}{2E_{02}} . \tag{3.21}$$

Die Gleichung (3.21) läßt sich einfach herleiten. Aus der Invarianz der Quadrate der Ruheenergie in verschiedenen Inertialsystemen gemäß (2.20) folgt für die Reaktion (3.20)

$$E_0^2(X_1 + X_2) = c^2(\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2)^2 = c^2(p_3 + p_4 + \cdots + p_n)^2 . \tag{3.22}$$

Im M-System gilt gemäß (2.40)

$$\boldsymbol{p}_1^{(M)} + \boldsymbol{p}_2^{(M)} = \boldsymbol{p}_3^{(M)} + \boldsymbol{p}_4^{(M)} + \cdots + \boldsymbol{p}_n^{(M)} = 0 , \tag{3.23}$$

so daß

$$E_0^2(X_1 + X_2)_{\min} = (E_{03} + E_{04} + E_{05} + \cdots + E_{0n})^2 = \left(\sum_{j=3}^{n} E_{0j}\right)^2 . \tag{3.24}$$

Im L-System gilt mit $\boldsymbol{p}_2 = E_{k2} = 0$ wie in (2.30)

$$E_0^2(X_1 + X_2) = (E_{01} + E_{02})^2 + 2E_{02}E_{k1} . \tag{3.25}$$

Durch Gleichsetzen von (3.24) und (3.25) erhält man (3.21). Führt man in (3.21) noch die Reaktionsenergie

$$E_Q = \sum_j E_{0j} - (E_{01} + E_{02}) \tag{3.26}$$

ein, so erhält man schließlich

$$E_{k,\min} = E_Q \left(\frac{E_Q}{2E_{02}} + \frac{E_{01}}{E_{02}} + 1\right) . \tag{3.27}$$

Es zeigt sich, daß infolge des Rückstoßes, den das gestoßene Teilchen und damit der Massenmittelpunkt übernehmen, die kinetische Minimalenergie viel größer ist, als die Ruhenergie der zu erzeugenden Teilchen. Nehmen wir z. B. die Erzeugung eines Pions in der Reaktion

$$\mathrm{p} + \mathrm{p} \rightarrow \mathrm{p} + \mathrm{p} + \pi . \tag{3.28}$$

Für sie ergibt sich aus (3.21)

$$E_{k,\min} = 2E_{0\pi} \left(1 + \frac{E_{0\pi}}{4E_{0p}}\right) = 290\ \mathrm{MeV} . \tag{3.29}$$

Die Ruhenergie des Pions beträgt etwa 140 MeV. Der Rest muß zur Bewegung des Massenmittelpunkts aufgebracht werden. Für die Erzeugung des Z^0-Eichbosons mit einer Ruhenergie von 93 GeV in der Reaktion

$$\bar{\mathrm{p}} + \mathrm{p} \rightarrow \bar{\mathrm{p}} + \mathrm{p} + Z^0 \tag{3.30}$$

erhalten wir analog

$$E_{k,\min} = 2E_0(Z^0) \left(1 + \frac{E_0(Z^0)}{4E_{0p}}\right) \approx 4800\ \mathrm{GeV} . \tag{3.31}$$

Wir wollen abschätzen, wie groß der Anteil an kinetischer Energie ist, der in Ruhenergie verwandelt werden kann. Das kann mit Hilfe von (3.21) geschehen. Auflösung nach der Ruhenergiedifferenz des Ausgangs- und Eingangskanals und Beschränkung auf den Fall

$$E_{01} = E_{02} = E_0 \tag{3.32}$$

liefert

$$\sum_j E_{0j} - 2E_0 = 2E_0\left[\sqrt{\frac{E_k}{2E_0} + 1} - 1\right]. \tag{3.33}$$

Bei kleinen Werten $E_k \ll 2E_0$ ergibt sich durch Reihenentwicklung

$$\sum_j E_{0j} - 2E_0 = \frac{E_k}{2}. \tag{3.34}$$

Im nichtrelativistischen Falle können also nur 50% der kinetischen in Ruhenergie verwandelt werden. Für sehr große kinetische Energien $E_k \gg 2E_0$ erhält man die Proportionalität

$$\sum_j E_{0j} - 2E_0 \sim \sqrt{\frac{E_k}{2E_0}} \sim \sqrt{E_k}. \tag{3.35}$$

Die Gl. (3.21), (3.27) und (3.33) zeigen deutlich, daß zur Erzeugung von Teilchen mit immer größerer Ruhenergie Beschleuniger für immer größere kinetische Energien gebraucht werden. Wir kommen darauf in Abschnitt 3.4. bei der Besprechung der gegenläufigen Teilchenstrahlen zurück.

3.1.2. Teilchenstromstärke

1. Eine wichtige Voraussetzung für viele kern- und elementarteilchenphysikalische Untersuchungen ist eine möglichst große Erzeugungsrate für die nachzuweisenden Ereignisse oder Teilchen. Je größer sie ist, desto weniger wahrscheinliche Effekte, d. h. Effekte mit um so kleinerem Wirkungsquerschnitt, können nachgewiesen oder genauer untersucht werden. Man spricht in diesem Zusammenhang von der Nachweisempfindlichkeit. Gemäß (2.51) ist die Reaktions- oder Erzeugungsrate $\Delta\dot{N}_j$ für die Teilchen der Sorte j proportional zum Teilchenstrom $\dot{N}_0$, zum Wirkungsquerschnitt σ_j und zur Flächendichte N_S des Targets. Daraus folgt, daß die Strahlstromstärke zum Nachweis von Effekten mit kleinem Wirkungsquerschnitt groß sein muß. Demgemäß wird von Beschleunigern zur Realisierung großer Bildungsraten bei gegebenem Wirkungsquerschnitt und zur Erhöhung der Nachweisempfindlichkeit ein großer Teilchenstrom gefordert, aber auch eine große Flächendichte.

2. Oft ist man bestrebt, nicht nur einen großen Strahlstrom, sondern auch eine große Strahlstromdichte zur Verfügung zu haben. Dafür gibt es eine Reihe von Gründen. Erstens ist es wegen der geringeren Apertur der Strahltransportmagnete nach dem Beschleuniger, aber auch des Beschleunigers selbst billiger, Teilchenströme mit geringerem Strahldurchmesser zu transportieren. Zweitens kann dann die Targetfläche klein gehalten werden, wodurch sie in besserer Näherung als Punktquelle der Reaktionsprodukte betrachtet werden kann. Wir schreiben daher (2.51) für die Stromdichte j ($[j] = \mathrm{s}^{-1} \cdot \mathrm{cm}^{-2}$) um und erhalten

$$\Delta\dot{N} = \sigma j N_S S. \tag{3.36a}$$

3. Nicht in allen Experimenten hat man es mit Targets im festen, flüssigen oder gasförmigen Aggregatzustand zu tun. Ein ganz anderer Fall liegt bei gegenläufigen Teilchenstrahlen mit N_1 und N_2 zur Reaktion kommender Teilchen vor. Die Reaktionsrate wird dann als Produkt

$$\Delta\dot{N} = L\sigma \tag{3.36b}$$

geschrieben. Der Proportionalitätsfaktor L wird Luminosität genannt. Stehen die Teilchenstrahlen in Form von Teilchenpaketen oder Teilchenwolken zur Verfügung, die einander mit der Frequenz f durchdringen, und hat die Reaktionszone den Querschnitt S, dann ist

$$L = \frac{N_1 N_2}{S} f. \tag{3.37a}$$

Die Luminosität hat ein Maximum bei $N_1 = N_2 = N$; sie ist um so größer, je größer das Produkt aus den Teilchenzahlen und der Frequenz ist und umgekehrt proportional zum Querschnitt der Strahlenbündel:

$$L = \frac{N^2}{S} \cdot f. \tag{3.37b}$$

3.1.3. Teilchensortiment

Die ersten Teilchen, die zu Zwecken der kernphysikalischen Forschung beschleunigt wurden, waren Protonen. Im Jahre 1932 lösten J. D. Cockroft und E. Walton mit Protonen, die sie auf 300 keV beschleunigt hatten, die Kernreaktion $^7_3\text{Li}(p, \alpha)^4_2\text{He}$ aus. Bald folgte die Beschleunigung von α-Teilchen und Elektronen und etwas später die von Deuteronen, Tritonen und $^3_2$He-Kernen, auch Helionen genannt. Heute werden alle Ionen der stabilen und auch einiger instabiler Nuklide beschleunigt. Im Zusammenhang mit der Beschleunigung der Ionen schwerer Nuklide hat sich die Bezeichnung schwere Ionen (SI) eingebürgert. Alle diese Teilchen werden längst nicht mehr nur für Forschungszwecke beschleunigt. Sie finden breiteste Anwendung bei der Lösung produktionstechnischer Aufgaben.

Viele Teilchen, die in Forschung und Anwendung mit bestimmten Energien benötigt werden, lassen sich nicht primär beschleunigen. Sie müssen als Sekundärteilchen in Kernreaktionen erzeugt werden, die von leicht beschleunigbaren Primärteilchen, wie Elektronen, Protonen, Deuteronen oder α-Teilchen ausgelöst werden. So gehören zu den intensivsten Neutronenquellen neben den Kernreaktoren die Neutronengeneratoren, in denen die Neutronen meist durch niederenergetische Deuteronen in direkten Reaktionen oder durch hochenergetische Protonen in Spallationsreaktionen entstehen. Photonen erzeugt man z. B. als Bremsstrahlung durch Aufprall von Elektronen oder als Synchrotronstrahlung durch Bahnradiusverkleinerung von Elektronenstrahlen. Intensive Mesonenstrahlen erhält man an speziell entwickelten Protonenbeschleunigern mit großem Strahlstrom. Ein Beispiel einer Mesonenerzeugungsreaktion ist in (3.28) angeführt. Andere Sekundärteilchen sind Antiprotonen und Hyperonen. Ein modernes Mittel der Erzeugung von Sekundärteilchen mit großer Ruhenergie sind die Speicherringbeschleuniger oder Kollider mit gegenläufigen Teilchenstrahlen.

Beim Zerfall der meist kurzlebigen Sekundärteilchen entstehen Tertiärteilchen. Die bekanntesten unter ihnen sind die Myonen und die Neutrinos. Myonen werden z. B. beim Zerfall von Pionen emittiert, Neutrinos beim Betazerfall und bei anderen schwachen Zerfällen.

3.2. Geradeausbeschleuniger

3.2.1. Potentialbeschleuniger

Man unterscheidet zwei Arten der Geradeausbeschleuniger, die Potential- oder elektrostatischen Beschleuniger und die Linear- oder Hochfrequenzbeschleuniger.

1. Beim Cockroft-Walton-Beschleuniger wurde das 1920 von H. Greinacher entwickelte Hochspannungserzeugungsprinzip, eine Spannungsverdopplerschaltung, zugrunde gelegt. Das

Verdienst von J. H. COCKROFT und E. WALTON besteht darin, daß sie es erstmalig 1932 erfolgreich zur Teilchenbeschleunigung verfügbar gemacht und eingesetzt haben. Die Hochspannung wird, wie in Abb. 3.4 gezeigt, über in Kaskade geschaltete Gleichrichter erzeugt. Wenn der Transformator die Spannung U_0 liefert und die Kaskaden nicht belastet sind, dann liegt an den Punkten 3, 5, 7 die Gleichspannung $2U_0$, $4U_0$, $6U_0$ an. An den Punkten 2, 4, 6 ändert sie sich durch Umladung zwischen 0 und $2U_0$, $2U_0$ und $4U_0$, $4U_0$ und $6U_0$. Eine Schaltung mit N Kaskaden, die jeweils aus zwei Gleichrichtern und zwei Kondensatoren bestehen, liefert also im unbelasteten Zustand die Spannung



$$U = 2NU_0 \,. \tag{3.38}$$

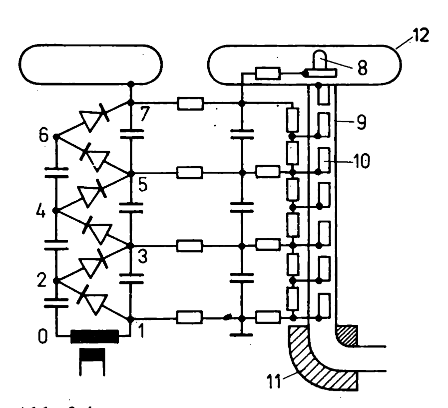


Abb. 3.4
Prinzipieller Aufbau eines Kaskadengenerators
1—7 Potentialpunkte, 8 Ionenquelle, 9 Beschleunigungsrohr, 10 Äquipotentialringe, 11 Ablenkmagnet, 12 Hochspannungselektrode

Der Nachteil dieser Beschleuniger besteht darin, daß bei belasteter Kaskade geringere Spannungen erhalten werden und daß die Welligkeit der Hochspannung mit der Belastung zunimmt. Zur Verminderung der Welligkeit wird die Hochspannung über ein Filternetzwerk an die Hochspannungselektrode angelegt. In ihr befindet sich die Ionen- oder Elektronenquelle. Von hier gelangen die Teilchen in das Beschleunigungsrohr, das aus ringförmigen Zwischenelektroden, die durch Porzellanringe voneinander isoliert sind, besteht. Die Ringe sind durch gleich große Hochohmwiderstände miteinander verbunden und werden so auf äquidistantem Potential gehalten. Man erreicht dadurch eine konstante, Überschläge verhindernde Spannungsverteilung zwischen den Ringen und durch geeignete Formgebung der Ringe gleichzeitig eine Strahlfokussierung. Das Beschleunigungsrohr ist evakuiert, damit die Zahl der aus der Ionenquelle kommenden und zur Beschleunigung bestimmten Ionen oder Elektronen möglichst wenig Zusammenstöße mit Restgasmolekülen erfahren.

Die Cockroft-Walton-Beschleuniger werden für Spannungen zwischen 0,15 und 2 MV gebaut. Die Welligkeit beträgt einige kV. Die Ströme reichen von 1 bis 100 mA. Neben dem Cockroft-Walton-Beschleuniger gibt es auch andere Kaskadenbeschleuniger. Beim Marx- oder Stoßgenerator sind die Kaskaden auf der Grundlage von Funkenstrecken aufgebaut.

2. Im Van-de-Graaff-Beschleuniger wird die elektrische Ladung auf mechanischem Wege in den feldfreien Raum der Beschleunigungselektrode gebracht. Dazu gibt es verschiedene Möglichkeiten. Die verbreitetste ist die 1933 von VAN DE GRAAFF vorgeschlagene. Man bringt auf ein umlaufendes, aus einem isolierenden Material bestehendes Band je nach Bedürfnis positive oder

negative Ladungen auf und transportiert sie mit diesem Band in den feldfreien Raum der gut leitenden Hohlkugel. Die Kugel wird dabei auf die positive oder negative Spannung U aufgeladen. Die Beschleunigung der aus einer Ionenquelle austretenden Teilchen erfolgt wie beim Kaskadengenerator durch ein evakuiertes Beschleunigungsrohr. Der prinzipielle Aufbau des Beschleunigers ist in Abb. 3.5 gezeigt. Die maximal erreichbare Hochspannung hängt vom Radius der Kugel und der Durchbruchfeldstärke E_D der Umgebung ab. Für Luft mit $E_D = 30$ kV pro. cm erreicht man bei einem Kugelradius von 1 m etwa eine Spannung von 1 MV. Durch hochkomprimiertes Gas in einem die Kugel umgebenden Druckbehälter kann man E_D vergrößern. Es gilt der empirische Zusammenhang $E_D = kp$, wobei k ein für das Gas charakteristischer Faktor ist und p der Druck. Mit einer N_2/CO_2-Mischung erzielt man bei $p = (15 \div 20) \cdot 10^5$ Pa Spannungen von bis zu 5 MV.

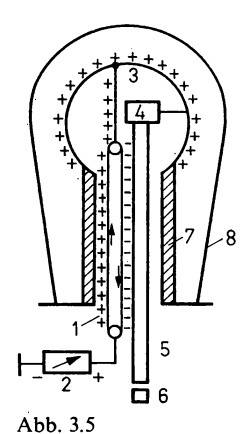


Abb. 3.5
Prinzipieller Aufbau eines Van-de-Graaff-Generators
1 Band, 2 Spannungsquelle, 3 Hochspannungselektrode, 4 Ionenquelle, 5 Beschleunigungsrohr mit hier nicht eingezeichneten Potentialringen, die über eine Widerstandskette angeschlossen sind, 6 Target, 7 Isolator, 8 Druckbehälter

Tabelle 3.2
Charakteristische Angaben über Geradeausbeschleuniger

Beschleunigertyp	Teilchenart	Energiebereich für p oder e in MeV	Maximale mittlere Stromstärke für p oder e in μA	Höhe oder Länge in m	Betriebsweise
Kaskadengenerator	e, p, ..., SI	0,1 ··· 6	10^4	1 ··· 6	kontin.; ns-, μs-, ms-Pulsung
Van-de-Graaff-Generator	e, p, ..., SI	0,1 ··· 10	10^3	1 ··· 10	kontin.; ns-, μs-, ms-Pulsung
Tandemgenerator	e, p, ..., SI	10 ··· 30	10	10 ··· 30	kontin.; ns-, μs-, ms-Pulsung
Linearbeschleuniger	e	$(1 \cdots 2{,}2) \cdot 10^4$	10^3	$(1 \cdots 3) \cdot 10^3$	NF-Pulsung
	p	1 ··· 800	10^3	1 ··· 850	NF-Pulsung
	SI	(1 ··· 10)/A		100	NF-Pulsung

Tabelle 3.3
Angaben über einige Geradeausbeschleuniger

Beschleuniger	Teilchenart	Energie in MeV	Mittlere Strahlstromstärke in μA	Höhe bzw. Länge in m	Beschleunigungsfrequenz in MHz	Impulsfolgefrequenz in Hz
Tandem in Obninsk Rossendorf (DDR)	p	10	10	11		
Tandem in Daresbury (GB)	p	30	10	41		
Linearbeschleuniger in Charkov (UdSSR)	e	2300	1	250	Runzelröhre 2797	50
Linearbeschleuniger in Stanford (USA)	e	$4{,}7 \cdot 10^4$	10^{-2}	$3 \cdot 10^3$	Runzelröhre 2856	360
Linearbeschleuniger LAMPF in Los Alamos (USA)	p	800	$2 \cdot 10^2$	850	Alvarez-Beschl. $2 \cdot 10^2$ Runzelröhre $8 \cdot 10^2$	
Linearbeschleuniger UNILAC in Darmstadt (BRD)	p ÷ U	10/A	10^{-1}	112,6	Wideroe-Alvarez-Einzelbeschleuniger 27,12 108,48 108,48	

Der Van-de-Graaff-Beschleuniger ist der verbreitetste Niederenergiebeschleuniger der Kernphysik. Er liefert die höchste Spannung aller Potentialbeschleuniger. Außerdem weist er die höchste Spannungskonstanz auf, so daß die hohe Monochromazität von $E_k/\Delta E_k \approx 10^4$ erreicht wird. Die Stromstärke beträgt bei Ionenbeschleunigern für $z = 1$ etwa 0,1 mA, bei Elektronenbeschleunigern etwa 1 mA; sie ist also wesentlich geringer als beim Kaskadenbeschleuniger. Weitere Angaben sind in den Tabellen 3.2 und 3.3 enthalten.

3. Weit verbreitet ist der Tandem-Van-de-Graaff-Beschleuniger. Obgleich Tandembeschleuniger aus den unterschiedlichsten Beschleunigerkombinationen zusammengesetzt sein können, hat sich für diesen Beschleuniger die Kurzbezeichnung Tandembeschleuniger eingebürgert. Das hängt damit zusammen, daß dieser Tandembeschleuniger historisch gesehen der erste und lange Zeit der einzige war. Beim Tandem-Van-de-Graaff-Beschleuniger wird das Potential eines Van-de-Graaff-Generators zweifach genutzt. Den prinzipiellen Aufbau zeigt die Abb. 3.6. Die zweifache Nutzung der einen Spannungsquelle setzt eine Umladung der in der ersten Beschleunigungsstrecke Ionenquelle—Hochspannungspol beschleunigten Ladungen voraus. Da sich negative Ionen beim Durchlaufen dünner Folien oder Gasräume durch das Abreißen von Elektronen fast ohne Intensitätsverluste zu positiven Ladungen umladen lassen, werden beim Tandembeschleuniger negative Ionen in der Ionenquelle auf Erdpotential erzeugt und mit einer positiven Hochspannung beschleunigt. Die Umladung erfolgt in dem innerhalb der Hochspannungselektrode untergebrachten Umladungsraum. Die Monochromazität wird durch den Umladungsprozeß nicht merklich beeinflußt. Nach Durchlaufen des Umladungsraumes werden die nun

positiven Ionen zum Erdpotential hin beschleunigt. Die kinetische Energie berechnet sich hier zu

$$E_k = |z_1 eU| + |z_2 eU|. \tag{3.39}$$

Dabei beziehen sich die Ionisierungen z_1 und z_2 auf die Beschleunigung vor und nach der Umladung. Ein wichtiges Beispiel für oft verwendete Ionen sind H^- und H^+. Die mit Tandem-Van-de-Graaff-Beschleunigern erreichten Ströme sind geringer als die der einfachen Van-de-Graaff-Beschleuniger. Sie betragen einige μA. In den Tabellen 3.2 und 3.3 sind weitere Angaben enthalten.

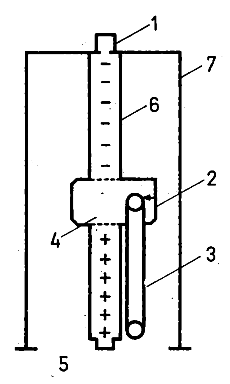


Abb. 3.6
Prinzipieller Aufbau eines Tandemgenerators
1 Quelle negativer Ionen, 2 Hochspannungselektrode, 3 Band, 4 Umladeraum, 5 Target, 6 Beschleunigungsrohr, 7 Druckbehälter

4. Verbreitet sind auch Transformatorbeschleuniger. Bekanntlich kann man mit Transformatoren sehr hohe Spannungen erzeugen und diese dann gleichrichten. Die Spannungen verhalten sich wie die Wicklungszahlen der Primär- und der Sekundärspule, wenn sie sich auf einem gemeinsamen Kern befinden, d. h. beide von dem gleichen Magnetfluß durchflossen werden. Die dabei erzielbare Hochspannung wird meist von Durchschlägen zwischen der Sekundärwicklung und dem Eisen- oder Ferritkern, der sich auf Erdpotential befindet, begrenzt. Diese Durchschläge treten bei Spannungen von einigen 10^5 V auf. Die Lösung des Problems besteht darin, daß

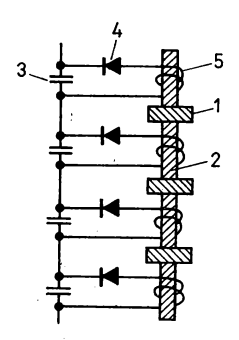


Abb. 3.7
Ausschnitt aus einem Isoliertrafo mit Gleichrichterkette
1 Isolierung, 2 Eisenkern, 3 Kondensator, 4 Gleichrichter, 5 Sekundärwicklung

der Transformatorkern in einzelne Sektionen aufgeteilt wird, die kaskadenartig voneinander isoliert übereinander aufgebaut werden. Die Abb. 3.7 zeigt den prinzipiellen Aufbau. Die Kopplung des magnetischen Flusses von Kern zu Kern erfolgt durch die keramische Isolierplatte hindurch. Es gibt auch andere konstruktive Lösungen. Auf diese Weise ist es gelungen, Beschleuniger zu bauen, die mit Spannungen von bis zu 4 MV arbeiten und Ströme von etwa 30 mA liefern.

3.2.2. Linearbeschleuniger

1. Mit Linearbeschleunigern können viel größere Teilchenenergien erreicht werden als mit Potentialbeschleunigern und das nicht nur absolut gesehen, sondern auch pro Beschleunigungslängeneinheit. Der Grund ist der Ersatz des Prinzips der Beschleunigung mittels statischer Hochspannung durch das Prinzip der Beschleunigung mit Hilfe von hochfrequenten elektrischen Feldern in vielen aufeinanderfolgenden Beschleunigungsabschnitten. Man spricht daher auch von Hochfrequenz- oder kurz HF-Beschleunigern. Das schließt nicht aus, daß viele Kreisbeschleuniger auch HF-Beschleuniger sind. Gleichzeitig können Linear- auch Resonanzbeschleuniger sein. Man versteht darunter Beschleuniger, in denen die Teilchen aufeinanderfolgende Beschleunigungsstrecken durchlaufen, wie das im Linearbeschleuniger der Fall sein kann oder in denen ein und dieselbe Beschleunigerstrecke vielfach durchlaufen wird, wie es von den meisten Kreisbeschleunigerarten bekannt ist. Der Begriff der Resonanz ist in diesen Fällen auf die Phase von Teilchen und hochfrequenter elektrischer Feldstärke an der Beschleunigungsstrecke bezogen. Beschleunigung kann nur erreicht werden, wenn zwischen beiden der erforderliche Synchronismus besteht, wenn die Teilchen am Beschleunigungsspalt phasengerecht eintreffen. Nicht alle Linear- sind gleichzeitig auch Resonanzbeschleuniger. Zu ihnen gehören die Driftröhren-, Wanderwellen- und Hohlraumresonatorbeschleuniger, nicht aber die Induktions- oder Transformatorbeschleuniger. Im Gegensatz zu den Potentialbeschleunigern kann am Linearbeschleunigerausgang kein kontinuierlicher Teilchenstrom, sondern ein Teilchenimpulsstrom abgenommen werden, weil immer jeweils nur ein Teilchenpaket durch alle Beschleunigungsstrecken geführt werden muß. Die Wiederholfrequenz des Impulsbetriebs liegt zwischen einigen und einigen hundert Hertz.

2. Dem Ziel der Linearbeschleunigerentwicklung entsprechend erreichen die Teilchen, insbesondere die Elektronen, meist relativistische Geschwindigkeiten. Berechnet man die Teilchengeschwindigkeit aus der relativistischen Gesamtenergie, so ergibt sich gemäß (B.11) eine Abhängigkeit

$$\beta = \frac{v}{c} = \frac{\sqrt{\left(\frac{E_k}{E_0}\right)^2 + \frac{2E_k}{E_0}}}{1 + \frac{E_k}{E_0}} . \tag{3.40}$$

In Abb. 3.8 ist diese Funktion für Elektronen, Pionen, Protonen, α-Teilchen und ^{238}U-Ionen dargestellt. Man sieht, daß die Elektronen bereits bei relativ kleinen Energien relativistische Geschwindigkeiten haben. Bei Energien von mehr als 3 MeV bewegen sie sich in guter Näherung mit Lichtgeschwindigkeit. Das hat Konsequenzen für den Bau von hochenergetischen Beschleunigern. Sie sind eine Ursache dafür, daß sich hochenergetische Elektronenbeschleuniger zum Teil wesentlich von hochenergetischen Ionenbeschleunigern unterscheiden. In der Tabelle 3.2 sind Angaben über HF-Beschleuniger enthalten.

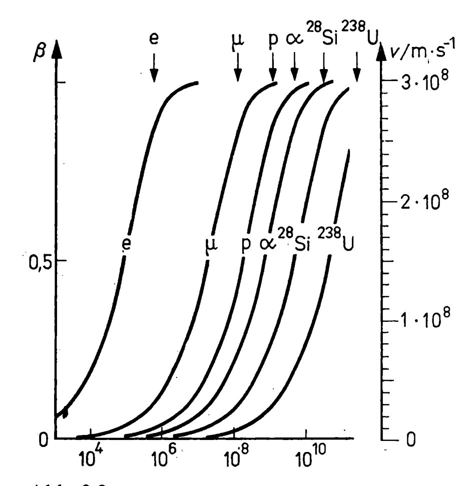


Abb. 3.8
$\beta = v/c$ als Funktion der kinetischen Energie E_k/eV für verschiedene Teilchen

3. Das Prinzip des Driftröhrenbeschleunigers, das 1929 von R. WIDEROE vorgeschlagen wurde, ist in Abb. 3.9 schematisch dargestellt. Die Beschleunigung erfolgt für Teilchenpakete nacheinander an N Beschleunigungsstrecken, an die eine hochfrequente Spannung U_N mit der festen Frequenz f angelegt ist. Dazwischen liegen die im Innern feldfreien, als Rohre ausgebildeten Driftstrecken mit der Länge l_N. Frequenz und Driftstreckenlänge sind so bemessen, daß die Drift- und Umpolzeit der HF-Spannung an den Elektroden gerade gleich sind. Dadurch erfahren die zu beschleunigenden Teilchen am Beschleunigungsspalt, einem Hohlraumresonator, immer die gleiche Beschleunigung. Man sagt, sie kommen dort phasenrichtig an.

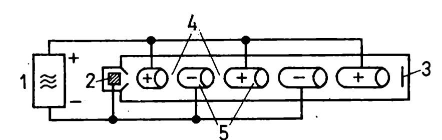


Abb. 3.9
HF-Linearbeschleuniger nach WIDEROE
1 HF Generator, 2 Ionenquelle, 3 Target, 4 Beschleunigungsstrecken, 5 Driftstrecken

Die kinetische Energie berechnet sich wie für einen elektrostatischen Beschleuniger mit N Beschleunigungsstrecken zu

$$E_k = zeNU_N \,. \tag{3.41}$$

Da die Geschwindigkeit v_N der zu beschleunigenden Teilchen nach jeder Beschleunigungsstrecke zunimmt, muß die Länge der Driftstrecken l_N mit wachsender Energie größer werden. Aus der Bedingung für die halbe HF-Periode

$$\frac{T}{2} = \frac{l_N}{v_N} \tag{3.42}$$

folgt im nichtrelativistischen Fall mit $v = \sqrt{2E_k/m}$ und unter Berücksichtigung von (3.41)

$$f = \frac{v_N}{2l_N} = \frac{1}{2l_N}\sqrt{\frac{2NzeU_N}{m}} \,. \tag{3.43}$$

Für große Werte von z/m, d. h. für Elektronen und leichte Ionen sind sehr lange Driftstrecken l_N oder sehr große Frequenzen f erforderlich. Daher gelang mit den Driftröhrenbeschleunigern nur die Beschleunigung sehr schwerer Ionen. Die Beschleunigungsfeldstärken liegen bei (1—2) MeV/m.

4. Im Wanderwellenbeschleuniger wirkt auf die zu beschleunigenden Teilchen die Längskomponente in einem Wellenleiter entlang laufenden elektromagnetischen Wellen. Die Teilchen werden in die Laufrichtung eingeschossen und sollen von der Welle mitgenommen werden, auf ihr reiten. Deshalb spricht man auch vom Wellenreiterprinzip. Die von den Teilchen aufgenommene Energie ist proportional zur elektrischen Feldstärke in Laufrichtung und zur zurückgelegten Wegstrecke. Die Mitnahme ist allerdings nur möglich, wenn die Phasengeschwindigkeit der Welle und die Geschwindigkeit der Teilchen in Übereinstimmung gebracht werden können. Im einfachsten Wellenleiter, einem leitenden zylindrischen Rohr ist die Phasengeschwindigkeit einer elektromagnetischen Welle größer als die Lichtgeschwindigkeit, während die Teilchengeschwindigkeit nur kleiner sein kann. Zur Verringerung der Phasengeschwindigkeit der Welle werden in dem Wellenleiter metallische Blenden eingebaut. Diese Konstruktion wird Runzelröhre genannt (vgl. Abb. 3.10). Sie ist nur zur Beschleunigung von Elektronen geeignet, da sie nur für Phasengeschwindigkeiten nahe der Lichtgeschwindigkeit in vertretbarem Maße ökonomisch arbeitet. In diesem Geschwindigkeitsbereich bewegen sich aber gerade Elektronen von einigen MeV an, wie man aus Abb. 3.8 ersehen kann.

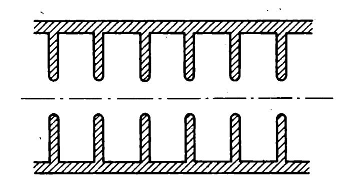


Abb. 3.10
Querschnitt durch eine Runzelröhre

Typische Beschleunigungsfeldstärken sind (1—2) MeV/m, maximal 20 MeV/m. Wanderwellenbeschleuniger arbeiten gegenwärtig in Stanford und Charkow, um nur zwei Beispiele zu nennen. Die Tabelle 3.3 enthält Angaben über diese Beschleuniger.

5. Vom Hohlraumresonator- oder Alvarez-Beschleuniger (auch Alvareztank) spricht man, wenn das in einem einzigen Resonatorhohlraum untergebrachte Driftröhrensystem (Abb. 3.11) mit dem HF-Sender in Resonanz ist. Dann bilden sich in ihm stehende Wellen aus. Auch hier hat der Vektor der elektrischen Feldstärke eine Komponente in die Richtung der Symmetrieachse des Hohlraumresonators.

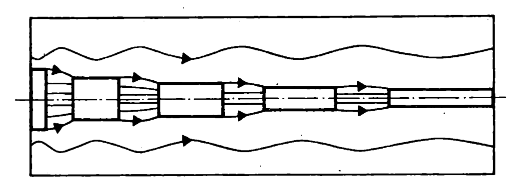


Abb. 3.11
Alvarez-Beschleunigungseinheit mit momentaner Feldverteilung

Der Durchmesser der Driftröhren nimmt mit wachsender Teilchenenergie ab, die Länge zu. Die Beschleunigung wird allein durch die Driftröhren bestimmt und nicht durch die Phasengeschwindigkeit der Welle. Die Driftröhren schirmen die Teilchen gegen Felder des falschen Vorzeichens, also verzögert wirkende Felder, ab. Die Zeit, die benötigt wird, damit ein Teilchenpaket eine Driftröhre und einen Beschleunigungsspalt durcheilt, ist gerade gleich der Periodendauer der stehenden Welle. Das Prinzip ist sowohl zur Beschleunigung von Elektronen als auch zur Beschleunigung von Ionen mit $\beta \lessapprox 0{,}5$ geeignet. Die Beschleunigungsfeldstärken erreichen im besten Falle 10 MeV/m.

Für Ionenbeschleuniger gibt es viele Beschleunigungsstrukturen. Bei großer Variation von β setzt man vorteilhafterweise unterschiedliche Strukturen ein. In der LAMPF (Tabelle 3.3) ist der Niederenergieteil, den Injektor nicht mit gerechnet, als Alvarez-Beschleuniger aufgebaut, der Hochenergieteil stellt eine Konstruktion dar, die der Runzelröhre nahekommt. Der UNILAC in Darmstadt besteht neben dem Injektor aus drei verschiedenen Strukturen (Tabelle 3.3, Abb. 3.12).

6. Das in 3.1.1. beschriebene Prinzip der Induktionsbeschleunigung wird erfolgreich zum Bau von Linearbeschleunigern für Elektronen mit großer Impulsstromstärke und geringer

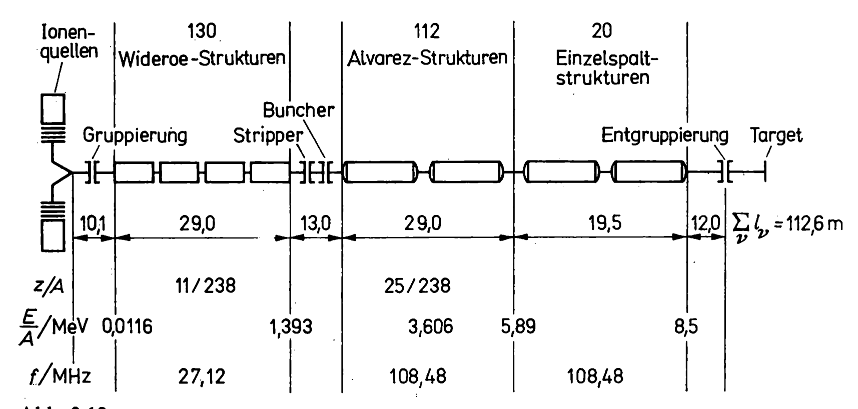


Abb. 3.12
Prinzipieller Aufbau des UNILAC in Darmstadt sowie einige Parameter; Beschleunigungsbeispiel ^{238}U

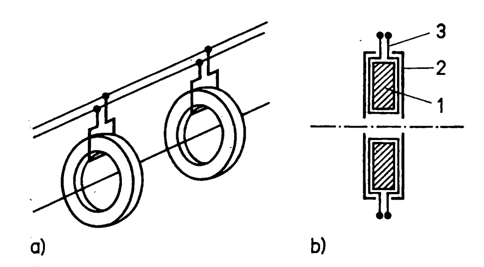


Abb. 3.13
Prinzipieller Aufbau eines Induktions-Linearbeschleunigers
a) Anordnung der Induktoren
b) Querschnitt durch einen Induktor
1 Ferritring, 2 Faraday-Käfig, 3 Erregerwicklung

Energie eingesetzt. Den prinzipiellen Aufbau zeigt die Abb. 3.13. In zylindersymmetrischer Anordnung sind N Ferromagnetringe aufeinanderfolgend aufgestellt. Jeder Ring ist mit einer Erregerspule ausgestattet, die meist nur aus einer Windung besteht, so daß der Transformationskoeffizient 1 beträgt. Zur Konzentration des elektrischen Beschleunigungsfeldes auf der Symmetrieachse ist der Ring mit einem Faraday-Käfig umgeben, der nur nach der Symmetrieachse hin geöffnet ist. Auf diese Weise entsteht bei Anlegen eines Spannungsimpulses an alle Erregerspulen entlang der Symmetrieachse während der Impulsdauer ein quasistationäres elektrisches Beschleunigungsfeld. Der Energiezuwachs pro Ring ist konstant. Oft wird durch eine zweite Wicklung, an die ein nachfolgender gleich großer, aber entgegengesetzt gepolter Impuls angelegt wird, sichergestellt, daß der Ferromagnetkern in die Ausgangsposition der Hysteresekurve zurückgeführt wird. Die gegenwärtig erreichbaren Beschleunigungsfeldstärken betragen bis zu 1 MV/m, die Energien der Elektronen bis zu 5 MeV, ihre Impulsströme erreichen 5 kA. Die Impulsdauern liegen zwischen 20 und 300 ns bei Folgefrequenzen bis zu 60 Hz.

Ein weiterer moderner Linearbeschleuniger, der seit Beginn der 80-er Jahre besonders als Injektor für Ionen (≈ 2 MeV) eingesetzt wird, ist der sogenannte HF-Quadrupol.

3.3. Kreisbeschleuniger

3.3.1. Ionenbeschleuniger

Parallel zur Entwicklung der Geradeausbeschleuniger entstanden die Kreisbeschleuniger. Das Zyklotronprinzip wurde 1932 von E. O. Lawrence zusammen mit S. Livingston nach einer 1930 von E. O. Lawrence veröffentlichten Idee realisiert. Mit dem Zyklotron kann man keine relativistischen Teilchenenergien erreichen. Den Ausweg fanden unabhängig voneinander 1944 V. I. Veksler und 1945 E. M. McMillan im Synchrotronprinzip und in der Autophasierung oder Phasenfokussierung. Es ermöglicht die Beschleunigung geladener Teilchen auf relativistische Energien. Auf dieser Grundlage entstanden die Synchrozyklotrone, Synchrotrone oder Synchrophasotrone. Die Strahldurchmesser waren bei diesen Beschleunigern relativ groß, also die Strahldichte klein. Den Ausweg fand man durch Einführung der starken anstelle der schwachen Fokussierung. Auf der Grundlage eines Vorschlages von N. Christofilos einerseits und E. D. Courant, M. S. Livingston und H. S. Snyder andererseits entstanden die Synchrotrone mit alternierendem Gradienten. Ein Zyklotron für relativistische Teilchen entstand 1958 auf der Grundlage eines Vorschlages von L. H. Thomas aus dem Jahre 1938 durch V. P. Dmitrievskij und V. P. Dželepov als Isochronzyklotron.

3.3.1.1. Zyklotron

Das Zyklotron ist der einfachste Kreisbeschleuniger für Ionen; es gehört zu den Resonanzbeschleunigern. Das erste Zyklotron wurde 1932 in Berkeley in Betrieb genommen, das erste europäische 1937 in Leningrad. Den prinzipiellen Aufbau zeigt die Abb. 3.14. In einer Vakuumkammer befinden sich zwei D-förmige hohle Elektroden, die Duanten oder Dees. Sie werden von einem homogenen magnetischen Querfeld durchsetzt. Zwischen den Duanten ist eine Ionenquelle angeordnet, die die zu beschleunigenden Teilchen liefert. Die Duanten sind an eine hochfrequente Spannungsquelle angeschlossen, so daß sich zwischen ihnen ein elektrisches Wechselfeld ausbilden kann. Das homogene Magnetfeld und das elektrische Wechselfeld stehen senkrecht aufeinander.

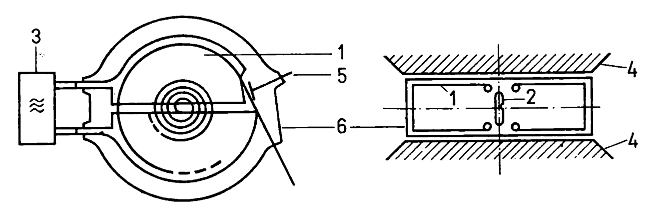


Abb. 3.14
Prinzipieller Aufbau des Zyklotrons
1 Duant, 2 Ionenquelle, 3 HF-Generator, 4 Magnetpolschuh, 5 Deflektor, 6 Beschleunigungskammer

Die Erläuterung der Funktionsweise beginnen wir bei abgeschalteter Hochfrequenzspannung. Aus der Ionenquelle sollen z-fach geladene positive Ionen, wie Protonen, Deuteronen oder α-Teilchen, mit einer geringen Anfangsgeschwindigkeit $\boldsymbol{v}_0$ austreten. Der Austritt ist nur senkrecht zur Richtung der Feldlinien des magnetischen Feldes mit der Induktion $\boldsymbol{B}$ und nur in der Richtung des einen Duanten möglich. Es wirkt dann auf sie die Lorentz-Kraft

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{L}} = ze[\boldsymbol{v}_0\boldsymbol{B}]\,. \tag{3.44}$$

Da diese stets senkrecht auf der Teilchenbahn steht, werden die Teilchen auf eine Kreisbahn gezwungen. Der Radius dieser Bahn kann für nichtrelativistische Werte von $\boldsymbol{v}$ aus der Gleichheit von Zentrifugal- und Lorentz-Kraft berechnet werden:

$$zevB = \frac{m_0v^2}{r}\,. \tag{3.45}$$

Daraus erhält man für den Bahnradius

$$r = \frac{m_0v}{zeB} = \frac{p}{zeB}\,. \tag{3.46}$$

Diese Gleichung gilt auch noch bei relativistischen Geschwindigkeiten, wenn wir den Impuls $p = mv$ einführen, der sich dann zu

$$p = zeBr \tag{3.47}$$

ergibt. Mit der Kreisfrequenz des Teilchenumlaufs ω_{u} erhält man wegen $v = \omega_{\mathrm{u}}r$

$$\omega_{\mathrm{u}} = \frac{vzeB}{p}\,. \tag{3.48}$$

Daraus wird im nichtrelativistischen Fall mit $p = mv$

$$\omega_{\mathrm{u}} = \frac{zeB}{m_0}\,. \tag{3.49}$$

Man erkennt aus (3.49) daß die Kreisfrequenz nicht von der Geschwindigkeit der Teilchen und nicht vom Radius der Bahn abhängt. Sie ist allein durch den (ze/m)-Wert der Teilchen und die Induktion des Magnetfeldes bestimmt.

Legt man an die Duanten eine hochfrequente Hochspannung mit der gemäß (3.49) berechneten Kreisfrequenz ω an, so werden die aus der Ionenquelle austretenden Teilchen im Spalt zwischen den Duanten bei jedem neuen Durchgang unabhängig vom Abstand, den sie vom Mittelpunkt haben, beschleunigt. Solange die Resonanzbedingung

$$\omega_{\mathrm{u}} = \omega \tag{3.50}$$

erfüllt ist, kommen die Teilchen immer phasengerecht am Beschleunigungsspalt an. Dann ist die Driftzeit t_D durch einen Duanten

$$t_D = \frac{T}{2} = \frac{m_0 \pi}{zeB} \tag{3.51}$$

unabhängig vom Radius. Wenn die beschleunigten Teilchen den durch die Außenwand der Duanten gegebenen Maximalradius erreichen, werden sie durch eine Ablenkelektrode, den Deflektor, der an einer hinreichend großen Spannung liegt, aus der Beschleunigungskammer herausgelenkt und treffen meist über ein aus magnetischen Linsen bestehendes Strahltransportsystem auf das Target.

Die kinetische Energie der beschleunigten Teilchen beim Verlassen des Zyklotrons mit dem Maximalradius r_m hängt allein von diesem Radius und von der magnetischen Induktion ab. Unter Berücksichtigung von (3.45) und (3.48) erhält man

$$E_k = \frac{m_0 v^2}{2} = \frac{zevrB}{2} = \frac{zer^2 B\omega_u}{2} = \frac{(zerB)^2}{2m_0}. \tag{3.52}$$

Für $E_{k,max}$ muß anstelle von r der maximale Radius r_m eingesetzt werden. Er ist etwa gleich dem maximalen Duantenradius. Man sieht, daß die Maximalenergie noch von der Ladung und der Masse der Teilchen abhängt, und zwar gemäß $z^2/2m$. Dadurch werden z. B. Protonen auf eine größere Energie beschleunigt als Deuteronen.

Die Resonanzbedingung (3.50) ist nicht bis zu beliebig hohen Energien erfüllbar. Mit wachsender Geschwindigkeit weicht der Impuls gemäß (B. 9a), d. h. mit

$$p = \frac{m_0 v}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{3.53}$$

vom nichtrelativistischen Wert $p = mv$ ab, und (3.49) gilt nicht mehr.[1] Somit wird auch t_D von Umlauf zu Umlauf größer bis schließlich die Teilchen nicht mehr phasengerecht am Beschleunigungsspalt ankommen und, bezogen auf die fest eingestellte Frequenz der Beschleunigungsspannung, außer Takt geraten. Aus diesem Grunde lassen sich mit dem klassischen Festfrequenzzyklotron (FF-Zyklotron) nur Grenzenergien von maximal 20 MeV für Protonen und 30 MeV für α-Teilchen erreichen. Die relativistische Impulsvergrößerung muß kleiner als 2% bleiben. Elektronen lassen sich aus diesem Grunde mit dem FF-Zyklotron gar nicht beschleunigen. Bei ihnen beträgt β, wie aus Abb. 3.8 zu ersehen ist, bereits bei einer Energie von 100 eV etwa 0,02.

Auf den ersten Blick scheint es, als könnte man den relativistischen Impulsanstieg durch eine geeignete Wahl der magnetischen Induktion kompensieren, um so die Driftzeit konstant zu halten. Es müßte dann B die Bedingung

$$B = \frac{B_0}{\sqrt{1-\beta^2}} \approx B_0 \left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{r}{r_0}\right)^2 + \ldots\right]; \qquad r_0 = \frac{c}{\omega_0} \tag{3.54}$$

erfüllen, wobei B_0 der Wert der magnetischen Induktion beim Radius $r = 0$ ist. Als Funktion vom Radius stellt (3.54) eine Funktion $B(r)$ dar, die konkave Form hat. Zeitlich ist sie konstant. Praktisch ließe sich diese Funktion zwar realisieren, aber dann würden die Teilchen nicht mehr fokussiert. Es muß immer dafür gesorgt sein, daß eine zufällige Auslenkung aus der Symmetrieebene heraus durch eine in die Symmetrieebene rücktreibende Kraft kompensiert wird. Diese axiale Fokussierung läßt sich nur durch einen konvexen Verlauf der magnetischen Induktion

[1]) Oft wird im Zusammenhang mit $m = m_0/\sqrt{1-\beta^2}$ vom relativistischen Massenzuwachs gesprochen.

als Funktion des Radius realisieren, d. h. durch eine nach außen gerichtete Krümmung der magnetischen Feldlinien. Das wird an Hand von Abb. 3.15 deutlich. In Abb. 3.16 ist der Verlauf $B(r)$ für $B = B_0$, $B = B_{\text{real}}$ und B gemäß (3.54) eingezeichnet. In Tabelle 3.4 sind einige charakteristische Angaben über Zyklotrone enthalten. In Tabelle 3.5 findet man Angaben über zwei konkrete Zyklotrone, darunter für ein Schwerionenzyklotron.

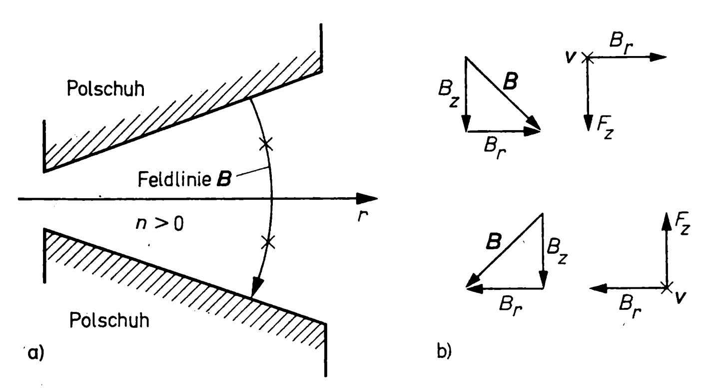


Abb. 3.15
Magnetpolschuhform (a) und Kraftwirkung mit Radialkomponente B_r von $\boldsymbol{B}$ zur Axialfokussierung (b)

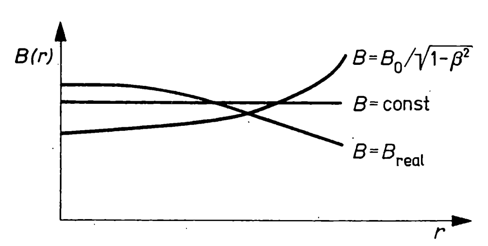


Abb. 3.16
Abhängigkeiten der magnetischen Induktion vom Beschleunigungsradius

3.3.1.2. Synchrotronprinzip und Phasenfokussierung

1. Den Ausweg aus der sich beim FF-Zyklotron ergebenden Energiebarriere infolge des relativistischen Massenzuwachses der beschleunigten Teilchen fanden 1944 V. I. Veksler und unabhängig davon 1945 E. M. McMillan im Synchrotronprinzip und der Phasenfokussierung. Beim Synchrotronprinzip werden nur zu bestimmten, in größeren Abständen aufeinanderfolgenden Zeiten aus der Ionenquelle austretende Teilchen beschleunigt und zur Endenergie geführt. Nur für diese Teilchenpakete wird die Resonanzbedingung erfüllt, indem die Beschleunigungsfrequenz oder die magnetische Induktion oder beide gleichzeitig bis zum Erreichen der Maximalenergie nachgeregelt werden. Erst wenn auf diese Weise ein Ionenpaket als Stromimpuls am Beschleunigerausgang erscheint, beginnt der nächste Beschleunigungszyklus. In Abb. 3.17a ist die Resonanzverstimmung durch relativistische Impulszunahme und infolgedessen einer Zunahme der Umlaufzeit t_U dargestellt. Eine direkte Folge ist die Zunahme des Phasenwinkels $\Delta\varphi$ bis hin zu negativen Spannungswerten, d. h. bis zur Verzögerung. Im Teil b von Abb. 3.17 ist gezeigt, daß man den Phasenwinkel $\Delta\varphi$ durch Vergrößerung der Periodendauer,

Tabelle 3.4
Charakteristische Merkmale und Daten von Kreisbeschleunigern

Beschleunigertyp	$R(E_k)$	$B(R)$	$B(t)$	$f(t)$	Betriebsweise	Fokussierung	Energiebereich für p bzw. e in MeV	Mittlerer Strahlstrom für p bzw. e in μA
Zyklotron	↗	const (↙)	const	const	HF-Imp.	schwach	1 ··· 20	10^3
Isochronzyklotron	↗		const	const	HF-Imp.	stark	20 ··· 600	10^5
Synchrozyklotron	↗	const (↙)	const	↙	NF-Imp.	schwach	200 ··· 1000	10
Synchrozyklotron	↗	const (↙)	const	↙	NF-Imp.	stark	200 ··· 1000	10^2
Protonen-Synchrotron	const	const	↗	↗	NF-Imp.	schwach	$10^3 \cdots 10^4$	10^{-3}
Protonen-AG-Synchrotron	const	const	↗	↗	NF-Imp.	stark	$10^3 \cdots 8 \cdot 10^5$	10^{-2}
FFAG-Beschleuniger	ΔR ↗	(↗)	↗	↗	NF-Imp.	stark	$10^3 \cdots 10^4$	1
Betatron	const	const	↗	const	NF-Imp.	schwach	20 ··· 50	10^3
Mikrotron	↗	const (↙)	const	const	NF-Imp.	schwach	1 ··· 50	10^4
Elektronen-Synchrotron	const	const	↗	const	NF-Imp.	schwach	$10^2 \cdots 10^3$	10^{-3}
Elektronen-AG-Synchrotron	const	const	↗	const	NF-Imp.	stark	$5 \cdot 10^2 \cdots 1{,}2 \cdot 10^4$	10^{-2}
Elektron-Positron-Speicherring	const	const	const	const	HF, stetig	stark	$500 \cdots 10^5$	$5 \cdot 10^4$
Proton-Proton- oder Proton-Antiproton-Kollider	const	const	const	const	HF, stetig	stark	$3 \cdot 10^4 \cdots 8 \cdot 10^5$	$5 \cdot 10^4$

Zeichenerklärung
— ↗ bzw. ↙ bedeutet, daß die Größe mit der angegebenen unabhängigen Variablen zu- oder abnimmt
— (↗) bzw. (↙) bedeutet geringfügige Zu- bzw. Abnahme als Funktion der unabhängigen Variablen
— HF Hochfrequenz
— NF Niederfrequenz

d. h. durch Verringerung der Frequenz, konstant halten kann. Daß die Beschleunigung im abfallenden Teil der HF-Hochspannung erfolgt, hängt mit der Fokussierung des Teilchenstrahls zusammen. Wir kommen darauf in Abschnitt 3.5.1. zurück.

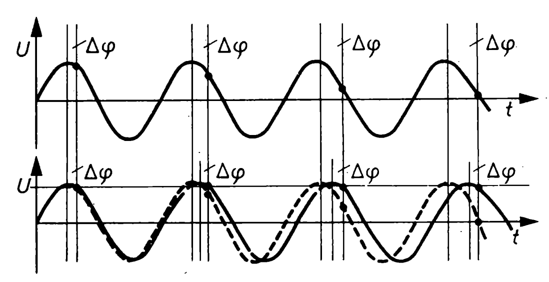


Abb. 3.17
a) Resonanzverstimmung $\Delta\varphi$ durch relativistische Impulszunahme
b) Konstanthaltung von $\Delta\varphi$ durch Nachführung der Frequenz

Nun wären es viel zu wenige Teilchen, die bis zu einer Endenergie geführt werden können, wenn die Phasenlage bei jedem Umlauf exakt die gleiche sein müßte. Ein Beschleunigungsprinzip ist erst dann brauchbar, wenn auf seiner Grundlage genügend hohe Ströme erreichbar sind. Hier ist nun die Phasenfokussierung der Teilchen von entscheidender Wichtigkeit. Solche Teilchen, die relativ zur richtigen Phasenlage um einen Winkel $\Delta\varphi$ früher bzw. später an den Beschleunigungsspalt gelangen, erfahren eine etwas größere bzw. etwas kleinere Beschleunigung. Ihre relativistische Massenzunahme ist infolgedessen größer bzw. kleiner, so daß sie nach dem nächsten Umlauf etwas später bzw. früher am Beschleunigungsspalt ankommen. Diese Phasenfokussierung führt, wie Abb. 3.18 zeigt, zum Pendeln um die Phasenlage der Teilchen, die die Resonanzbedingung von Anbeginn der Beschleunigung exakt erfüllen. Der Energiezuwachs von Umlauf zu Umlauf ist in Abb. 3.19 dargestellt. Für die Resonanzteilchen ergibt sich eine Gerade, für die phasenfokussierten Teilchen eine der Geraden überlagerte Sinuskurve.

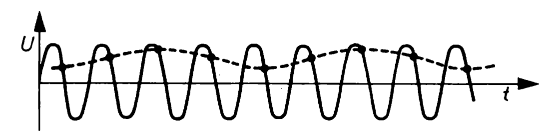


Abb. 3.18
Phasenlage durch Autophasierung

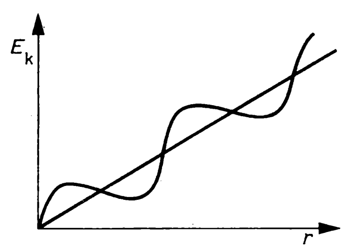


Abb. 3.19
Energiezuwachs bei Autophasierung

Tabelle 3.5: Angaben über einige Kreisbeschleuniger

Beschleuniger	Teilchenart	Energie in MeV	Strahlstromstärke in μA	R/m	B/T	f/MHz	Tastfrequenz in Hz	Fokussierung	Inbetriebnahme
Zyklotron U-120 Rossendorf (DDR)	p d α	6,5 13,5 27	50 50 20	0,60	1,45	11,0	—	schwach	1958
Zyklotron U-310 Dubna (UdSSR)	α-Xe	10/A für z/A = 0,143 ··· 0,286	z. B. 50 für $_{22}Ne^{(+4)}$	1,55	1,68	3,0 ··· 6,0 für z/A = 0,143 ··· 0,286	—	schwach	1960
Synchrozyklotron Dubna	p	680	2,3	3,0	1,68	26,3 ··· 13,9	112	schwach	1949
Isochronzyklotron Villigen (Schweiz)	p	590	100	4,5	2	50	—	stark	1975
Phasotron[1]) in Dubna	p	700	50	3,0	1,19	18,2 ··· 14,4	700	stark	1985
Elektronensynchrotron in Jerewan (UdSSR)	e	6000	10	34	0,006 ··· 0,8	133	100	stark	1967
Protonen-Synchrotron in Serpuchov (UdSSR)	p	$7,6 \cdot 10^4$	10	236	0,0007 ··· 1,2	2,6 ··· 6,1	0,13	stark	1967
Protonen-Synchrotron in Batavia (USA)	p	$8 \cdot 10^5$	0,05	1000	2 ··· 5	50,6	0,067	stark	1972
Protonen-Synchrotron UNK in Serpuchov	p	$3 \cdot 10^6$	0,02	6200	0,7 ··· 5	200	0,025	stark	1993

[1]) Das ist das rekonstruierte Synchrozyklotron.

Super Proton Synchrotron (SPS) CERN, Genf	p	$4{,}5 \cdot 10^5$	0,02	1100	··· 1,8	200	0,1	stark	1976
SPS als Proton-Antiproton-Kollider	p $\bar{p}$	$3{,}15 \cdot 10^5$ $3{,}15 \cdot 10^5$	10^4 10^2	1100 1100			stetig stetig	stark stark	1981
Elektron-Positron-Speicherring VEPP-4 Novosibirsk (UdSSR)	e^- e^+	$6 \cdot 10^3$ $6 \cdot 10^3$	10^4 $5 \cdot 10^3$	36		180	stetig	stark	1979
Elektron-Positron-Speicherring PETRA Hamburg (BRD)	e^- e^+	$2{,}3 \cdot 10^4$ $2{,}3 \cdot 10^4$	$1{,}5 \cdot 10^3$ $1{,}5 \cdot 10^3$	192		500	stetig	stark	1978[1])
Elektron-Positron-Speicherring LEP CERN, Genf	e^- e^+	$5 \cdot 10^4$ $5 \cdot 10^4$	$6 \cdot 10^3$ $6 \cdot 10^3$	4243		352	stetig	stark	1988
Elektron-Proton-Kollider HERA Hamburg (BRD)	e^- p	$3 \cdot 10^4$ $8{,}2 \cdot 10^5$	$5{,}8 \cdot 10^4$ $4{,}8 \cdot 10^5$	541 604	0,19 4,5	500 208	stetig stetig	stark stark	1989

[1]) Wurde 1986 stillgelegt.

Die Phasenfokussierung spielt bei allen Resonanzbeschleunigern eine Rolle, in denen Teilchen in bestimmter Phasenlage an einem Beschleunigungsspalt eintreffen sollen, d. h. auch bei einigen Linearbeschleunigerarten und beim Zyklotron.

Das Synchrotronprinzip läßt sich auf verschiedene Weise verwirklichen. Für die Kreisbeschleuniger sind einige Realisierungsvarianten und charakteristische Angaben über die entsprechenden Beschleunigerarten in Tabelle 3.4 zusammengestellt. Die Tabelle 3.5 enthält Angaben über konkrete Beschleuniger dieser Arten.

2. Das Synchrozyklotron, auch Phasotron genannt, ist ähnlich wie das FF-Zyklotron aufgebaut. Man verwendet die gleiche Form des Magneten, in der Beschleunigungskammer befinden sich die beiden Duanten, die an eine hochfrequente Hochspannung angeschlossen sind. Allerdings ist die Frequenz der Beschleunigungsspannung variabel, und die Abmessungen des Magneten und der Duanten sind wegen der viel größeren Energien wesentlich größer. Die zu beschleunigenden Teilchen bewegen sich wie im Zyklotron im zeitlich konstanten Magnetfeld mit der Induktion $B(t)$ = const auf einer im Zentrum bei der Ionenquelle beginnenden Spirale. In Übereinstimmung mit der relativistischen Impulszunahme und damit Geschwindigkeitsverringerung wird die Frequenz der Beschleunigungsspannung während des Beschleunigerprozesses eines Ionenpakets vermindert. Der Verlauf von $f(t)$ ist in Abb. 3.20 dargestellt. Zur Frequenznachregelung wird nur der zwischen f_{max} und f_{min} dick ausgezogene Teil der abnehmenden Sinuskurve genutzt.

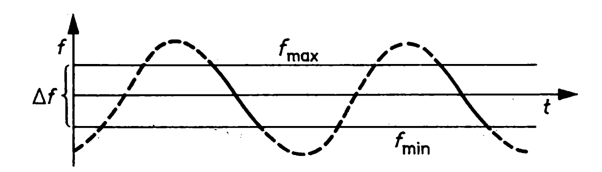


Abb. 3.20
Frequenzänderung beim Synchrozyklotron

Mit Synchrozyklotrons werden meist Protonen, seltener Deutronen und α-Teilchen beschleunigt. Die Energien der Protonen liegen meist im Bereich zwischen einigen hundert MeV bis 1 GeV. Sie sind also wesentlich größer als die mit dem FF-Zyklotron erreichbaren. Bei der Berechnung der kinetischen Energie kann man ausgehend von der Gesamtenergie gemäß (2.16) die Ruhenergie E_0 gegenüber E_k nicht mehr vernachlässigen, da $E_0 \gtrapprox E_k$ ist. Aus

$$E = E_k + E_0 = \sqrt{E_0^2 + c^2p^2} \tag{3.55}$$

folgt unter Berücksichtigung von $p = mv$ beim Maximalradius R

$$E_k = \sqrt{(czeBR)^2 + E_0^2} - E_0 \tag{3.56a}$$

oder

$$E_k(E_k + 2E_0) = (czeBR)^2 \,. \tag{3.56b}$$

Die kinetische Energie wächst also nicht proportional zum Radius, sondern langsamer. Auch das ist ein Grund für die größeren Abmessungen der Magnete und der Duanten. Beim Synchrozyklotron mit der größten Energie dieses Beschleunigertyps in Gačina bei Leningrad, das Protonen auf 1 GeV beschleunigt, hat der Polschuh einen Durchmesser von 6,85 m, die Masse des Magnets beträgt 8500 t. Offensichtlich steht dem Übergang zu noch höheren Energien die ökonomische Barriere der Magnetkosten entgegen.

Während das Zyklotron einen mit der Frequenz der Beschleunigungsspannung gepulsten Strahlstrom liefert, zeichnet sich der Strahlstrom des Synchrozyklotrons neben dieser Mikrostruktur noch durch eine Makrostruktur aus. Sie ist durch die viel geringere Folgefrequenz der Impulspaketbeschleunigung gegeben. Beim Synchrozyklotron in Gačina liegt die Beschleunigungsfrequenz im Bereich zwischen 29,5 bis 13,1 MHz, die Impulspaketbeschleunigungs- oder Tastfrequenz bei 100 Hz. Eine direkte Folge davon sind die weit geringeren mittleren Strahlströme der Synchrozyklotrone. In den Tabellen 3.4 und 3.5 kommt das sehr deutlich zum Ausdruck.

3. Das Synchrophasotron oder Synchrotron ist eine weitere Realisierungsvariante des Synchrotronprinzips, in dem die Phasenfokussierung eine wichtige Rolle spielt. Zur Überwindung der ökonomischen Barriere des Synchrozyklotrons mußte man zu einer günstigeren Form des Magnets übergehen. An die Stelle des Zyklotronmagnets trat der Ringmagnet, bei dem der Auf-

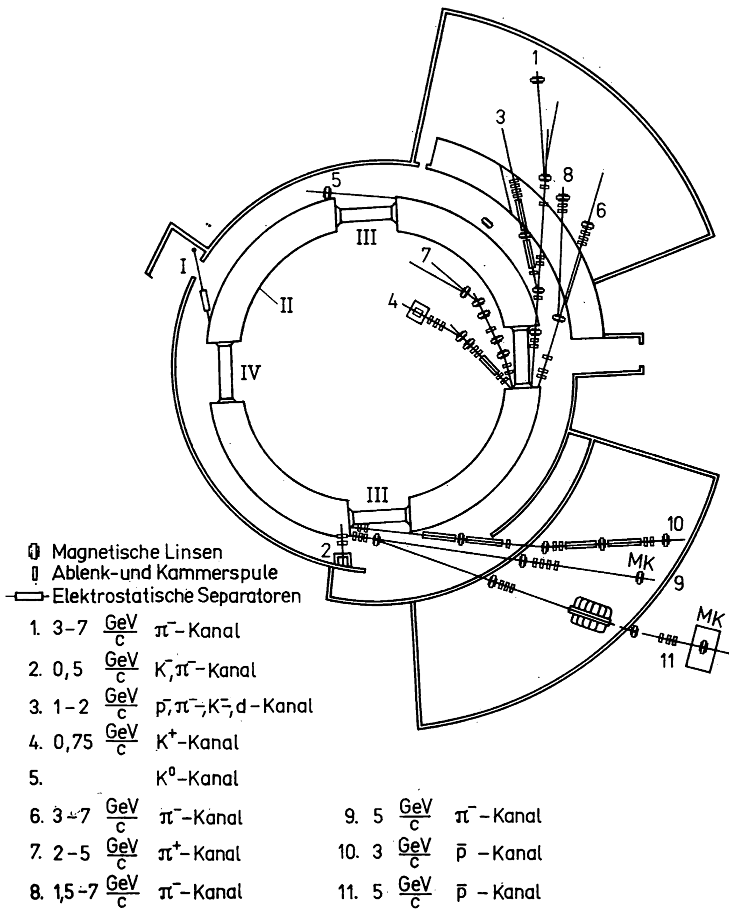


Abb. 3.21
Grundriß des 10-GeV-Synchrophasotrons in Dubna
I Vorbeschleuniger, II Quadrant des Ringmagnets, III Beschleunigungsstrecken, IV Driftstrecken

wand an Stahl pro GeV weit geringer ist. Die damit vorgegebene Bedingung des konstanten Radius $r = R$ zieht die Notwendigkeit der Nachstellung der Induktion $\boldsymbol{B}$ des Magnetfeldes nach sich. Neben der Beschleunigungsfrequenz $f(t)$ muß nun auch $\boldsymbol{B}(t)$ zeitlich veränderlich sein. Während der Dauer eines Beschleunigungszyklus steigt die magnetische Induktion von einem Anfangswert $\boldsymbol{B}_0$, bei dem die zu beschleunigenden Teilchen aus einem Vorbeschleuniger kommend in den Ring eingespeichert werden, auf einen Maximalwert $\boldsymbol{B}_{max}$ nach dem Gesetz

$$|\boldsymbol{B}(t)| = \boldsymbol{B}_0(1 + \alpha t) \leqq |\boldsymbol{B}_{max}| \tag{3.57}$$

an. Die Frequenz $f(t)$ wird über $v(t)/L$ berechnet, wobei $v(t)$ die zeitabhängige Geschwindigkeit und L der pro Beschleunigungszyklus im Beschleuniger zurückgelegte Weg ist. Enthält der Weg neben Ringanteilen auch gerade Strecken, dann ist $L = 2\pi R + l$ mit $l = l_1 + l_2 + \cdots$. Die Geschwindigkeit berechnet man aus (3.55) über $p = mv$ mit $m = m_0(1 + \beta^2)^{-1/2}$ zu $v = c\sqrt{(E^2 - E_0^2)}/E$. Unter Berücksichtigung von (3.47) gilt $\sqrt{(E^2 - E_0^2)} = zeBR$, so daß

$$f(t) = \frac{v(t)}{L} = \frac{c^2 zeRB(t)}{(2\pi R + l)\sqrt{E_0^2 + [czeRB(t)]^2}}\,. \tag{3.58}$$

Mit dem Synchrotron werden meist Protonen, in zunehmendem Maße aber auch schwerere Teilchen beschleunigt. Die Energien der Protonen in modernen Synchrophasotronen können viele GeV betragen. Der derzeit größte Beschleuniger dieser Art in Batavia bei Chikago erreicht eine Endenergie von 800 GeV. In Serpuchov bei Moskau wird ein Synchrotron mit einer projektierten Protonenenergie von 3 TeV gebaut. Die Berechnung der kinetischen Energie erfolgt über den Zusammenhang (3.55). Wegen $E_k \gg E_0$ vereinfacht sich die Gleichung, und man erhält für die Endenergie bei maximaler Induktion

$$E_k = czeRB_{max}\,. \tag{3.59}$$

In Abb. 3.21 ist der Grundriß eines der ersten Beschleuniger dieser Art, des Dubnaer 10-GeV-Synchrophasotrons, dargestellt. Die gesamte Beschleunigerbahn besteht aus vier Ringquadranten, zwei Beschleunigungsstrecken und aus Symmetriegründen zwei Driftstrecken. Der Beschleunigungsprozeß beginnt, nachdem aus dem 9-MeV-Vorbeschleuniger die Protonen in den Ring eingespeichert worden sind. Allgemeine Angaben über Synchrotrone enthält die Tabelle 3.4. Man sieht, daß die Strahlstromstärke bei diesen Maschinen noch geringer ist als bei den Synchrozyklotronen.

3.3.1.3. Schwache und starke Fokussierung

1. In jedem Kreisbeschleuniger treten Schwingungen der Teilchen um den Sollkreis auf, die man nach dem Beschleuniger, in dem sie zuerst evident wurden, Betatronschwingungen nennt. Sie führen zu einer Vergrößerung des Strahlquerschnitts. Bei den ersten Synchrotronen, in denen die sogenannte schwache Fokussierung realisiert war, gab es keine Maßnahmen gegen die Betatronschwingungen. Dadurch betrug z. B. der Querschnitt der Beschleunigungskammer des Dubnaer 10-GeV-Synchrophasotrons $(0{,}4 \cdot 2{,}0)\ \mathrm{m}^2$. Entsprechend ist die Gesamtmasse des Ringes mit einem Radius von 28 m sehr groß, nämlich 36000 t. Ein Übergang zu größeren Energien mit diesem Prinzip der schwachen Fokussierung ist also aus ökonomischen Gründen nicht möglich. Ganz anders liegen die Verhältnisse bei dem rund 10 Jahre später in Betrieb genommenen 76-GeV-Beschleuniger in Serpuchov, dessen Radius 235 m, dessen Magnetmasse aber nur 20000 t beträgt. Die Abmessungen des Querschnitts der Beschleunigungskammer sind hier $(11{,}5 \cdot 17{,}0)\ \mathrm{cm}^2$. Dementsprechend sind die Magnete von geringerem Querschnitt, d. h. geringerer Apertur, und somit auch viel billiger. Die ökonomische Barriere des Synchrotrons mit schwacher Fokussierung wurde mit Hilfe des Prinzips der starken Fokussierung überwunden.

2. Die Betatronschwingungen entstehen unter dem Einfluß der quasielastischen Kraftwirkung des Magnetfeldes auf die Teilchen, wenn diese vom Kreis mit dem Radius R_0 abgelenkt werden. Dafür gibt es genügend Anlaß. Man denke nur an die Zusammenstöße mit den Molekülen des Restgases in der evakuierten Kammer. Damit sowohl in axialer als auch in radialer Richtung rücktreibende, d. h. fokussierende, Kräfte wirken, müssen zwei grundlegende Forderungen vom Magnetfeld erfüllt werden. Sie folgen qualitativ anschaulich aus den Abbildungen 3.15 und 3.22, quantitativ aus den Bewegungsgleichungen. Fokussierung in Radialrichtung setzt für Zentripetal- und rücktreibende Kraft die Bedingung

$$F_z = \frac{mv^2}{r} \lessgtr F_r = zevB = \frac{C}{r^n} \tag{3.60}$$

voraus. Die magnetische Induktion muß also gemäß $B = Cr^n$ abnehmen, wobei der Feldgradient n die Bedingung

$$0 < n < 1 \tag{3.61}$$

zu erfüllen hat. Werte $n > 1$ würden zur Vergrößerung einer plötzlich auftretenden Auslenkung führen, also defokussierend wirken. Für den Feldgradienten gilt

$$n = -(R/B)(\partial B/\partial R)\,. \tag{3.62}$$

Die Abb. 3.22 zeigt den Verlauf der Zentripetalkraft als Funktion von r sowie die Abhängigkeit der rücktreibenden Kraft bei $n < 1$ und $n > 1$.

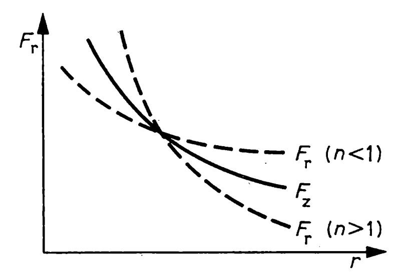


Abb. 3.22
Zentripetal- und rückreibende Kraft zur Radialfokussierung

Fokussierung in Axialrichtung setzt, vom Zentrum des Beschleunigers gerechnet, konvexe Feldlinien voraus, also eine nach außen gerichtete Krümmung der Feldlinien. Aus der Feldabnahme mit der Bedingung (3.61) folgt diese Eigenschaft zwangslos, da ein solches Feld durch Verjüngung der Spaltbreite der Magnete nach innen realisiert werden muß. Auf diese Weise ergibt sich ein Feldverlauf, wie er für das Zyklotron als B_{real} in Abb. 3.16 gezeigt wird.

Um die Fokussierungsmöglichkeiten umfassender übersehen zu können, betrachten wir die Schwingungsgleichungen der Ionen auf ihrer Bahn im Beschleuniger. Im Falle kleiner Ablenkungen der Teilchen in horizontaler (dr) und in vertikaler Richtung (dz), allgemein dy, von der Kreisbahn mit dem Radius R und dem Umfang s_0 lautet die allgemeinste Form der Bewegungsgleichung

$$\ddot{y} + K(s)\,y = 0\,, \tag{3.63}$$

wobei $K(s)$ eine periodische Funktion ist, die mit der Frequenz der Betatronschwingungen in horizontaler (Q_r) und vertikaler Richtung (Q_z) sowie mit dem Feldgradienten n in dem Zusammenhang

$$\sqrt{K_r(s)} = Q_r = \omega_0\sqrt{1-n}\,; \qquad \sqrt{K_z(s)} = Q_z = \omega_0\sqrt{n} \tag{3.64}$$

steht. $\omega_0 = v/R$ ist die Winkelfrequenz der Teilchen auf der Kreisbahn. Es gibt eine große Klasse von Systemen, die dieser Gleichung genügen und in denen $K(s)$ eine periodische Funktion mit der Periode s_0 ist. Zu ihnen gehören praktisch alle Kreisbeschleuniger, deren Magnetsystem aus N gleichen Perioden mit fokussierenden und defokussierenden Quadrupollinsen, ablenkenden Dipolmagneten und geradlinigen Driftstrecken besteht. Die Differentialgleichung der Betatronschwingungen (3.63) nennt man für periodische Funktionen $K(s)$ die Hill'sche Gleichung. Fokussierung wird erreicht, wenn die Kräfte in Radial- und Axialrichtung den Bedingungen

$$F_r \sim \frac{1-n}{R^n} > 0 \quad \text{und} \quad F_z \sim \frac{n}{R^n} > 0 \tag{3.65}$$

genügen. Die Folge von (3.61) sind Q_r, $Q_z < 1$, d. h., pro Teilchenumlauf wird weniger als eine Betatronschwingung vollzogen, und die Auslenkungen r, bzw. z sind ziemlich groß. Diese Art der Fokussierung nennt man schwach.

3. Unter starker Fokussierung versteht man im Gegensatz zu (3.61) den Fall großer Werte des Feldgradienten

$$n \gg 1\,, \qquad n \ll -1\,. \tag{3.66}$$

Allerdings bewirkt ein Gradient $n \gg 1$ Fokussierung in radialer und Defokussierung in vertikaler Richtung, während $n \ll -1$ umgekehrt Fokussierung in vertikaler und Defokussierung in radialer Richtung bewirkt. Gleichzeitig wird wegen (3.64) die Frequenz der Betatronschwingungen wesentlich vergrößert. Die Anwendbarkeit des Prinzips der starken Fokussierung wurde 1952 von N. CHRISTOFILOS sowie von E. D. COURANT, M. S. LIVINGSTON und H. A. SNYDER erkannt, indem aufeinander folgend nichtfokussierende Magnete mit großem n, aber alternierendem Vorzeichen angeordnet werden, wie es die Abb. 3.23 zeigt. In Abb. 3.24 ist das Ergebnis der starken Fokussierung hinsichtlich der Amplitude und der Frequenz der Betatronschwingungen dargestellt. Die fokussierende Wirkung eines derartigen Magnetsystems kann in Analogie zu einem insgesamt sammelnd wirkenden Linsensystem aus Sammel- und Streulinsen verstanden werden. In beiden Fällen verläuft der Strahl im Mittel auf Grund der Streuwirkung weiter weg von der optischen Achse, wo die Brechung bzw. die rücktreibende Kraft größer ist.

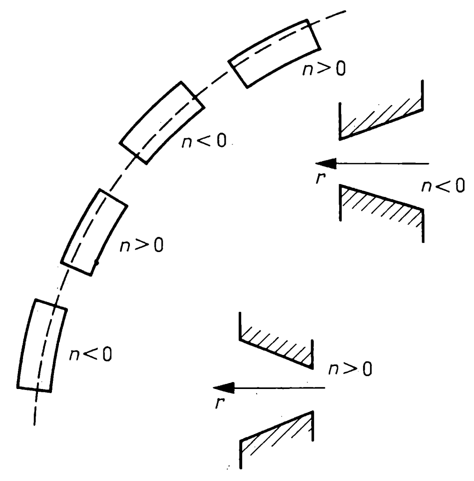


Abb. 3.23
Magnetanordnung bei starker Fokussierung

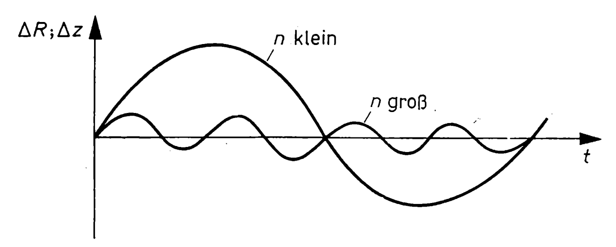


Abb. 3.24
Amplitudenverminderung mit Frequenzerhöhung bei starker Fokussierung

Alle modernen Hochenergiebeschleuniger sind Synchrotrone mit alternierendem Gradienten des Magnetfeldes. Man nennt sie kurz AG-Beschleuniger. In den Tabellen 3.4 und 3.5 sind einige Angaben über AG-Beschleuniger enthalten. Man sieht, daß die mittlere Strahlstromstärke um einen Faktor 10 größer ist als beim Synchrotron mit schwacher Fokussierung. Trotzdem versucht man, noch höhere Strahlstromstärken zu erreichen. Eine Möglichkeit dazu besteht darin, mit einem Injektorsynchrotron hoher Stromstärke, einem sogenannten Booster, in ein größeres AG-Synchrotron einzuspeisen. Diese Anlage hat eine Reihe von Vorteilen. Da der Einschuß mit relativ hoher Energie erfolgt, kommt man mit einer geringen Frequenz- und Magnetfeldvariation des großen Synchrotrons aus. Außerdem wird mit höherer Einschußenergie die Raumladungsbegrenzung des Strahls vermindert. Schließlich ist der geringere Strahldurchmesser und damit ein geringerer Querschnitt der Ringmagnete zu nennen; die Betatronschwingungen werden bereits im Booster stark gedämpft.

4. Seit dem Ende der sechziger Jahre realisiert man das Prinzip der starken Fokussierung in einer modernen Form. Dabei wechseln im Magnetfeld des Synchrotrons nichtfokussierende Ablenkmagnete O, also Dipole und Quadrupole mit fokussierender F oder defokussierender Wirkung D ab, wie es in Abb. 3.25 angedeutet ist. Der gesamte Ring ist dann aus Perioden vom Typ

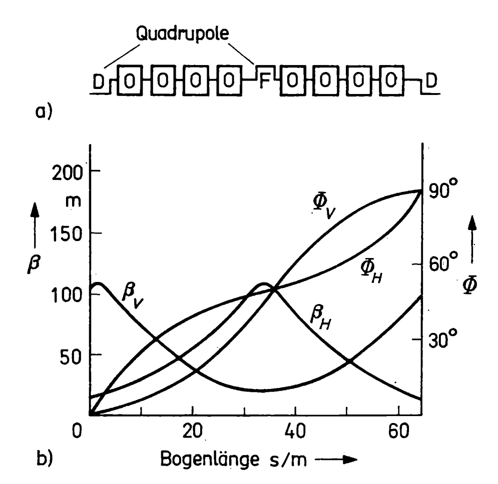


Abb. 3.25
a) Ringperiode vom FODO-Typ
b) Abhängigkeit der β- und Φ-Funktionen für horizontale (r) und vertikale Ablenkung (z) für die dargestellte FODO-Periode eines konkreten Synchrotrons

FODO aufgebaut, in denen für Experimente auch völlig von Magnetfeldern freie Strecken enthalten sein können. Man bezeichnet diese Realisierungsvariante als starke Fokussierung mit Magneten getrennter Funktion. Auch für diesen Fall gilt die Differentialgleichung (3.63), deren Lösung sich in der Form

$$y = \sqrt{\varepsilon}\sqrt{\beta(s)}\sin\Phi(s) \tag{3.67}$$

darstellen läßt. Dabei ist $\Phi(s) = Q_s/2\pi R$ die azimutale Phase, ε die Strahlemittanz und $\beta(s)$ die Betatronfunktion. In Abb. 3.25 ist der Verlauf von $\beta_r(s)$, $\beta_z(s)$, $\Phi_r(s)$ und $\Phi_z(s)$ als Beispiel für ein modernes Synchrotron mit der dort angegebenen FODO-Periode dargestellt.

Die Emittanz ε ist ein wichtiges Charakteristikum für die zum Strahl senkrechte Ablenkung der Teilchen in allen Beschleunigern. Für jede der beiden Auslenkungsrichtungen stellt der Strahl eine Ellipse mit der Fläche

$$\varepsilon = \pi\,\Delta y\,\frac{\Delta y}{\Delta s} \tag{3.68}$$

dar, wobei $2\Delta y$, $2\Delta y/\Delta s$ der Strahldurchmesser und die Winkelöffnung in der jeweiligen Richtung sind, Nach dem Theorem von LIOUVILLE ist ε in elektronenoptischen Systemen eine Erhaltungsgröße. Man gibt ε in Einheiten von $\pi \cdot \mathrm{mm} \cdot \mathrm{mrad}$ an. In diesen Einheiten hat ε in dem 100-MeV-Vorbeschleuniger von Serpuchov den Wert 10π, im 23-GeV-Elektronenlinearbeschleuniger in Stanford $0{,}05\pi$, im 28-GeV-Protonensynchrotron in CERN π und im 500-GeV-Protonensynchrotron in Batavia $0{,}1\pi$.

5. Die meisten Beschleuniger wurden bisher mit Magneten auf der Basis ferromagnetischer Materialien aufgebaut. Die damit technisch realisierbaren Werte der magnetischen Induktion liegen unterhalb 2T. Darin liegt ein Nachteil für den Übergang zu den Kreisbeschleunigern mit kleinerem Durchmesser oder für höhere Energien. Aus der Gleichheit von Zentripetal- und Lorentz-Kraft erhält man mit Hilfe von (B. 4) für die magnetische Steifheit

$$\boldsymbol{B} \cdot r = \frac{mv}{ze} = \frac{\sqrt{E_k(E_k + 2E_0)}}{cze}. \tag{3.69 a}$$

Als Zahlengleichung folgt daraus für $\boldsymbol{B} \cdot r$ in Tm und E_k und E_0 in MeV

$$\boldsymbol{B} \cdot r/\mathrm{T} \cdot \mathrm{m} = \frac{\sqrt{E_k(E_k + 2E_0)}}{2{,}99 \cdot 10^2 z}. \tag{3.69 b}$$

Mit supraleitenden Magneten können zur Zeit bequem B-Werte von etwa 5 T erreicht werden. Der erste Hochenergiebeschleuniger, der nachträglich mit einem Ring aus supraleitenden Magneten ausgestattet wurde, ist das Protonensynchrotron des Fermi-Laboratoriums in Batavia. Dadurch konnte die Endenergie bei gleichbleibenden Radius von 500 GeV auf 800 GeV erhöht werden. In allen Hochenergiebeschleunigerprojekten, insbesondere dem UNK-Projekt in Serpuchov und dem Protonenspeicherring des HERA-Projekts in Hamburg, ist vorgesehen, die Dipole als Supraleitungsmagnete auszulegen.

3.3.1.4. Isochronzyklotron

1. Die bisher betrachteten Kreisbeschleuniger haben zwei wesentliche Nachteile: Mit dem klassischen FF-Zyklotron lassen sich keine relativistischen Energien erreichen, bei Anwendung des Synchrotronprinzips mußte im Vergleich zum FF-Zyklotron eine wesentlich geringere Strahlstromstärke in Kauf genommen werden. Der Ausweg wurde 1938 von L. THOMAS in der Form eines Magnetfeldes aufgezeigt, dessen Induktion gemäß (3.54) als Funktion des Radius zunimmt. Dadurch kann sichergestellt werden, daß die Umlaufzeit bis zu größeren Energien

hin konstant bleibt. Die Teilchen sollen abwechselnd Wegstrecken mit einem Maximal- und einem Minimalwert von $\boldsymbol{B}$ durchlaufen, wie es in Abb. 3.26 bis 28 dargestellt ist. Ähnlich wie im Falle der starken Fokussierung tritt eine fokussierende und defokussierende Wirkung auf. Die defokussierende Kraft wird hauptsächlich durch die Thomas-Kraft übertroffen.

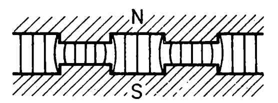


Abb. 3.26
Polschuhquerschnitt und Feldlinien beim Isochronzyklotron, vom Zentrum her gesehen

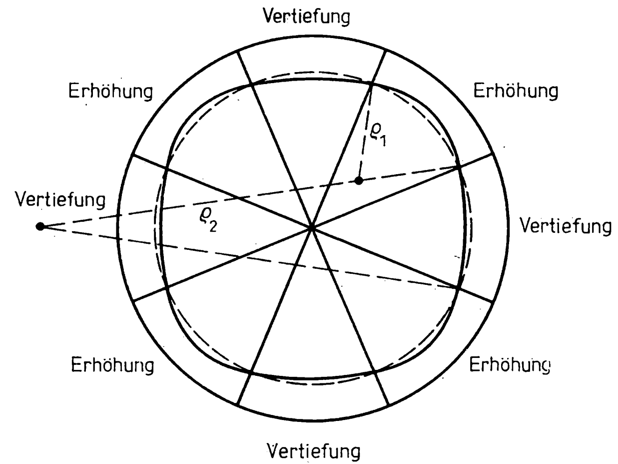


Abb. 3.27
Polschuh eines Isochronzyklotrons mit geraden Sektoren und Teilchenbahn (Draufsicht)

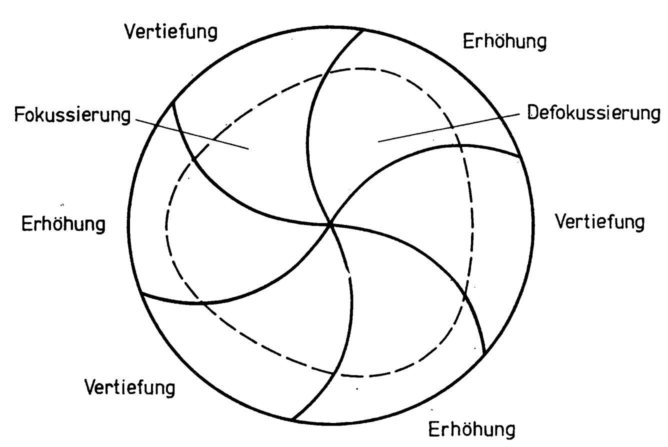


Abb. 3.28
Polschuh eines Isochronzyklotrons mit spiraligen Sektoren und Teilchenbahn (Draufsicht)

An den Rändern der Magnetfeldsektoren bilden sich Feldlinien mit Krümmung aus, d. h., es gibt Komponenten $\boldsymbol{B}_z$ und $\boldsymbol{B}_\vartheta$. Weiterhin ist wichtig, daß sich die Teilchen nun nicht mehr auf einem Kreis bewegen. Nimmt man für die Sektoren gerade Begrenzungen an, dann ergeben sich infolge der unterschiedlichen Stärke der magnetischen Induktion Teilchenbahnen mit unterschiedlichem Krümmungsradius ϱ_1 und ϱ_2 wie das Abb. 3.27 zeigt. Die Teilchenbahn verläuft mit regelmäßiger Periode um einen Kreis mit dem Radius r, d. h., die Teilchen haben eine Radialkomponente v_r der Geschwindigkeit. Aus dem Vektorprodukt von $\boldsymbol{v}_r$ und $\boldsymbol{B}_\vartheta$ ergibt sich die Thomas-Kraft.

Später fand man, daß Sektoren mit spiralartiger Begrenzung, wie sie in Abb. 3.23 dargestellt sind, vorteilhafter sind, weil noch zwei zusätzliche fokussierend wirkende Kräfte auftreten. An jedem Sektorrand hat die magnetische Induktion eine Komponente $\boldsymbol{B}_r$, deren Gradient einmal zum Zentrum gerichtet ist, einmal von ihm weg. Diese Komponente übt auf ein Teilchen mit der azimutalen Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}_\vartheta$ eine Kraft aus, die sich aus dem Vektorprodukt von $\boldsymbol{v}_\vartheta$ und $\boldsymbol{B}_r$ ergibt. Sie wirkt je nach dem Vorzeichen des Gadienten einmal fokussierend, einmal defokussierend. Wie beim AG-Synchrotron ist auch hier die summarische Wirkung fokussierend. Da diese Kraft auch vom Steigungswinkel der Spirale abhängt, kann man sie viel größer machen als die Thomas-Kraft.

Die zweite bei spiraligen Sektoren zusätzlich auftretende Kraft hängt damit zusammen, daß die Stärke der fokussierenden und defokussierenden Kraft an den beiden Sektorgrenzen in Wirklichkeit nicht vollständig gleich ist. Die vertikale Kraft wirkt am Sektorrand mit der gezeichneten Spiralkrümmung fokussierend, wenn sich die Teilchen auf Sektoren mit der Maximalinduktion zubewegen, und defokussierend, wenn sie sich auf den Sektorrand mit der Minimalinduktion zubewegen. Der Winkel zwischen den Teilchenbahnen und dem Rand des Sektors mit maximaler Induktion kommt dem rechten Winkel näher als in dem anderen Falle. Daher ist der Teil der Bahn mit defokussierender Wirkung kürzer als der mit fokussierender. Auch dadurch kommt ein größerer Anteil der fokussierenden im Vergleich zur defokussierenden Wirkung zustande. In der Summe ergibt sich die Sektorfokussierung.

Das erste funktionstüchtige Isochronzyklotron wurde 1958 in Dubna von V. P. Dmitrievskij, V. P. Dželepov u. a. in Betrieb genommen. Heute gibt es sehr viele Isochronzyklotrone. Zum Teil sind sie durch Umbau früherer Zyklotrone entstanden. Man erreicht mit dem Isochronzyklotronprinzip nicht nur größere Teilchenenergien.

2. Mit Hilfe von (3.54) kann man einen Ausdruck für den Feldgradienten herleiten. Mit den Radien r und $r_0 = c/\omega_0$ ergibt sich

$$n = -\frac{r^2}{r_0^2 - r^2} = 1 - \frac{E_k^2}{E_0^2}. \tag{3.70}$$

Die Werte von n liegen auf Grund von Resonanzen, die vermieden werden müssen, unterhalb von 2. Die obere Grenze beträgt daher $E_{k,\max} = E_0$. In modernen Beschleunigern ist man von der Grundform des Zyklotronmagneten abgekommen und stellt dafür ringförmig getrennte Magnetsektoren auf. Auf diese Weise fällt das Feld zwischen den Sektoren auf sehr kleine Werte ab. Bei N Sektoren liegt die obere Grenze der erreichbaren Energie bei

$$E_{k,\max} = N\frac{E_0}{2}. \tag{3.71}$$

Meist geht man über $N = 4$ nicht hinaus.

3. Aufgrund der guten Fokussierung des Teilchenstrahls können im Isochronzyklotron größere Ströme erzielt werden. Wenn die Teilchen gleichzeitig auf Energien von einigen hundert MeV beschleunigt werden, ist eine Strahlherausführung mit einer Effektivität von etwa 100% von besonderer Wichtigkeit, da sonst die Beschleunigungskammer sehr intensiv aktiviert wird.

In den Tabellen 3.4 und 3.5 sind Angaben über das Isochronzyklotron enthalten. Die Abb. 3.29 zeigt den Grundriß eines Isochronzyklotrons mit einzelnen Sektormagneten. Diese Anordnung zeichnet sich auch durch den Vorteil aus, daß mit Teilchen relativ hoher Energie eingeschossen werden kann.

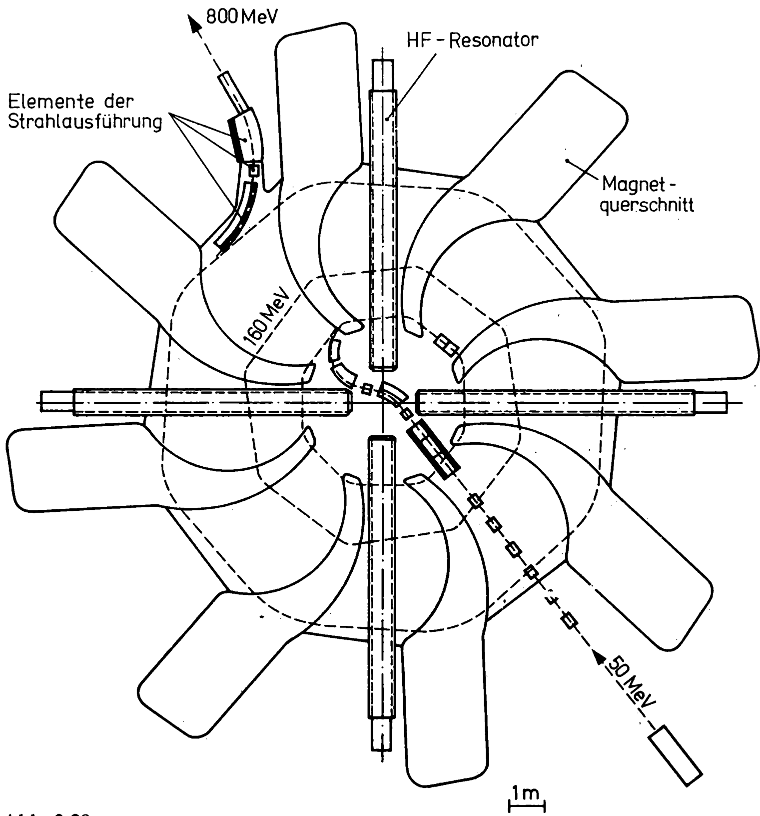
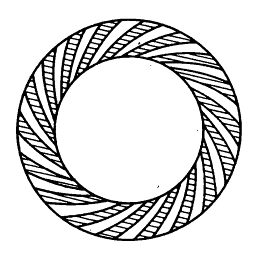


Abb. 3.29
Grundriß eines Isochronzyklotrons mit 8 Sektormagneten und 4 HF-Resonatoren. Der Einschuß erfolgt nicht aus einer Ionenquelle, sondern über ein Strahlführungssystem aus einem Vorbeschleuniger

3.3.1.5. FFAG-Beschleuniger

Ähnlich wie das Isochronzyklotron mit einzelnen Sektormagneten sind die FFAG-Beschleuniger aufgebaut. Es ist der dritte Beschleunigertyp, bei dem das Prinzip der starken Fokussierung angewendet wird. Er wurde 1953 von A. A. Kolomenskij, V. A. Petuchov und M. S. Rabinovič vorgeschlagen und ein Jahr später erstmalig realisiert. Mit Hilfe der Sektorfokussierung wird im zeitlich konstanten Magnetfeld (fixed field) mit alternierenden Gradienten (AG) die Zunahme des Bahnradius in engen Grenzen gehalten, so daß ein Ringfeld mit der relativ geringen radialen Ausdehnung ΔR zur Beschleunigung auf die Endenergie ausreicht.

Zwei typische Sektoranordnungen zeigt die Abb. 3.30. Man kann den FFAG-Beschleuniger auch als Synchrozyklotron mit Sektormagneten zur starken Fokussierung auffassen. Der Vorteil besteht in der weit geringeren Strahlaufwendung für die Magnete und in einer größeren mittleren Strahlstromstärke.



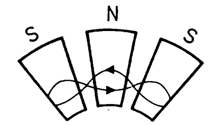


Abb. 3.30
Magnetanordnung beim FFAG-Beschleuniger

3.3.2. Elektronenbeschleuniger

Die Entwicklung der Elektronenbeschleuniger vollzog sich nicht losgelöst von der der Ionenbeschleuniger. Beide Entwicklungsrichtungen befruchteten einander gegenseitig. Der besseren Übersicht wegen behandeln wir die Kreisbeschleuniger für Elektronen hier in einem gesonderten Kapitel. Dabei beschränken wir uns auf die Darstellung der drei wichtigsten Elektronenbeschleuniger mit Kreisbahnen, des Betatrons, des Mikrotrons und des Synchrotrons. Das Betatronprinzip wurde 1928 von R. Wideroe vorgeschlagen; M. Steenbeck erhielt 1935 ein Patent auf sein funktionstüchtiges Betatron. Die Idee des Mikrotrons wurde 1944 von V. I. Veksler vorgeschlagen. Mit diesem Beschleunigungsprinzip gelingt es auf sehr scharfsinnige Weise, den beim FF-Zyklotron durch die relativistische Impulszunahme der Ionen verlorengehenden Synchronismus für die Elektronen aufrechtzuerhalten. Das Elektronensynchrotron beruht auf der 1944 von V. I. Veksler und unabhängig davon 1945 durch McMillan entwickelten Idee des Synchrotronprinzips und der Entdeckung der Phasenfokussierung, worüber bereits bei den Kreisbeschleunigern für Ionen gesprochen wurde.

3.3.2.1. Betatron

1. Im Betatron wird die Beschleunigung nicht mit Hilfe von Beschleunigungselektroden oder -resonatoren erreicht, sondern durch den Transformatoreffekt (siehe 3.1.1., Punkt 2). Nach dem Induktionsgesetz entsteht um die Feldlinien eines zeitlich veränderlichen Magnetfeldes ein elektrisches Wirbelfeld. Befinden sich frei bewegliche Elektronen in dem induzierten elektrischen Feld, dann werden sie beschleunigt. Das zeitlich veränderliche Magnetfeld erzeugt man im Betatron in einem Transformatorkern mit einem Wechselstrom von 50 bis 500 Hz, der durch die Primärwicklung fließt. Eine schematische Darstellung gibt Abb. 3.31. Als Sekundärwicklung dient ein gut evakuiertes Ringrohr, in das Elektronen eingeschossen werden. Das Magnetfeld

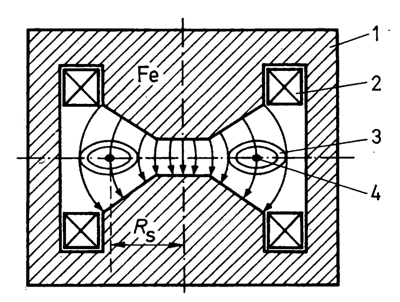


Abb. 3.31
Querschnitt durch ein Betatron
1 Magnetkörper, 2 Spulenkörper, 3 Beschleunigerkammer, 4 Elektronenstrahl

muß so gewählt werden, daß die beschleunigten Elektronen bei allen vorkommenden Energien im Beschleunigungsrohr auf dem Sollkreisradius R_S gehalten werden. Man nennt dieses Magnetfeld das Führungsfeld.

2. Berechnen wir die Bedingung, die erfüllt werden muß, damit die beschleunigten Elektronen auf dem Sollkreisradius R_S bleiben. Ihre Bewegung im elektrischen Wirbelfelde wird durch die Maxwellsche Gleichung (3.9) bestimmt. Die Integration soll einen Kreis um die z-Achse mit dem Sollkreisradius R_S erfassen, $\boldsymbol{E}$ und $\boldsymbol{B}$ sollen nicht vom Azimutalwinkel abhängen, d. h. $|\boldsymbol{E}| = E_\vartheta$ und $|\boldsymbol{B}| = B_z$. Ausführung der Integration und Multiplikation mit der Elektronenladung e liefert

$$2\pi R_S e E_\vartheta = 2\pi R_S F_\vartheta = 2\pi R_S \dot{p}_\vartheta = -\pi R_S^2 e \dot{\bar{B}}_z = -\pi R_S^2 e \dot{\bar{B}}, \tag{3.72}$$

so daß man für $\dot{p}_\vartheta$ unter Berücksichtigung von (3.48) erhält

$$\dot{p}_\vartheta = -e R_S \dot{\bar{B}}/2 = \dot{p} = -e R_S \dot{B}_S, \tag{3.73}$$

wobei $\dot{B}_S$ die zeitliche Änderung der magnetischen Induktion auf dem Sollkreisradius R_S ist. Man sieht, daß

$$\dot{B}_S = \dot{\bar{B}}/2 \tag{3.74}$$

gilt, woraus nach Integration für $t = 0$, $B = 0$ und $\bar{B} = 0$

$$B_S = \bar{B}/2 \tag{3.75}$$

folgt. Die Induktion auf dem Sollkreis muß halb so groß sein wie die mittlere Induktion im Sollkreis.

Zu Beginn des Beschleunigungsprozesses bei $t = 0$ und bei $B = 0$ bewegen sich alle Elektronen im Beschleunigungsrohr praktisch geradlinig, d. h., sie prallen auf die Wandungen. Mit steigender Induktion bewegen sie sich auf Spiralbahnen. Wenn die Bedingung (3.75) erfüllt ist, laufen sie auf dem Sollkreis um. Die dazu erforderliche Zeit beträgt bei 50 Hz etwa 0,004 s. Bei N Umläufen erreichen die Elektronen eine Energie von

$$E_k = 2\pi R N e |\boldsymbol{E}|. \tag{3.76}$$

Beträgt der Radius 1 m, dann ergibt sich ein Energiezuwachs von 75 eV pro Umlauf. Um insgesamt 30 MeV zu erreichen, ist somit ein Weg von etwa 1000 km zurückzulegen. Dieser lange Weg erfordert ein sehr gutes Vakuum von etwa 10^{-4} Pa und eine hohe Stabilität der Elektronenbahnen. Man muß daher im Unterschied zum Zyklotron nicht nur auf die vertikale, sondern

auch auf die radiale Fokussierung achten. Fokussierung in vertikaler und radialer Richtung wird durch die Bedingung (3.61) der schwachen Fokussierung sichergestellt.

3. Mit dem Betatron können nicht beliebig hohe Energien erreicht werden. Der relativistische Impulszuwachs ist hier kein Hindernis. Vielmehr sind es die Strahlungsverluste, die der Energie nach oben eine Grenze setzen. Ein Elektron der Energie E_k, das sich auf dem Radius R bewegt, strahlt pro Umlauf in Form der Synchrotronstrahlung die Energie

$$E_S = \frac{4\pi}{3} \frac{e^2}{R} \left(\frac{E_k}{E_0}\right)^4 \tag{3.77}$$

ab. Drückt man E_k in MeV aus und R in cm, dann beträgt der Energieverlust durch Synchrotronstrahlung pro Umlauf in eV

$$E_S/\text{keV} = 88 \cdot 10^{-12} \frac{E_k^4/(\text{MeV})^4}{R/\text{m}} .$$

Bei 300 MeV gleichen sich die Strahlungsverluste pro Umlauf und der Energiezuwachs pro Umlauf. Man erhält für $R = 2{,}5$ m, $E_k = 300$ MeV den Wert $E_S = 300$ eV/Umlauf. Die meisten Betatrons beschleunigen bis auf 30 MeV.

3.3.2.2. Mikrotron

Wie im Zyklotron, so bewegen sich die Elektronen im Mikrotron auch in einem zeitunabhängigen homogenen magnetischen Querfeld mit der Induktion $\boldsymbol{B}$. Die Beschleunigung erfolgt durch einen Resonator, der von einem Hochfrequenzgenerator mit der festen Frequenz f_{HF} gespeist wird. Die Abb. 3.32 zeigt einen Querschnitt durch den Resonator mit den elektrischen Feldlinien. Die Wellenlänge beträgt meist einige cm bis 10 cm. Die Grundidee V. I. VEKSLERS besteht darin, den Synchronismus zwischen der Festfrequenz der HF-Beschleunigungsspannung und der Teilchendriftzeit in der evakuierten Beschleunigungskammer trotz des relativistischen Impulszuwachses dadurch zu erhalten, daß der Energiezuwachs pro Umlauf konstant ist. Betrachten wir dazu die Umlaufzeit t_u. Sie ergibt sich aus der Resonanzbedingung unter Berücksichtigung von (3.49) und (3.50) zu

$$t_u = \frac{2\pi m}{eB} = \frac{2\pi E_0(e)}{eBc^2} . \tag{3.79}$$

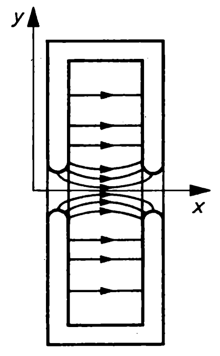


Abb. 3.32
Querschnitt durch einen Resonator mit elektrischen Feldlinien

Bei jedem Durchgang der Elektronen durch den Resonator wird ihre Energie um ΔE_k erhöht. Der Radius ihrer Bahn wächst dadurch, so daß sich ein Bild ergibt, wie es die Abb. 3.33 zeigt. Die Umlaufzeit wächst bei einem Umlauf um

$$\Delta t_u = \frac{2\pi \, \Delta E_k}{eBc^2} . \qquad (3.80)$$

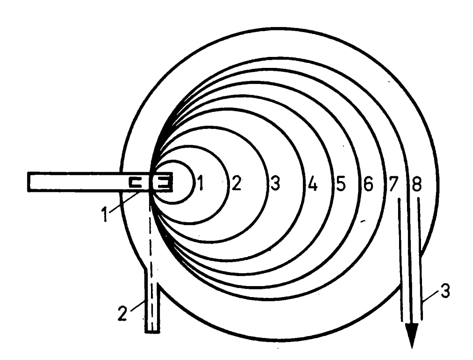


Abb. 3.33
Elektrobahnen im Mikrotron.
1 Resonator, 2 Elektronenquelle, 3 magnetischer Kanal zur Strahlausführung

Diese konstante Zeitspanne Δt_u muß gleich der Periodendauer der HF-Spannung sein; dann bleibt der Synchronismus erhalten:

$$t_u = T_{HF} . \qquad (3.81)$$

Da sich die Elektronen nahezu mit Lichtgeschwindigkeit bewegen, wächst die Länge aufeinanderfolgender Umlaufbahnen jeweils um die Wellenlänge der HF-Spannung

$$\lambda = cT_{HF} . \qquad (3.82)$$

Dadurch ist sichergestellt, daß die Elektronen immer den Resonator zur gleichen Phase der HF-Spannung durchlaufen, unabhängig von der relativistischen Impulszunahme und unabhängig vom Absolutbetrag der Energie.

Obgleich nur die Elektronen den notwendigen Energiebetrag erhalten sollten, die den Resonator zu einer bestimmten Phase der HF-Spannung durchqueren, werden auch die Elektronen richtig beschleunigt und bekommen im Mittel den gleichen Energiebetrag übertragen, die zu dem Zeitpunkt gerade etwas zu früh oder etwas zu spät am Resonator ankommen. Das bedeutet, daß auch hier die Phasenfokussierung voll zur Wirkung kommt.

Die meisten Mikrotrons beschleunigen Elektronen auf Energien von etwa 30 MeV. Die Zahl der Umläufe beträgt dabei 20 bis 30, der Energiezuwachs pro Umlauf etwa 1 bis 2 Elektronenruhenergien. Der Resonator wird in den meisten Fällen durch Magnetrons oder Klystrons angeregt. Daher arbeiten die Mikrotrons im Impulsbetrieb. Die Impulsdauer beträgt 2 ... 3 μs, die Impulsfolgefrequenz einige hundert Hz. Durch Einstellen des Wertes der magnetischen Induktion und ΔE_k kann man die Energie der Elektronen kontinuierlich ändern. Vor Beginn des Beschleunigungsprozesses werden die Elektronen eingeschossen, ausgeführt werden sie nach dem Beschleunigungsprozeß durch einen magnetischen Kanal. Die Elektronen der Mikrotrons werden oft zur Erzeugung von Bremsstrahlung verwendet, neuerdings zur Erzeugung von Synchrotronstrahlung.

3.3.2.3. Synchrotron

Das Elektronensynchrotron ist ähnlich wie das Protonensynchrotron aufgebaut. Da sich Elektronen bereits bei 3 MeV nahezu mit Lichtgeschwindigkeit bewegen (siehe Abb. 3.8), braucht bei Einschuß der Elektronen in das Synchrotron mit konstantem Radius des Ringmagnets die Beschleunigungsfrequenz f nicht mehr variiert zu werden. Es wird also im Unterschied zum Protonensynchrotron mit fester Frequenz gearbeitet. Für die Kreisfrequenz gilt

$$\omega = 2\pi f = c/R = \text{const.} \tag{3.83}$$

Nachgeführt werden muß wie beim Protonensynchrotron der Wert der magnetischen Induktion $\boldsymbol{B}$, damit die Elektronen für alle Energien auf dem Sollkreisradius bleiben. Der Durchmesser des Elektronensynchrotrons ist viel größer als der von Beta- und Mikrotrons. Daher sind hier die Strahlungsverluste gemäß (3.77), (3.78) viel kleiner. Moderne Elektronensynchrotrone sind als AG-Synchrotrone ausgeführt. Dadurch erhält man sehr gut fokussierte Elektronenstrahlen am Ausgang. Angaben über Elektronensynchrotrone sind in den Tabellen 3.4 und 3.5 enthalten.

3.4. Speicherringe mit gegenläufigen Strahlen

3.4.1. Energie- und Intensitätsverhältnisse

1. Durch die Anforderungen der Kern- und Elementarteilchenphysik stimuliert, hat es in den vergangenen Jahrzehnten eine schnelle Entwicklung der Teilchenbeschleunigertechnik gegeben. Abb. 3.34 zeigt den exponentiellen Anstieg der erreichten Teilchenenergie um sieben Zehnerpotenzen in 50 Jahren. Gegenwärtig erfordern die wichtigsten Fragestellungen der Elementarteilchenphysik Energien von einigen hundert GeV im Massenmittelpunktsystem, z. B. zum Nachweis und zur Untersuchung der schwachen Vektorbosonen W^+, W^- und Z^0, bis zu einigen TeV bei der Suche neuer schwerer Teilchen, wie sie von verschiedenen Theorien voraus-

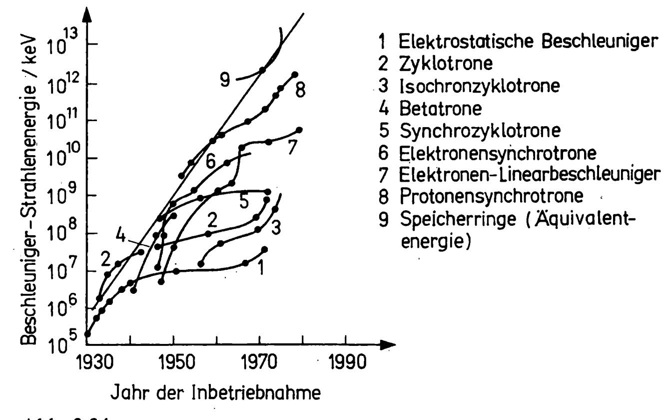


Abb. 3.34
Entwicklung der mit Beschleunigern erreichten Teilchenenergie. Jeder Punkt entspricht der Inbetriebnahme eines entsprechenden Beschleunigers

gesagt werden. Im Verlauf der kommenden zwei Jahrzehnte sollte es möglich sein, unter Ausnutzung der bekannten Beschleunigungsprinzipien den exponentiellen Anstieg von Abb. 3.34 fortzusetzen. Im folgenden wird das an Hand einiger Beschleunigerprojekte dargestellt. Das prinzipiell neue an diesen Anlagen besteht darin, daß nicht mehr auf ruhende Teilchen geschossen wird, sondern mit bewegten auf gegenläufig bewegte Teilchen. Man nennt solche Anlagen, die aus Beschleuniger und Speicherring bestehen auch Kollider. Der in (3.29) oder (3.31) deutlich gewordene Verlust an Energie infolge der Notwendigkeit der Massenmittelpunktsbewegung tritt hier nicht auf, da man durch die Wahl der Impulse dafür sorgt, daß er prinzipiell ruht.

2. In der Versuchsanordnung mit gegenläufigen Strahlen ergeben sich wegen $E_{k1} \neq 0$, $E_{k2} \neq 0$ und $p_1 = -p_2$ im L-System völlig neue kinematische Verhältnisse. Betrachten wir ganz allgemein den Stoß zweier Teilchen mit den Ruhenergien E_{01} und E_{02} und drücken wir die Gesamtenergie gemäß (B. 5) in der Form $E_1 = \gamma_1 E_{01}$, bzw. $E_2 = \gamma_2 E_{02}$ aus und die Impulse gemäß (B. 9) in der Form $p_1 = \sqrt{\gamma_1^2 - 1}\; E_{01}/c$, bzw. $p_2 = \sqrt{\gamma_2^2 - 1}\; E_{02}/c$. Dann berechnet sich die Gesamtenergie $E^{(M)}$ im M-System zu

$$E^{(M)} = E_1^{(M)} + E_2^{(M)} = \sqrt{E_{01}^2 + E_{02}^2 + 2(E_1 E_2 - p_1 p_2 c^2)}\,. \tag{3.84}$$

In dem hier in Frage kommenden relativistischen Falle gilt für die relativistischen Faktoren $\gamma_1 \gg 1$ und $\gamma_2 \gg 1$, so daß sich

$$E^{(M)} = 2\sqrt{E_{01}E_{02}}\,\sqrt{\frac{E_{01}^2 + E_{02}^2}{4E_{01}E_{02}} + \gamma_1\gamma_2} \tag{3.85}$$

ergibt. Da der Massenmittelpunkt praktisch in Ruhe bleibt, sind L- und M-System hier identisch und es ist

$$E^{(M)} = E\,. \tag{3.86}$$

In der Praxis sind zwei Spezialfälle von besonderer Bedeutung, der pp- oder ee-Stoß einerseits und der ep-Stoß andererseits, d. h. Stöße zwischen Teilchen gleicher, bzw. stark unterschiedlicher Masse. Für gleiche Masse folgt aus (3.85)

$$E \approx 2E_0\sqrt{\gamma_1\gamma_2} = 2\sqrt{E_1 E_2}\,. \tag{3.87}$$

Für wesentlich verschiedene Ruhenergien $E_{01} \gg E_{02}$ wird (3.85) zu

$$E \approx 2\sqrt{E_{01}E_{02}}\,\sqrt{\frac{E_{01}}{4E_{02}} + \gamma_1\gamma_2}\,, \tag{3.88}$$

wobei $E_{01}/4E_{02} \approx 500$ ist. Da in den in Frage kommenden Fällen $\gamma_1 \geqq 10$ und $\gamma_2 \geqq 10^4$ ist, kann der erste Term in der zweiten Wurzel vernachlässigt werden, so daß sich auch hier (3.87) ergibt. Um mit der klassischen Anordnung für bewegtes Stoßteilchen und ruhendes Targetteilchen die gleiche Gesamtenergie im M-System zu erzielen, sind sehr große kinetische Energien nötig. Man erhält diese Äquivalenzenergie $E_ä$ durch Gleichsetzen von (3.84) mit $p_2 = 0$, $E_2 = E_{02}$ und (3.87) für relativistische Energien zu

$$E_ä \approx 2\gamma_1\gamma_2 E_{01} \tag{3.89 a}$$

bzw. für den Stoß des Teilchens mit E_{02} auf das mit E_{01}

$$E_ä \approx 2\gamma_1\gamma_2 E_{02}\,. \tag{3.89 b}$$

3. In Experimenten mit gegenläufigen Strahlen ist die Reaktionsrate naturgemäß sehr gering, da der an die Stelle des festen Targets getretene Strahl eine wesentlich kleinere Dichte hat. Typisch

ist ein Unterschied um einen Faktor 10^{-17}. Um dieser Schwierigkeit wenigstens in geringem Maße entgegenzuwirken, ist es notwendig, den Strahlstrom und die Strahlstromdichte so groß als nur möglich zu machen. Einen großen Strahlstrom erreicht man dadurch, daß man über längere Zeit alle Teilchen, die vom Beschleuniger kommen, in einen Ring einspeichert, in dem sie mit großer Lebensdauer kreisen. Dabei können mittlere Ströme von mehr als 10 A erreicht werden. Das Experiment kann mit dem Einschuß der gegenläufigen Teilchen in den gleichen Ring beginnen. Allerdings ist die Reaktionsrate erst optimal, wenn auch der gegenläufige Strahl die gleiche Stromstärke hat. Das wurde an Hand von (3.37) gezeigt.

4. Aus der Vielzahl der arbeitenden und geplanten Speicherringe kann hier nur auf eine kleine Auswahl eingegangen werden. In Tabelle 3.6 sind Angaben über einige e^-e^+-Kollider zusammengestellt. Wir betrachten hier nur den CERN-SPS-Proton-Antiproton-Kollider mit der Gesamtenergie von 630 GeV im $p\bar{p}$-M-System, der 1981 in Betrieb genommen wurde. Zweitens betrachten wir das Projekt UNK des Instituts für Hochenergiephysik in Serpuchov bei Moskau für 6-TeV-pp-Stöße, dessen Bau im Gange ist. Weiter wollen die Speicherringanlage VEPP-4 in Novosibirsk und das Projekt eines linearen Elektron-Positron-Kolliders mit einer MMP-Energie von bis zu 600 GeV besprochen werden, das zur Zeit in Novosibirsk ausgearbeitet wird. Schließlich besprechen wir den Elektron-Proton-Kollider HERA, der 1989 in Hamburg in Betrieb gehen soll. Weitere Beschleuniger, die zur Zeit gebaut werden, sind ein linearer e^+e^--Kollider in Standford/USA, der Umbau des Protonensynchrotrons im Fermi-Laboratorium in Batavia/USA in einen Proton-Antiproton-Kollider mit einer Gesamtenergie von 2 TeV im M-System sowie ein Elektron-Proton-Kollider TRISTAN in Japan. Diskutiert werden zur Zeit in den USA ein Supraleitender-Super-Kollider SSC mit einer Energie von 40 TeV im M-System[1]) und in Westeuropa ein Großer Hadronen-Kollider LHC im Tunnel des LEP-Elektron-Positron-Speicherrings des CERN aus supraleitenden Magneten mit einer Energie von 20 TeV im M-System.

3.4.2. Der Protron-Antiproton-Kollider des CERN

1. Einer der ersten Protonen-Kollider war die Anlage ISR (Intersecting Storage Rings) des CERN, deren Grundriß aus Abb. 3.35 hervorgeht. Sie bestand aus dem 26-GeV-Protonen-synchrotron PS und dem Speicherring mit Strahlkreuzungen ISR. An den acht Kreuzungen waren die Detektorsysteme aufgebaut. Der Durchmesser des ISR-Rings beträgt 300 m, die Lebensdauer der Ringströme von bis zu 40 A lag bei 20 Stunden. Die Luminosität hatte einen Wert von $4 \cdot 10^{30}\ \mathrm{cm}^{-2}\ \mathrm{s}^{-1}$. Während der Druck in den Ringen 10^{-7} Pa betrug, waren es an den Kreuzungsstellen 10^{-9} Pa. Die Energie der Protonen konnte bis zu 31 GeV betragen, die Gesamtenergie beim Stoß gemäß (3.89a) bis zu 62 GeV.

1976 wurde das Super-Proton-Synchrotron SPS in Betrieb genommen, mit dem Protonen auf 450 GeV beschleunigt wurden.

2. Von 1979 bis 1981 wurde das SPS in einen Protonen-Antiprotonen-Kollider mit einer Maximalenergie von 315 GeV pro Strahl umgebaut. Die maximale Teilchenenergie des Kolliderbetriebs, in dem der Strahl über große Zeiten auf der Maximalenergie gehalten werden muß, ist infolge von Begrenzungen bei der Auslegung der Stromversorgungsanlagen für die Magnete etwas niedriger. Die mit dem SPS-Kollider erreichte MMP-Energie ist mit 630 GeV die höchste bisher im Labor realisierte Energie. Die Verwirklichung dieses Projekts wurde durch die Entwicklung von Kühlungsmethoden[2]) des Antiprotonenstrahls möglich. Zuerst entstand in Novosibirsk die Technik der Elektronenkühlung des Antiprotonenstrahls. In der Anlage des CERN wird die in Genf entwickelte Methode der stochastischen Kühlung verwendet.

---

[1]) Der Bau wurde 1987 beschlossen

[2]) Unter Kühlung versteht man hier die Verringerung der Dispersion der Teilchenimpulse im Strahl vom Mittelwert.

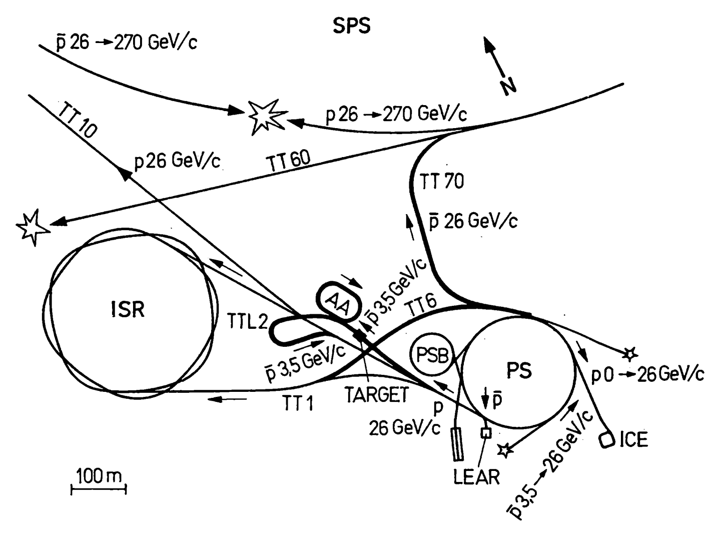


Abb. 3.35
Anordnung der Beschleuniger, Speicherringe und Strahltransportsysteme im CERN. ICE-LEAR-Low-Energy Antiproton Ring, PS-26-GeV-Protonensynchrotron, AA — Antiprotonen Akkumulator, ISR — Intersceting Storage Rings, SPS — 315-GeV-Super-Proton-Synchrotron

Die Anwendung der Beschleuniger und Strahltransportsysteme ist in Abb. 3.35 dargestellt. Im PS werden zunächst Protonen auf 26 GeV beschleunigt. Der Strahl mit einem Strom von 10^{13} s^{-1} wird auf ein Wolframtarget fokussiert, wodurch sehr viele Sekundärteilchen erzeugt werden, darunter auch Antiprotonen, etwa 1% aller erzeugten Sekundärteilchen. Die Hauptschwierigkeit der Formierung des Antiprotonenstrahls besteht in dem großen Energie- und Winkelspektrum der Antiprotonenerzeugung. Dadurch gelingt es wiederum, nur einen kleinen Teil der Antiprotonen in einen weiteren Beschleuniger, den Antiproton-Akkumulator (AA) zu überführen, dessen Aufgabe darin besteht, die Antiprotonen zu sammeln und zu kühlen. Pro PS-Impuls werden vom AA-Ring etwa $2 \cdot 10^7$ Antiprotonen aufgenommen. Die Vakuumkammer des AA-Rings hat eine extrem große Breite von 70 cm, damit die Antiprotonen mit einer Impulsunschärfe von 6% bei einem mittleren Impuls von 3,5 GeV/c aufgenommen werden können. Von einem der eingeschlossenen Antiprotonen aus betrachtet bedeutet das eine sehr breite Geschwindigkeitsverteilung der anderen Antiprotonen, die als Temperatur des Antiprotonenstrahls interpretiert wird. Die Aufgabe des Kühlsystems besteht darin, die Impulse der Antiprotonen nach Betrag und Richtung zu homogenisieren. Dieser Kühlung genannte Vorgang erfordert eine Wechselwirkung des Strahls mit einem äußeren System, da das Liouville-Theorem der statistischen Mechanik besagt, daß die Phasenraumdichte eines Strahls eine Invariante ist. Bei der Methode der Elektronenkühlung ist dieses äußere System ein intensiver zum Antiprotonenstrahl paralleler Elektronenstrahl; bei der Methode der stochastischen Kühlung verwendet man ein Hochfrequenzsystem. Nachdem im Verlaufe von etwa 24 Stunden ca. $5 \cdot 10^{11}$ Antiprotonen im AA-Ring angesammelt und gekühlt wurden, wird der Antiprotonenstrahl vom AA-Ring zurück in das PS transportiert und dort auf 26 GeV beschleunigt. Die Antiprotonen kreisen dabei infolge ihrer entgegengesetzten Ladung im Vergleich zu den Protonen auch in entgegengesetzter Richtung. Auf die Beschleunigung folgt die Überführung der Antiprotonen über ein weiteres Transportsystem in das SPS, wo ein intensiver Protonenstrahl im Gegensinn kreist. Das SPS beschleunigt anschließend gleichzeitig die Protonen und die Anti-

protonen auf je 315 GeV. Zur Durchführung der Experimente wurden in zwei feldfreien Sektionen des SPS-Rings Experimentierzonen geschaffen. In den Abbn. 14.58, 59 wird ein in diesen Zonen installierter Detektor vorgestellt.

3.4.3. Das 3-TeV-Protonensynchrotron UNK in Serpuchov

1. Im Beschleunigungs-Speicher-Komplex UNK des Instituts für Hochenergiephysik in Serpuchov bei Moskau wird das 1967 in Betrieb genommene 76-GeV-Protonensynchrotron als Injektor für den neuen 3-TeV-Protonenbeschleuniger genutzt. In einem Ringtunnel, dessen Querschnitt in Abb. 3.36 dargestellt ist, werden drei Magnetringe angeordnet. In dem ersten, der aus konventionellen Magneten aufgebaut ist, soll eine Endenergie von 400 GeV erreicht werden. Die Beschleunigung auf 3 TeV soll in einem zweiten Ring aus supraleitenden Magneten erfolgen. In den Tabellen 3.6 und 3.7 sind die wichtigsten Parameter dieses Beschleunigers angegeben. Die beiden Ringe von Stufe 1 und Stufe 2 lassen sich auch als Proton-Proton-Kollider schalten. Die Stöße zwischen den Teilchen entsprechen gemäß (3.87) einer MMP-Energie von 2,2 TeV. Später soll ein zweiter supraleitender Magnetring installiert werden, so daß Proton-Proton-Stöße mit einer Maximalenergie von 6 TeV bei einer Luminosität von 10^{32} cm^{-2} s^{-1} möglich werden. Um diese 6-TeV-Arbeitsweise vorzubereiten, werden bereits in der Stufe 1 die zukünftigen Strahlkreuzungen vorgesehen. Es ist auch geplant, einen der beiden supraleitenden Ringe mit Antiprotonen zu speisen, so daß ein 6-TeV-Proton-Antiproton-Kollider zur Verfügung steht.

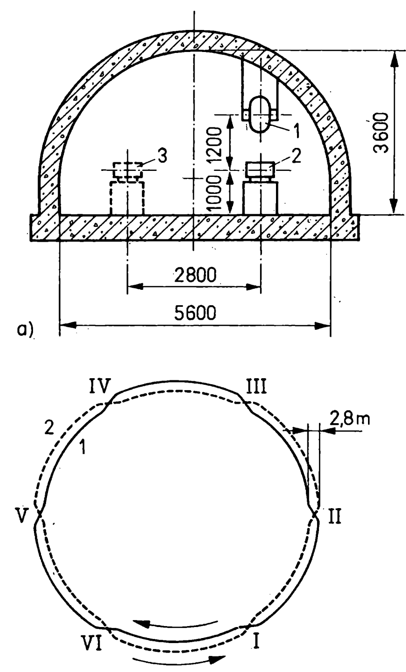


Abb. 3.36
a) Querschnitt des Tunnels der Anlage UNK: 1 — 1. Stufe, 2 — 2. Stufe, 3 — Speicherring
b) Strahlkreuzungen der Stufe 2 und des Speicherrings 3

Tabelle 3.6
Angaben über Elektron-Positron-Speicherringe

Ring	Inbetriebnahme	Massenmittelpunktenergie in GeV	Maximal erreichte Luminosität in $cm^{-2}\,s^{-1}$
VEPP-2M Novosibirsk	1975	1,4	$1{,}2 \cdot 10^{30}$
SPEAR Stanford	1973	3—8	$1 \cdot 10^{31}$
DORIS Hamburg	1974	3—10,5	$3{,}5 \cdot 10^{31}$
PETRA Hamburg	1978[1])	10—36,8	$1{,}7 \cdot 10^{31}$
CESR Cornell	1979	8—16	$1 \cdot 10^{31}$
VEPP-4 Novosibirsk	1979	3—14	$1 \cdot 10^{30}$
PEP Stanford	1980	10—30	$7 \cdot 10^{30}$
LEP CERN-Genf	im Bau, 1988	100	$1 \cdot 10^{32}$
SLC Linearer Elektron-Positron-Kollider Stanford	im Bau, 1987	100	

[1]) PETRA wurde 1986 stillgelegt.

Tabelle 3.7
Parameter des Beschleuniger-Speicher-Komplexes UNK

Parameter	Stufe 1	Stufe 2
Umfang/km	19,3	19,3
Injektionsenergie/GeV	70	400
Maximalenergie/GeV	400	3000
Teilchenzahl in einem Protonenimpuls	$6 \cdot 10^{14}$	$6 \cdot 10^{14}$
Magnetische Induktion $\boldsymbol{B}$/T	0,7	5,0
Zahl der Dipolmagnete	2160	2160
Länge der Dipolmagnete/m	5,8	5,8
Zahl der Quadrupolmagnete	348	348
Länge der Quadrupolmagnete/m	3,95	3,95
Betatron-Frequenz/Hz	40,75	40,75
Beschleunigungszeit/s	11	40

3.4.4. Die Elektron-Positron-Kollider in Novosibirsk

1. Die Anlage VEPP-4 ist gegenwärtig der hochenergetischste Kollider aus einer Serie von Beschleuniger-Speicher-Komplexen im Institut für Kernphysik in Novosibirsk. Die Anlage VEPP-2M für 2×700 MeV ist in Abb. 3.37 dargestellt. Mit VEPP-4 können Elektronen und Positronen mit je 6,0 GeV auf gegenläufige Bahnen gebracht werden. Die Gesamtenergie beträgt also 12 GeV beim Stoß. Die Luminosität beträgt $2 \cdot 10^{30}$ cm^{-2} s^{-1}. Das Vakuum in den zwei Ringen hat einen Druck von etwa 10^{-7} Pa. An zwei Stellen treffen die Strahlen aufeinander. Neben ihrem Einsatz in der Elementarteilchenphysik werden die Speicherringe des Instituts in Novosibirsk zur Erzeugung von Synchrotronstrahlung genutzt. Zu diesem Zweck werden nur Elektronen eingespeichert. An der Stelle, an der die Synchrotronstrahlung entstehen soll, erhält der Strahl einen weit geringeren Krümmungsradius. In solchen Speicherringen lassen sich besonders kleine Strahldurchmesser realisieren, so daß man sehr scharf gebündelte Synchrotronstrahlung erhält. Sie findet in immer stärkerem Maße Eingang in die Untersuchung von atomaren und molekularen Strukturen.

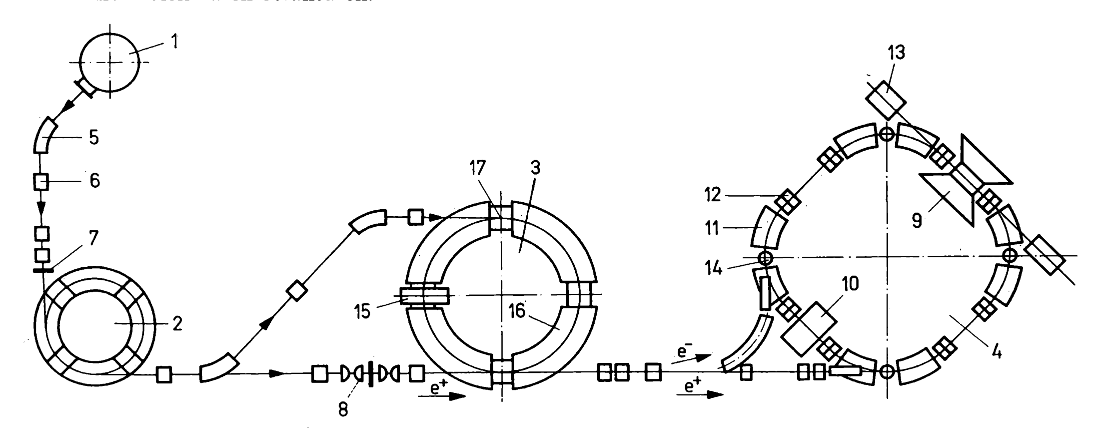


Abb. 3.37
Anlage VEPP-2M für gegenläufige Elektronen-Positronenstrahlen
1 Injektor, 2 200-MeV-Synchrotron, 3 Speicherring VEPP-2, 4 Speicherring VEPP-2M, 5 Ablenkmagnete, 6, 8, 12, 13 magnetische Linsen, 7 Wolframkonverter, 9 Detektoren, 10, 15 Beschleunigungsstrecken, 11, 16 Ringmagnete

2. Kreisförmige Elektron-Positron-Speicherringe lassen sich mit vertretbarem Aufwand nur bis zu Energien von etwa 100 GeV pro Strahl errichten. Die Ursache dieser Begrenzung sind die Energieverluste durch Synchrotronstrahlung der kreisenden Elektronen und Positronen. Um die Gesamtleistung der abgestrahlten Synchrotronstrahlung in Grenzen zu halten und damit die Kosten zu optimieren, muß gemäß (3.78) der Umfang der Speicherringe etwa mit dem Quadrat der Energie ansteigen. So hätte ein e^+e^--Speicherring mit der Strahlenergie von 260 GeV und der Luminosität von 10^{32} cm^{-2} s^{-1} einen Umfang von 126 km. Jedes Teilchen würde pro Umlauf die Energie 29 GeV als Synchrotronstrahlung abgeben. Um diesen Energieverlust zu kompensieren, muß dem Strahl eine Leistung von 160 MW zugeführt werden. Insgesamt würde ein solcher Beschleuniger eine Leistung von 500 bis 1000 MW aufnehmen.

Lineare Elektron-Positron-Kollider werden bei solchen Energien kostengünstiger. Die Länge des Beschleunigers und damit die Kosten steigen nur linear mit der Energie an. In der einfachsten Form besteht ein linearer e^+e^--Kollider aus zwei Linearbeschleunigern für e^+ und e^-, die gegeneinander angeordnet sind. Mögliche Anwendungen sind in Abb. 3.38 gezeigt.

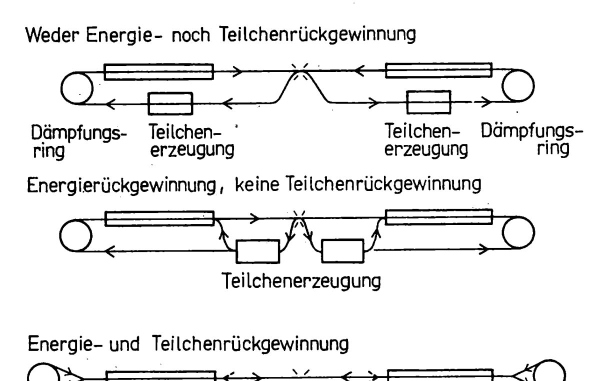


Abb. 3.38
Mögliche Anordnungen von linearen Elektron-Positron-Kollidern

In linearen Kollidern ist es schwieriger, die erforderliche Luminosität von $L = 10^{32}$ cm^{-2} s^{-1} zu erreichen, da sie prinzipiell gemäß (3.35b) proportional zur Folgefrequenz f ist, die in kreisförmigen Speicherringen die Größenordnung 10^4 Hz hat, in Linearbeschleunigern jedoch nur 10 Hz beträgt. Damit die Luminosität nicht um einen Faktor von 10^3 kleiner wird, müssen die beschleunigten Elektronen und Positronen mit $N = 10^{12}$ am Wechselwirkungsort auf einen Strahldurchmesser von etwa 1 µm fokussiert werden und die Länge des Impulses darf nur 1 cm betragen. In Novosibirsk plant man Linearbeschleuniger mit einem Beschleunigungsgradienten von 100 MeV/m. Damit wird der projektierte e^+e^--Kollider VLEPP folgende Parameter aufweisen: Energie 2×500 GeV, Länge 2×5 km, Luminosität 10^{32} cm^{-2} s^{-1}, Impulsfolgefrequenz 10 Hz und Energieverbrauch 40 MW. Die Parameter der Größe und des Energieverbrauchs sind wesentlich günstiger, als für den oben betrachteten 2×260-GeV-e^+e^--Speicherring.

3.4.5. Der Elektron-Proton-Kollider HERA in Hamburg

Im DESY-Labor in Hamburg befindet sich seit 1984 der Elektron-Proton-Kollider HERA im Bau. Bei diesem Projekt sollen 30-GeV-Elektronen in einem Ring gegen 820-GeV-Protonen in einem zweiten Ring aus supraleitenden Magneten beschleunigt werden. Als Injektor für den Elektronenspeicherring dienen das Elektronen-Synchrotron DESY und der umgebaute Elektronen-Positronen-Speicherring PETRA, in denen die Elektronen zunächst auf 14 GeV beschleunigt werden. Die Protonen werden in einem Linearbeschleuniger auf 50 MeV, im DESY-Synchrotron auf 7.5 GeV und im PETRA-Ring auf 40 GeV vorbeschleunigt, bevor der Einschuß in den Ring aus supraleitenden Magneten erfolgt. Bei HERA und bei dem etwas kleineren Elektron-Proton-Kollider TRISTAN in Japan handelt es sich um die ersten Elektron-Proton-Kollider überhaupt. Bisher waren tiefunelastische Streuversuche an Nukleonen mit Elektronen oder Myonen nur an Nukleonen mit ruhenden Targets möglich.

3.5. Kollektive Teilchenbeschleunigung

1. Unter einem Kollektiv von Teilchen versteht man in diesem Zusammenhang ein Plasma, das hauptsächlich aus Elektronen und Ionen besteht, und das nicht neutral, sondern infolge der überwiegenden Elektronenladungen negativ geladen ist. Die Elektronen werden über diese Ladung beschleunigt, wobei die in ihrem Potential befindlichen Ionen mitgenommen werden.

Die kinetische Energie der Ionen ist auf Grund des Verhältnisses von Ionen- zu Elektronenladung wesentlich größer, als die der Elektronen. Der Vorschlag des Prinzips der kollektiven Teilchenbeschleunigung kam 1956 von V. I. VEKSLER, der für die bisher erfolgreichste Realisierungsvariante — Ringe aus Elektronen mit relativistischer azimutaler Geschwindigkeit — von G. I. BUDKER. Eine andere Variante sind Elektronenrohre kurzer Dauer.

2. Ein erster Vorteil des Prinzips der kollektiven Teilchenbeschleunigung ist die wesentlich größere zur Verfügung stehende elektrische Feldstärke, die gemäß (3.1c) zur Beschleunigung notwendig ist. Während mit äußeren Feldern bei der direkten Ionenbeschleunigung elektrische Feldstärken $\boldsymbol{E}_\mathrm{a}$ von bis zu 10^2 kV/cm erreicht werden, sind für die inneren Feldstärken $\boldsymbol{E}_\mathrm{i}$ im Elektronenring Werte zwischen (10^3-10^4) kV/cm typisch. Quantitativ ergibt sich in Elektronenringen mit dem großen und kleinen Radius R bzw. a sowie mit der Gesamtelektronenzahl N_e im Ring die auf Elektronen und Ionen von seiten der Elektronen wirkende Feldstärke zu

$$\boldsymbol{E}_\mathrm{i} = \frac{eN_\mathrm{e}}{\pi\varepsilon_0 Ra}. \tag{3.90}$$

Man könnte zunächst annehmen, daß bei der Elektronenstrahl- und -ringformierung Schwierigkeiten infolge der abstoßenden Wirkung der Elektronen unter sich auftreten. Dieser Effekt wird aber bei relativistisch bewegten Ladungen infolge der magnetischen Anziehung um den Faktor $1/\gamma^2$ im Vergleich zu ruhenden Ladungen verringert, wobei γ der relativistische Faktor der Elektronen ist, so daß anstelle von $e\boldsymbol{E}$ der Ausdruck

$$\boldsymbol{F} = \frac{e\boldsymbol{E}}{\gamma^2} \tag{3.91}$$

tritt. Außerdem kann man den Rest der abstoßenden Kraft durch positive Ionenladungen kompensieren. Ihre Zahl ergibt sich zu

$$N_\mathrm{i} = \frac{N_\mathrm{e}}{\gamma^2}. \tag{3.92}$$

Die Beschleunigung der Ringe kann in dem relativ schwachen äußeren Feld mit

$$\boldsymbol{E}_\mathrm{a} = \frac{m}{M}\boldsymbol{E}_\mathrm{i} \tag{3.93}$$

erfolgen, wobei m und M die Massen des Elektrons und des Ions sind.

3. Ein zweiter Vorteil der Methode der kollektiven Teilchenbeschleunigung ergibt sich aus dem Verhältnis von Ladung zur Masse. Für das klassische Beschleunigungsverfahren erhält man aus (3.1c) die Beschleunigung

$$\boldsymbol{a}_\mathrm{kl} = \frac{ze}{M}\boldsymbol{E}_\mathrm{a}, \tag{3.94}$$

für das kollektive

$$\boldsymbol{a}_\mathrm{koll} = \frac{eN_\mathrm{e}\boldsymbol{E}_\mathrm{i}}{N_\mathrm{e}m\gamma + N_\mathrm{i}M} \tag{3.95}$$

Abgesehen davon, daß $\boldsymbol{E}_\mathrm{i} \gg \boldsymbol{E}_\mathrm{a}$, ist auch der Bruch in (3.95) größer als in (3.94). Wegen (3.92) kann der Beitrag der Ionen vernachlässigt werden. Der Vergleich von (3.94) und (3.95) liefert dann

$$\frac{ze}{M} < \frac{eN_\mathrm{e}}{N_\mathrm{e}m\gamma + N_\mathrm{i}M} \approx \frac{e}{m\gamma}. \tag{3.96}$$

Charakteristische Zahlen für N_e und N_i sind 10^{13} und 10^{11} sowie $\gamma = 40$. Für Protonen ergibt sich dann ein Verhältnis von 1:47; bei schweren Ionen wird es noch günstiger.

Da die beschleunigten Ionen die gleiche Geschwindigkeit $v_e = v_i$ haben, wie die Elektronen, ergibt sich als kinetische Energie

$$E_k(\mathrm{i}) = E_k(\mathrm{e}) \frac{M}{m\gamma}. \tag{3.97}$$

Im ungünstigsten Falle des Protons mit $M = m_p$ hat γ den Wert 40 und $E_k(i)$ wird $E_k(e) \times 1836/40 = 46E_k(e)$.

Für den Übergang zu höheren Energien ist auch aus ökonomischen Gründen der Energiezuwachs pro Längeneinheit des Beschleunigers von Interesse, der im Falle der kollektiven Beschleunigung wegen (3.95) besonders groß sein sollte. Durch Integration über $\boldsymbol{F}\,\mathrm{d}s$ mit (3.90) und mit einem Ladungs- zu Massenverhältnis der schweren Ionen von Z/A erhält man

$$E_k \Big/ \frac{\mathrm{MeV}}{\mathrm{m} \cdot \mathrm{A}} \approx \mathrm{k} \cdot \frac{10^{-11} N_e}{2Ra} \cdot \frac{Z}{A}, \tag{3.98}$$

wobei k von den Beschleunigungsbedingungen für die Ringe abhängt. Für selbstfokussierende Ringe ist $k = 0{,}25$, für Fokussierung mit äußeren Feldern 0,75. Mit dem zweiten Wert und $R = 0{,}04$ m, $a = 0{,}002$ m, $N_e = 10^{13}$ und $Z/A = 0{,}5$ erhält man ca. 5 MeV pro Meter und pro Nukleon.

4. Der als Ring zu beschleunigende Elektronenstrahl durchläuft einen aus fünf Phasen bestehenden Prozeß: 1. Einschuß entsprechend langer Elektronenimpulse von z. B. 20 ns Dauer in ein Magnetfeld zur Ringformung, 2. Kompression der Ringe, 3. Beladung der Ringe mit Ionen, 4. Ausführung der Ringe aus der Kompressionskammer, 5. Nachbeschleunigung der Elektronen-Ionenringe. Eine Anordnung der Hauptbestandteile zeigt Abb. 3.39.

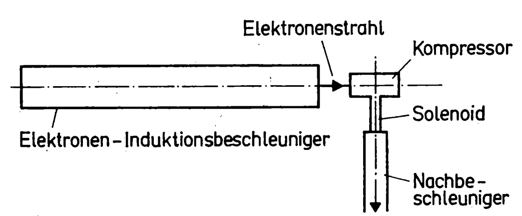


Abb. 3.39
Prinzipielle Anordnung der drei Hauptbestandteile des Kollektivbeschleunigers für Elektronen-Ionenringe (Draufsicht)

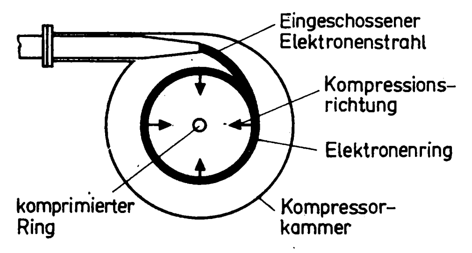


Abb. 3.40
Elektronenstrahleinschuß und Elektronenringformierung beim Kollektivbeschleuniger für Elektronen-Ionenringe

Der Einschuß des Elektronenstrahls erfolgt durch ein abschirmendes Rohr in ein vom Azimutwinkel unabhängiges eisenloses Magnetfeld, wie es die Abb. 3.40 zeigt. Das Magnetfeld muß aus Stabilitätsgründen nach außen hin abnehmen; wir nehmen aber der Einfachheit wegen an, daß es homogen ist. Um die Ringe auf den Durchmesser zu bringen, mit dem sie aus der Ringformkammer ausgeführt werden, muß man sie komprimieren. Man spricht daher auch von der Kompressorkammer. Im Dubnaer Kollektivbeschleuniger KUTI-20 wird die Kompression in drei Stufen durch aufeinanderfolgendes Einschalten von drei Spulenpaaren erreicht, wie man aus Abb. 3.41 und 3.42 entnehmen kann. Im Unterschied zum Betatron haben die Ringe in der Kompressorkammer keinen konstanten Radius, sondern er wird vom Einschußradius r_E auf den Ausführradius r_A komprimiert. Daher bleibt zwar (3.72) gültig, aber (3.73) ist durch

$$\dot{p} = -e(\dot{B}r - B\dot{r}) \tag{3.99}$$

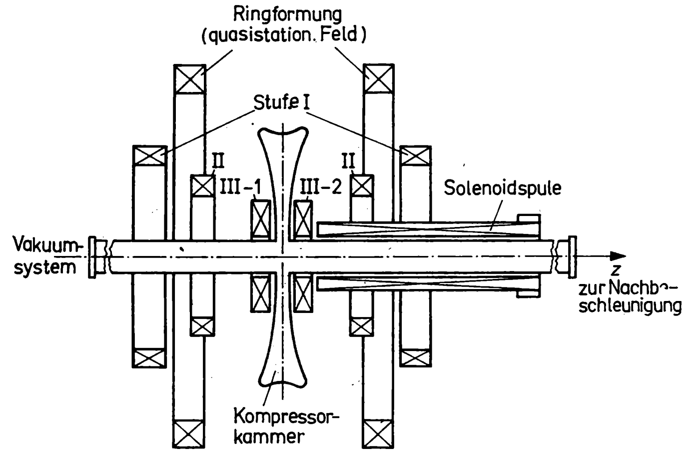


Abb. 3.41
Anordnung der Spulen um die Kompressorkammer im Kollektivbeschleuniger KUTI-20

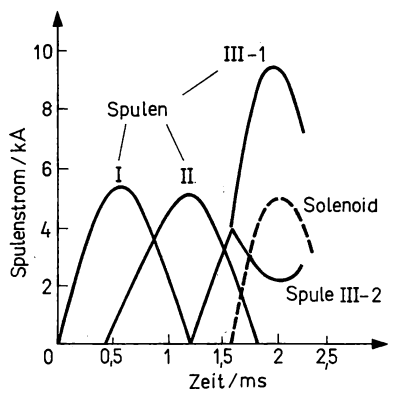


Abb. 3.42
Zeitlicher Verlauf der Ströme in den Spulen der Kompressorkammer des KUTI-20

zu ersetzen. Einsetzen in (3.72) liefert

$$\frac{\dot{r}}{r} = -\frac{\dot{B}}{2B}, \tag{3.100}$$

woraus folgt

$$\frac{r_A}{r_E} = \sqrt{\frac{B_E}{B_A}} = \varkappa^{-1}. \tag{3.101}$$

Im Prozeß der Kompression wird die kinetische Energie der Elektronen wesentlich erhöht. Aus der Erhaltung des Drehimpulses $m\gamma\omega r^2$ folgt

$$\gamma_A = \varkappa\gamma_E, \tag{3.102}$$

so daß mit (B.8)

$$E_{k,A} = \varkappa E_{k,E} = \sqrt{\frac{B_A}{B_E}} E_{k,E} \tag{3.103}$$

wird. Im Dubnaer Kollektivbeschleuniger KUTI-20 ist die Einschußenergie der Elektronen 2 MeV, $r_E = 35$ cm, $r_A = 3{,}5$ cm, also $\varkappa = 10$, so daß $E_{k,A} = 20$ MeV wird. Der Durchmesser des Ringquerschnitts wird bei der Kompression von 2 cm auf 4 mm verringert.

5. Ein dritter Vorteil der Methode der kollektiven Teilchenbeschleunigung besteht darin, daß keine Ionenquelle gebraucht wird, wie das bei allen anderen Beschleunigerarten der Fall ist. Die Ionen werden nach Einlaß eines Gases der zu beschleunigenden Nuklidsorte als neutrale Atome von den Elektronen im Ring durch Abreißen der Hüllenelektronen gebildet. Auf die erste Ionisation folgen weitere, so daß Ionen hohen, aber unterschiedlichen Ionisationsgrades mit einem bestimmten Mittelwert entstehen, der von der Aufenthaltsdauer im Ring abhängt. Für Wasserstoff mit einem Wirkungsquerschnitt von $\sigma \approx 10^{-19}$ cm^2 ist die charakteristische Ionisationszeit

$$\tau_i = \frac{2\pi R a^2}{N_e c\sigma} \approx (50 - 5)\ \mu\text{s}. \tag{3.104}$$

Der zeitliche Ablauf der Ionisation schwerer Ionen kann mit Hilfe einer Differentialgleichung für die zeitliche Änderung der Dichte der k-fach ionisierten Atome beschrieben werden, in der die Vielfachionisation, die Ionisation durch Sekundärelektronen, durch Ionen-Ionen-Stöße berücksichtigt werden müssen, sowie die Umstellung der Hülle auf das Vorhandensein von Vakanzen einschließlich des Auger-Effekts. In allen Fällen sind der Ionisationsquerschnitt für die entsprechenden Hüllenzustände und die Übergangswahrscheinlichkeiten zwischen ihnen wichtige Parameter, die gegenwärtig meist nicht genau genug bekannt sind.

6. Die Ausführung der beladenen Ringe aus der Mittelebene der Kompressorkammer, wo sie in der Potentialmulde des in z-Richtung bis zum Ende der Beladung symmetrischen Magnetfeldes gehalten werden, muß vorsichtig erfolgen, damit die Ringe nicht zerstört werden. Eine langsame Ausführung kann durch unterschiedliche Ströme in den Spulen III-1 und III-2 der Abb. 3.41 nach der Kompression erreicht werden, so daß sich die Ringe langsam auf Grund des nun zur Mittelebene unsymmetrischen Magnetfeldes in z-Richtung bewegen. Man spricht in diesem Zusammenhang auch von weicher oder von Beschleunigung im abnehmenden Magnetfeld. Da das Magnetfeld selbst keine Arbeit an den Teilchen verrichten kann, wird die Translationsenergie der Ringe aus der azimutalen Bewegungsenergie, also der Rotationsenergie der Elektronen genommen. Durch die Bewegung der Ringe in Richtung der abnehmenden Induktion wird ihr Durchmesser größer, die Rotationsenergie also kleiner, wie man auch aus

(3.103) erkennen kann. Im KUTI-20 ist der Abfall zu $(\partial B_z/\partial z)/B_z = 1{,}7 \cdot 10^{-1}$ gewählt worden. Der Zuwachs an Translationsenergie ΔE kann mit Hilfe dieses Gradienten, der Länge L der Beschleunigungsstrecke im fallenden Magnetfeld und der Beladung der Ringe ξ berechnet werden. Für den KUTI-20 sind mit $k = 0{,}25$ und $Z/A = 1/3$ für Stickstoffionen 4 MeV pro Meter und pro Nukleon erreicht worden.

7. Eine weitere Beschleunigung der Elektronen-Ionenringe kann in einem Linearbeschleuniger aus abwechselnd aufeinanderfolgenden koaxialen elektrischen Resonatoren zur Beschleunigung und magnetischen Solenoiden zur Ringführung und Aufrechterhaltung des Ringquerschnitts erfolgen. In den Laufstrecken zwischen den Resonatoren fällt die Induktion des Solenoidfeldes in z-Richtung linear ab, so daß es zu einer zusätzlichen Beschleunigung in dieser Richtung auf Kosten der Rotationsenergie der Elektronen kommt. Die dabei vor sich gehende Ringradiusvergrößerung wird durch eine im Resonator ansteigende magnetische Induktion rückgängig gemacht. Im Dubnaer KUTI-20 wird mit 10 Resonatoren und 11 Solenoiden auf $L = 16{,}6$ m, beide Systeme bei der Temperatur des flüssigen Heliums, also in Supraleittechnik ausgeführt, eine Endenergie aller schweren Ionen bis 20 MeV/A angestrebt.

8. Die Arbeitsweise eines Kollektivbeschleunigers mit Elektronen-Ionenringen bedeutet, daß diese Beschleuniger nur im Impulsbetrieb betrieben werden können. Die Folgefrequenz liegt gegenwärtig bei 1 Hz, angestrebt werden 20 Hz. Damit wäre ein gemittelter Teilchenstrom von $20 \cdot 10^{13}$ e^-/s = 32 μA und von $20 \cdot 10^{11}$ SI/s = 0,32 μA möglich. Am Beschleunigerausgang können beide Strahlenarten genutzt werden, da sie sich leicht mit einem Ablenkmagneten trennen lassen.

Literaturhinweise zu Kapitel 3

Arc 72, Dan 74, Did 77, Eng 74, Fen 69, Her 66, Kol 62, Kolo 62, Kolo 80, Law 77, Leb 81, Liv 63, Ran 76, Rja 80, Sar 79, Zel 82, Zie 75

4. Wechselwirkung zwischen Strahlung und Stoff

4.1. Einleitende Bemerkungen

1. Unsere experimentellen Kenntnisse über den Atomkern und die Elementarteilchen erhalten wir hauptsächlich, indem die beim Beschuß von Atomkernen mit Mikroteilchen entstehenden Reaktionsprodukte oder die Zerfallsprodukte radioaktiver Kerne — in beiden Fällen wiederum Mikroteilchen — registriert und deren Eigenschaften, wie Masse, Energie, Ladung u. a. bestimmt werden. Zu diesem Zweck lassen wir die uns interessierenden Mikroteilchen (Protonen, Neutronen, Elektronen, Gammaquanten u. a.) mit geeigneten Stoffen in Wechselwirkung treten, in denen nach weiterer Umwandlung oder Verstärkung makroskopisch meßbare Signale, z. B. in Form einer elektrischen Ladungsmenge oder einer sichtbaren Spur, entstehen. Um aus diesen Signalen Rückschlüsse auf die Parameter der Teilchen ziehen zu können, benötigen wir die genaue Kenntnis der Wechselwirkungsprozesse in den betreffenden Stoffen, d. h. den Zusammenhang zwischen Teilcheneigenschaften, Stoffeigenschaften (wie Dichte, Atommasse, Ionisationspotential u. a.) und der makroskopischen Meßgröße (Stromstärke, Impulshöhe, Spurlänge, Spurstärke u. a.).

Im vorliegenden Kapitel geht es um den Zusammenhang zwischen Teilcheneigenschaften und der bei ihrem Durchgang durch Stoffe entstehenden primären Information (Ionisationsdichte; Zahl sekundärer Teilchen pro Wegeinheit; Wahrscheinlichkeit der Umwandlung in leichter registrierbare Teilchen usw.), während die Umsetzung dieser Information in makroskopisch meßbare Signale im Zusammenhang mit den Detektoren und Spektrometern im Kapitel 5. beschrieben wird.

Die Kenntnis der Wechselwirkungen zwischen Strahlung und Stoffen ist darüber hinaus für viele praktische Anwendungen der Kernphysik, z. B. für die Berechnung von Strahlenabschirmungen, notwendig. Auch ist sie bedeutsam für die gezielte Veränderung von Stoffeigenschaften durch Beschuß mit Kernteilchen (Neutronen, schwere Ionen u. a.), die in den letzten Jahren zunehmende Bedeutung gewinnt — einige Beispiele hierzu werden in Kapitel 12 vorgestellt.

2. Bedenkt man die Breite des Spektrums der Mikroteilchen (s. Tabelle 2.1) und des hier in Frage kommenden Energiebereiches von 10 keV (und bei Neutronen sogar ab 10^{-5} eV) bis zu 10^3 GeV sowie die Unterschiedlichkeit der Atom-, Molekül- oder Festkörperstruktur verschiedener Medien, so wird die fast unüberschaubare Vielfalt der möglichen Wechselwirkungsprozesse verständlich. Andererseits gibt es eine Ursache dafür, daß die Wechselwirkung zwischen Strahlung und Stoff als gegenwärtig im wesentlichen bekannt angesehen werden kann: für alle Teilchen mit ausgeprägter elektromagnetischer Wechselwirkung, das sind alle geladenen Teilchen und Gammaquanten, ist dieser Typ der Wechselwirkung beim Durchgang durch Stoffe dominierend. Bei o. g. Energien kann man in vielen Fällen die Stöße mit Hüllenelektronen der Atome als Wechselwirkungen mit freien oder quasifreien (d. h. nur über eine mittlere Bindungsenergie $\langle E_B^{(e)} \rangle$ an das Atom gebundenen) Teilchen auffassen und damit auf eine Vielteilchenbeschreibung des Atoms verzichten.

Die Quantenelektrodynamik, die gegenwärtig am besten ausgearbeitete Theorie im Mikro-

kosmos, liefert eine exakte oder zumindest genügend genaue Beschreibung elektromagnetischer Erscheinungen, an denen wenige Wechselwirkungspartner beteiligt sind.

Eine ausführliche Darlegung der quantenelektrodynamischen Methoden ist nicht Aufgabe des vorliegenden Kapitels, ebenso muß auf die Ableitung der Beschreibung elektromagnetischer Effekte auf deren Grundlage verzichtet werden. Vielmehr wird der Versuch unternommen, die physikalischen Zusammenhänge, die den wichtigsten Effekten zugrunde liegen, zu erläutern und einige Ergebnisse der Theorie, die Beziehungen zu der unter 1. genannten Aufgabenstellung haben, im Sinne einer komprimierten Übersicht über die wichtigsten Zusammenhänge und Fakten zusammenzustellen.

Trägt der Wechselwirkungsprozeß prinzipiell einen Vielteilchencharakter, wie z. B. Umladungserscheinungen mehrfach geladener Ionen bei geringen Energien, so versagt meist die theoretische Beschreibung, und es muß auf empirische Zusammenhänge zurückgegriffen werden.

3. Bei extrem hohen Energien sowie für nichtgeladene Teilchen dominiert die starke Kernwechselwirkung. Im ersteren Falle handelt es sich um Elementarteilchenumwandlungen, die ausführlich im Kapitel 13 besprochen werden. Nur die aus der Sicht der unter 1. genannten Aufgabenstellung wichtigsten Neutron-Atomkern-Wechselwirkungsprozesse werden im vorliegenden Kapitel behandelt, wobei auf eine detaillierte kernphysikalische Beschreibung verzichtet werden kann, da Kernreaktionen, ausgelöst durch beliebige Mikroteilchen, noch einmal ausführlich im Kapitel 10 dargestellt werden. Neutrinos sind die einzigen Teilchen mit ausschließlich schwacher Wechselwirkung. Über ihre Wechselwirkungen mit Stoffen wird ebenfalls noch ausführlicher berichtet.

4.2. Geladene Teilchen

4.2.1. Übersicht über wichtige Wechselwirkungsprozesse

Für kernphysikalische und -technische Belange interessiert die Wechselwirkung geladener Teilchen mit kinetischen Energien ab $10^4 \dots 10^5$ eV bis hin zu 10^{12} eV. Unterhalb dieses Energiebereiches können positiv geladene Teilchen wie Protonen, Deuteronen, Alphateilchen usw. wegen der Coulomb-Abstoßung praktisch keine Kernprozesse mehr auslösen, im Gegensatz zu Neutronen (s. Abschnitt 4.4.) und anderen neutralen Teilchen. Die obere Grenze ist durch die gegenwärtig aus dem Bereich kosmischer Strahlen bekannten Wechselwirkungsenergien sowie die in absehbarer Zeit an Beschleunigern (s. Kapitel 3.) erreichbare Energie gegeben.

Für die praktischen Anwendungen (s. Kapitel 12) besteht das Hauptinteresse am Energiebereich bis etwa 20 ... 30 MeV. Die kinetischen Energien der hier betrachteten Teilchen liegen damit um viele Größenordnungen über der mittleren Bindungsenergie der Elektronen im Atom $\langle E_B^{(e)} \rangle$, welche durch den empirischen Ausdruck

$$\langle E_B^{(e)}/\mathrm{eV} \rangle \cong 13{,}5Z \tag{4.1}$$

angenähert berechnet werden kann. In vielen Fällen können daher Wechselwirkungen mit Hüllenelektronen als Stöße mit freien Teilchen beschrieben werden.

Beim Durchgang geladener Teilchen durch Stoffe vollziehen sich folgende Prozesse:

1. Elastische Stöße mit Hüllenelektronen
2. Elastische Stöße mit Atomkernen oder ganzen Atomen, bei denen ein Teil der kinetischen Energie des einfallenden Teilchens dem Rückstoßatom oder -kern übertragen wird

3. Unelastische Stöße mit den gebundenen Elektronen des Mediums, bei denen die abgegebene Energie des Teilchens zur Ionisation bzw. Anregung der Atome oder Moleküle aufgewandt wird (Ionisationsbremsung)
4. Unelastische Stöße mit Elektronen oder Atomkernen, bei denen infolge Ablenkung der Teilchen im Coulomb-Feld des Kerns oder der Elektronen Energie in Form von Bremsstrahlung abgegeben wird (Strahlungsverluste)
5. Stöße mit Atomkernen, die zur Anregung von Kernzuständen (unelastische Streuung, Coulomb-Anregung) führen oder andere Kernreaktionen auslösen
6. Emission von Lichtquanten beim Durchgang von Teilchen durch Stoff, deren Geschwindigkeit die Lichtgeschwindigkeit in diesem Medium übertrifft (Čerenkov-Effekt).

Die Wirkungsweise und der relative Anteil der genannten Prozesse am gesamten Energieverlust sind völlig unterschiedlich für leichte (zu denen wir hier Elektronen und Positronen zählen) und schwere (alle übrigen) Teilchen und hängen stark von deren Energie ab.

Die unter 1. und 5. genannten Prozesse spielen bei der Absorption eines Strahls schwerer geladener Teilchen bis zu mittlerer Energie im Vergleich zu den unter 2. und 3. aufgeführten Wechselwirkungsarten nur eine geringe Rolle und können daher vernachlässigt werden. Erst bei sehr hohen Energien $> 10^8$ eV steigt der Anteil der Kernprozesse und wird schließlich zum hauptsächlichen Absorptionsfaktor (für Protonen etwa ab 10^9 eV, für Myonen etwa ab 10^{11} eV). Auf die bei diesen Energien stattfindenden Kern- und Elementarteilchenwechselwirkungen wird kurz in 4.3.5. sowie ausführlicher in Kapitel 13 eingegangen.

Welches Gewicht die elastischen Stöße mit Atomen oder Atomkernen im Vergleich zur Ionisationsbremsung haben, hängt wiederum stark von der Geschwindigkeit v und Ladung z der abzubremsenden Teilchen ab, wobei wir für schwere Teilchen folgende beiden Grenzfälle unterscheiden können:

— Im Falle einfacher Ladung $z = 1$ und hoher Geschwindigkeit $\frac{v}{c} \geqq \alpha Z$ (Z ist die Ladung der Kerne des Bremsmediums und α die Konstante der elektromagnetischen Wechselwir-

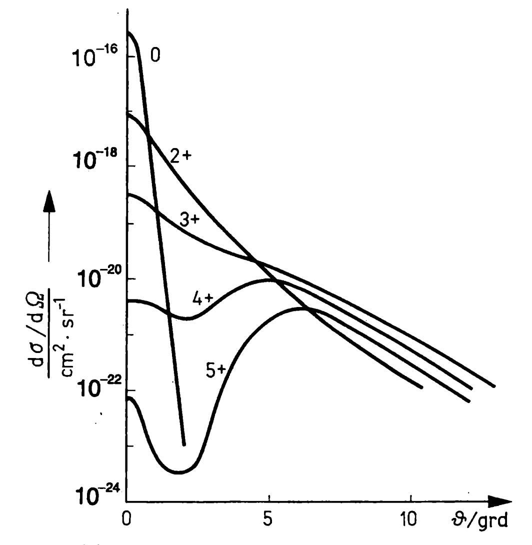


Abb. 4.1
Experimentell bestimmte, differentielle Wirkungsquerschnitte für die Bildung von Ar-Ionen mit den Ladungen 0, 2^+, 3^+, 4^+ und 5^+ bei der Wechselwirkung von 75 keV-Ar^+-Ionen mit Argonatomen

kung) vollzieht sich der Energieverlust in kleinen Portionen hauptsächlich infolge Ionisationsbremsung. Die Teilchenladung bleibt konstant, die Teilchenbahn verläuft infolge der geringen Ruhemasse der Elektronen praktisch geradlinig. Teilchen gleicher Energie haben annähernd den gleichen Bremsweg $R(E_k)$. Dieser praktisch wichtige Fall wird ausführlicher in 4.2.2. behandelt.

— Bei Teilchen mit großer Ladung, deren Geschwindigkeit vergleichbar oder kleiner als die Geschwindigkeit der Hüllenelektronen auf der K-Schale ist, spielt der Prozeß der Umladung, d. h. des Einfangs oder Verlustes eines oder mehrerer Hüllenelektronen, eine wesentliche Rolle. Abbildung 4.1 zeigt ein Beispiel für einen derartigen Umladungsprozeß. Ar^+-Ionen erzeugen mit nachweisbarer Wahrscheinlichkeit bei Streuung an Argonatomen bis zu fünffach geladene Ionen. Mit großer Wahrscheinlichkeit verläuft der Prozeß des Einfangs eines Elektrons (Rekombination). Während der Abbremsung verringert sich die effektive Ladung der Ionen durch Einfang von Elektronen kontinuierlich, die Ionisationsverluste nehmen infolgedessen ab, dafür spielen die elastischen Stoßprozesse an den Atomen des Mediums eine zunehmende Rolle. Unsere gegenwärtigen Kenntnisse über diese Prozesse sind wegen der Komplexität des quantenmechanischen Problems nur teilweise theoretischer, vielmehr meist empirischer Art.

Der Durchgang von Elektronen und Positronen durch Stoffe unterscheidet sich qualitativ von dem der schweren Teilchen. Hauptgrund hierfür ist die geringe Ruhemasse m_e der Elektronen und Positronen.

Als deren Folge ist die Änderung des Teilchenimpulses bezüglich Richtung und Betrag bei jedem einzelnen Stoß relativ groß. Dadurch ist wiederum die Wahrscheinlichkeit der Erzeugung von Bremsstrahlungsquanten wesentlich größer als für schwere Teilchen. Im Ergebnis zeigen sich starke Abweichungen des Bremsweges vom geradlinigen Verlauf und ein mit wachsender Teilchenenergie steigender Anteil der Strahlungsverluste. Die Besonderheiten der Abbremsung von Elektronen werden in 4.2.3. behandelt.

4.2.2. Ionisationsbremsung schwerer Teilchen

1. Eine einfache klassische Berechnung des Energieverlustes eines schweren Teilchens pro Wegeinheit $-(\mathrm{d}E/\mathrm{d}x)$ wurde von N. Bohr durchgeführt. Sie beruht auf folgenden Annahmen: es müssen die Voraussetzung für eine quasiklassische Behandlung des Stoßproblems gegeben sein. Dies ist der Fall, wenn das Produkt aus Teilchenimpuls p_T und Stoßparameter b genügend groß, $p_T \cdot b \gg \hbar$, ist. Weiterhin werden die Hüllenelektronen als ruhend und ungebunden betrachtet. Dies ist nur bei ausreichend hoher kinetischer Energie[1], $E_T \gg m_T/m_e E_e$, gegeben. Unter diesen Voraussetzungen läßt sich das Bremsvermögen berechnen, wenn man vom Impuls ausgeht, der dem Elektron beim Vorbeiflug eines schweren geladenen Teilchens übertragen wird. In Abb. 4.2 ist dies für ein Teilchen mit der Ladung z schematisch dargestellt. Das schwere Teilchen wird nicht von der Bahn abgelenkt. Nur das Elektron erfährt eine Impulsübertragung und zwar senkrecht zur Bewegungsrichtung des schweren Teilchens, da sich die Parallelkomponenten des Impulses gegenseitig kompensieren. Die Impulsübertragung an das Elektron läßt sich leicht auf der Grundlage der klassischen Elektrodynamik abschätzen. Nach dem Coulombgesetz gilt für die elektrostatische Kraft zwischen beiden Teilchen

$$\boldsymbol{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{r^2} \boldsymbol{e}_r = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{ze^2}{(x^2 + b^2)} \boldsymbol{e}_r = -e\boldsymbol{E} .$$

[1]) Zur Vereinfachung von Formeln wird hier anstelle von $E_k(T)$ für die kinetische Energie $E(E_e, E_p, E_n, E_\alpha, \ldots)$ verwendet.

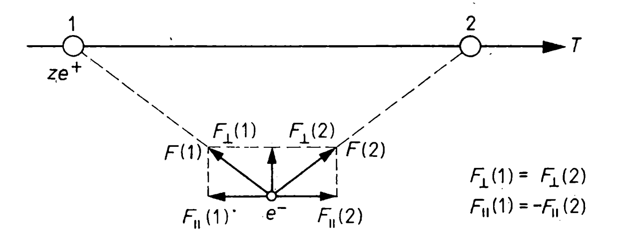


Abb. 4.2
Kompensation der Parallelkomponenten der Kraft bei der Streuung von schweren Teilchen an Elektronen (b kennzeichnet in den folgenden Rechnungen den kürzesten Abstand zwischen Elektron und Teilchenbahn)

Der Betrag der Impulsübertragung an das Elektron Δp_e läßt sich wie folgt mit der elektrischen Feldstärke des vorbeifliegenden Teilchens verbinden:

$$\Delta p_e = |\int \boldsymbol{F}\,\mathrm{d}t| = \int F_\perp\,\mathrm{d}t = \frac{1}{v}\int F_\perp\,\mathrm{d}x = \frac{e}{v}\int E_\perp\,\mathrm{d}x\,.$$

Das letzte Integral läßt sich einfach mit Hilfe des Gauß'schen Satzes lösen, nach dem der Verschiebungsfluß durch eine geschlossene Fläche A gleich der Summe aller eingeschlossenen Ladungen Q ist,

$$\oint_A \varepsilon_0 \boldsymbol{E}\,\mathrm{d}A = Q\,,$$

da in unserem Fall das Problem zylindersymmetrisch ist und folglich das Flächenelement $\mathrm{d}A = b\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}x$ angesetzt werden kann. Stellt man sich die Ladung ze im zeitlichen Mittel längs der Achse x gleichmäßig verteilt vor, so ist, wiederum zeitlich gemittelt, das elektrische Feld überall senkrecht zur Zylinderoberfläche $\boldsymbol{E} = E_\perp$ und wir erhalten

$$\int_A \varepsilon_0 \boldsymbol{E}\,\mathrm{d}A = \varepsilon_0 \int_{\mathrm{Zyl.}} E_\perp b\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}x = \varepsilon_0 b\,2\pi \int E_\perp\,\mathrm{d}x = ze\,.$$

Für Impuls- und Energieübertragung gelten daher

$$\Delta p_e = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\,\frac{ze^2}{v\cdot b} \tag{4.2}$$

und

$$\Delta E_e = \frac{\Delta p_e^2}{2m_e} = \frac{1}{8\pi^2\varepsilon_0^2 m_e}\left(\frac{ze^2}{vb}\right)^2. \tag{4.3}$$

Um die Wechselwirkung mit allen Elektronen zu erfassen, integriert man über die Energieübertragung auf die Elektronen in einem differentiellen Hohlzylinder $\mathrm{d}b\,\mathrm{d}x$ in den Grenzen b_{min} bis b_{max}. Die Einführung extremaler Stoßparameter ist erforderlich, da bei sehr kleinen und sehr großen Stoßparametern die o. g. Voraussetzungen keine Gültigkeit mehr haben und dadurch bei Integration von 0 bis ∞ ein physikalisch nicht sinnvolles Ergebnis erzielt würde. Der summarische Energieverlust ergibt sich somit zu

$$-\mathrm{d}E = \int_{b_{\mathrm{min}}}^{b_{\mathrm{max}}} \frac{\Delta p_e^2}{2m_e}\,n_e\,2\pi b\,\mathrm{d}b\,\mathrm{d}x\,, \tag{4.4}$$

mit der Elektronendichte n_e in dem Bremsmedium. Nach Einsetzen von (4.3) in (4.4) und Integration über db erhalten wir

$$-\left(\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}x}\right) = \frac{z^2e^4n_e}{4\pi\varepsilon_0^2v^2m_e} \ln\frac{b_{max}}{b_{min}} \sim \frac{z^2}{v^2} . \tag{4.5}$$

Ohne hier näher auf die Bestimmung von b_{max} und b_{min} eingehen zu müssen, kann aus (4.5) bereits auf die starke (quadratische) Abhängigkeit des Energieverlustes von Ladung und Geschwindigkeit des Teilchens geschlossen werden.

2. Die exaktere quantenmechanische Ableitung des Energieverlustes durch BETHE und BLOCH führte zu dem Ausdruck

$$-\left(\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}x}\right) = \frac{z^2e^4n_e}{4\pi\varepsilon_0^2v^2m_e}\left\{\ln\frac{2m_ev^2}{\langle E_B^{(e)}\rangle} - \ln(1-\beta^2) - \beta^2\right\} \tag{4.6}$$

mit $\beta = v/c$ und dem mittleren Ionisationspotential $\langle E_B^{(e)}\rangle$, welches nach (4.1) abgeschätzt werden kann.

Im nichtrelativistischem Fall $\beta \ll 1$ kann v^2 durch die kinetische Energie des Teilchens E_T und dessen Masse m_T über $E_T = m_Tv^2/2$ ausgedrückt werden. Aus (4.6) entsteht dann

$$-\left(\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}x}\right) = \frac{z^2e^4m_Tn_e}{8\pi\varepsilon_0^2E_T\cdot m_e} \ln\frac{2m_eE_T}{\langle E_B^{(e)}\rangle\cdot m_T} . \tag{4.7}$$

Bei gleicher Energie und Ladung zweier Teilchen sind die nichtrelativistischen Ionisationsverluste folglich proportional der Teilchenmasse.

Die Elektronendichte n_e kann über Ordnungszahl Z und die Atomdichte N_V oder über die Avogadrosche Zahl N_A, die Atommasse A und die Dichte ϱ ausgedrückt werden:

$$n_e = N_VZ = \frac{Z}{A}\varrho N_A \cong (0{,}4 \cdots 0{,}5)\,\varrho N_A . \tag{4.8}$$

Die spezifischen Energieverluste nach (4.6) und (4.7) sind folglich proportional der Stoffdichte ϱ des Bremsmaterials. Damit ist der Energieverlust $-[\mathrm{d}E/\mathrm{d}(\varrho x)]$ pro Wegeinheit ϱx im Absorber annähernd für alle Stoffe konstant, unabhängig von deren Zusammensetzung oder Aggregatzustand. Aus diesem Grunde wird die Stärke von Abschirmanlagen radioaktiver Strahlung gewöhnlich in Einheiten $\varrho \cdot x/(\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^{-2})$ berechnet und angegeben.

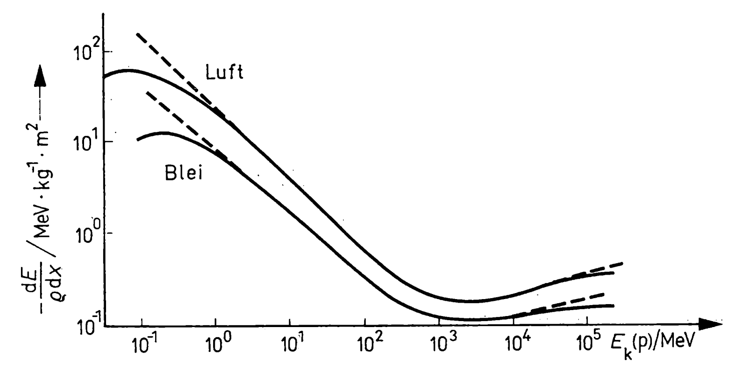


Abb. 4.3
Spezifischer Energieverlust für Protonen in Luft und Blei in Abhängigkeit von der Protonenenergie; gestrichelte Kurve — theoretischer Verlauf nach (4.6)

Abb. 4.3 zeigt experimentelle spezifische Energieverluste für Protonen in Luft und Blei in einem breiten Energiebereich und im Vergleich dazu den theoretischen Verlauf entsprechend (4.6). Absorptionskurven für Stoffe mit $7 \leqq Z_{\text{eff}} \leqq 82$ müssen zwischen den beiden dargestellten Kurven liegen.

Der Unterschied in der Absolutgröße der spezifischen Bremsverluste zwischen beiden Stoffen ist auf die unterschiedliche Größe von Z/A sowie der mittleren Ionisationspotentiale $\langle E_B^{(e)} \rangle$ (für Luft $\langle E_B^{(e)} \rangle \cong 94$ eV, für Pb $\langle E_B^{(e)} \rangle \cong 1070$ eV) zurückzuführen. Abweichungen zwischen (4.6) und dem Experiment treten bei sehr hohen und sehr geringen Energien auf, in beiden Fällen ist der gemessene Energieverlust kleiner als der berechnete. Bei kleinen Geschwindigkeiten v, die vergleichbar mit den mittleren Geschwindigkeiten der Hüllenelektronen sind, treten die in 4.2.1. genannten Umladungsprozesse auf. Das Proton bewegt sich durch Einfang eines Elektrons zeitweise als neutrales Atom durch den Absorber und der mittlere spezifische Energieverlust ist dementsprechend kleiner als theoretisch berechnet. In Stoffen hoher Dichte (Blei) wird dieser Effekt bereits bei höheren Energien als in Luft spürbar. Im Energiebereich bis $E_p \cong m_p c^2$ sinkt der Energieverlust, das theoretisch vorausgesagte Verhalten $-\left(\frac{dE}{\varrho\, dx}\right) \sim \left(\frac{z^2}{v^2}\right)$ wird somit experimentell bestätigt. Man kann dies physikalisch so verstehen, daß die Wechselwirkungszeit zwischen Proton und Elektron und damit der übertragene Impuls infolge der steigenden Geschwindigkeit v abnehmen. Bei $E_p \cong 2m_p c^2$ durchläuft $-\left(\frac{dE}{\varrho\, dx}\right)$ ein Minimum, danach steigt der Energieverlust infolge der Vergrößerung des logarithmischen Gliedes in (4.6) wieder an. Auch dies ist physikalisch verständlich:

Die Wechselwirkungszeit ist wegen $v \cong c$ im relativistischen Energiebereich etwa konstant. Infolge der relativistischen Koordinatentransformation erscheint das kugelsymmetrische Coulomb-Feld des Protons im System der Eigenkoordinaten im Laborsystem in Bewegungsrichtung gestaucht und senkrecht dazu gedehnt.

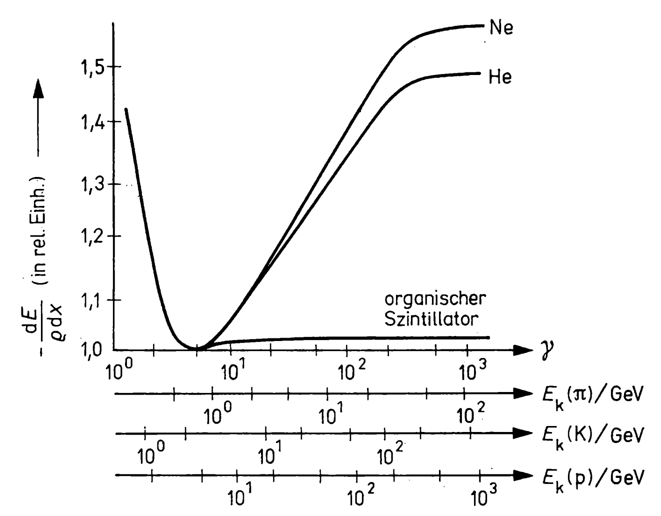


Abb. 4.4
Relativer Verlauf der primären Ionisationsverluste hochenergetischer Pionen, Kaonen und Protonen in Helium, Neon und einem organischen Szintillator; $\gamma = 1/(1 - \beta^2)^{1/2}$

Vom Coulomb-Feld des vorbeifliegenden Teilchens werden dadurch mehr Elektronen des Absorbers erfaßt, die Bremswirkung steigt. Der theoretisch vorhergesagte Anstieg wird tatsächlich nur in abgeschwächter Form gemessen: je dichter die Bremssubstanz ist, desto schneller stellt sich mit steigender Energie ein gewisser „Sättigungswert" des Energieverlustes ein. In Abb. 4.4 ist dies für einige Stoffe und Einschuß ultrarelativistischer π- und K-Mesonen sowie Protonen deutlicher dargestellt. Die physikalische Ursache hierfür liegt in der eintretenden elektrischen Polarisation des Mediums unter Wirkung des elektrischen Feldes des Teilchens. Sie schirmt die Elektronen weiter entfernt liegender Atome von der Wirkung des Teilchenfeldes ab und begrenzt daher den relativistischen Anstieg von $-\left(\frac{\mathrm{d}E}{\varrho\,\mathrm{d}x}\right)$.

3. Eine der experimentellen Beobachtung relativ gut zugängliche Größe ist die mittlere Reichweite $\langle R \rangle$ der Teilchen in einem Medium, sie ergibt sich aus dem Ionisationsverlust (4.6) zu

$$\langle R \rangle = \int_{E_\mathrm{T}}^{0} \frac{\mathrm{d}E}{-\left(\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}x}\right)}. \tag{4.9}$$

Bei mittleren Einschußenergien E_T, bei denen der logarithmische Anteil in (4.6) vernachlässigt werden kann, ergibt sich die Proportionalität

$$\langle R \rangle = \frac{m_\mathrm{T}}{z^2} \cdot f(v) \sim \frac{m_\mathrm{T} \cdot v^4}{z^2}, \tag{4.10}$$

aus experimentell ermittelten Reichweiten lassen sich also entweder E_T oder z bestimmen.

Tatsächlich ist die mittlere Reichweite $\langle R \rangle$ wegen des Umladungseffekts bei geringen Energien etwas größer als nach (4.6) und (4.9) berechnet. Dies wird durch Einführen einer Rest-Reichweite R_τ berücksichtigt. Die Restreichweite R_τ des Teilchens hängt von den Stoff- und Teilcheneigenschaften, jedoch nicht von dessen Einschußenergie ab. Sie wird meist empirisch bestimmt. Die vollständige mittlere Reichweite wird also exakter durch

$$\langle R \rangle = \frac{m_\mathrm{T}}{z^2} f(v) + R_\tau \tag{4.11}$$

erfaßt.

Für α-Teilchen in Luft beträgt $R_\tau \cong 0{,}2$ cm.

Infolge der statistischen Fluktuationen beim Abbremsprozeß schwankt die individuelle Reichweite der Teilchen um den Mittelwert $\langle R \rangle$ (s. Abb. 4.7a).

Schließlich seien noch zwei nützliche empirische Formeln für die Reichweite von α-Teilchen in Luft, $R_\alpha^{(\mathrm{L})}/\mathrm{m}$, und in einem Medium mit der Massenzahl A, $R_\alpha^{(A)}/(\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^{-2})$, angegeben:

$$R_\alpha^{(\mathrm{L})}/\mathrm{m} = 3{,}1 \cdot 10^{-3} (E_\alpha/\mathrm{MeV})^{3/2} \quad \text{für} \quad 4 < E_\alpha/\mathrm{MeV} < 7\,, \tag{4.12}$$

$$R_\alpha^{(A)}/(\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^{-2}) = 0{,}56 A^{1/3} (R_\alpha^{(\mathrm{L})}/\mathrm{m})\,.$$

Von Tripier u. a. wird für die Reichweite R eines Ions mit der relativen Atommasse A_i und der Geschwindigkeit βc die Beziehung

$$R(\beta) = \frac{A_i}{Z_i^2} R_\alpha(\beta) + A_i Z_i^n C_Z(137\beta/Z_i) \tag{4.13}$$

angegeben, mit dem von der Ordnungszahl Z_i des Ions abhängigen Exponenten

$$n = 0{,}678 - 0{,}002 Z_i\,.$$

In Formel (4.13) bedeuten $R_\alpha(\beta)$ — die Reichweite eines Alphateilchens gleicher Geschwindigkeit, jedoch ohne Bahnverlängerung infolge Neutralisation und C_Z — eine experimentell zu bestimmende Funktion, welche die Reichweitenverlängerung der Abbremsspur infolge der oben beschriebenen Umladungsprozesse beinhaltet.

4. In Übereinstimmung mit (4.6) und Abb. 4.3 nimmt der Energieverlust bei der Abbremsung von Teilchen in einem weiten Energiebereich zu. Diesen Sachverhalt bringen die sog. Braggschen Kurven in Abb. 4.5 für α-Teilchen einer ^{205}Po- und ^{214}Po-Alphaquelle zum Ausdruck. Sie zeigen eine Konzentration des spezifischen Energieverlustes am Ende des Bremsweges. Dies führt z. B. in Spurdetektoren zu einer deutlichen Zunahme der Spurstärke am Ende des Bremsweges. Die relative Konzentration der Energieabgabe am Ende des Bremsweges steigt mit wachsender Teilchenladung und ist bei vielfach geladenen schweren Ionen besonders prägnant; dies könnte u. a. zu einer präzisen Bestrahlung von Krebsgewebe im Körper des Menschen ausgenutzt werden.

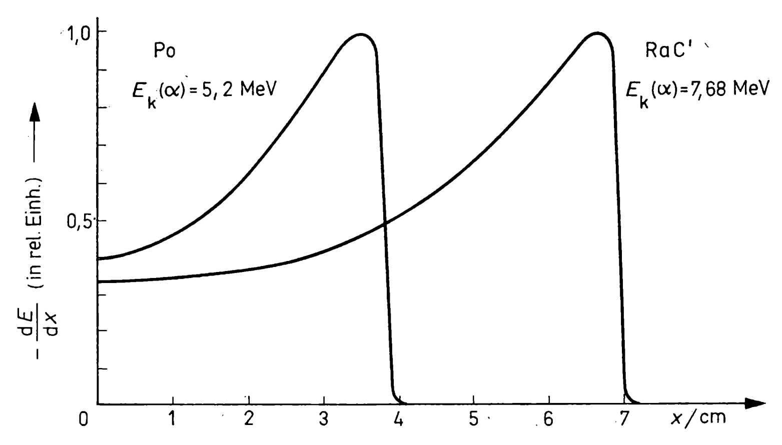


Abb. 4.5
Braggsche Kurven in Luft (bei Normaldruck und 15 °C) für α-Teilchen unterschiedlicher Energie aus ^{205}Po- bzw. ^{214}Po-Quellen

5. Bei der Ionisationsbremsung wird einem Teil der Elektronen soviel Energie übertragen, daß sie die Atomhülle verlassen und sich selbst als schnelle geladene Teilchen durch den Absorber bewegen. Diese Teilchen werden δ-Elektronen genannt. Ihre Energie läßt sich leicht unter der Annahme der Streuung des Ions an freien Elektronen berechnen:

Aus der Kinematik des elastischen Stoßes (s. (B.77)) folgt für die kinetische Energie des Rückstoßelektrons

$$E_e = \frac{4m_e m_T}{(m_e + m_T)^2} \cdot E_T \cdot \cos^2 \varphi \,, \tag{4.14}$$

wobei der Austrittswinkel φ des Rückstoßelektrons in den Grenzen $0 \leqq \varphi \leqq \pi/2$ eingeschlossen sein muß. Die maximale Energie besitzen δ-Elektronen, die in Richtung der Teilchenbewegung, d. h. unter $\varphi = 0^0$ entstehen:

$$E_e^{\max} = \frac{4m_e}{m_T} E_T \,. \tag{4.15}$$

Im Falle des Protons als stoßendes Teilchen ist $E_e^{max} \cong \frac{E_p}{500}$. Man kann also von der experimentell bestimmten Energie der Elektronen (aus der maximalen Reichweite R^{max} — s. 4.2.3.) auf die Energie der schweren Teilchen schließen. Genauere Informationen über Energie und Ladung der Teilchen sind aus der Zahl der pro Weglänge erzeugten δ-Elektronen zu erhalten. Die Rutherfordsche Streuformel (B.111) ergibt den differentiellen Streuquerschnitt für die Coulomb-Streuung des Teilchenpaares Ion-Elektron mit der reduzierten Masse $\mu \cong m_e$ im Massenmittelpunkt-System. Wegen der eindeutigen Energie-Winkel-Beziehungen (4.14) bei der elastischen Streuung kann der Streuquerschnitt anstelle als Winkelfunktion auch als Funktion der Energie des Rückstoßelektrons E_e geschrieben werden:

$$\frac{d\sigma}{dE_e} = \frac{e^4 z^2}{8\pi\varepsilon_0^2 m_e v^2 E_e^2} \sim \frac{z^2}{v^2 E_e^2}. \tag{4.16}$$

Aus (4.16) folgt, daß die Wahrscheinlichkeit der Erzeugung eines δ-Elektrons von Ladung und Geschwindigkeit des Teilchens sowie der Energie E_e abhängt. Die meisten δ-Elektronen entstehen mit geringen Energien, d. h., sie werden unter dem Winkel $\varphi \lesssim \frac{\pi}{2}$, also nahezu senkrecht zur Teilchenbahn emittiert.

Die Zahl der δ-Elektronen pro Wegeinheit im Energiebereich $E_e^* \leqq E_e \leqq E_e^{max}$ beträgt somit

$$N_\delta = \int_{E_e^*}^{E_e^{max}} n_e \, d\sigma = \frac{e^4 z^2 n_e}{8\pi\varepsilon_0^2 m_e v^2} \int_{E_e^*}^{E_e^{max}} \frac{dE_e}{E_e^2} = \frac{e^4 z^2 n_e}{8\pi\varepsilon_0^2 m_e v^2} \left(\frac{1}{E_e^*} - \frac{1}{E_e^{max}} \right). \tag{4.17}$$

In einem Spurdetektor kann diese Größe experimentell relativ leicht bestimmt und damit Ladung und Energie des Teilchens gefunden werden.

4.2.3. Abbremsung leichter Teilchen

1. Auf die Besonderheiten bei der Abbremsung von Elektronen und Positronen wurde in 4.2.1. bereits kurz eingegangen. Neben der möglichen großen Impulsänderung (in Richtung und Betrag) bei jedem einzelnen Stoß mit Hüllenelektronen und der infolgedessen eintretenden Strahlungsverluste gibt es noch weitere Besonderheiten gegenüber schweren Teilchen: Wegen der Ununterscheidbarkeit der einfallenden Elektronen und der Hüllenelektronen treten sog. Austauscheffekte auf. Sie tragen prinzipiell quantenmechanischen Charakter, spielen jedoch bei der Abbremsung nur eine untergeordnete Rolle. Beim Durchgang von Positronen tritt ein anderer, ebenfalls relativ kleiner Effekt auf, die Annihilations-Wechselwirkung

$$e^+ + e^- \to \gamma + \gamma, \tag{4.18}$$

bei der die Gesamtenergie des Positron-Elektron-Paares in elektromagnetische Strahlung übergeht. Der größte Teil der Positronen annihiliert jedoch erst nach deren Abbremsung.

2. Der Mechanismus der Ionisationsbremsung hat Ähnlichkeit mit dem für schwere Teilchen. Bei der Ableitung des spezifischen Energieverlustes muß jedoch berücksichtigt werden, daß das abzubremsende Teilchen von seiner Bahn abgelenkt und damit auch die resultierende Parallelkomponente des Impulses (s. Abb. 4.2) nicht mehr vernachlässigt werden kann. Da die Massen des stoßenden und der abbremsenden Elektronen gleich sind, kann der übertragene Impuls hinsichtlich des absoluten Betrages sehr groß sein und auch eine starke Richtungsänderung er-

folgen. Unter Berücksichtigung dieser und anderer Besonderheit hat BETHE den spezifischen Ionisationsverlust für Elektronen abgeleitet. Er erhielt

$$-\left(\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}x}\right)_{\mathrm{ion}} = \frac{e^4 n_\mathrm{e}}{8\pi\varepsilon_0^2 m_\mathrm{e} v^2}\left\{\ln\frac{m_\mathrm{e} v^2 E_\mathrm{e}}{2\langle E_\mathrm{B}^{(\mathrm{e})}\rangle^2 (1-\beta^2)} + (1-\beta^2) - \frac{2\gamma-1}{\gamma^2}\ln 2 + \frac{1}{8}\left(\frac{\gamma-1}{\gamma}\right)^2\right\}. \tag{4.19}$$

mit $\beta = v/c$; $E_\mathrm{e} = m_\mathrm{e}c^2(\gamma - 1)$ als der relativistischen kinetischen Energie des Elektrons und $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$, dem Koeffizienten der relativistischen Lorentz-Transformation. Für Positronen gilt ein ähnlicher Ausdruck:

$$-\left(\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}x}\right)_{\mathrm{ion}} = \frac{e^4 n_\mathrm{e}}{8\pi\varepsilon_0^2 m_\mathrm{e} v^2}\left\{\ln\frac{m_\mathrm{e} v^2 E_\mathrm{e}}{2\langle E_\mathrm{B}^{(\mathrm{e})}\rangle^2 (1-\beta^2)} - \frac{\beta^2}{12}\left(23 + \frac{14}{\gamma+1} + \frac{10}{(\gamma+1)^2} + \frac{4}{(\gamma+1)^3}\right)\right\}. \tag{4.20}$$

Die Ionisationsverluste von Positronen und Elektronen unterscheiden sich nur sehr wenig voneinander, deswegen werden im weiteren nur noch Elektronen betrachtet. Im nichtrelativistischen Fall $\beta < 0{,}5$, $(\gamma - 1) \ll 1$ kann (4.19) zu

$$-\left(\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}x}\right)_{\mathrm{ion}} = \frac{e^4 n_\mathrm{e}}{4\pi\varepsilon_0^2 m_\mathrm{e} v^2}\left\{\ln\frac{m_\mathrm{e} v^2}{2\langle E_\mathrm{B}^{(\mathrm{e})}\rangle}\right\} \tag{4.21}$$

umgeformt werden, während im ultrarelativistischen Fall $\gamma \gg 1$

$$-\left(\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}x}\right)_{\mathrm{ion}} = \frac{e^4 n_\mathrm{e}}{8\pi\varepsilon_0^2 m_\mathrm{e} c^2}\left\{\ln\frac{E_\mathrm{e}^2\gamma}{2\langle E_\mathrm{B}^{(\mathrm{e})}\rangle^2} + \frac{1}{\gamma}\right\} \approx \frac{e^4 n_\mathrm{e}}{4\pi\varepsilon_0^2 m_\mathrm{e} c^2}\left\{\ln\frac{E_\mathrm{e}\gamma^{1/2}}{2^{1/2}\langle E_\mathrm{B}^{(\mathrm{e})}\rangle} + \frac{1}{\gamma^{1/2}}\right\} \tag{4.22}$$

gilt. Beide Fälle sind in der Praxis wichtig, da bereits bei relativ geringen Energien $E_\mathrm{e} \geqq m_\mathrm{e}c^2 = 511$ keV sich das Elektron als typisch relativistisches Teilchen verhält. Für Abschirmberechnungen wird meist n_e durch die Stoffdichte ausgedrückt, ebenso wie das für schwere Teilchen in (4.8) getan wurde. In diesem Fall erhält man aus (4.19) bis (4.22) die Ionisationsverluste in $\mathrm{MeV \cdot m^{-1}}$, wenn der Ausdruck vor den geschweiften Klammern durch $1{,}53 \cdot 10^2 \varrho \left(\frac{Z}{A}\right) \beta^{-2}/(\mathrm{kg \cdot m^{-3}})$ ersetzt wird. Im nichtrelativistischen Fall gilt also beispielsweise

$$-\left(\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}x}\right)_{\mathrm{ion}}\Big/(\mathrm{MeV \cdot m^{-1}}) = 1{,}53 \cdot 10^2 \varrho \left(\frac{Z}{A}\right) \beta^{-2} \ln \frac{mv^2}{2\langle E_\mathrm{B}^{(\mathrm{e})}\rangle}\Big/(\mathrm{kg \cdot m^{-3}}). \tag{4.23}$$

Aus (4.23) folgt, daß der Energieverlust pro Wegeinheit $\varrho \cdot x/(\mathrm{kg \cdot m^{-2}})$, d. h. $\left(\frac{\mathrm{d}E}{\varrho\, \mathrm{d}x}\right)$, wiederum ein fast konstanter Wert für alle Absorber (bis auf die schwache Abhängigkeit über $\langle E_\mathrm{B}^{(\mathrm{e})}\rangle$ und Z/A) ist.

Vergleicht man (4.21) mit (4.6), so sieht man, daß leichte und einfach geladene schwere Teilchen gleicher Geschwindigkeit etwa dieselben Ionisationsverluste haben, da die unter dem Logarithmus stehenden Größen nur einen geringen Einfluß auf $\left(\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}x}\right)$ haben. Dagegen sind die Verluste bei gleicher Energie im nichtrelativistischen Fall proportional der Teilchenmasse (s. Gl. (4.7)), und ein Proton gleicher Energie hinterläßt im nichtrelativistischen Fall eine Spur mit etwa 2000mal höherer Ionisationsdichte als ein Elektron. Im ultrarelativistischen Fall dagegen sind wegen c = const, unabhängig von der Einschußenergie, die Ionisationsverluste für Protonen und Elektronen etwa gleich und konstant. Es verbleibt nur ein sehr

schwacher Unterschied im spezifischen Ionisationsverlust infolge der verschiedenen Ausdrücke in den Klammern von (4.6) und (4.22). Die Ionisationsverluste verschiedener ultrarelativistischer Teilchen hängen daher schwach von Masse und Energie der Teilchen ab und sind experimentell schwer voneinander zu unterscheiden.

3. Nach den Gesetzen der Elektrodynamik sendet jedes beschleunigte geladene Teilchen elektromagnetische Strahlung aus. So führt auch die Abbremsung und Richtungsänderung geladener Teilchen beim Durchgang durch Stoffe zum Entstehen sog. Bremsstrahlung. Die dadurch eintretenden Energieverluste des Teilchens werden als Strahlungsverluste bezeichnet. Die Beschleunigung eines Teilchens mit der Masse m_T und der Ladung ze im Coulomb-Feld des Kernes Ze is proportional zZe^2/m_T.

Die Strahlungsintensität verhält sich wie das Quadrat der Beschleunigung, d. h., sie ist proportional $z^2Z^2e^4/m_T^2$. Daher ist bei sonst gleichen Bedingungen die vom Elektron ausgestrahlte Intensität um $(m_p/m_e)^2 \cong 3 \cdot 10^6$mal größer als für ein Proton. Die Strahlungsverluste für schwere Teilchen spielen daher im Vergleich zu den Ionisationsverlusten praktisch keine Rolle bei der Abbremsung. Weiterhin folgt daraus, daß die Strahlungsverluste der Elektronen hauptsächlich bei Stößen mit Atomkernen entstehen. Die Strahlungsintensität bei Ablenkung im Kernfeld ist Z^2-fach höher als bei Ablenkung an einem Hüllenelektron, pro Volumeneinheit ist die Zahl der Hüllenelektronen jedoch nur Z-fach höher als die der Atomkerne. Die pro Weglänge an Kernen erzeugte Bremsstrahlungsintensität ist also im Vergleich zu der an Hüllenelektronen erzeugten um den Faktor $Z = 10 \cdots 100$ größer. Bei leichten Kernen kann der Beitrag der Hüllenelektronen zur Bremsstrahlung jedoch wesentlich werden und, um dies zu berücksichtigen, ist in (4.24) Z^2 durch $(Z + 1)Z$ sowie in den weiteren Formeln Z durch $Z + 1$ zu ersetzen.

Bethe und Heitler erhielten auf den Grundlagen der Quantenelektrodynamik für den spezifischen Strahlungsverlust

$$-\left(\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}x}\right)_{\mathrm{rad}} = N_V \cdot E_e Z^2 f(\ln E_e) \sim E_e Z^2 \ln E_e\,, \tag{4.24}$$

mit N_V/m^{-3}, der Atomkonzentration, und $f(\ln E_e)$, einer linearen Funktion von $\ln E_e$. Im ultrarelativistischen Bereich stellt sich infolge der abschirmenden Wirkung der Hüllenelektronen für $f(\ln E_e)$ ein Sättigungswert ein, und es gilt

$$-\left(\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}x}\right)_{\mathrm{rad}} = \mathrm{const} \cdot E_e \cdot Z^2\,. \tag{4.25}$$

Für das Verhältnis beider spezifischer Energieverluste (4.19) und (4.24) für $E_e > 1$ MeV gilt als grober Richtwert

$$\frac{(\mathrm{d}E/\mathrm{d}x)_{\mathrm{rad}}}{(\mathrm{d}E/\mathrm{d}x)_{\mathrm{ion}}} \cong \frac{ZE_e}{1600 m_e c^2} \cong \frac{ZE_e/\mathrm{MeV}}{800}\,. \tag{4.26}$$

Das relative Gewicht der Strahlungsverluste nimmt also mit wachsender Energie zu und bei der sog. kritischen Energie E_{krit} sind Ionisations- und Strahlungsverluste gleich groß. Nach (4.26) gilt

$$E_{\mathrm{krit}} \cong \frac{1600 m_e c^2}{Z}\,. \tag{4.27}$$

Für $E_e \gg E_{krit}$ dominiert der Strahlungsverlust, und aus (4.25) folgt für die Energieabnahme der Elektronen im Stoff ein exponentielles Gesetz

$$E_e(x) = E_e(0) \exp\left[-\frac{\varrho \cdot x}{l_{rad}}\right], \tag{4.28}$$

wobei die Materialkonstante $l_{rad}/(\mathrm{kg \cdot m^{-2}})$ die Bezeichnung Bremsstrahlungslänge trägt.

Tabelle 4.1 enthält für einige Stoffe genauere Werte der kritischen Energie und Strahlungslänge.

Tabelle 4.1
Bremsstrahlungslänge l_{rad} und kritische Energie E_{krit} für einige Materialien

Stoff	$l_{rad}/(\mathrm{kg \cdot m^{-2}})$	E_{krit}/MeV
Wasserstoff	580	340
Helium	850	220
Wasser, Luft	365	83
Aluminium	239	47
Eisen	138	24
Blei	58	6,9

4. Insgesamt ergeben sich die spezifischen Energieverluste für Elektronen aus der Summe von Ionisations- und Strahlungsverlusten

$$\left(\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}x}\right) = \left(\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}x}\right)_{ion} + \left(\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}x}\right)_{rad}. \tag{4.29}$$

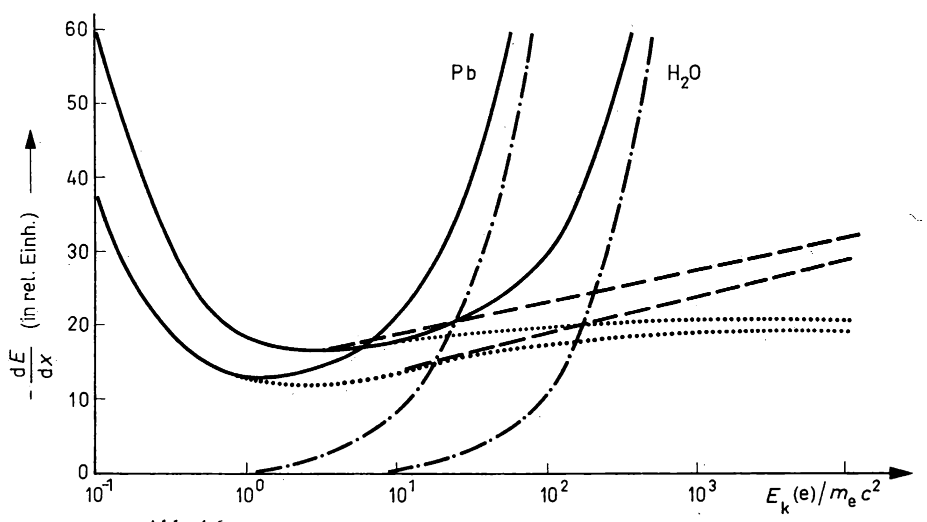


Abb. 4.6
Spezifische Energieverluste von Elektronen in Wasser und Blei; —·—·— Strahlungsverluste; – – – – Ionisationsverluste (ohne Polarisation des Mediums); .... Ionisationsverluste (mit Polarisation); ——— Gesamtverluste

Das Verhalten dieser drei Größen für Wasser und Blei ist in Abb. 4.6 dargestellt. Die Ionisationsbremsung der Elektronen zeigt den auch für schwere Teilchen typischen Verlauf (vgl. Abb. 4.3). Die Strahlungsbremsung steigt zunächst langsam an, geht dann relativ schnell zum asymptotischen Verhalten entsprechend (4.25) über und bestimmt praktisch den Gesamtverlust bei hohen Energien.

5. Im Gegensatz zu schweren Teilchen wird für Elektronen einer bestimmten Energie aus o. g. Gründen keine definierte Reichweite beobachtet. Vielmehr sinkt die Zahl der Elektronen, die eine bestimmte Schichtstärke durchlaufen, kontinuierlich, beginnend bereits bei sehr geringen Schichtstärken. (Bei sehr hohen Energien kann infolge der Bildung von Elektronen-Photonen-Schauern die Zahl der Elektronen zunächst zunehmen, vgl. 4.3.5.) Dies ist in Abb. 4.7b für zwei Einschußenergien E_{e1} und E_{e2} dargestellt. Es werden daher für Elektronen die beiden Begriffe mittlere Reichweite $\bar{R}$ und maximale Reichweite R^{max} definiert. Für die Abhängigkeit dieser Größen von Energie und Absorbereigenschaften existieren empirische Beziehungen. So gilt für Aluminium im Energiebereich $E_e = 10 \cdots 20$ MeV

$$R^{max}/\text{m} = 2{,}46 \cdot 10^{-3} E_e/\text{MeV}\,. \tag{4.30}$$

Abb. 4.7 verdeutlicht den prinzipiellen Unterschied zwischen den mittleren Reichweiten R_1 und R_2 für α-Teilchen, die der Größe $\langle R \rangle$ aus (4.9) entsprechen, und den mittleren Reichweiten $\bar{R}_1$ und $\bar{R}_2$ für Elektronen.

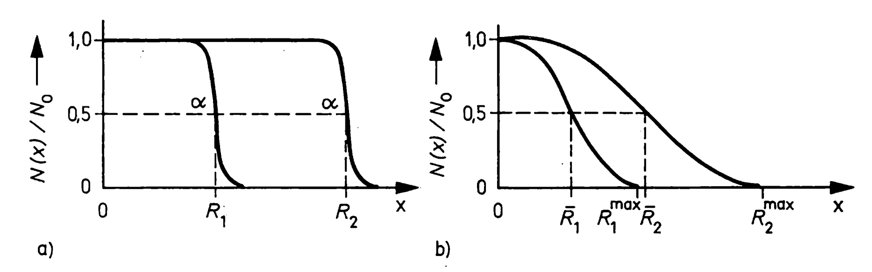


Abb. 4.7
Abhängigkeit der Zahl geladener Teilchen $N(x)$ von der durchlaufenden Schichtstärke x für jeweils zwei Energiewerte; a) Alphateilchen, b) Elektronen

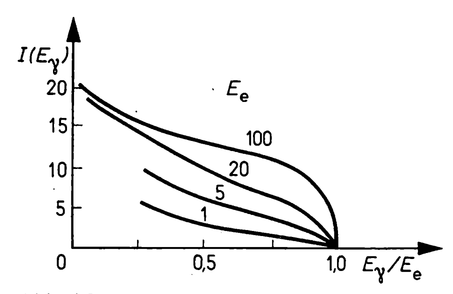


Abb. 4.8
Intensitätsverteilung im Bremsstrahlungsspektrum von Blei bei $E_e = 1, 5, 20$ und 100 MeV Einschußenergie

6. Beim Durchgang von Elektronen hoher Energie durch Stoffe entsteht mit großer Intensität Bremsstrahlung, da jedes Elektron ein oder mehrere Quanten erzeugen kann. Das Spektrum dieser Gammaquanten erstreckt sich kontinuierlich von $E_\gamma = 0$ bis E_e. In Abb. 4.8 ist die Intensitätsverteilung $I(E_\gamma)$ im Bremsstrahlungsspektrum von Blei bei $E_e = 1, 5, 20$ und 100 MeV dargestellt. Es gilt

$$I(E_\gamma) = \sigma(E_\gamma, E_e)\frac{E_\gamma}{E_e} \cdot \frac{Z^2e^2}{137m_ec^2} \tag{4.31}$$

mit $\sigma(E_\gamma, E_e)$ — dem Wirkungsquerschnitt für die Erzeugung eines Quants der Energie E_γ durch ein Elektron der Energie E_e.

4.2.4. Čerenkov-Effekt

1. Im Jahre 1934 entdeckte ČERENKOV eine neuartige Leuchterscheinung in Stoffen, die beim Durchgang energiereicher Strahlung entsteht und deren Eigenschaften von den bekannten Phosphoreszenzerscheinungen abwichen. Diese, später Čerenkov-Strahlung benannte, elektromagnetische Strahlung entsteht, wenn sich im Medium geladene Teilchen mit einer Geschwindigkeit v bewegen, die größer ist als die Lichtgeschwindigkeit $c' = \frac{c}{n}$ in diesem Medium. Dies kann eintreten, wenn der Brechungsindex $n > 1$ und $\beta \cong 1$ ist. Charakteristisch ist fernerhin, daß die Abstrahlung bei konstanter Teilchengeschwindigkeit unter einem bestimmten Winkel ϑ zur Teilchenbahn erfolgt. Da die Strahlungsintensität nicht von Z abhängt, konnten Strahlungsverluste als Ursache für die Entstehung der Čerenkov-Strahlung ausgeschlossen werden.

2. Die theoretische Erklärung dieses Effekts gaben TAMM und FRANK im Jahre 1937 auf der Basis der klassischen Elektrodynamik: Bei der Bewegung eines geladenen Teilchens mit $v < c'$ im Medium verursacht dessen Coulomb-Feld eine elektrische Polarisation der umliegenden Atome, wobei sich die entstehenden elektrischen Dipole im gesamten Raumwinkel 4π auf das geladene Teilchen ausrichten (und somit nach außen dessen Feld abschirmen). Jeder einzelne Di-

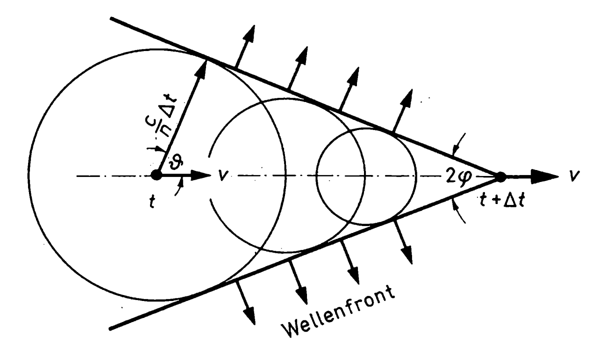


Abb. 4.9
Ausbreitungsrichtung der Čerenkov-Strahlung; wegen $v > \frac{c}{n}$ bildet sich hinter dem Teilchen ein Kegel aus, in dem Atome durch das Coulombfeld des Teilchens polarisiert werden können; die resultierende Abstrahlung erfolgt in Bewegungsrichtung der Wellenfront

pol ist eine Quelle elektromagnetischer Strahlung. Infolge kohärenter Überlagerung der Strahlungsamplituden aller Dipole um das Teilchen ist die resultierende Abstrahlung gleich Null. Dies ändert sich, wenn die Teilchengeschwindigkeit größer als $c' = \frac{c}{n}$ wird. Infolge der endlichen Ausbreitungsgeschwindigkeit elektromagnetischer Felder kann das Coulomb-Feld des Teilchens nur auf Atome innerhalb eines Kegels mit dem Öffnungswinkel 2φ polarisierend einwirken (s. Abb. 4.9). Die Ausrichtung der Dipole ist folglich nicht mehr kugelsymmetrisch, die kohärente Überlagerung ihrer Strahlung ergibt eine resultierende elektromagnetische Strahlung in senkrechter Richtung zur Mantelfläche des Kegels. Für den Öffnungswinkel des Kegels gilt

$$\sin\varphi = \frac{c}{n \cdot v} = \frac{1}{\beta n} \tag{4.32}$$

und für den Winkel ϑ zwischen Teilchenbahn und Abstrahlungsrichtung der Čerenkov-Strahlung

$$\cos\vartheta = \frac{c}{nv} = \frac{1}{\beta n}. \tag{4.33}$$

Durch Messung von ϑ kann folglich β und damit die Teilchengeschwindigkeit bestimmt werden. Der Effekt tritt auf, wenn β in den Grenzen

$$\frac{1}{n} \leqq \beta \leqq 1 \tag{4.34}$$

liegt. Die Strahlung setzt ein, sobald β den Minimalwert $\beta^{\min} = \frac{1}{n}$ überschreitet. In diesem Fall entsteht Čerenkov-Strahlung im Vorwärtsrichtung $\vartheta = 0$ und $\varphi = \pi/2$.

Der maximale Austrittswinkel ist abhängig vom Brechungsindex n des Mediums

$$\vartheta^{\max} = \arccos\frac{1}{n}. \tag{4.35}$$

Beispielsweise für Wasser mit $n = 1{,}33$ ist $\vartheta^{\max} = 41{,}5°$.

3. Im Vergleich zu den gesamten Ionisationsverlusten spielt der Čerenkov-Effekt nur eine untergeordnete Rolle (etwa 1% des Energieverlustes) bei der Abbremsung der Teilchen.

Das Frequenzspektrum der emittierten Lichtquanten wird durch die Beziehung

$$N(\nu)\,\mathrm{d}\nu = \frac{4\pi^2 Z^2 e^2}{hc^2}\left(1 - \frac{1}{\beta^2 n^2}\right)\mathrm{d}\nu \tag{4.36}$$

beschrieben. Die Zahl der ermittierten Quanten ist damit geschwindigkeitsabhängig (bei $\beta \leqq \beta^{\min} = \frac{1}{n}$ erfolgt keine Emission), jedoch unabhängig von der Frequenz ν.

Der spezifische Energieverlust des Teilchens $-\left(\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}x}\right)_{\text{Čer.}}$ zur Erzeugung von Čerenkov-Photonen im optischen Durchlaßbereich des Mediums von $\nu^{\min}$ bis $\nu^{\max}$ läßt sich durch Einführen einer mittleren Energie $\langle h\nu\rangle$ der Quanten und Formel (4.36) wie folgt ausdrücken:

$$-\left(\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}x}\right)_{\text{Čer.}} = -\langle h\nu\rangle \int_{\nu^{\min}}^{\nu^{\max}} N(\nu)\,\mathrm{d}\nu = \frac{4\pi^2 Z^2 e^2}{hc^2}\left(1 - \frac{1}{\beta^2 n^2}\right)(\nu^{\min} - \nu^{\max}) \cdot \langle h\nu\rangle. \tag{4.37}$$

In Piacryl mit $n = 1{,}5$ betragen die Energieverluste eines Elektrons von $E_e = 3$ MeV etwa $5 \cdot 10^4$ eV/m, dabei sind $\lambda^{max} = 800$ nm, $\lambda^{min} = 400$ nm und $\langle h\nu \rangle = 2$ eV. Unter $\vartheta = 48°$ werden $2{,}5 \cdot 10^4$ Quanten/m emittiert.

Die Tatsache, daß relativistische Teilchen in Stoffen unter bestimmten Winkeln zu ihrer Bahn Photonen emittieren, hat in der Folgezeit nach der Entdeckung des Čerenkov-Effekts eine breite praktische Anwendung gefunden: Es entstanden auf der Grundlage dieses Effekts Detektoren zur Bestimmung der Geschwindigkeit von Elementarteilchen (s. 5.6.), mit denen bedeutende physikalische Entdeckungen gemacht werden konnten. Daher wurde 1958 den Physikern ČERENKOV, TAMM und FRANK der Nobelpreis zuerkannt.

4.2.5. Effekte in Einkristallen

1. Die geordnete Struktur der Atome und ihrer Coulomb-Felder im Einkristall führt beim Durchgang positiv geladener schwerer Teilchen zu zwei miteinander verknüpften, experimentell beobachtbaren Effekten: Bewegen sich diese Teilchen in geringem Winkel zu einer Kristallachse oder -ebene, so haben sie eine wesentlich größere Reichweite als sich aus den Beziehungen (4.6) und (4.9) ergeben würde. Die Teilchen werden gleichsam wie in Kanälen durch den Festkörper geleitet (daher erhielt dieser Effekt in der englischsprachigen Literatur die Bezeichnung „channeling"). In einem durch einen Einkristall hindurchgegangenen Strahl beobachtet man in den verlängerten Richtungen der Kristallachsen und -ebenen eine im Vergleich zu dem dazwischenliegenden Gebiet reduzierte Teilchenintensität, das Kristallgitter wirft gewissermaßen einen Schatten (daher erhielt dieser erstmals von TULINOV beobachtete Sachverhalt die Bezeichnung Schatten- oder TULINOW-Effekt). Die Abb. 4.10 und 4.11 zeigen je ein Beispiel für experimentelle Beobachtungen beider Effekte. In Abb. 4.10 ist die relative Zahl der durch eine monokristalline Goldfolie hindurchtretenden Protonen (Einschußenergie $E_p = 75$ keV in Abhängigkeit vom Drehwinkel des Monokristalls in bezug auf die Richtung des scharf kollimierten Teilchenstrahls dargestellt. Die Teilchenenergie wurde so gewählt, daß ohne „Kanalleitung" der Teilchen die Kristallstärke gerade dem Ende der Reichweitekurve (s. Abb. 4.7a) entspricht und im

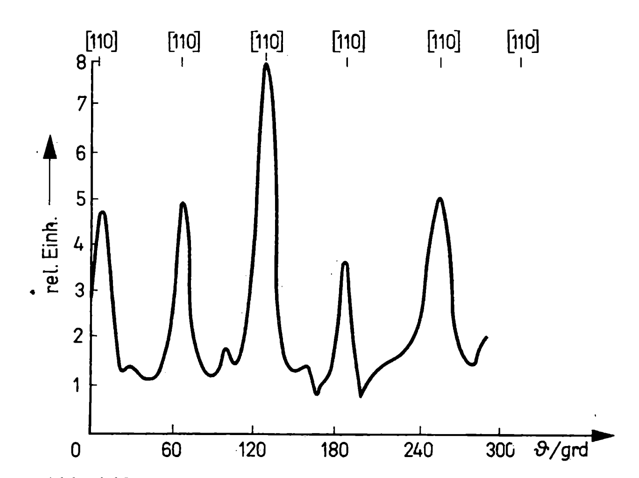


Abb. 4.10
Abhängigkeit der Anzahl der durch eine monokristalline Schicht hindurchgetretenen Protonen von der Orientierung des Kristalls in Bezug auf die Einschußrichtung

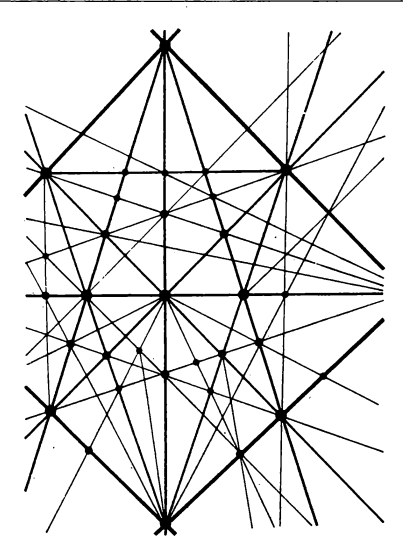


Abb. 4.11
Schattensystem, das durch elastische Streuung von Protonen in einem Wolfram-Monokristall gebildet wird

Mittel nur ein Bruchteil aller eingeschlossenen Teilchen den Kristall passieren können. Wie dargestellt, wurde bei Einschuß parallel zu den Richtungen der Kristallachse [110] eine beträchtliche Zunahme der relativen Teilchenzahl nachgewiesen. In Abb. 4.11 ist die mit einer Fotoplatte aufgenommene Intensitätsverteilung an den Atomkernen eines Wolfram-Einkristalls elastisch gestreuter Protonen dargestellt. Die Protonen werden von den Atomkernen nach allen Richtungen gestreut. Sie können jedoch in den Richtungen der Kristallachsen und -ebenen nicht aus dem Kristall austreten (s. Abb. 4.12b), wodurch das dargestellte Schattenbild entsteht. Kristallachsen bilden starke punktförmige Schatten, während die Kristallebenen schwächere linienförmige Schatten bilden.

2. Das beobachtete Verhalten läßt sich in seinen prinzipiellen Zügen relativ einfach erklären: Die positiv geladenen Teilchen, die sich unter kleinen Winkeln zu den kristallographischen Ebenen bewegen, werden von den Coulomb-Feldern der Atomkerne reflektiert. Dies geschieht durch vielfache Stöße mit kleiner Impulsübertragung an den benachbarten Atomkernen der Kristallachsen oder -ebenen (s. Abb. 4.12c). Das so reflektierte Teilchen trifft auf die gegenüberliegende Ebene ebenfalls unter kleinem Einfallswinkel und wird hier ebenso reflektiert usw. Da sich im Mittel diese wellenartige Bewegung des Teilchens zwischen den Kristallebenen in relativ großer Entfernung von den Atomkernen vollzieht, sinkt $-(\mathrm{d}E/\mathrm{d}x)$, der mittlere Energieverlust, und folglich haben die Teilchen im Kristall eine höhere Reichweite. In welchem Winkelbereich um die Achsen diese Reflexion eintritt, läßt sich grob an Hand der Formeln für die Rutherfordstreuung für den in Abb. 4.12b dargestellten Fall abschätzen. Ein aus dem Kern unter dem Winkel ϑ' emittiertes Teilchen fliegt mit dem Stoßparameter $b \cong \mathrm{d}\vartheta'$ am folgenden Kern vorbei und wird von diesem um den Winkel ϑ'' abgelenkt.

Für die Coulomb-Streuung gilt (s. B 3.7.)

$$\tan\frac{\vartheta''}{2} = \frac{zZe^2}{4\pi\varepsilon_0 m_\mathrm{T} v^2 b}, \qquad (4.38)$$

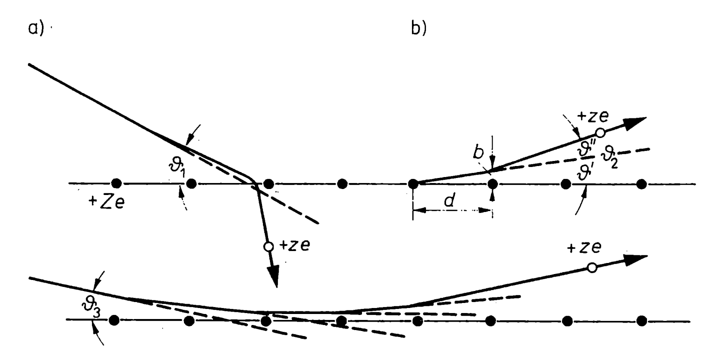


Abb. 4.12
Bewegung positiv geladener Teilchen im Monokristall
a) Coulombstreuung an einem Gitterbaustein bei $\vartheta_1 > \vartheta_G$
b) ein im Festkörper entstehendes geladenes Teilchen (z. B. durch Alphazerfall eines Gitterbausteins) kann den Einkristall nur unter einem Winkel $\vartheta_2 = \vartheta' + \vartheta'' > \vartheta_G$ verlassen
c) Reflexion eines positiv geladenen Teilchens an einer Kristallachse bzw. -ebene bei Einfall unter einem Winkel $\vartheta_3 < \vartheta_G$

so daß sich das Teilchen nunmehr unter dem Winkel

$$\vartheta_2 = \vartheta' + \vartheta'' \cong \frac{b}{d} + \frac{2zZe^2}{4\pi\varepsilon_0 m_T v^2 b} \tag{4.39}$$

zur Kristallachse bewegt. Der Minimalwert von ϑ_2, den wir als Grenzwinkel ϑ_G bezeichnen wollen, wird im Falle $\vartheta' = \vartheta''$ erreicht, d. h., es gilt

$$\vartheta_G \cong \frac{2b_{\min}}{d} = 2\left[\frac{2 \cdot z \cdot Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 m_T v^2 d}\right]^{1/2} \tag{4.40}$$

Innerhalb des Winkelbereichs $0 \leqq \vartheta \leqq \vartheta_G$ kann sich kein Teilchen bewegen. Es bilden sich „Schatten“ in Richtung der Achsen aus. Umgekehrt gilt annähernd, daß Teilchen, die sich innerhalb dieses Winkels zur Kristallachse oder -ebene hinbewegen, diese nicht erreichen oder gar durchstoßen können, sondern von ihr reflektiert werden, wie in Abb. 4.12c dargestellt.

3. Die Anwendung dieser Effekte hat praktische Bedeutung gewonnen: Einerseits können aus dem Verhalten von Festkörperproben bezüglich Durchgang geladener Teilchen Rückschlüsse über Defekte im Kristallgitter gezogen werden. So führt z. B. das Vorhandensein von Atomen auf Zwischengitterplätzen verständlicherweise zur Abschwächung des Kanalleitungs-Effekts. Andererseits wurde unter Ausnutzung des Schatteneffekts eine Methode zur direkten Messung des Zeitablaufs von Kernreaktionen im Bereich $10^{-16} \cdots 10^{-17}$ s entwickelt. Diese beruht darauf, daß die Kernreaktionen (a, b) an Atomkernen des Kristallgitters herbeigeführt werden. Infolge des Rückstoßimpulses beim Auftreffen des Teilchens a verlassen die Kerne ihre Gitterplätze und nehmen Zwischengitterplätze ein. Erfolgt die Emission des Teilchens b sofort, d. h. innerhalb $10^{-19} \cdots 10^{-21}$ s, so bilden diese Teilchen auf einer Fotoplatte das übliche Schattenbild. Erfolgt die Emission erst nach 10^{-17} s, so befindet sich der Rückstoßkern bereits zwischen den Ebenen des Kristallgitters, und die Schattenbildung erfolgt nicht oder nur abgeschwächt.

4.3. Gammastrahlung

4.3.1. Die wichtigsten Wechselwirkungsprozesse

Elektromagnetische Strahlung wird häufig nach ihrer Entstehung klassifiziert, so z. B. in Röntgenstrahlung, Bremsstrahlung, Gammaquanten des radioaktiven Zerfalls usw.

Hinsichtlich ihrer Absorptionseigenschaften, die uns im vorliegenden Kapitel interessieren, sind jedoch alle elektromagnetischen Quanten gleicher Energie E_γ bzw. Wellenlänge λ,

$$E_\gamma = \frac{hc}{\lambda}, \tag{4.41}$$

unabhängig von ihrer Entstehung, infolge ihrer physikalischen Natur identisch. Deshalb werden in den weiteren Betrachtungen etwas willkürlich als Gammaquanten alle Photonen mit Energien $E_\gamma > 10$ keV bezeichnet. Die Wellenlänge dieser Strahlung ist gleich oder kleiner als die Atomdimensionen: $\lambda \leqq a_0 \cong 5 \cdot 10^{-11}$ m.

Gammaquanten können mit dem Atomkern, den Hüllenelektronen und elektromagnetischen Feldern in vielfältige elektromagnetische Wechselwirkungen treten. Die Tabelle 4.2 enthält die wichtigsten dieser Prozesse.

Die bei der Wechselwirkung von Gammaquanten mit Stoffen dominierenden Prozesse Fotoeffekt, Compton-Streuung und Paarbildung werden in den folgenden Punkten ausführlicher behandelt.

Die Wechselwirkung von Gammaquanten mit Atomkernen spielt bei der Absorption wegen der geringen Wirkungsquerschnitte eine untergeordnete Rolle. Sie liefert jedoch wesentliche Informationen über die Struktur der Atomkerne.

Tabelle 4.2
Wechselwirkungsprozesse zwischen Gammaquanten und Atomen

Partner der Wechselwirkung	Art der Wechselwirkung		
	ohne Änderung von λ	mit Änderung von λ	Absorption
Hüllenelektron (HE)	kohärente Rayleigh-Streuung; Thomson-Streuung (quasifreies HE)	inkohärente Streuung; Compton-Effekt (quasifreies HE)	Fotoeffekt (gebundenes HE)
Atomkern (AK)	kohärente Rayleigh-Streuung am AK, kohärente Thomson-streuung an AK; Resonanzstreuung; Mößbauer-Effekt	Streuung am AK mit Anregung von Kernzuständen (γ, γ'); Compton-Streuung; inkohärente Streuung an einzelnen Nukleonen im AK	Kernfotoeffekt (γ, n), (γ, p), (γ, α) ... Fotospaltung (γ, f)
Coulomb-Feld (CF) der HE und des AK	Delbrück-Streuung an schweren AK		Paarbildung (hauptsächlich AK)
Mesonenfelder (MF) des AK			Mesonenerzeugung

Als einfachstes und zugleich praktisch wichtigstes Beispiel eines sog. Kernfotoprozesses ist in Abb. 4.13 der Verlauf des Wirkungsquerschnitts der Fotospaltung des Deuterons

$$\gamma + d \rightarrow n + p - 2{,}2\,\text{MeV} \tag{4.42}$$

dargestellt. Das relativ schwach gebundene Deuteron wird bereits bei etwa 2 MeV Anregungsenergie aufgebrochen.

Der Wirkungsquerschnitt ist jedoch im Vergleich zu den anderen Wechselwirkungsprozessen überaus klein. Von praktischer Bedeutung ist dieser Prozeß als Kernreaktion zur Neutronenerzeugung (sog. Fotoneutronen — s. 4.5.).

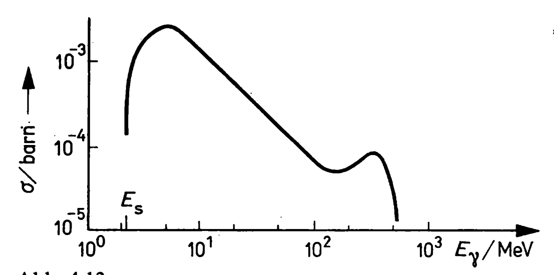


Abb. 4.13
Fotospaltung des Deuterons; die Schwellenenergie beträgt $E_S = E_B^{(D)} = 2{,}23$ MeV

Die rückstoßfreie Absorption und Emission von Gammaquanten in Atomkernen (Mößbauer-Effekt) ist von grundlegender Bedeutung für die Kernphysik, da sie Energiemessungen mit einer relativen Unschärfe von 10^{-15} bis 10^{-17} zuläßt (Näheres s. Kap.9.7.) Die Thomson-Streuung interessiert hier nur als niederenergetischer Grenzfall. Wenn die Gammaenergie kleiner als die Bindungsenergie der Elektronen im Atom $E_B^{(e)}$ ist, entsenden die zu resonanzartigen Schwingungen angeregten Elektronen elektromagnetische Strahlung gleicher Frequenz. Der Wirkungsquerschnitt pro Elektron für diesen Prozeß ist nach THOMSON gleich

$$\sigma_0 = \frac{8\pi}{3} r_e^2 = 0{,}66 \cdot 10^{-28}\,\text{m}^2\,, \tag{4.43}$$

mit dem klassischen Elektronenradius

$$r_e = \frac{e^2}{m_e c^2} = 2{,}8 \cdot 10^{-15}\,\text{m}\,. \tag{4.44}$$

Bei kleinen Streuwinkeln und geringen Gammaenergien ist die dem Elektron übertragene Energie klein gegenüber der Bindungsenergie. In diesem Fall wird der Rückstoßimpuls vom Atom als Ganzem aufgenommen, und dadurch sind die Wellenlängen der an den verschiedenen Atomelektronen gestreuten Quanten völlig gleich. Da außerdem auch feste Phasenbeziehungen zwischen ihnen bestehen, können sich die Streuamplituden aller Hüllenelektronen kohärent überlagern. Der Querschnitt für diesen Effekt, Rayleigh-Streuung genannt, wächst mit sinkender Energie und Streuwinkel und steigt mit Z.

Es ist ein weiterer kohärenter Effekt zwischen Streuwellen verschiedener Atome möglich: Findet die Streuung an Atomen eines Kristalls statt, dessen Gitterkonstante d vergleichbar mit der Wellenlänge ist, so überlagern sich die Streuwellen von den verschiedenen Bausteinen des Kristallgitters, und es kommt zur Ausbildung von Interferenzerscheinungen. Nach der Braggschen Reflexionsbeziehung

$$2d \sin \varphi = n\lambda \quad \text{mit} \quad n = 1, 2 \ldots \tag{4.45}$$

bilden sich bei bestimmten Winkeln φ zwischen der Einfallsrichtung der Quanten und der Gitterebene Intensitätsmaxima der reflektierten Quanten aus (s. Abb. 4.14). Dieser Effekt spielt nur für sehr weiche Gammastrahlen eine wesentliche Rolle. Im eigentlichen Gebiet der Gammaenergien ist $\lambda \ll d$, und damit treten Interferenzmaxima praktisch nicht mehr auf.

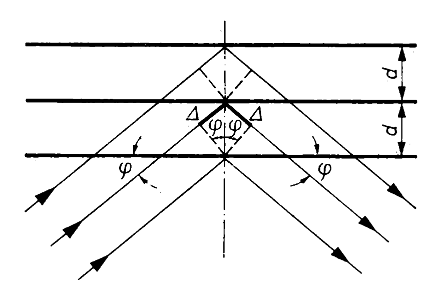


Abb. 4.14
Kohärente Streuung elektromagnetischer Wellen am Kristallgitter; der Gangunterschied für Streuwellen benachbarter Gitterebenen beträgt $2\Delta = 2d \sin \varphi$

Bei genügend hoher Energie E schließlich können π-Mesonen bei der Wechselwirkung von Quanten mit freien oder Kernnukleonen entstehen. So beispielsweise in den Reaktionen

$$\gamma + \mathrm{n} \rightarrow \pi^- + \mathrm{p} \quad \text{bei} \quad E_\gamma > 150\,\mathrm{MeV} \tag{4.46}$$

und

$$\gamma + \mathrm{p} \rightarrow \mathrm{n} + \pi^+ + \pi^0 \quad \text{bei} \quad E_\gamma > 325\,\mathrm{MeV}\,. \tag{4.47}$$

Zum totalen Absorptionsquerschnitt liefern diese Prozesse jedoch nur einen Beitrag von weniger als 1%.

4.3.2. Fotoeffekt

Als Fotoeffekt bezeichnet man den Prozeß der Emission eines Elektrons aus der i-ten Schale der Elektronenhülle infolge der Absorption eines Gammaquants durch das Atom. Die kinetische Energie des sog. Fotoelektrons E_e beträgt nach EINSTEIN

$$E_e = E_\gamma - E_B^{(i)}, \qquad i = \mathrm{K, L, M} \ldots, \tag{4.48}$$

mit $E_\gamma = h\nu$, der Energie des Gammaquants, und $E_B^{(i)}$, der Bindungsenergie eines Elektrons auf der i-ten Schale. Auf das Atom wird ein Teil des Impulses des Photons übertragen, daher kann der Fotoeffekt nur an einem gebundenen Elektron stattfinden. Für den Fotoeffekt an einem freien Elektron können Energie- und Impulserhaltungssatz nicht gleichzeitig erfüllt sein.

Dies erklärt auch die wesentlichen Merkmale des Fotoeffekts: Es treten starke Maxima im Wirkungsquerschnitt $\sigma_F(E_\gamma)$ bei $E_\gamma = E_B^{(i)}$ auf, d. h., wenn die Energie der Quanten gerade ausreicht, um Elektronen der i-ten Schale aus dem Atom freizusetzen. Unterhalb dieser Energien kann der Fotoeffekt aus Gründen der Energieerhaltung nur an den jeweils höheren, d. h. schwächer gebundenen, Schalen stattfinden. Oberhalb dieser Energiewerte sinkt die Wahrscheinlichkeit des Fotoeffekts mit steigender Gammaenergie. Damit entsteht der in Abb. 4.15 schematisch dargestellte Verlauf von $\sigma_F(E_\gamma)$. Die untere Energieschwelle ergibt sich aus der Bindungsenergie der äußeren Elektronenschale des Atoms. Es wird charakteristische Röntgen-

strahlung infolge der Auffüllung der freigewordenen Plätze auf den inneren Schalen durch äußere Hüllenelektronen emittiert.

Als unmittelbarer Ausdruck des Einflusses der Bindungsstärke des Elektrons im Atom auf die Wahrscheinlichkeit des Fotoeffekts sind dessen sehr starke Abhängigkeit von der Kernladungszahl, $\sigma_F \sim Z^5$, sowie das Dominieren des Effekts an der K-Schale (etwa 80% des Gesamtquerschnitts für $E_\gamma > E_B^{(K)}$) zu verstehen.

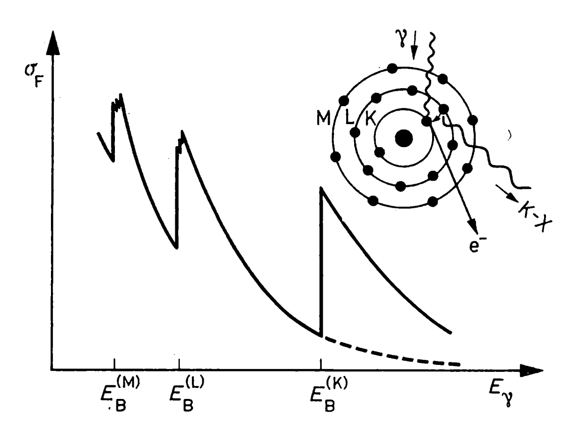


Abb. 4.15
Schematischer Verlauf des Wirkungsquerschnittes des Fotoeffekts über der Gammaenergie; die Aufspaltung der L- und M-Schalen kommt im Querschnittsverlauf zum Ausdruck

Die Methoden der Quanten-Elektrodynamik gestatten eine ausreichend genaue Berechnung des Effekts. Ein relativ einfacher, geschlossener Ausdruck ergibt sich nach HEITLER für den Wirkungsquerschnitt an der K-Schale pro Atom im Falle $E_\gamma > E_B^{(K)}$:

$$\sigma_F^{(K)}/\text{cm}^2 = 4\sqrt{2}\alpha^4\sigma_0 \frac{Z^5}{(E_\gamma/m_e c^2)^{7/2}} \cong 1{,}09 \cdot 10^{-16} Z^5 \left(\frac{13{,}61}{E_\gamma/\text{MeV}}\right)^{7/2} \sim \frac{Z^5}{E_\gamma^{7/2}}. \tag{4.49}$$

Bei hohen Energien $E_\gamma \gg E_B^{(K)}$ gilt nach SAUTER:

$$\sigma_F^{(K)}/\text{cm}^2 = 1{,}5\alpha^4\sigma_0 \frac{Z^5}{E_\gamma/m_e c^2} \cong 1{,}34 \cdot 10^{-34} \frac{Z^5}{E_\gamma/\text{MeV}} \sim \frac{Z^5}{E_\gamma}. \tag{4.50}$$

In (4.49) und (4.50) bedeuten α die Feinstrukturkonstante und $\sigma_0 = \frac{8}{3}\pi \frac{e^2}{m_e c^2}$ den Thomsonschen Wirkungsquerschnitt des Elektrons. Multipliziert man $\sigma_F^{(K)}$ mit dem Faktor 5/4, so erhält man aus (4.49) und (4.50) mit guter Genauigkeit den Gesamtquerschnitt σ_F in den entsprechenden Energiebereichen E_γ. Der Fotoeffekt bildet den hauptsächlichen Prozeß der Absorption weicher Gammaquanten in schweren Elementen und deren Verbindungen. Der eindeutige Zusammenhang zwischen den Energien der absorbierten Quanten und der emittierten Elektronen (4.48) wird in breitem Maße zur Spektrometrie von Gammaquanten in Szintillations- und Halbleiterdetektoren genutzt (s. 5.4.).

4.3.3. Compton-Effekt

Bei der Compton-Streuung von Gammaquanten handelt es sich um einen Streuprozeß, bei dem nur ein Teil der Gammaenergie dem Elektron übertragen wird. Im Ergebnis ändern Gammaquant und Elektron ihre Richtung und Energie. Im Gegensatz zum Fotoeffekt spielt hierbei die Bindung des Elektrons im Atom keine prinzipielle Rolle, vielmehr kann bei genügend hoher Gammaenergie $E_\gamma \gg E_B^{(i)}$ für praktische Berechnungen mit ausreichender Genauigkeit von der Streuung an einem freien, ruhenden Elektron ausgegangen werden (s. Abb. 4.16). Abb. 4.17a zeigt das Impulsdiagramm für diesen Fall. Die gesamte Kinematik des Prozesses läßt sich aus dem Energieerhaltungssatz

$$E_\gamma = E_{\gamma'} + E_e \tag{4.51}$$

und dem Impulserhaltungssatz

$$\left.\begin{aligned} E_\gamma/c &= E_{\gamma'}/c \cdot \cos\vartheta + p_e \cos\varphi \\ 0 &= E_{\gamma'}/c \cdot \sin\vartheta - p_e \sin\varphi \end{aligned}\right\} \tag{4.52}$$

bei Beachtung der relativistischen Beziehungen ableiten. Für die Energie der gestreuten Quanten und Rückstoßelektronen folgt aus (4.51) und (4.52)

$$E_{\gamma'} = \frac{E_\gamma}{1 + \varepsilon(1 - \cos\vartheta)} \tag{4.53}$$

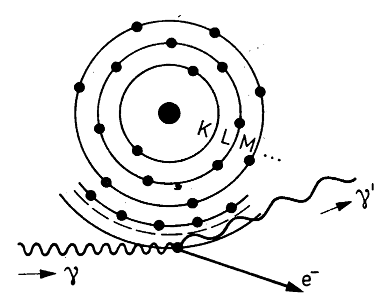


Abb. 4.16
Compton-Effekt an einem Hüllenelektron

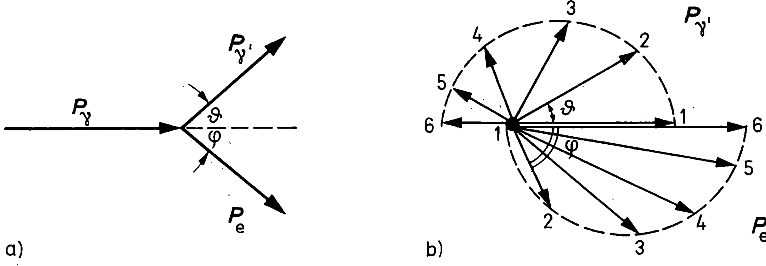


Abb. 4.17
Impulsdiagramme des Compton-Effektes
a) Schematische Darstellung
b) Impulsverteilung der Streuquanten und Rückstoßprotonen für 6 Streuwinkel

bzw.

$$E_e = E_\gamma \frac{(1 - \cos \vartheta)}{1 + \varepsilon(1 - \cos \vartheta)} \tag{4.54}$$

mit

$$\varepsilon = E_\gamma / m_e c^2 \,. \tag{4.55}$$

Die Größe der Energieübertragung zwischen Photon und Elektron ist richtungsabhängig. Maximale Energieübertragung findet bei Rückwärtsstreuung des Photons ($\vartheta = 180°$) statt. Bei genügend hoher Einschußenergie $\varepsilon \gg 1$ wird die Energie der rückgestreuten Quanten unabhängig von der Einschußenergie: $E_{\gamma'}(180°) \cong m_e c^2/2$. Die Beziehungen zwischen jeweils zusammengehörigen Elektronen- und Photonenimpulsen sind für einige beliebig gewählte Streuwinkel in Abb. 4.17b dargestellt.

Für die Änderung der Wellenlänge gilt

$$\lambda' - \lambda = \lambda_e(1 - \cos \vartheta) \tag{4.56}$$

mit der sog. Compton-Wellenlänge des Elektrons $\lambda_e = 3{,}86 \cdot 10^{-13}$ m. Der Wirkungsquerschnitt der Compton-Streuung wurde von Klein, Nishina und Tamm berechnet. Im Falle großer Energie $\varepsilon \gg 1$ lautet das Ergebnis, bezogen auf ein Atom,

$$\sigma_c = \pi r_e^2 \frac{Z}{\varepsilon}\left(\frac{1}{2} + \ln 2\varepsilon\right) \sim \frac{Z}{E_\gamma}, \tag{4.57}$$

für kleine Energien, $\varepsilon < 1$, gilt

$$\sigma_c = \sigma_0 Z \left(1 - 2\varepsilon + \frac{26}{5}\varepsilon^2 + \cdots\right). \tag{4.58}$$

Aus (4.57) folgt auch, daß die Compton-Streuung an Atomkernen wegen dessen sehr kleinen elektromagnetischen Radius nur eine geringe Rolle spielt.

Sinkt die Gammaenergie unter die Bindungsenergie der Elektronen, $E_\gamma < E_B^{(i)}$, so findet die klassische Thomson-Streuung statt: Die gebundenen Elektronen geraten unter Einwirkung der einfallenden elektromagnetischen Welle in Resonanzschwingung und entsenden selbst elektromagnetische Strahlung der gleichen Frequenz. Es findet keine Energieübertragung an die Elektronen statt, der Streuquerschnitt für diesen Prozeß ist, in Übereinstimmung mit (4.58), gleich $\sigma_0 = \frac{8}{3}\pi r_e^2$ pro Elektron, unabhängig von der Energie der einfallenden Photonen.

4.3.4. Paarbildungseffekt

Als Paarbildungseffekt bezeichnet man den Prozeß der Emission eines Positrons und eines Elektrons infolge der Absorption eines Gammaquants im Coulomb-Feld des Atomkerns oder Elektrons. Im Falle des Kerns erhält dieser einen Rückstoßimpuls. Ohne einen Stoßpartner ist dieser Prozeß, ebenso wie der Fotoeffekt, durch Energie- und Impulserhaltungssatz verboten.

Die Geburt des Paares erfolgt nicht im Kern, sondern außerhalb etwa in der Entfernung einer Compton-Wellenlänge Λ_e vom Kernrand, so daß die Übertragung des Rückstoßimpulses an den Kern über das Coulomb-Feld erfolgt.

Die Schwellenenergie des Paarbildungseffektes im Kernfeld ergibt sich aus der Summe der Ruhmassen von Elektron und Positron zu $2m_ec^2 = 1{,}02$ MeV. Der Wirkungsquerschnitt des Paarbildungseffektes folgt im Energiebereich $5m_ec^2 < E_\gamma < 50m_ec^2$ dem Gesetz

$$\sigma_P \sim Z^2 \ln E_\gamma , \tag{4.59}$$

bei höheren Energien steigt der Querschnitt langsamer mit der Energie an und wird bei extrem hohen Energien, $E_\gamma > 10^3 m_ec^2$, praktisch konstant:

$$\sigma_P \cong 12\alpha Z^2 r_e^2 . \tag{4.60}$$

Bei hohen Energien dominiert die Absorption von Gammaquanten infolge Paarbildung gegenüber allen anderen Prozessen. Elektron und Positron entstehen mit großer Wahrscheinlichkeit in Vorwärtsrichtung bez. der Richtung des Gammaquants. Der mittlere Winkel Θ zwischen beiden Teilchen verringert sich nach der Beziehung

$$\Theta = \frac{m_ec^2}{E_\gamma} \tag{4.61}$$

mit steigender Gammaenergie.

Paarbildung ist auch im Coulomb-Feld eines Hüllenelektrons möglich. In diesem Fall liegt jedoch die Schwellenenergie infolge der geringen Masse des Stoßpartners bei $4m_ec^2$. Der Energieüberschuß verteilt sich auf die kinetische Energie von drei Teilchen — zwei Elektronen und ein Positron. Infolge der starken Z-Abhängigkeit (4.59) ist der Wirkungsquerschnitt des Paarbildungseffektes im Feld der Hüllenelektronen eine bis drei Größenordnungen kleiner als der im Kernfeld und spielt daher praktisch für die Absorption der Gammastrahlung nur eine untergeordnete Rolle.

Darüber hinaus kann sich die Geburt eines Elektron-Positron-Paares auch beim Stoß zweier Elektronen oder Photonen genügend hoher Energie vollziehen. Hierin kommt eine allgemeine Gesetzmäßigkeit zum Ausdruck, auf die Dirac bereits im Jahre 1928 bei der Aufstellung der relativistischen Bewegungsgleichung für Elektronen aufmerksam machte: Es existieren Lösungen der Gleichung für beide Vorzeichen der Energie

$$E = \pm c\sqrt{p^2 + m_e^2c^2} ; \tag{4.62}$$

die Energiezustände mit negativer Energie $E < -m_ec^2$ sind jedoch alle besetzt (sog. Dirac-See).

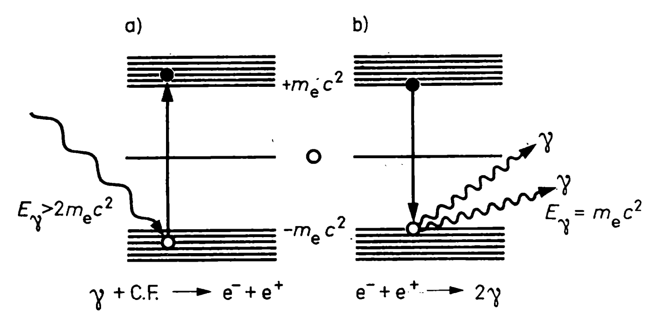


Abb. 4.18
Diracsches Bild von der Geburt und Vernichtung eines Positron-Elektron-Paares
a) Paarbildung durch Wechselwirkung eines Gammaquants mit dem Coulombfeld des Kerns
b) Annihilation eines ruhenden Positron-Elektron-Paares

Erst durch eine elektromagnetische Wechselwirkung genügend hoher Energie kann ein Elektron aus einem dieser Zustände in das Gebiet positiver Energie $E > +m_e c^2$ angehoben werden. Das verbleibende „Loch“ im Dirac-See verhält sich wie ein positiv geladenes Teilchen — dies ist das Positron. In diesem Bild stellt die Annihilation beider Teilchen nichts anderes als die Auffüllung des Lochs im Dirac-See durch ein Elektron aus dem Gebiet positiver Energie dar, wobei Energie in Form elektromagnetischer Strahlung freigesetzt wird. In diesem Sinne stellen Paarbildung und -vernichtung Übergänge zwischen verschiedenen Formen der Materie dar (s. Abb. 4.18).

4.3.5. Absorption elektromagnetischer Strahlung; Elektronen-Photonen-Schauer

Für Gammaquanten existiert der Begriff Reichweite nicht. Beim Durchgang eines Bündels Gammaquanten durch Stoff verringert sich deren Energie nicht kontinuierlich, sondern infolge der o.g. drei Wechselwirkungsprozesse — Fotoeffekt, Compton-Effekt und Paarbildung — nimmt die Zahl der Gammaquanten im Bündel (d. h. dessen Intensität $\dot{N}$) des Strahls kontinuierlich mit dem im Stoff zurückgelegter Weg x ab. Die Intensitätsabnahme $\mathrm{d}\dot{N}$ ist proportional der Intensität, d. h.

$$\mathrm{d}\dot{N} = -\mu \dot{N}\, \mathrm{d}x \tag{4.63}$$

oder in integraler Form

$$\dot{N}(x) = \dot{N}_0 \exp(-\mu x)\,, \tag{4.64}$$

wobei $\dot{N}_0$ die Anfangsintensität darstellt. Der sog. lineare Absorptionskoeffizient μ (Einheit: m^{-1}) ist das Produkt aus Atomkonzentration N_V (Einheit: m^{-3}) und dem effektiven Absorptionsquerschnitt σ_a (Einheit: m^2), der sich aus den Anteilen der drei Absorptionsprozesse zusammensetzt:

$$\mu = N_V \sigma_a = n\sigma_F + n\sigma_c + n\sigma_P = \mu_F + \mu_c + \mu_P\,. \tag{4.65}$$

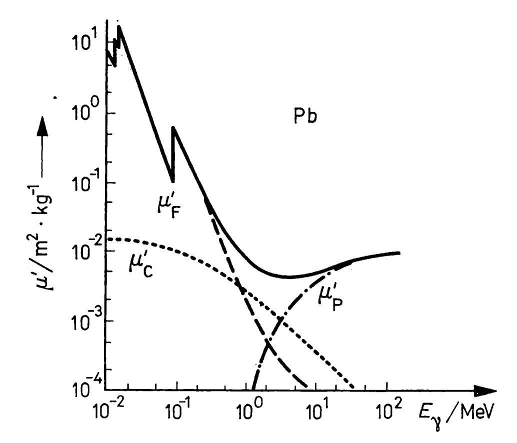


Abb. 4.19
Massen-Absorptionskoeffizient für Blei

Häufig wird der Massen-Absorptionskoeffizient μ' (Einheit: $m^2 \cdot kg^{-1}$) verwendet,

$$\mu' = \frac{\mu}{\varrho} = \frac{n\sigma_a}{\varrho} = \frac{N_A}{A}\sigma_a, \tag{4.66}$$

wobei ϱ (Einheit: $kg \cdot m^{-3}$) die Dichte des Absorbers und N_A die Avogadro-Konstante darstellen. Die Absorberstärke wird dann in $kg \cdot m^{-2}$ angegeben (s. (2.20)—(2.22)).

Abbildung 4.19 zeigt den Massen-Absorptionskoeffizienten für Blei und seine drei Bestandteile. Bei $E_\gamma < 0{,}5$ MeV überwiegt die Absorption durch Fotoeffekt, im Gebiet $0{,}5 < E_\gamma < 5$ MeV bildet der Compton-Effekt den hauptsächlichen Absorptionsanteil, und bei höheren Energien findet fast ausschließlich Paarbildung statt (für das leichte Element Aluminium liegen die analogen Energiewerte bei etwa 0,05 MeV und 15 MeV). Es existiert auf Grund der spezifischen E_γ-Abhängigkeit der drei Absorptionseffekte für alle Elemente ein Minimum im Verlauf des Absorptionskoeffizienten bei mittleren Gammaenergien. Im Bereich des Minimums, praktisch von etwa 2 MeV bis über 10 MeV, stellt der Compton-Effekt den Hauptteil der Absorption. Nach (4.57), (4.65) und (4.66) gilt daher annähernd

$$\mu' \cong \frac{L}{A}\sigma_c = L \cdot \frac{Z}{A}\frac{\pi e^2}{E_\gamma}\left[\frac{1}{2} + \ln 2(E_\gamma/m_e c^2)\right]$$

$$\cong (0{,}4 \cdots 0{,}5) \cdot L\frac{\pi e^2}{E_\gamma}\left[\frac{1}{2} + \ln 2(E_\gamma/m_e c^2)\right], \tag{4.67}$$

unabhängig vom chemischen und physikalischen Zustand des Absorbers. In diesem Energiebereich sind Abschirmwände aus beliebigen Materialien hinsichtlich ihrer Absorption von γ-Strahlung äquivalent, wenn sie gleiche Stärke, ausgedrückt in $kg \cdot m^{-2}$, aufweisen.

Beim Eintritt hochenergetischer Gammastrahlung ($E_\gamma > 100$ MeV) im Stoffe kommt es zu einer spezifischen Erscheinung, der Bildung sog. Elektronen-Photonen-Schauer (s. Abb. 4.20). Die primären Gammaquanten erzeugen mit hoher Wahrscheinlichkeit je ein Positron-Elektron-Paar. Letztere entsenden hochenergetische Bremsstrahlungsquanten, von denen wiederum jedes ein Positron-Elektron-Paar erzeugen kann. Dabei steigt anfangs die Zahl der Elektronen und Positronen mit wachsender Eindringtiefe des Schauers in den Stoff, wobei sich die mittlere Energie pro Teilchen verringert. Dies hat zur Folge, daß die Ionisationsverluste zunehmen, während die Strahlungsverluste geringer werden und schließlich die Teilchenzahl mit wachsender Eindringtiefe wieder abnimmt. In Abb. 4.20 ist schematisch die Ausbildung eines Elektronen-

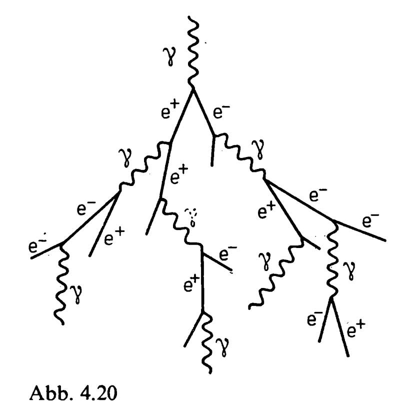


Abb. 4.20
Bildung eines Elektron-Photon-Schauers beim Eintritt eines hochenergetischen Gammaquants in eine Materialschicht

Photonen-Schauers dargestellt. Ähnlich verläuft die Schauerbildung beim Einschuß hochenergetischer Elektronen, mit dem Unterschied, daß hier der primäre Prozeß die Entsendung eines hochenergetischen Bremsstrahlungsquants ist.

4.4. Neutronen

4.4.1. Die wichtigsten Wechselwirkungsprozesse

Viele praktische Anwendungen der Kernphysik, insbesondere die Kernenergiegewinnung, beruhen auf der Ausnutzung der Wechselwirkungen von Neutronen mit Stoffen, daher ist deren Kenntnis von besonderer Bedeutung.

Das Fehlen einer nachweisbaren elektrischen Ladung des Neutrons ist die Ursache für eine Reihe spezifischer Eigenschaften dieser Wechselwirkungen, die in groben Zügen wie folgt charakterisiert werden können:

1. Eine elektromagnetische Wechselwirkung mit den Hüllenelektronen kann nur zwischen den Magnetmomenten des Neutrons μ_n,

$$\mu_n = 1{,}91\mu_K = 9{,}7 \cdot 10^{-27}\ \mathrm{A \cdot m^2}\,, \tag{4.68}$$

und des Elektrons μ_e erfolgen. Da das Kernmagneton

$$\mu_K = \frac{e\hbar}{2m_p c} = 5{,}05 \cdot 10^{-27}\ \mathrm{A \cdot m^2} \tag{4.69}$$

bedeutend kleiner als das Bohrsche Magneton

$$\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e c} = 9{,}27 \cdot 10^{-24}\ \mathrm{A \cdot m^2} \tag{4.70}$$

ist, erreicht die Wechselwirkungsenergie (pro Volumen)

$$E_{\text{magn.}} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\mu_n \mu_e}{r^3} \cong \frac{5{,}5 \cdot 10^{-38}}{r^3}\ \mathrm{eV \cdot m^{-3}} \tag{4.71}$$

nur geringe Werte. Erst bei einem Abstand zwischen Neutron und Elektron von 10^{-13} m beträgt $E_{\text{magn.}} \cong 55$ eV und liegt damit im Bereich des Ionisationspotentials der äußeren Elektronenschalen. Folglich ist die Ionisationsbremsung des Neutrons etwa 10^6mal kleiner als die des Protons, und der entsprechende Wirkungsquerschnitt beträgt nur $\sigma \cong 10^{-26}\ \mathrm{m^2}$. Neutronen unterliegen beim Durchgang durch Stoffe hauptsächlich dem Mechanismus der starken Wechselwirkung (s. Kap. 2.) mit den Atomkernen und deren Bestandteilen, den Nukleonen. Eine Ausnahme hiervon bildet die Wechselwirkung langsamer Neutronen mit Magnetmaterialien, bei der das Magnetmoment des Neutrons mit den Magnetfeldern im Material eine wesentliche Rolle spielen kann.

2. Im Gegensatz zu geladenen Teilchen können sich Neutronen selbst mit kleinster kinetischer Energie relativ frei in Stoffen bewegen. Sie werden weder auf Zwischengitterplätzen festgehalten oder durch Rekombination zu Atomen umgewandelt, wie Ionen in Festkörpern oder Gasen, noch vom Coulomb-Feld des Atomkerns eingefangen, wie beispielsweise ein μ^--Teilchen (Bildung eines sog. Mesoatoms). Dagegen können sie mit hoher Wahrscheinlichkeit in den Atomkern eindringen, wobei die große Bindungsenergie $E_B^{(n)} = 6 \ldots 8$ MeV infolge der anziehenden Wirkung der Kernkräfte (s. Kap. 7.) als Anregungsenergie des Atomkerns frei wird und eine Kernreaktion auslöst.

Gegenwärtig liegen experimentelle Untersuchungen über die Wechselwirkung von Neutronen mit Stoffen im Energiebereich E_n von etwa 10^{-7} eV bis über 10^{+10} eV vor, das entspricht de-Broglieschen Wellenlängen $\lambda = \frac{h}{p}$ gemäß

$$\lambda/\text{m} = 2{,}86 \cdot 10^{-11}(E_n/\text{eV})^{-1/2} \tag{4.72}$$

im Bereich von etwa 10^{-8} m bis 10^{-16} m (vgl. (2.27)).

3. Bezüglich ihrer Wechselwirkung mit Stoffen verhalten sich Neutronen in diesem überaus breiten Wellenlängenbereich völlig unterschiedlich. Um Neutronen mit ähnlichen Eigenschaften zusammenzufassen, wird deshalb häufig die in Tabelle 4.3 enthaltene Klassifizierung vorgenommen.

Tabelle 4.3
Klassifizierung von Neutronen nach der Energie

Energiebereich	Bezeichnung
$< 10^{-5}$ eV	ultrakalte N.
$< 5 \cdot 10^{-3}$ eV	kalte N.
$5 \cdot 10^{-3} \cdots 0{,}5$ eV	thermische N.
$0{,}5 \cdots 10^3$ eV	überthermische N. oder Resonanzneutronen
$1 \cdots 100$ keV	mittlere N.
$0{,}1 \cdots 50$ (bzw. 100) MeV	schnelle N.
> 100 MeV	ultraschnelle N.

Die Gruppen bis zu 10^3 eV werden gelegentlich auch unter dem Begriff langsamer Neutronen zusammengefaßt, konsequenterweise bezeichnet man dann alle höherliegenden Gruppen als schnelle Neutronen. Selbstverständlich gibt eine solche Einteilung und die folgende Diskussion der charakteristischen Wechselwirkungsprozesse in den genannten Energiebereichen nur eine grobe Orientierung. Der konkrete Ablauf der Wechselwirkung und die Energiegrenzen, in denen bestimmte Prozesse stattfinden, hängen in entscheidendem Maße auch von den Eigenschaften des Mediums, bei Kernwechselwirkungen vor allem von der Massenzahl A, ab. Die Wellenlänge *ultrakalter* Neutronen übertrifft um einige Größenordnungen die Gitterabstände in Festkörpern, d. h., sie treten mit „fast makroskopischen" Bereichen von Festkörpern in Wechselwirkung und werden von Oberflächen fester Körper reflektiert. Eine hieraus folgende charakteristische Eigenschaft dieser Neutronen ist die Möglichkeit ihrer Speicherung in geschlossenen Gefäßen.

Die Wellenlängen kalter und thermischer Neutronen entsprechen den atomaren Dimensionen bzw. des Atomabständen in Molekülen und Festkörpern (der Durchmesser des Wassermoleküls ist $\varnothing_{H_2O} \cong 2{,}8 \cdot 10^{-8}$ cm). Somit können z. B. durch Streuung solcher Neutronen an Molekülen deren Struktur erforscht und Rotations- oder Vibrationszustände angeregt werden. Bei Streuung an Festkörper-Kristallen kann, wie im Falle weicher Gammaquanten (s. 4.3.), eine Interferenz der Streuamplituden benachbarter Streuzentren stattfinden. Die Lage der entstehenden Interferenzmaxima wird ebenfalls von der Braggschen Beziehung (4.45) mit der Wellenlänge (4.72) beschrieben (Näheres siehe Abschnitt 4.5.). Darüber hinaus spielen thermische Neutronen

eine besondere Rolle bei der Kernenergiegewinnung. Ihr Verhalten zeigt Eigenschaften, die denen eines freien Gases analog sind (näheres siehe Kapitel 11).

Die Wechselwirkung *ultraschneller Neutronen* unterscheidet sich prinzipiell nicht von den Elementarteilchenprozessen anderer Barionen. Ein für diese Energien charakteristischer Prozeß ist die unelastische Streuung zweier Nukleonen mit Erzeugung eines π^0-Mesons:

$$n + p \rightarrow n + p + \pi^0 . \tag{4.73}$$

Bei hohen Einschußenergien verhalten sich die Nukleonen im Kern gegenüger dem Neutron wie quasifreie Teilchen. Die Bewegung der Teilchen kann infolge deren kurzer Wellenlänge quasiklassisch als Bahnbewegung beschrieben werden. Durch mehrfache Stöße der Reaktionspartner mit anderen Kernnukleonen kommt es zur Ausbildung sog. innernuklearer Kaskaden (s. Abb. 4.21), wobei neben elastischen Nukleon-Nukleon-Stößen auch unelastische Prozesse vom Typ (4.73) von Bedeutung sind. Im Ergebnis werden mehrere Neutronen und Protonen sowie π-Mesonen emittiert, und der verbleibende Restkern ist um einige Z- und N-Einheiten vom Targetkern entfernt. Dieser Prozeß wird häufig als Spallation bezeichnet. Mit erheblicher Wahrscheinlichkeit werden auch Bruchstücke des Kerns — leichte sekundäre Atomkerne wie ^{4}He, ^{12}C u. a. — emittiert (sog. Fragmentation).

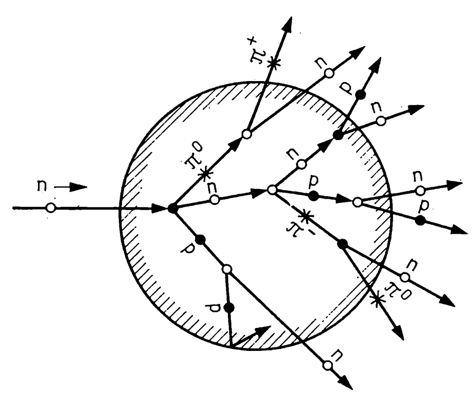


Abb. 4.21
Schematische Darstellung einer innernuklearen Kaskade bei hohen Einschußenergien

4. In den Energiebereichen von *thermischen bis schnellen* Neutronen vollziehen sich Wechselwirkungen mit einzelnen, als Ganzes wirkenden Atomkernen. Diese Prozesse gehören in das engere Gebiet der Kernphysik. Für die praktischen Anwendungen sind davon wiederum Neutronen zwischen 0,025 eV (sog. thermische Energie) und 15 MeV (Neutronen aus der Kernreaktion T (d, n)^{4}He) von Interesse. Die Tabelle 4.4 gibt eine Übersicht der in diesem Energiebereich mit größter Wahrscheinlichkeit stattfindenden Kernprozesse, die, bis auf einige besonders gekennzeichnete Fälle, für viele Nuklide typisch sind.

Im folgenden werden einige dieser Kernreaktionen, soweit sie für die Absorption oder den Nachweis von Neutronen von Interesse sind, ausführlicher vorgestellt. Es handelt sich dabei um Reaktionen, in denen elektromagnetisch wechselwirkende Teilchen (schwere oder leichte geladene Teilchen und Gammaquanten) entstehen, die ihrerseits wieder in Wechselwirkung mit den Stoffen über die in 4.2. und 4.3. beschriebenen Prozesse treten. Eine allgemeinere Darstellung von solchen Kernreaktionen, auch unter dem Aspekt der Aussagen aus diesen Reaktionen über die Struktur der Atomkerne und den Mechanismus der Kernwechselwirkungen, erfolgt in Kapitel 10.

Tabelle 4.4
Die wichtigsten neutroneninduzierten Kernreaktionen im Energiebereich von 0,025 eV bis 15 MeV

Reaktionstyp	Energiebereich	typisches Verhalten des Wirkungsquerschnitts
elastische Streuung (n, n)	thermisch überthermisch mittlerer schnell	Potentialstreuung ($\sigma_{pot} \cong 4\pi R^2$) Potential- und Resonanzstreuung (letztere 1 b bis 10^2 b) Fluktuationen Riesenresonanzen (einige barn)
Strahlungseinfang (n, γ)	thermisch überthermisch mittlerer schnell	$1/v$-Gesetz (bis 10^6 b) Resonanzeinfang (bis 10^4 b) Abnahme des Querschnitts infolge Konkurrenz der elastischen Streuung u. a. Reaktionen (meist 1 b bis 1 mb)
unelastische Streuung (n, n′γ)	schnell	Schwellreaktion (ab 100 keV bis 1 MeV Anstieg des Querschnitts mit der Energie bis etwa 1 b)
(n, p) (n, α)	thermisch bis schnell schnell	für die Nuklide ^{3}He, ^{6}Li, ^{10}B, ^{14}N (teilweise $1/v$-Gesetz) Schwellreaktion (ab einige MeV Anstieg des Querschnitts auf 0,1 mb bis 100 mb)
(n, 2n)	schnell	Schwellreaktion (ab etwa 10 MeV bis 15 MeV Anstieg des Querschnitts auf 0,1 b bis 2 b)
Kernspaltung (n, f)	thermisch bis schnell schnell	$1/v$-Gesetz, Resonanzspaltung (bis 10^3 b) für die Nuklide ^{235}U, ^{239}Pu und ^{233}U Schwellreaktion (ab 0,2 MeV bis 15 MeV für Kerne schwerer als ^{209}Bi Anstieg des Querschnitts auf 0,1 b bis 2 b)

4.4.2. Totaler Wirkungsquerschnitt

Die Summe der effektiven Wirkungsquerschnitte aller bei einer bestimmten Neutronenenergie stattfindenden Kernprozesse nennt man den totalen Wirkungsquerschnitt σ_t, der aus dem elastischen Streuquerschnitt σ_{el} und dem Reaktionsquerschnitt σ_R (der alle Kernprozesse außer der elastischen Streuung beinhaltet und daher häufig auch als nicht-elastischer Querschnitt σ_{ne} bezeichnet wird) besteht:

$$\sigma_t = \sigma_{el} + \sigma_R \quad (\text{bzw. } \sigma_{ne}) \,. \tag{4.74}$$

Der totale Wirkungsquerschnitt gibt (beim Durchgang von Neutronen durch Stoffe) die Wahrscheinlichkeit der Schwächung des direkten Strahls infolge Streuung und Absorption an. Es gilt ein ähnliches Exponentialgesetz wie für die Schwächung von γ-Strahlen (4.64). Für die Transmission T einer Stoffprobe, d. h. das Verhältnis der Intensitäten vor Eintritt in und nach Austritt aus der Probe der Stärke x gilt demnach

$$T \equiv \frac{\dot{N}(x)}{\dot{N}_0} = \exp\left[-nx\sigma_t\right] \tag{4.75}$$

mit der Kerndichte N_V (Einheit: m^{-3}). Durch Messung der Transmission erfolgt auch die experimentelle Bestimmung von σ_t. Für ein Gemisch verschiedener Nuklide $i = 1 \dots N$, z. B. eine chemische Verbindung, ist im Exponenten von (4.75) ein effektiver Wert $(n\sigma_t)_{eff} = \sum_{i=1}^{N} N_V^{(i)} \sigma_t^{(i)}$ einzusetzen.

Bei der Berechnung von Abschirmungen ist zu beachten, daß nur ein Teil der in σ_t eingehenden Prozesse zu einer tatsächlichen Absorption von Neutronen führt. So führt weder die elastische Streuung noch die in σ_R eingehenden Querschnitte $\sigma_{n,n'}$ oder $\sigma_{n,2n}$ zu einer tatsächlichen Absorption der Neutronen, sondern nur zur Richtungs- bzw. Energieänderung derselben. In Abb. 4.22 ist der Verlauf des totalen Wirkungsquerschnitts in Abhängigkeit von der Energie für einige Nuklide dargestellt. An Hand dieser Beispiele soll das typische Verhalten σ_t bei allen Kernen (bis auf wenige Ausnahmen im Gebiet $A < 10$) erläutert werden:

1. Im Bereich thermischer Energien ist σ_t praktisch gleich dem Absorptionsquerschnitt σ_a und wird durch dessen charakteristische $1/v$-Abhängigkeit von der Geschwindigkeit v des

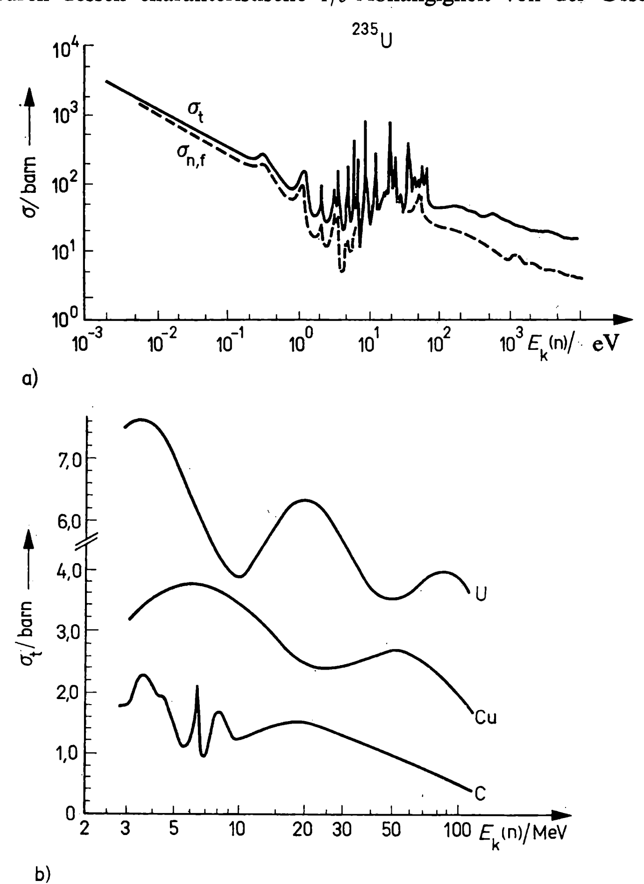


Abb. 4.22
Totaler Wirkungsquerschnitt für einige Nuklide im Bereich langsamer (a) und schneller (b) Neutronen; für ^{235}U zeigt das Diagramm des weiteren den Verlauf des Spaltquerschnittes $\sigma_{n,f}$

Neutrons geprägt, $\sigma_t \sim 1/v$ (falls in diesem Energiebereich keine Resonanz des Querschnitts liegt). Der Absorptionsquerschnitt σ_a ist in der überwiegenden Zahl der Nuklide gleich dem Querschnitt des Strahlungseinfangs $\sigma_{n\gamma}$, für einige Kerne sind außerdem (n, α)-(n, p)- und Spaltprozesse, so für den in Abb. 4.22a gezeigten Kern ^{235}U, möglich.

2. Es folgt das Energiegebiet der isolierten Resonanzen mit bis zu einigen Hundert einzelnen Resonanzstellen im Querschnittsverlauf (näheres zur Beschreibung dieser Resonanzen s. Kapitel 10). Der theoretisch maximale totale Querschnitt in diesem Gebiet beträgt (vgl. Formel (2.26))

$$\sigma_t^{max} = 4\pi(R + \lambda\!\!\!^{-})^2 \cong 4\pi\lambda\!\!\!^{-2}; \tag{4.77}$$

zwischen den Resonanzen ist σ_t im Mittel gleich dem Querschnitt der Potentialstreuung σ_{pot}:

$$\sigma_{pot} = 4\pi R^2 \quad \text{mit} \quad R = r_0 \cdot A^{1/3}. \tag{4.78}$$

Diese Resonanzen im Querschnittsverlauf treten immer dann auf, wenn Einschußenergie, Drehimpuls und Parität es gestatten, einen definierten inneren Zustand des Atomkerns (genauer — des Targetkerns plus Neutron) anzuregen.

3. Mit steigender Energie nimmt die Dichte der Resonanzen zu, und es kommt zur Überlagerung vieler Resonanzen. Im Querschnittsverlauf σ_t äußert sich dies in unregelmäßigen Fluktuationen. Sie sind ein Ausdruck für die statistischen Schwankungen der Stärken und Dichten der Resonanzzustände.

4. Im Gebiet schneller Neutronen (Abb. 4.22b) ist der Querschnittsverlauf glatt und folgt im Mittel dem Gesetz

$$\sigma_t = 2\pi(R + \lambda\!\!\!^{-})^2 \xrightarrow[\lambda\!\!\!^{-} \ll R]{} 2\pi R^2 \tag{4.79}$$

und ist damit doppelt so groß wie der Reaktionsquerschnitt σ_R (vgl. Formeln (2.21) und (6.27)).

Um diesen mittleren Verlauf ändert sich σ_t in breiten wellenförmigen Schwankungen, den sog. Riesenresonanzen. Lediglich für leichte Kerne, so z. B. für den in Abb. 4.22b gezeigten Kohlenstoff, treten Resonanzen und Fluktuationen noch bei Energien von einigen MeV auf.

Die physikalische Natur dieser Riesenresonanzen unterscheidet sich grundsätzlich von den durch die inneren Quantenzustände des Kerns bestimmten Resonanzen. Sie treten bei den Energien auf bei welchen das Neutron besonders leicht in den Kern eindringen kann. Dies ist der Fall, wenn die De-Broglie-Wellenlänge des eindringenden Neutrons zur Ausbildung einer stehenden Welle im Topf des mittleren Kernpotentials führt. Sie sind also charakterisiert durch die Bewegung des eingefallenen Neutrons im Potentialfeld des Kerns und werden Einteilchenresonanzen genannt.

4.4.3. Elastische Streuung

Die elastische Streuung am Kern ändert nicht dessen inneren Zustand, die kinetische Energie des gestreuten Neutrons bleibt im Massenmittelpunktsystem erhalten, während im Laborsystem die Summe der kinetischen Energie beider Teilchen konstant ist. Nach der nichtrelativistischen Kinematik des elastischen Stoßes am ruhenden Kern (s. B. 3.4.) gelten auf Grund des Energie- und Impulserhaltungssatzes im Laborsystem zwischen der Einschußenergie E_n, dem Streuwinkel

des Neutrons ϑ_1, dem Rückstoßwinkel des Kernes ϑ_2, der Energie des Rückstoßkernes E'_K und der Energie des gestreuten Neutrons E'_n folgende Beziehungen:

$$E'_K = \alpha E_n \cos^2 \vartheta_2 , \tag{4.80}$$

$$E'_n = \alpha \frac{k}{4} E_n(\cos \vartheta_1 + \sqrt{k^{-2} - \sin^2 \vartheta_1})^2 , \tag{4.81}$$

$$\cos^2 \vartheta_2 = \alpha - k(\cos \vartheta_1 + \sqrt{k^{-2} - \sin^2 \vartheta_1})^2 , \tag{4.82}$$

$$\alpha = \frac{4m_K m_n}{(m_K + m_n)^2} \qquad k = \frac{m_n}{m_K} . \tag{4.83}$$

Die Beziehungen (4.80) bis (4.82) entsprechen den Gleichungen (B.77), (B. 74) bzw. (B. 80), wobei hier E_n, E'_K und E'_n für E_{k1}, E'_{k2} bzw. E'_{k1} stehen.

Wird der Rückstoßkern unter $\vartheta_2 = 0°$ emittiert, so ist seine Energie maximal $E_K^{max} = \alpha E_n$. Dies ist beim zentralen Stoß der Fall, bei dem nach (4.82) der Streuwinkel $\vartheta_1 = 180°$ ist. Die Beziehungen (4.80) bis (4.83) gelten für jeden elastischen Stoß, unabhängig von der konkreten Art der Wechselwirkungskräfte. Letztere kommen in der Wahrscheinlichkeit der verschiedenen Stoßprozesse, d. h. im totalen und differentiellen Wirkungsquerschnitt (s. Kapitel 2.), zum Ausdruck. Der differentielle Wirkungsquerschnitt $\left(\frac{d\sigma}{dE'_K}\right)$ der Bildung eines Rückstoßkerns im Energiebereich $E'_K \dots E'_K + dE'_K$ bestimmt die Energieverteilung der Rückstoßkerne. Er kann umgeformt werden in (vgl. B 3.6.)

$$\left(\frac{d\sigma}{dE'_K}\right) = \left(\frac{d\sigma}{d\Theta}\right)\left(\frac{d\Theta}{d\vartheta_1}\right)\left(\frac{d\vartheta_1}{dE'_K}\right) = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega^{(M)}}\right)\left(\frac{d\Theta}{d\vartheta_1}\right)\left(\frac{d\vartheta_1}{dE'_K}\right) 2\pi \sin \Theta \tag{4.84}$$

und hängt somit über den differentiellen Streuquerschnitt $\left(\frac{d\sigma}{d\Omega^{(M)}}\right)$ im Massenmittelpunktsystem entscheidend von der konkreten Form des Wechselwirkungspotentials ab. Die Größe $\left(\frac{d\Theta}{d\vartheta_1}\right)$ läßt sich aus der Beziehung (B. 96) und $\frac{d\vartheta_1}{dE'_K}$ aus (4.80) und (4.82) bestimmen.

Die elastische Streuung an Protonen, kurz n-p-Streuung genannt, weist einige Vorteile auf, infolge deren diese Reaktion eine ganz besonders wichtige Rolle bei Nachweis, Spektrometrie und Abbremsung schneller Neutronen spielt:

1. Wegen $m_p \cong m_n$ gilt $\alpha = 1$. Beim frontalen Stoß kann die gesamte kinetische Energie an das Proton abgegeben werden, $E_P^{max} = E_n$.

2. Der n-p-Querschnitt σ_{np} weist einen glatten Verlauf über E_n auf und ist mit hoher Genauigkeit (Fehler kleiner als 1%) bekannt (s. Abb. 4.23). Zwischen 0,3 MeV und 30 MeV kann er mit weniger als $\pm 3\%$ Ungenauigkeit durch die empirische Formel

$$\sigma_{np}(E_n)/\text{barn} = \frac{4{,}83}{(E_n/\text{MeV})^{1/2}} - 0{,}578 \tag{4.85}$$

wiedergegeben werden.

3. Die Wellenlänge des Neutrons λ_n (4.72) ist größer als die Dimensionen des Nukleons ($r_{Nukl.} = 0{,}81 \cdot 10^{-15}$ m — siehe (6.38)). Deshalb erfolgt die Streuung im Massenmittelpunktsystem (zumindest bis zu Energien $E_n \leqq 10$ MeV) isotrop, d. h.

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega^{(M)}}\right) = \frac{\sigma_t}{4\pi} . \tag{4.86}$$

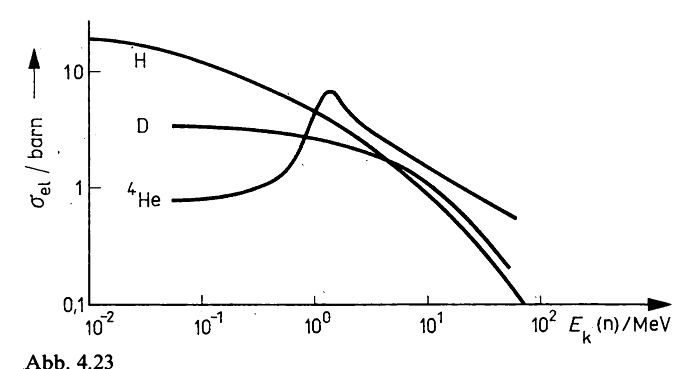


Abb. 4.23
Elastischer Streuquerschnitt der leichtesten Nuklide

Da für $m_n \cong m_p$ nach (B. 83) zwischen den Streuwinkeln $\frac{\Theta}{\vartheta_1} = 2$ gilt, folgt aus (4.80), (4.84) und (4.86)

$$\left(\frac{d\sigma}{dE_p}\right) = \frac{\sigma_t}{4\pi} = \text{const} \quad \text{für} \quad E_p = 0 \quad \text{bis} \quad E_n\,. \tag{4.87}$$

Es besteht somit ein einfacher und eindeutiger Zusammenhang zwischen E_n und dem Spektrum der Rückstoßprotonen. Bei einer Einschußenergie E_n ist das Rückstoßprotonenspektrum konstant und erstreckt sich über $0 \leqq E_p \leqq E_n$.

Der Querschnittsverlauf für die Streuung an D und ^{4}He ist ebenfalls in der Abb. 4.23 dargestellt. Für schwerere Kerne weist die Funktion $\sigma_{el}(E_n)$, entsprechend dem in Abb. 4.22 dargestellten Verlauf des totalen Querschnitts, viele Strukturen auf.

4.4.4. Strahlungseinfang

Als Strahlungseinfang bezeichnet man die Kernreaktion

$$^A_Z\text{K} + \text{n} \to {}^{A+1}_{\;\;Z}\text{K} + \gamma + E_Q\,, \tag{4.88}$$

bei der ein Neutron durch die anziehende Wirkung der Kernkräfte in den Atomkern eingebaut und die dabei freiwerdende Bindungsenergie $E_B^{(n)}$ in Form von Gammastrahlung emittiert wird ($E_Q = 6 \ldots 8$ MeV). Es ist für die meisten Nuklide die wahrscheinlichste Kernreaktion mit langsamen Neutronen.

Der Wirkungsquerschnitt in der Nähe einer isolierten s-Wellen-Resonanz wird durch die Breit-Wigner-Formel

$$\sigma_{n\gamma} = 4\pi\lambda_n^2 \frac{\Gamma_n\Gamma_\gamma}{(E_n - E_r)^2 + \frac{\Gamma^2}{4}} \tag{4.89}$$

beschrieben, mit $\Gamma = \Gamma_n + \Gamma_\gamma$ als der totalen Breite, Γ_n — der Neutronenbreite, Γ_γ — der Einfangbreite und E_r, der Neutronenenergie an der Resonanzstelle. Der Maximalwert des Querschnitts beträgt

$$\sigma_{n\gamma}(E_r) = 4\pi\lambda_r^2 \frac{\Gamma_n\Gamma_\gamma}{\Gamma^2} \cong 4\pi\lambda_r^2 \frac{\Gamma_n}{\Gamma}\,, \tag{4.90}$$

da meist $\Gamma_\gamma \gg \Gamma_n$ ist. In (4.90) bedeutet $\lambda_r = \lambda_n$ $(E_n = E_r)$.

In großer Entfernung von einer Resonanz $(E_n - E_r) \gg \frac{\Gamma}{2}$, bei geringen Energien $E_n \ll E_r$ folgt wegen $\lambda_n^2 \sim 1/v_n^2$, $\Gamma_n(E_n) = \Gamma_n^0 \sqrt{E_n/E}$ und $\Gamma_\gamma = \text{const}$ aus (4.89) das sehr wichtige $1/v$-Gesetz

$$\sigma_{n\gamma} \sim 1/v_n, \tag{4.91}$$

das nicht nur für den Strahlungseinfang, sondern für alle exothermen Absorptionsprozesse bei geringen Energien (siehe z. B. $\sigma_{nf} \sim 1/v_n$ für ^{235}U in Abb. 4.22) gilt.

Als Beispiele sind in Abb. 4.24 die Einfangsquerschnitte für Gold und Cadmium dargestellt. Das Nuklid ^{197}Au hat bei $E_r = 4{,}91$ eV eine starke Einfangresonanz mit $\sigma_{n\gamma}(E_r) \gtrsim 10^4$ barn. Zu kleineren Energien steigt der Querschnitt nach dem $1/v$-Gesetz.

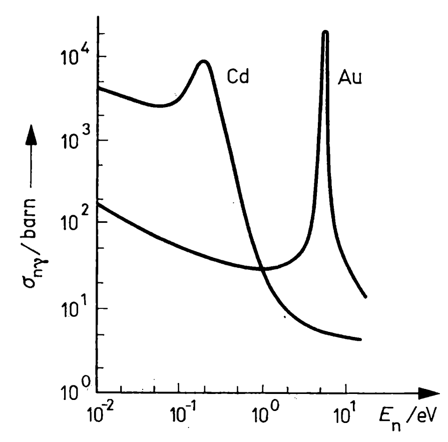


Abb. 4.24
Wirkungsquerschnitt des Strahlungseinfangs langsamer Neutronen an Cadmium und Gold

Im ^{113}Cd liegt eine starke Resonanz $\sigma_{n\gamma}(E_r) = 5 \cdot 10^4$ barn bei $E_r = 0{,}17$ eV. Infolge der Überlagerung dieses Resonanzeinfangs mit dem $1/v$-Gesetz zeigt $\sigma_{n\gamma}(E_n)$ für natürliches Cadmium das abgebildete stufenförmige Verhalten. Dadurch werden Neutronen unterhalb der sog. Cadmiumgrenze (entspricht etwa 1 eV) sehr stark absorbiert. Diese Eigenschaft nutzt man aus, indem Cadmiumstäbe beispielsweise zur Regulierung von Kernreaktoren eingesetzt werden. Bereits relativ dünne Cadmiumbleche können langsame Neutronen praktisch vollständig absorbieren.

4.4.5. Kernspaltung und weitere Kernreaktionen

Als Kernspaltung bezeichnet man den Prozeß

$$^{A}_{Z}K + n \rightarrow {}^{A_1}_{Z_1}K + {}^{A_2}_{Z_2}K + E_Q$$

mit

$$A_1 + A_2 = A \quad \text{und} \quad Z_1 + Z_2 = Z, \tag{4.92}$$

bei dem infolge der einem schweren Atomkern übertragenen Anregungsenergie $E^* = E_n + E_B^{(n)}$ dieser in zwei annähernd gleichgroße Bruchstücke zerfällt. Die dabei freiwerdende Energie

von $E_Q \cong 200$ MeV wird über die Coulomb-Abstoßung der Ladungen Z_1e und Z_2e hauptsächlich in kinetische Energie der Spaltprodukte umgesetzt. Bei der Abbremsung der stark ionisierten Spaltprodukte wird diese Energie dem Bremsmedium übertragen, d. h. in Wärme umgewandelt.

Bei den Isotopen $^{233}_{92}U$, $^{235}_{92}U$ (s. Abb. 4.22a), $^{239}_{94}Pu$, $^{240}_{94}Pu$, $^{242}_{95}Am$, $^{245}_{95}Am$ reicht bereits die Bindungsenergie des einfallenden Neutrons $E_B^{(n)}$ aus, um eine Kernspaltung auszulösen. Diese Kerne können also bereits durch thermische Neutronen gespalten werden.

Bei allen übrigen Nukliden ist die Kernspaltung eine Schwellreaktion. Bei $A > 210$ spalten die Nuklide ab einige MeV Einschußenergie. Der Querschnittsverlauf $\sigma_{nf}(E_n)$ in Schwellnähe ist für einige Nuklide in Abb. 4.25 dargestellt.

Ultraschnelle Neutronen können Kernspaltungen praktisch aller Nuklide hervorrufen.

Besondere Bedeutung für Nachweis und Spektrometrie von Neutronen haben die drei exothermen Kernreaktionen $^3_2He(n, p)^3_1H$, $^6_3Li(n, \alpha)^3_1H$ und $^{10}_5B(n, \alpha)^7_3Li$, in denen als Reaktionsprodukte geladene Teilchen hoher kinetischer Energie entstehen. Infolge des $1/v$-Gesetzes haben alle drei Reaktionen, wie in Abb. 4.26 gezeigt, große Wirkungsquerschnitte bei geringen Energien (bei 0,025 eV — entsprechend 5400, 945 bzw. 3840 barn).

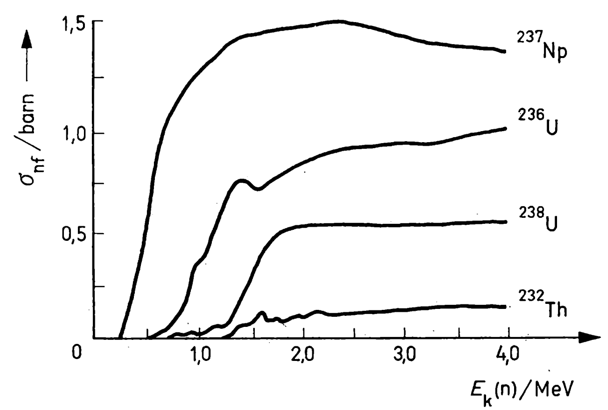


Abb. 4.25
Anregungsfunktion des Spaltquerschnitts $\sigma_{nf}(E_n)$ für einige „schnellspaltende" Nuklide

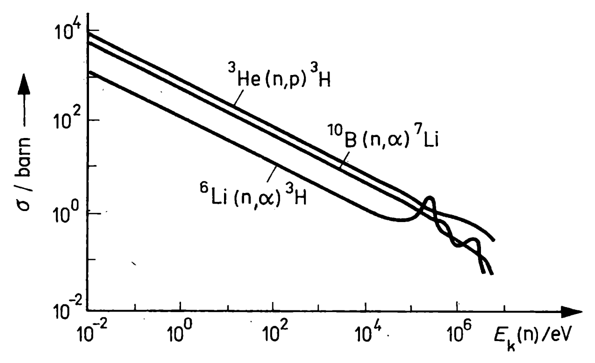


Abb. 4.26
Wirkungsquerschnitte der Reaktionen $^3He(n, p)^3H$ (E_Q = 0,765 MeV), $^6Li(n, \alpha)^3H$ (E_Q = 4,78 MeV) und $^{10}B(n, \alpha)^7Li$ (E_Q = 2,79 MeV); bei E_n = 0,025 eV betragen die Querschnittswerte entsprechend 5400 b, 945 b, 3840 b

Schnelle Neutronen lösen auch an schweren Nukliden die Kernreaktionen

$$ {}^{A}_{Z}K + n \rightarrow {}_{Z-1}^{A}K + p + E_Q \quad \text{und} \tag{4.93} $$

$$ {}^{A}_{Z}K + n \rightarrow {}^{A-3}_{Z-2}K + \alpha + E_Q \quad \text{aus}. \tag{4.94} $$

Wegen der Massendifferenz zwischen Neutron und Proton, $m_p < m_n$, ist die Reaktion (4.93) häufig exotherm ($E_Q > 0$), verläuft jedoch wegen der Coulomb-Barriere für die Emission geladener Teilchen mit geringer Wahrscheinlichkeit. So beträgt der Wirkungsquerschnitt der Reaktion ${}^{14}_{7}N(n, p){}^{14}_{6}C$, die zur Bildung des praktisch wichtigen Isotopes ${}^{14}_{6}C$ in der Atmosphäre führt, lediglich $\sigma_{np}(0{,}025\ \text{eV}) = 1{,}75$ barn.

Teilweise verlaufen die Reaktionen (4.93) auch als Schwellreaktionen mit $E_Q \cong -1$ MeV, so beispielsweise ${}^{32}_{16}S(n, p){}^{32}_{15}P$ mit $E_Q = -0{,}92$ MeV. Die Reaktionsprodukte ${}_{Z-1}^{A}K$ sind infolge eines geringen Neutronenüberschusses meist β^--aktiv. So zerfällt ${}^{32}_{15}P$ nach dem Zerfallsgesetz

$$ {}^{32}_{15}P \xrightarrow{T_{1/2} = 14\text{d}} {}^{32}_{16}S + \beta^- + \bar{\nu}\,. \tag{4.95} $$

Diese Eigenschaft wird zum Nachweis über die Aktivierungsanalyse ausgenutzt.

Bei höheren Einschußenergien $E_n > 10$ MeV ist es energetisch möglich, ein oder mehrere Nukleonen aus dem Targetkern herauszulösen, d. h., es finden Reaktionen vom Typ

$$ {}^{A}_{Z}K + n \rightarrow {}^{A+1-(X+Y)}_{Z-Y}K + Xn + Yp + E_Q \tag{4.96} $$

statt.

Bis $E_n = 15$ MeV sind meist nur die Prozesse (n, 2n) und (n, pn) energetisch möglich, von denen der erste am wahrscheinlichsten ist. Infolge des geringen Neutronendefizits sind die entstehenden Reaktionsprodukte häufig β^+-aktiv. Als Beispiel sei die Reaktion ${}^{63}_{29}Cu(n, 2n){}^{62}_{29}Cu$ mit $E_Q \cong -12$ MeV und dem Zerfall

$$ {}^{62}_{29}Cu \xrightarrow{T_{1/2} = 9{,}7\,\text{min}} {}^{62}_{28}Ni + \beta^+ + \nu \tag{4.97} $$

genannt. Prozesse dieser Art sind für den Nachweis hochenergetischer Neutronen geeignet. Durch Kombination mehrerer Aktivationsfolien aus Nukliden mit verschiedenen E_Q-Werten ist es möglich, eine (relativ grobe) Information über die Energieverteilung der Neutronen zu erhalten.

Die hier genannten Reaktionen stellen nur eine sehr kleine Auswahl aus der Fülle möglicher Prozesse an den verschiedenen Nukliden dar, allerdings wurden vorrangig solche Reaktionen aufgeführt, die entweder typisch für viele andere sind oder die besondere Bedeutung für den Neutronennachweis haben.

Literaturhinweise zu Kapitel 4

Bec 64, Glä 72, Her 66, Muc 74, Pas 69, Sch 75, Seg 53, Wla 59

5. Nachweis und Spektrometrie von Mikroteilchen

5.1. Die wichtigsten Charakteristika kernphysikalischer Nachweisgeräte

1. Wie bereits in der Einleitung zu Kapitel 4 genannt, besteht die Aufgabe der Detektoren von Mikroteilchen in der Erzeugung registrierbarer elektrischer, optischer o. a. Signale beim Durchgang interessierender Mikroteilchen unter Ausnutzung der oben beschriebenen Wechselwirkungsprozesse in geeignet gewählten Materialien.

Detektoren nennen wir Geräte, deren Aufgabe zunächst nur im Teilchennachweis besteht. Geräte und kompliziertere Anlagen, die darüber hinaus die Bestimmung spezieller Eigenschaften der Mikroteilchen wie deren Energie, Impuls, Masse, Ankunftszeit o. a. Größen gestatten, bezeichnen wir als Spektrometer.

Ehe wir zur Betrachtung spezieller Detektoren und Spektrometer übergehen können, sollen zunächst einige allgemeingültige Begriffe, Charakteristika und Eigenschaften im vorliegenden Abschnitt behandelt werden.

2. Als Ansprechfunktion A eines Detektors oder Spektrometers bezeichnen wir die Wahrscheinlichkeitsdichte dafür, daß beim Auftreffen eines Mikroteilchens mit bestimmten Eigenschaften, z. B. definierter Energie, im Nachweisgerät ein Signal mit bestimmten Parametern, z. B. einer der Einschußenergie proportionalen Impulshöhe eines elektrischen Signals, entsteht. Bedenkt man die Vielfalt der möglichen Wechselwirkungsprozesse, so wird verständlich, daß im allgemeinen Fall ein komplizierter Zusammenhang zwischen Teilchen- und Signaleigenschaften besteht, der von den Materialeigenschaften des Detektors, der Art der physikalischen Wechselwirkungsprozesse, aber auch von den Teilcheneigenschaften abhängt.

Besteht die Aufgabe darin, lediglich die auf den Detektor einfallenden Teilchen N zu zählen, so wird die Ansprechfunktion A zu einem Proportionalitätsfaktor, der die Zahl der registrierten Teilchen N_r nach der Beziehung

$$N_r = A \cdot N \tag{5.1}$$

bestimmt, wobei auch in diesem Fall A eine Funktion der Energie E_k und der Intensität $\dot{N}$ der einfallenden Strahlung ist, die häufig nur empirisch bestimmbar ist. Im einfachsten Fall ist $A = \text{const.}$

Komplizierter ist die Aufgabe der Energiebestimmung der einfallenden Teilchen. Zwischen dem gemessenen Spektrum $\Phi(\varepsilon)$[1]) und dem zu ermittelnden Energiespektrum der Mikroteilchen $F(E_k)$ besteht dann bereits der Zusammenhang in Form der Integralgleichung

$$\Phi(\varepsilon) = \int F(E_k)\, A(E_k, \varepsilon)\, \mathrm{d}E_k\,, \tag{5.2}$$

---

[1]) Gemessen wird beispielsweise das Impulshöhenspektrum am Detektorausgang, das in der Regel nicht mit dem Energiespektrum der den Nachweis bewirkenden geladenen Teilchen identisch ist. Um dies zu verdeutlichen, wird hier die Hilfsgröße ε eingeführt.

wobei der Funktionsverlauf A sehr kompliziert sein kann.[1]) Dies illustriert Abb. 5.1, welche das mittels Szintillationsspektrometer gemessene Spektrum $\Phi(\varepsilon)$ für eine einzige γ- bzw. n-Linie, d. h. $F(E_k) = \delta(E_k - E_k^{(0)})$, darstellt. In diesem Fall ist $\Phi(\varepsilon) \equiv A(E_k^{(0)}, \varepsilon)$. Eine einfache analytische Lösung von (5.2) ist nur in wenigen Sonderfällen möglich, so z. B. für eine Ansprechfunktion in Form einer δ-Funktion und bei linearem Zusammenhang $\varepsilon = \text{const} \cdot E_k$. In den meisten Fällen erfordert die Ermittlung des Spektrums $F(E_k)$ dagegen hohen numerischen Aufwand, wobei vorher die Größen $A(E_k, \varepsilon)$ und der funktionelle Zusammenhang zwischen E_k und ε,

$$\varepsilon = f(E_k) \quad \text{bzw.} \quad E_k = \varphi(\varepsilon)\,, \tag{5.3}$$

experimentell oder theoretisch zu bestimmen sind.

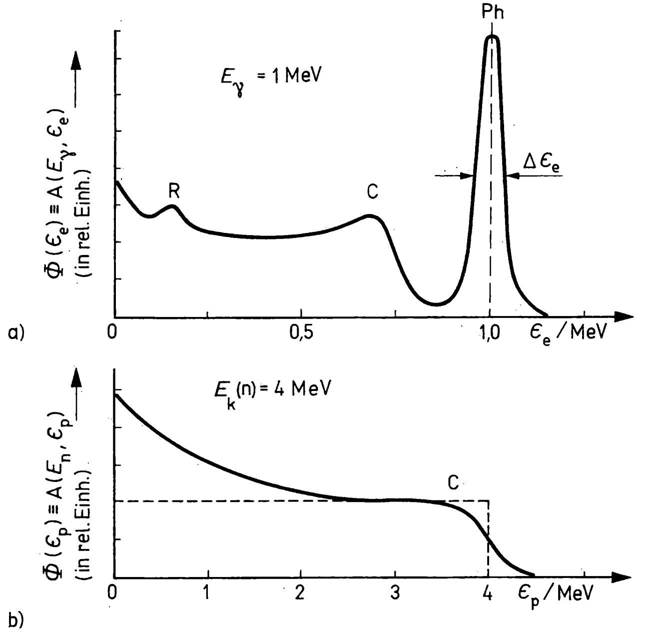


Abb. 5.1
Typische Meßspektren $\Phi(\varepsilon)$ bzw. Ansprechfunktionen $A(E_k^{(0)}, \varepsilon)$ von Szintillationszählern mit einer relativen Energieauflösung $\frac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon} = 10\%$ bei Bestrahlung mit monoenergetischen Mikroteilchen. $\Delta\varepsilon$ wird Energieauflösung oder energetische Auflösung genannt

a) NaJ(Tl)-Szintillator, $E_k^{(0)} = E_\gamma = 1$ MeV, Ph Photopeak, C Compton-Kante, R Rückstreupeak

b) Stilben-Szintillator, $E_k^{(0)} = E_n = 4$ MeV, gestrichelte Linie: Theoretisches Spektrum nach (4.87) entspricht der Energieverteilung E_p der den Nachweis bewirkenden Rückstoßprotonen mit der hochenergetischen Kante C.

[1]) Das trifft insbesondere zu, wenn zwischen dem zu bestimmenden E_k-Spektrum nichtgeladener Mikroteilchen und dem ε-Meßspektrum ein Spektrum nachweisbarer geladener Mikroteilchen als Zwischenträger der Information vorliegt.

3. In vielen Fällen ist die Kenntnis der Energieauflösung des Detektors erforderlich. Der Idealfall einer δ-förmigen Ansprechfunktion würde die genaue Wiedergabe des Energiespektrums $F(E_k)$ im Meßspektrum $\Phi(\varepsilon)$ ohne „Energieverschmierung" ermöglichen — dieser Fall tritt aber in der Praxis nicht auf. Infolge statistischer Prozesse beim Energieverlust des Teilchens im Detektor und anderer Fluktuationen besitzt die Ansprechfunktion $A(E_k, \varepsilon)$ stets eine endliche Breite ΔE_k, wobei sie in günstigen Fällen als Rechtecks-, Dreiecks-, Trapez- oder Gauß-Form annähernd beschrieben werden kann. In diesem Sinne versteht man für ein Linienspektrum (Abb. 5.1a) unter Energieauflösung des Spektrometers das Verhältnis der Energiebreite ΔE_k auf halber Höhe der Funktion $A(E_k, \varepsilon)$ zur Teilchenenergie E_k, bestimmt bei einem definierten Wert von ε.

Besteht zwischen E_k und ε die eindeutige Funktion (5.3), so kann die relative Energieauflösung unmittelbar aus dem gemessenen Spektrum $\Phi(\varepsilon)$ ermittelt werden:

$$\varkappa \equiv \frac{\Delta E_k}{E_k} = \frac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon} \cdot \frac{f(E_k)}{f'(E_k) \cdot E_k} = \frac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon} \cdot \frac{\varphi'(\varepsilon) \cdot \varepsilon}{\varphi(\varepsilon)} . \tag{5.4}$$

Für eine lineare Funktion $\varepsilon = \text{const} \cdot E_k$ ist $\frac{\Delta E_k}{E_k} = \frac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon}$. Experimentell wird $\varkappa$ dadurch bestimmt, daß aus der Halbwertsbreite des Meßspektrums zunächst $\frac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon}$ bei Bestrahlung mit monoenergetischen Teilchen bestimmt wird und durch Wiederholung des Experiments bei unterschiedlichen Teilchenenergien $E_k^{(1)}, E_k^{(2)}, \ldots, E_k^{(m)}$ auf die funktionale Abhängigkeit (5.3) geschlossen wird.

4. Der Begriff der Detektoreffektivität η ist ebenfalls in engem Zusammenhang mit der Ansprechfunktion zu verstehen. Die Detektoreffektivität ist das Verhältnis der Anzahl registrierter Signale zur Anzahl der in den Detektor (genauer das „aktive Detektorvolumen") eingeschossenen Mikroteilchen einer bestimmten Sorte. Für eine eingeschossene Teilchensorte ist η somit identisch mit der nach (5.1) definierten Größe A. Bestimmt wird η sowohl experimentell als auch theoretisch, wobei im ersten Fall hinsichtlich Energie und Intensität geeichte Strahlungsquellen erforderlich sind.

Im allgemeineren Fall ist die Beziehung zwischen η und A für eine Teilchensorte gegeben durch

$$\eta(E) = \int_{\varepsilon_{\text{schw}}}^{\infty} A(E_k, \varepsilon) \, d\varepsilon , \tag{5.5}$$

wobei $\varepsilon_{\text{schw}}$ — die untere Schwellenergie (ausgedrückt z. B. in einer minimalen Signalgröße am Detektor) darstellt, die für den Nachweis des Teilchens mit der Energie E_k mindestens erforderlich ist.

Man kann sich leicht davon überzeugen, daß durch Integration von (5.2) über ε und unter Anwendung von (5.5) die Beziehung (5.1) zu erhalten ist, wobei A die Bedeutung einer mittleren Effektivität $\overline{\eta(E_k)}$ annimmt.

Der Begriff der Lichtstärke Λ einer Meßanordnung beinhaltet demgegenüber das Verhältnis der Anzahl registrierter Teilchen N_r zur Zahl der von der Strahlungsquelle während des Meßintervalls ausgesandten Teilchen einer bestimmten Sorte. Folglich gehen in diesen Begriff wesentlich die geometrischen Verhältnisse einer bestimmten Meßanordnung ein, sie bestimmt, neben der Genauigkeitsforderung an das Meßergebnis, in hohem Maße die erforderliche Meßzeit. Bei einfachen geometrischen Verhältnissen besteht zwischen η und Λ der einfache Zusammenhang

$$\Lambda = \eta \cdot \frac{\Delta\Omega}{4\pi} \tag{5.6a}$$

wobei $\Delta\Omega$ den mittleren Raumwinkelbereich, unter welchem der Detektor von der Quelle aus „zu sehen" ist, darstellt. Bei dem in Abb. 5.2 dargestellten Fall eines zylindrischen Detektors mit dem Radius $r \ll L$ und einer isotropen Punktquelle geht (5.6a) über in

$$\Lambda = \frac{\pi r^2 \eta}{4\pi L^2} = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{r}{L}\right)^2 \cdot \eta \,. \tag{5.6b}$$

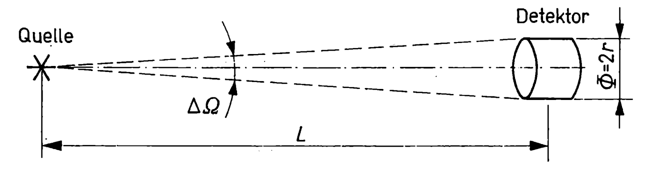


Abb. 5.2
Skizze zur Erläuterung des Begriff der Lichtstärke

5. Unter dem Zeitverhalten eines Detektors sind vor allem folgende Eigenschaften zu verstehen:

— die zeitliche Verzögerung zwischen dem Teilcheneintritt oder -durchgang und dem Moment des Entstehens eines registrierbaren Signals am Detektorausgang,
— die Streuung des Zeitintervalls zwischen diesen beiden Ereignissen,
— der minimale, zur getrennten Registrierung zweier Teilchen erforderliche Zeitabstand zwischen ihnen (sog. Totzeit),
— die zeitlichen Charakteristika des entstehenden Signals (Anstiegs- und Abfallszeit bei elektrischen Signalen; Lebensdauer einer Teilchenspur u. a.),
— die Steuerbarkeit eines Detektors durch bestimmte kernphysikalische Ereignisse.

Alle diese Eigenschaften sind bei der Auswahl eines Detektor für den speziellen Einsatzzweck unbedingt zu beachten, um Zählverluste zu vermeiden oder überhaupt den Nachweis mit der häufig erforderlichen hohen Geschwindigkeit (in Zeitbereichen bis $\Delta t \lesssim 10^{-10}$ s) durchführen zu können. In der Regel wird das Zeitverhalten der meisten Detektortypen nicht durch die

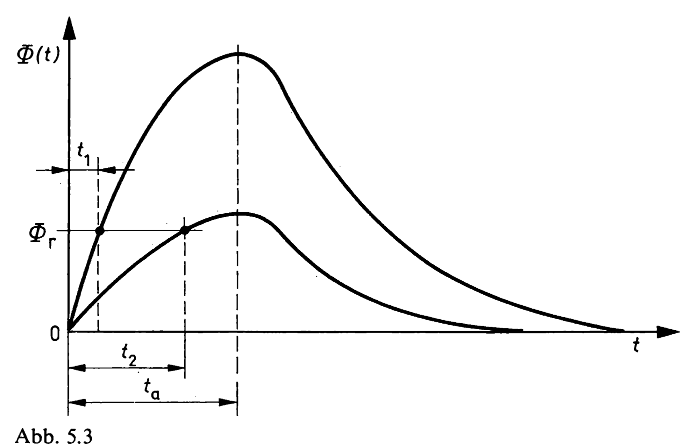


Abb. 5.3
Zeitverzögerung beim Nachweis von Impulsen unterschiedlicher Amplitude; t_a Anstiegszeit (Erläuterungen siehe Text)

meist sehr kurze Zeitdauer der physikalischen Wechselwirkungsprozesse ($\Delta t = 10^{-14} \dots 10^{-22}$ s) bestimmt, sondern durch die sekundären physikalischen Prozesse, die in unterschiedlichen Detektortypen zeitlich stark differieren können (Sammelzeit von Ladungsträgern in Gasen und Halbleitern durch elektrische Felder; Auf- und Abbau von Gasentladungserscheinungen; Abklingzeit optischer Anregungszustände u. a. m.) und in den folgenden Punkten noch ausführlicher behandelt werden.

Auf drei speziellere Probleme im Zusammenhang mit dem Zeitverhalten von Detektoren soll bereits hier etwas ausführlicher eingegangen werden:

— In Abb. 5.3 sind zwei typische Signalformen von elektrischen Impulsen, wie sie beispielsweise in Szintillationsdetektoren (siehe 5.5.) entstehen, dargestellt. Diese unterscheiden sich lediglich hinsichtlich der maximalen Impulshöhe, während die Gesamtanstiegszeit der Signale t_a in beiden Fällen gleich ist. Eine elektronische Triggerschaltung, welche den Teilchennachweis bei Erreichen der Signalhöhe $\Phi(t) = \Phi_r$ registriert, spricht in beiden Fällen zu den unterschiedlichen Zeitpunkten t_1 bzw. t_2 an, obgleich für beide Fälle der Teilchendurchgang zum Zeitpunkt $t = 0$ erfolgte. Ein zeitlicher Fehler beim Teilchennachweis entsteht somit in diesem Fall infolge der unterschiedlichen Anstiegsgeschwindigkeit $\frac{\mathrm{d}\Phi(t)}{\mathrm{d}t}$ der Detektorsignale.

— Fehlmessungen bei Bestimmung der Energieverteilung $F(E_k)$ können infolge zu hoher Impulsdichte entstehen, da dicht aufeinanderfolgende Impulse, die entsprechend (5.20) relativ häufig auftreten, sich überlagern. In diesem, auf Abb. 5.4. schematisch dargestellten Fall gilt der Zusammenhang (5.2) nicht mehr, und selbst bei bekannter Funktion $A(E_k, \varepsilon)$ werden aus der gemessenen Verteilung $\Phi(\varepsilon)$ fehlerhafte Ergebnisse für $F(E_k)$ erzielt (sog. Impuls-Aufstockung).

— Wir betrachten eine Koinzidenzmessung, wie sie in Abb. 5.5 dargestellt ist. Es erfolgt der gleichzeitige Nachweis von zwei unterschiedlichen Mikroteilchen, die gleichzeitig infolge eines physikalischen Prozesses in der Quelle Q mit gleicher Anzahl $N^\beta = N^\gamma = N$ entstehen. Im vorliegenden Beispiel soll es sich um eine β-γ-Koinzidenz handeln, wobei jeder Detektor nur auf eine von beiden Teilchensorten anspricht.

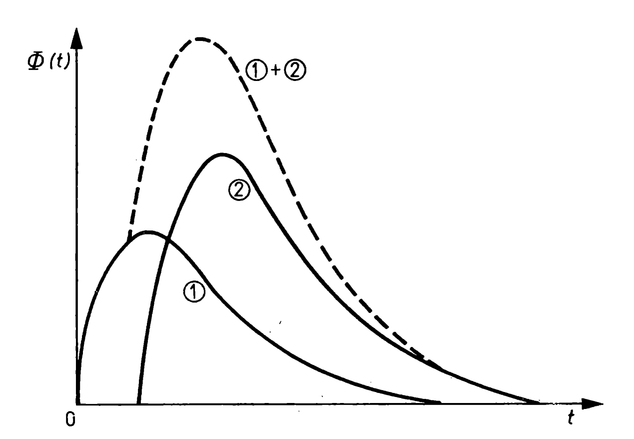


Abb. 5.4
Überlagerung dicht aufeinander folgender Impulse; gestrichelte Linie: resultierende Impulsform

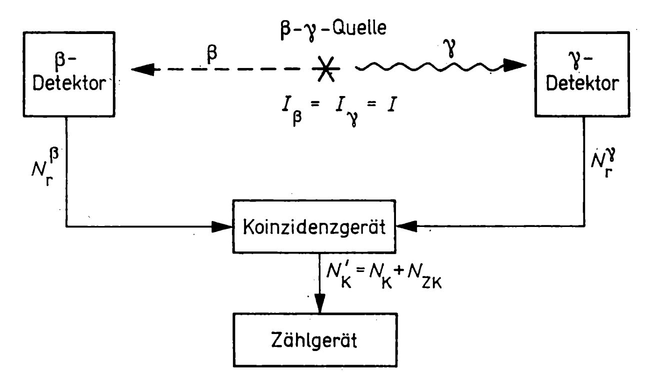


Abb. 5.5
Schema einer Koinzidenzanordnung. Die Intensität I der Quelle ist gleich groß für β^-- und γ-Strahlung, d. h. $\dot{N}_\beta = \dot{N}_\gamma = \dot{N}$.

In diesem Fall ist die Zahl der „echten" Koinzidenzen N_K aus der Quellstärke und den Lichtstärken Λ_β, Λ_γ beider Detektoren (s. (5.6b))

$$N_K = N \cdot \Lambda_\beta \cdot \Lambda_\gamma \sim N \tag{5.7a}$$

bestimmt. Da gleichzeitig die Zahl der in den beiden Detektoren einzeln registrierten Teilchen mit $N_r^\beta = N^\beta \cdot \Lambda_\beta$ sowie $N_r^\gamma = N^\gamma \cdot \Lambda_\gamma$ bestimmt ist, kann wegen $N^\beta = N^\gamma = N$ die Zahl der echten Koinzidenzen auch durch die Zahl der in beiden Detektoren nachgewiesenen Teilchen ausgedrückt werden:

$$N_K = N_r^\beta \cdot N_r^\gamma / N. \tag{5.7b}$$

Daneben besteht eine endliche Wahrscheinlichkeit für „zufällige Koinzidenzen", d. h. registrierte Koinzidenzereignisse, bei denen die nachgewiesenen β- und γ-Teilchen verschiedenen, jedoch dicht nacheinander erfolgten Zerfallsprozessen in der Quelle entstammen. Diese hängt neben den Impulsen $\dot{N}_r^\beta$ und $\dot{N}_r^\gamma$ vor allem von der Auflösungszeit $\pm\Delta\tau_K$ der Koinzidenzanordnung ab, d. h. letztlich von der Genauigkeit, mit der zwei dicht aufeinanderfolgende Ereignisse noch getrennt erkannt und registriert werden können. Die Zahl zufälliger Koinzidenzen N_{ZK} ist gegeben durch

$$N_{ZK} = \frac{2\Delta\tau_K}{\Delta T_M} \cdot N_r^\beta \cdot N_r^\gamma, \tag{5.8}$$

wobei ΔT_M das Meßzeitintervall bezeichnet. Insgesamt weist die Koinzidenzapparatur $N'_K = N_K + N_{ZK}$ Koinzidenzereignisse nach, wobei das Verhältnis

$$\frac{N_{ZK}}{N_K} = 2\Delta\tau_K \left(\frac{N}{\Delta T_M}\right) \equiv 2\Delta\tau_K \cdot \dot{N} \tag{5.9}$$

von der Intensität der Quelle $\dot{N}$ und der Auflösungszeit $\pm\Delta\tau_K$ der Koinzidenzapparatur bestimmt wird. Die in den Gleichungen (5.7) bis (5.9) auftretenden dimensionslosen Größen N, N_r^β, N_r^γ, N_K, N_{ZK} und N'_K können jeweils durch einfache Umformungen auch als entsprechende physikalische Größen ‚pro Zeiteinheit', als sogenannte Zerfalls-, Zähl- bzw. Koinzidenzraten eingeführt werden.

5.2. Statistische Gesetzmäßigkeiten beim Nachweis von Mikroteilchen

5.2.1. Einführung erforderlicher Grundbegriffe der mathematischen Statistik

1. Kernphysikalische Wechselwirkungsprozesse, wie sie dem Nachweis von Mikroteilchen zugrunde liegen (siehe Kapitel 4.), sind, ebenso wie weitere physikalische Prozesse in den Nachweisgeräten, statistischer Natur. Daher ist insbesondere auch bei der Interpretation der Meßergebnisse von Nachweisgeräten das Wirken der Gesetzmäßigkeiten der mathematischen Statistik zu berücksichtigen, um richtige Schlußfolgerungen über Größe und Genauigkeit der ermittelten Meßwerte ziehen zu können.

Der vorliegende Punkt enthält in sehr gedrängter Form und ohne jegliche Ableitung eine Zusammenstellung der wichtigsten hierfür erforderlichen Grundbegriffe und -beziehungen.

2. Die Häufigkeit des Auftretens einer bestimmten Meßgröße X_i der physikalischen Zufallsgröße X wird durch deren Wahrscheinlichkeits-Verteilungsfunktion $W_i(X)$ bestimmt. Handelt es sich um eine kontinuierliche Verteilung der Zufallsgröße, so kommt der Wahrscheinlichkeitsdichte $W(X)$ eine analoge Bedeutung zu, wobei für beide Funktionen die entsprechenden Normierungsbedingungen

$$\sum_{i=0}^{\infty} W_i = 1 \quad \text{bzw.} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} W(X)\,\mathrm{d}X = 1 \tag{5.10}$$

lauten.

Die weiteren Beziehungen werden nur für diskontinuierliche Zufallsgrößen, d. h. die Verteilungsfunktion $W_i(X)$, angegeben, da die Ableitung entsprechender Aussagen für den Fall der kontinuierlichen Wahrscheinlichkeitsverteilung ohne Schwierigkeit durch den Übergang von der Summation über i zur Integration über X möglich ist.

Der tatsächliche Mittelwert ξ_X einer physikalischen Zufallsgröße X, auch mathematischer Erwartungswert genannt, ist definiert als

$$\xi_X \equiv \overline{X} = \sum_{i=0}^{\infty} X_i W_i \,. \tag{5.11}$$

Der Wert von ξ_X stellt in der Regel die durch das Experiment zu bestimmende, gesuchte physikalische Größe dar.

Ein Maß für die Streuung der Zufallsgröße X_i um den Mittelwert ξ_X bildet die Dispersion $\sigma^2(X)$, auch mittleres Schwankungsquadrat dieser physikalischen Größe genannt. Sie ist definiert als

$$\sigma^2(X) \equiv \overline{(X_i - \xi_X)^2} = \sum_{i=0}^{\infty} (X_i - \xi_X)^2 \, W_i \,, \tag{5.12}$$

und da wegen (5.11) $\overline{(X_i - \xi_X)} = 0$ gelten muß, kann die Dispersion ausgedrückt werden durch

$$\sigma^2(X) = \overline{X^2} - \xi_X^2 \,. \tag{5.13}$$

Die Quadratwurzel aus der Dispersion, d. h. die Größe $\sigma(X)$, wird als mittlere quadratische oder Standardabweichung bezeichnet, während die dimensionslose Größe $\delta \equiv \dfrac{\sigma(X)}{\xi_X}$ relative, mittlere quadratische Abweichung heißt. Als Maß für die Asymmetrie der Verteilung der Einzelwerte X_i bezüglich des Mittelwertes ξ_X dient die Größe

$$\gamma \equiv \frac{\overline{(X_i - \xi_X)^3}}{\sigma^3(X)} \,. \tag{5.14}$$

3. Eines der wichtigsten statistischen Verteilungsgesetze für die Interpretation von Kernstrahlungsmessungen ist die Poisson-Verteilung, sie beschreibt Zufallsprozesse, in denen die Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen eines Ereignisses konstant und sehr klein ist. Dies trifft beispielsweise zu für den praktisch häufigen Fall der Zählung von Mikroteilchen aus einer zeitlich konstanten (im Zeitraum des Meßprozesses) radioaktiven Quelle, deren Intensität so gering ist, daß Zählverluste infolge der Totzeit des Detektors vernachlässigbar sind.

Liegen o. g. Bedingungen vor, so ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß bei einem Mittelwert ξ_k die pro Zeiteinheit gemessene Anzahl von Zufallsereignissen k_i ist, nach dem Gesetz

$$W_i = \frac{\xi_k^{k_i}}{k_i!} \exp\left[-\xi_k\right], \tag{5.15}$$

dem sog. Poisson-Gesetz, verteilt. Dieses Gesetz hängt von nur einem Parameter, der Größe des Mittelwertes ξ_k ab. Die Anzahl der gemessenen Zufallsereignisse k_i nimmt stets ganzzahlige, positive Werte an. Abbildung 5.6 zeigt solche Verteilungsfunktionen, sie sind nicht symmetrisch (d. h. $\gamma \neq 0$) und erreichen ihr Maximum für $\xi_k > 1$ jeweils bei $k_i \approx \xi_k$. (Die vom Detektor registrierte Impulszahl k_i ersetzt hier und in (5.15) bis (5.19) die allgemeine Bezeichnung X_i für die beliebige physikalische Meßgröße, die in (5.11) bis (5.14) verwendet wurde.)

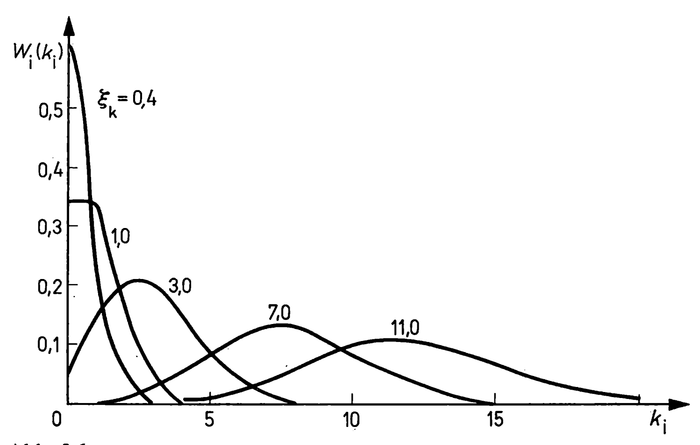


Abb. 5.6
Poisson-Verteilung für unterschiedliche Werte von ξ_k

Der mittlere Wert von k_i ist bei der Poisson-Verteilung gleich dem mathematischen Mittelwert ξ_k der Zufallsgröße:

$$\bar{k} = \sum_{i=0}^{\infty} k_i \frac{\xi_k^{k_i}}{k_i!} \exp\left[-\xi_k\right] = \xi_k. \tag{5.16}$$

Die Dispersion der Poisson-Verteilung beträgt

$$\sigma^2(k) = \xi_k, \tag{5.17}$$

folglich sind die Standard-Abweichung durch

$$\sigma(k) = \sqrt{\xi_k} \tag{5.18}$$

und die relative, quadratische Abweichung durch

$$\delta \equiv \frac{\sigma(k)}{\xi_k} = \frac{1}{\sqrt{\xi_k}} \tag{5.19}$$

gegeben. Die Asymmetrie γ der Verteilung ist stets positiv und sinkt mit steigendem Wert ξ_k, wobei sich (5.15) mit $\xi_k \to \infty$ der bekannten Gauß-Verteilung nähert. Die Beziehungen (5.18) und (5.19) finden breite Anwendung zur Ermittlung statistischer Fehler von Meßserien.

4. Die Verteilung von Zeitintervallen zwischen Zufallsereignissen, die dem Poisson-Gesetz unterliegen, d. h. beipielsweise die Verteilung des Zeitabstandes zwischen zwei nacheinander registrierten Zerfallsprodukten einer radioaktiven Quelle, läßt sich mit der Wahrscheinlichkeitsdichte $W(t)$ erfassen, welche die Wahrscheinlichkeit dafür angibt, daß nach einem Ereignis zum Zeitpunkt $t = 0$ das nächstfolgende im Zeitintervall $t \dots t + \mathrm{d}t$ eintritt:

$$W(t) = \langle \dot{N} \rangle \exp\left[-\langle \dot{N} \rangle \cdot t\right]. \tag{5.20}$$

$\langle \dot{N} \rangle$ bedeutet hier die Teilchenrate, welche exakt gleich dem Reziprokwert des mathematischen Mittelwertes für die Zeitintervalldauer zwischen zwei Ereignissen ξ_t ist. Tatsächlich ergibt sich aus (5.20)

$$\xi_t \equiv \bar{t} = \langle \dot{N} \rangle \int_0^\infty t \cdot \exp\left[-\langle \dot{N} \rangle \cdot t\right] \mathrm{d}t = \frac{1}{\langle \dot{N} \rangle}. \tag{5.21}$$

Die Verteilung (5.20) besagt, daß sehr dicht aufeinanderfolgende Ereignisse relativ häufig sind.

Die Dispersion der Zeitintervall-Verteilung $\sigma^2(t)$ aus (5.12) und (5.21) lautet

$$\sigma^2(t) = \langle \dot{N} \rangle \int_0^\infty (t - \xi_t)^2 \exp\left[-\langle \dot{N} \rangle \cdot t\right] \mathrm{d}t = \xi_t^2\,, \tag{5.22}$$

die Standard-Abweichung der Zeitintervalle beträgt folglich

$$\sigma(t) = \xi_t \tag{5.23}$$

und die relative, quadratische Abweichung

$$\delta \equiv \frac{\sigma(t)}{\xi_t} = 1\,, \tag{5.24}$$

d. h., sie ist für eine beliebige Impulsdichte konstant und gleich eins. Vergleicht man die Formeln (5.17) bis (5.19) mit (5.22) bis (5.24), so ergibt sich der Schluß, daß der Impulsabstand als Zufallsgröße wesentlich stärker als die Zählrate schwankt.[1])

5. Die Gauß-Verteilung ergibt sich, wie bereits erwähnt, für den Grenzfall $\xi \to \infty$ aus der Poisson-Verteilung (5.15). Sie lautet für eine diskontinuierliche Zufallsgröße X

$$W_i = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma(X)} \exp\left[-\frac{(X_i - \xi_X)^2}{2\sigma^2(X)}\right]. \tag{5.25}$$

Ihr Verlauf wird von den beiden Parametern ξ_X und $\sigma(X)$ bestimmt. Für die Verteilung (5.25) gilt ebenso wie für (5.15) $\bar{X} = \xi_X$; sie ist symmetrisch, d. h. $\gamma = 0$.

Mit Hilfe der Gauß-Verteilung werden bestimmte Erscheinungen bei Nachweisprozessen beschrieben; so entsprechen beispielsweise die Impulshöhenverteilungen von Halbleiter- und Szintillationsdetektoren mit guter Näherung diesem Gesetz.

Die wichtigste Anwendung findet die Gauß-Verteilung, auch als Normalverteilung bezeichnet, bei der Fehleranalyse von Experimenten. Dies beruht auf dem sog. Grenzgesetz der Statistik,

[1]) In den übrigen Abschnitten des Lehrbuches ist bei der Angabe von Teilchenraten stets der Mittelwert $\langle \dot{N} \rangle$ gemeint. Zu beachten ist bei der Anwendung von (5.20) und (5.21) weiterhin der Unterschied zwischen Teilchen- bzw. Ereignisrate $\dot{N}$ und der Zählrate des Detektors $\dot{N}_r$, die um den Faktor der Nachweiseffektivität $\eta \leqq 1$ verkleinert ist.

welches besagt, daß bei Überlagerung vieler Zufallsgrößen, selbst wenn deren Verteilung sich stark von (5.25) unterscheidet, die resultierende physikalische Zufallsgröße mit hoher Genauigkeit durch die Normalverteilung beschrieben wird.

Die Verteilung (5.25) kann also immer dann zur Anwendung kommen, wenn sich die untersuchte Zufallsgröße aus einer ausreichend großen Zahl statistisch unabhängiger Zufallsprozesse zusammensetzt.

5.2.2. Interpretation endlicher Meßserien

1. Alle bisherigen Betrachtungen in 5.2.1. bezogen sich auf die statistische Gesamtheit einer Zufallsgröße. Im Experiment wird dagegen nie das gesamte statistische Ensemble untersucht, vielmehr besteht in der Regel die Aufgabe, über die gesuchte physikalische Größe X an Hand einer begrenzten Anzahl von m Einzelmessungen $X_1, X_2, \dots, X_m$ eine Aussage zu treffen und die dabei erreichte Genauigkeit realistisch einzuschätzen. Die Endlichkeit der Meßinformation und die Streuung der statistischen Zufallsgröße sind letztlich die Ursache für die prinzipielle Unvermeidbarkeit statistischer Fehler bei jeder kernphysikalischen Messung der Größe X. Daneben treten praktisch immer systematische Meßfehler auf, die jedoch in jedem konkreten Fall näher untersucht werden müssen und daher hier nicht diskutiert werden.

2. Das Ergebnis der Meßserie läßt sich durch den Scharmittelwert $\langle X \rangle$ charakterisieren, der für die meisten Verteilungsfunktion $W_i(X)$ die zuverlässigste Aussage über den gesuchten mathematischen Mittelwert ξ_X zuläßt:

$$\langle X \rangle \equiv \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} X_i \approx \xi_X \tag{5.26}$$

Im Experiment kann jedoch, ebenso wie ξ_X, auch $\sigma(X)$ nicht direkt bestimmt werden. Vielmehr ergibt die Analyse des Experiments die Größe $S^2(\langle X \rangle)$, welche die Streuung einer endlichen Zahl von Einzelmeßwerten $X_1, \dots, X_m$ um den Scharmittelwert $\langle X \rangle$ charakterisiert.

Analog zu (5.26) ist diese Größe nur ausgehend von den Meßwerten X_i definiert:

$$S^2(\langle X \rangle) \equiv \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} (X_i - \langle X \rangle)^2 \,. \tag{5.27}$$

Die wahrscheinlichste Abschätzung für die echte Dispersion $\sigma^2(\langle X \rangle)$ der Meßserie lautet

$$\sigma^2(\langle X \rangle) \equiv \frac{m}{m-1} S^2(\langle X \rangle) = \frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^{m} (X_i - \langle X \rangle)^2 \,. \tag{5.28}$$

Folglich beträgt der wahrscheinlichste Wert der Standardabweichung zwischen den Meßwerten und $\langle X \rangle$

$$\sigma(\langle X \rangle) = \left[\frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^{m} (X_i - \langle X \rangle)^2 \right]^{1/2} , \tag{5.29}$$

auch dies gilt für beliebige Verteilungsfunktionen $W_i(X)$.

Erfolgt nur eine einzige Messung, so ist nach (5.26) $\langle X \rangle = X_1$, während nach (5.28) die Dispersion $\sigma^2(\langle X \rangle)$ völlig unbestimmt ist.

Für den bei kernphysikalischen Messungen häufigen Fall der Poisson-Verteilung (5.15) kann als wahrscheinlichste Einschätzung für die Dispersion, ausgehend von (5.17), der Wert

$$\sigma^2(\langle X \rangle) \approx \langle X \rangle \tag{5.30}$$

angenommen werden, so daß selbst bei Vorliegen nur eines Meßwertes X_1 die grobe Abschätzung $\sigma^2(\langle X \rangle) \approx X_1$ eine gewisse Berechtigung hat.

Von eigentlichem Interesse bei der Analyse der Meßserie ist letztlich die Einschätzung der Abweichungen zwischen $\langle X \rangle$ und ξ_X, d. h. darüber, wie dicht man durch genügend große Meßserien sich dem Mittelwert nähern kann.

Zur Charakterisierung dieser Abweichung wird der Begriff des Standard-Fehlers einer Messung $\sigma(\langle X \rangle, \xi_X)$ bzw. deren mittlerer quadratischer Fehler eingeführt. Aus dem bereits zitierten zentralen Grenztheorem der Statistik folgt, daß für genügend große Meßserien (praktisch $m > 20 \cdots 30$) für die mittlere quadratische Abweichung zwischen $\langle X \rangle$ und ξ_X in guter Näherung gilt

$$\sigma(\langle X \rangle, \xi_X) = \frac{\sigma(\langle X \rangle)}{\sqrt{m}} = \left[\frac{1}{m(m-1)} \sum_{i=1}^{m} (X_i - \langle X \rangle)^2\right]^{1/2}. \tag{5.31}$$

Diese Gleichung besagt, daß trotz endlicher Standard-Abweichung der Meßserie $\sigma(\langle X \rangle)$, die selbst bei $m \to \infty$ nach (5.29) endlich bleibt, sich der gewonnene Mittelwert $\langle X \rangle$ beliebig dicht dem mathematischen Mittelwert ξ_X nähert, wenn nur die Zahl der Einzelmessungen groß genug ist.

Wird der Wert einer Meßgröße mit

$$\langle X \rangle \pm \sigma(\langle X \rangle, \xi_X) \tag{5.32}$$

angegeben, so bedeutet dies, daß der gesuchte Wert mit einer Wahrscheinlichkeit von 68 % innerhalb der angegebenen Fehlergrenzen liegt, während eine Fehlerangabe

$$\langle X \rangle \pm 2\sigma(\langle X \rangle, \xi_X) \tag{5.33}$$

die Wahrscheinlichkeit auf 95 % erhöht.

5.3. Gasgefüllte Ionisationsdetektoren

5.3.1. Physikalische Grundlagen und Detektortypen

Die Wirkungsweise von Ionisationsdetektoren beruht auf dem Nachweis der elektrischen Ladung der beim Durchgang von Strahlung in Gasen entstehenden positiven und negativen Ionen.

Infolge thermischer Bewegung vollführen die entstandenen Ionen beider Ladungsvorzeichen zufällige Stöße mit den Gasmolekülen und würden sich, entsprechend den Diffusionsgesetzen, im Laufe der Zeit im gesamten zur Verfügung stehenden Gasvolumen ausbreiten. Die mittlere freie Weglänge der Ionen zwischen zwei Stößen hängt stark von der Dichte der Gasmoleküle, d. h. vom Druck, ab.

Dabei kommt es jedoch auch zu Stößen zwischen positiven und negativen Ionen, die zu deren Rekombination führen. Bei diesem, für den Nachweis unerwünschten Prozeß bilden sich wieder neutrale Atome bzw. Moleküle, die durch Strahlungseinwirkung im Gas entstandenen positiven und negativen Ladungen gleichen sich wieder aus.

Die Geschwindigkeit der Rekombination wird durch den Rekombinationskoeffizienten α ausgedrückt, der zahlenmäßig gleich der Wahrscheinlichkeit der Rekombination eines positiven und negativen Ions pro cm^3 und Sekunde ist. Er ist ebenso wie λ abhängig vom Druck, für die meist verwendeten Gase liegt α in den Grenzen

$$\alpha = (1{,}2 \cdots 1{,}7)\, 10^{-3}\, [\mathrm{cm}^{-3}\, \mathrm{s}^{-1}]\,. \tag{5.34}$$

Bei konstanter Dichte der positiven und negativen Ionen n_+ bzw. n_- im Gasvolumen beträgt die Rekombinationsrate $\frac{dn}{dt}$

$$\frac{dn_+}{dt} = \frac{dn_-}{dt} = \alpha n_+ n_- . \tag{5.35}$$

Besonders hoch ist die Rekombinationswahrscheinlichkeit unmittelbar nach dem Teilchendurchgang, da infolge der relativ geringen Diffusionsgeschwindigkeiten die Ionen zunächst in einem Schlauch entlang der Teilchenspur mit sehr geringem Volumen konzentriert sind. Für Teilchen, die Spuren mit hoher Ionisationsdichte hinterlassen (z. B. mehrfach geladene schwere Ionen), ist die Rekombinationsrate und damit der Ladungsverlust größer als für Teilchen mit geringer Ionisationsdichte (Elektronen, kosmische Strahlung usw.).

Die Nutzung der Ionisation des Gases zum Teilchennachweis erfordert, die Ladung der entstandenen Ionen eines oder beider Vorzeichen auf Elektroden zu sammeln und zu registrieren. Zu diesem Zweck wird ein äußeres elektrisches Feld E angelegt, unter dessen Wirkung sich die Ladungsträger entsprechend in Richtung auf die Kathode bzw. Anode bewegen und dort gesammelt werden, d. h. ein registrierbares elektrisches Signal erzeugen.

Bei geringen Feldstärken E ergibt sich die resultierende Bewegung der Ionen aus der Überlagerung von thermischer und gerichteter Bewegung, während bei höheren Feldstärken diese praktisch nur noch von der Richtung der elektrischen Kräfte $|\boldsymbol{F}| = e\,|\boldsymbol{E}|$ bestimmt wird. Während der freien Bewegung auf der Strecke zwischen zwei Stößen werden die Ionen durch das Feld beschleunigt. Durch elastische Stöße mit Gasmolekülen verlieren die Ionen jedoch wieder einen Teil der kinetischen Energie. Die mittlere Energieabgabe der schweren positiven Ionen ist — wie aus den kinematischen Gesetzen des elastischen Stoßes (siehe 4.4.3.) ersichtlich — wesentlich höher als diejenige der leichten Elektronen. Die mittlere Geschwindigkeit $\langle v \rangle$ der Ionen in Feldrichtung hängt von der Feldstärke E und dem Gasdruck p (bzw. der freien Weglänge $\lambda \sim 1/p$) ab,

$$\langle v \rangle = \mu(E/p) , \tag{5.36}$$

der Proportionalitätsfaktor $\mu \Big/ \frac{\text{cm}^2}{\text{V} \cdot \text{s}}$ trägt die Bezeichnung „Beweglichkeit" der Ionen. Er drückt die mittlere Geschwindigkeit der Ionen bei der Feldstärke 1 V/cm und Normaldruck aus und bestimmt bei vorgegebener Geometrie die zur Ladungssammlung erforderliche Zeit. Infolge der geringeren Energieverluste der Elektronen durch Stöße mit Gasmolekülen ist deren Beweglichkeit wesentlich größer als die Beweglichkeit schwerer Ionen, so daß die Elektronen in etwa 10^2fach kürzerer Zeit das Gas verlassen als die schweren positiven Ionen.

Selbst geringfügige Beimischungen elektronegativer Gase wie Wasserdampf, Sauerstoff, Halogene u. a. führen jedoch zum Einfang der Elektronen in den Molekülverband, wobei sich schwere negative Ionen bilden, deren Beweglichkeit ebenso gering wie die der positiven Ionen ist. Aus diesem Grunde ist die Reinheit der Gasfüllung von entscheidender Bedeutung für die Güte der Ionisationsdetektoren. Besonders gut geeignet für Detektoren sind elektropositive Gase, wie beispielsweise Edelgase. Durch Zusätze von CO_2, CH_4 oder N_2 kann die Einfangswahrscheinlichkeit weiter verringert werden.

Bei sehr hohen Feldstärken gewinnen die Elektronen ausreichend kinetische Energie, um mit den Gasmolekülen unelastische Stöße auszuführen, bei denen die Moleküle angeregt oder ionisiert werden. Bei letzterem Prozeß entstehen neue Ladungsträger. Er erhielt daher die Bezeichnung „Gasverstärkung".

Aufschluß über die physikalischen Prozesse bei der Gasentladung in Ionisationsdetektoren gibt die Strom-Spannungs-Kennlinie für den Ionisationsstrom I in Abhängigkeit von der an den Elektroden angelegten Spannung U bei konstanter Intensität der ionisierenden Strahlung.

Abbildung 5.7 zeigt die Strom-Spannungs-Kennlinie für eine unterschiedliche Primärionisation, hervorgerufen durch schnelle Elektronen und Alphateilchen. Die Kennlinie läßt sich in sechs Gebiete I—VI einteilen, in denen die physikalischen Prozesse wie folgt charakterisiert werden können:

I. Der Strom ist proportional der Spannung U, ähnlich wie bei einem Ohmschen Widerstand der Größe $R = U/I$. Nicht alle im Gas gebildeten Ionen gelangen an die Sammelelektroden, ein Teil der Ionen rekombiniert. Der äquivalente Widerstand R ist um so kleiner, je höher die Primärionisation ist. Dieses Gebiet heißt Rekombinationsbereich und wird für den Teilchennachweis praktisch nicht benutzt.

II. Der Ionisationsstrom ist annähernd konstant, alle primär gebildeten Ionen werden an den Elektroden gesammelt. Dieses Gebiet heißt Sättigungsbereich und der Strom I_s — Sättigungsstrom. Praktisch besitzt die Kennlinie auch in diesem Gebiet einen sehr schwachen Anstieg infolge geringfügiger Rekombination und sekundärer Effekte. Dies ist das Arbeitsgebiet der sog. Ionisationskammern, die sowohl als Detektoren wie auch als Spektrometer genutzt werden können.

III. Die Elektronen werden im Gas so stark beschleunigt, daß sie sekundäre Ionisation auslösen können. Es findet eine lawinenartige Vervielfachung der Zahl von Ladungsträgern, eine sog. Gasverstärkung, statt. Der Koeffizient der Gasverstärkung

$$k = I/I_s \tag{5.37}$$

erreicht Werte bis zu $k \cong 10^4$. Charakteristisch für dieses Gebiet ist die Proportionalität des verstärkten Stromes zur Primärionisation, daher die Bezeichnung Proportionalbereich. Die Kennlinien für α-Teilchen und Elektronen verlaufen parallel. Dies ist das Arbeitsgebiet der Proportionalzähler.

IV. Die steigende Dichte der langsamen positiven Ionen im Gasvolumen erzeugt eine Raumladung, welche die Elektroden teilweise abschirmt. Je höher die Primärionisation, desto stärker ist dieser Effekt. Bei steigendem Anstieg von U wächst auch I weiter an, die Kennlinien für Alphateilchen und Elektronen nähern sich einander und verschmelzen schließlich, der Gasverstärkungskoeffizient ist nur noch eine Funktion der Spannung,

$$k = f(U)\,, \tag{5.38}$$

unabhängig von der Teilchenart. Dies ist das Gebiet der begrenzten Proportionalität, welches praktisch selten für den Nachweis von Mikroteilchen genutzt wird.

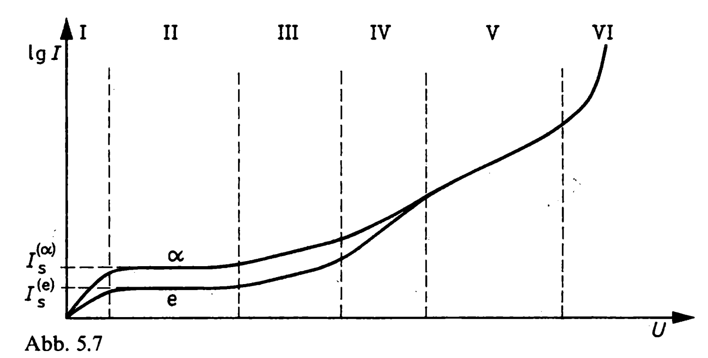


Abb. 5.7
Strom-Spannungs-Kennlinie eines Ionisationsdetektors
I Gebiet des Ohmschen Gesetzes, II Sättigungsgebiet, III Proportionalitätsbereich, IV begrenzte Proportionalität, V Geiger-Müller-Bereich, VI selbständige Entladung

V. Die Gasverstärkung steigt so sehr, daß die Größe des Stromes unabhängig von der primären Ionisation wird. Jedes im Gas entstehende einzelne Ionenpaar kann bereits eine Lawine auslösen. Dieses Gebiet heißt Geiger-Müller-Bereich, es ist der Arbeitsbereich von Auslösezählern und Funkenzählern.

VI. Bei weiterem Spannungsanstieg beginnt die selbständige Gasentladung, selbst ohne Einwirkung ionisierender Strahlung. Es kommt zur Dauerentladung und bei noch höheren Spannungswerten — zu Durchschlägen. Für den Teilchennachweis ist dieses Gebiet nicht nutzbar.

5.3.2. Ionisationskammern

1. Man unterscheidet Strom- und Impuls-Ionisationskammern. Erstere messen den summarischen, mittleren Strom, der beim Einschuß ionisierender Strahlung zwischen den Elektroden der Ionisationskammer fließt. Impuls-Ionisationskammern registrieren demgegenüber den durch ein einzelnes Primärteilchen hervorgerufenen elektrischen Impuls.

2. Bei geeigneter Wahl der Arbeitsspannung U an der Stromkammer mißt diese den Sättigungsstrom $I_s^{(i)}$, welcher über

$$I_s^{(i)} = e \cdot \dot{N}_i \cdot N_\pm^{(i)} \tag{5.39}$$

durch die Zahl der pro Sekunde in die Kammer einfallenden Teilchen $\dot{N}_i$ der Sorte i und die Anzahl der pro Teilchen erzeugten Ladungsträgerpaare $N_\pm$ bestimmt ist. Letztere Größe ist nichts anderes als das Integral der in (5.35) eingeführten Ionendichten $n_\pm$ über das Kammervolumen V:

$$N_\pm = \int_V n_\pm \, dV . \tag{5.40}$$

Tabelle 5.1 enthält Angaben über die zur Erzeugung eines Ionenpaares in unterschiedlichen Gasen vom eingeschlossenen Teilchen aufzubringende Energie $\Delta E_\pm$. Diese Tabelle besagt, daß zur Erzeugung eines Ionenpaares in allen Fällen etwa 30 eV Energie, d. h. weit mehr als die Bindungsenergie der äußeren Hüllenelektronen, aufzubringen ist. Da somit $N_\pm$ bestimmt ist, kann nach (5.39) zur Messung der Teilchenintensität $\dot{N}_i$ verwendet werden.

3. Mit der Impuls-Ionisationskammer kann die Energie E_k eines eingeschlossenen Teilchens bestimmt werden, falls das Teilchen im Kammervolumen völlig abgebremst wird. Im Sättigungsgebiet wird die durch das Teilchen erzeugte Ladungsmenge

$$Q_E = eN_\pm = e \frac{E_k}{\Delta E_\pm} \tag{5.41}$$

Tabelle 5.1
Energieverlust bei Erzeugung eines Ionenpaares

Teilchen-sorte	Energieverlust pro Ionenpaar in eV		
	Luft	He	Ar
α	35,0	30,2	25,8
p	33,3	29,2	25,5
e	35,0	32,5	27,0

auf den Elektroden gesammelt und erzeugt an der parasitären Kapazität C_p den Spannungssprung

$$\Delta U = \frac{Q_E}{C_p} = \frac{e}{C_p \, \Delta E_\pm} \cdot E_k \sim E_k \,, \tag{5.42}$$

der proportional zur Einschußenergie ist.

Folgendes Beispiel zeigt die Realisierbarkeit einer solchen Messung: In einer mit Argon gefüllten Ionisationskammer entstehen bei Abbremsung eines α-Teilchens der Energie $E_\alpha = 5{,}3$ MeV $N_\pm = \frac{5{,}3 \cdot 10^6}{25{,}8} \cong 2 \cdot 10^5$ Ionenpaare, an der parasitären Kapazität $C_p = 32$ pF wird die Ladungsmenge $Q_E \cong 3{,}2 \cdot 10^{-14}$ As gesammelt, wodurch ein Spannungssprung $\Delta U = 1$ mV entsteht.

4. Zwei typische Anwendungsfälle von Impulsionisationskammern seien genannt:

— Spaltkammern sind Impuls-Ionisationskammern, bei denen auf eine Elektrode (meist die Kathode) eine dünne Schicht eines spaltbaren Materials aufgetragen ist. Beim Einfall von Neutronen kann in dieser Schicht eine Kernspaltung (s. 4.4.5.) ausgelöst werden, wobei eines der beiden Spaltprodukte (s. (4.92)), welches stark ionisiert ist und hohe kinetische Energie (etwa 100 MeV) besitzt, in das Gasvolumen gelangt und hier eine Spur mit hoher Ionisationsdichte erzeugt, die leicht zu registrieren ist.

— Mit Wasserstoff gefüllte Ionisationskammern dienen als sog. Rückstoß-Ionisationskammern dem Nachweis, aber auch der Spektrometrie von schnellen Neutronen. Über die elastische Streuung der Neutronen an den Wasserstoff-Kernen (s. 4.4.3.) entstehen Rückstoßprotonen, deren Energieverteilung nach (4.87) in eindeutiger Beziehung zur Einschußenergie E_n steht. Wendet man den in Pkt. 5.1. eingeführten Begriff der Ansprechfunktion $A(E_n, \varepsilon_p)$ an, so bedeutet (4.87), daß diese Funktion im Energiebereich $\varepsilon_p = 0 \cdots E_n$ konstant ist $A(E_n, \varepsilon_p) = C$, aus (5.2) folgt dann das gesuchte Neutronenspektrum aus der Ableitung des Rückstoßprotonen-Spektrums

$$F(E_n) = \frac{1}{C} \frac{d\Phi(\varepsilon_p)}{d\varepsilon_p} \cdot \frac{d\varepsilon_p}{d\varepsilon_n} \,, \tag{5.43}$$

wobei der funktionale Zusammenhang (5.3) experimentell bestimmt werden muß.

5.3.3. Proportionalzählrohre

1. Der Mechanismus der Gasverstärkung setzt bei elektrischen Feldstärken E ein, die ausreichen, um die Elektronen auf der Strecke λ auf eine kinetische Energie zu beschleunigen, die über der Ionisationsenergie der Gasmoleküle liegt. Die Größe von E hängt somit von Gasart und -druck ab und liegt im Bereich $E > 10$ kV/cm. Solch hohe Feldstärken lassen sich bereits mit Anodenspannungen U_0 um 1 kV in einem zylinderförmigen Zählrohr in der Nähe eines zentralen, sehr dünnen Anodendrahtes erreichen (s. Abb. 5.8.). Tatsächlich gilt für diese Anordnung die Beziehung

$$E(r) = -\text{grad}\, U = \frac{U_0}{r \cdot \ln \frac{b}{a}} \tag{5.44}$$

mit a, b als den Radien von Anodendraht und Hohlzylinder. Beträgt $a = 0{,}1$ mm und $b = 10$ mm, so werden die zur Gasverstärkung erforderlichen Feldstärken nur in einem dünnen Schlauch mit $r \leqq 0{,}2$ mm unmittelbar um den Anodendraht erreicht. Hier erfolgt die Vervielfachung der

aus dem gesamten Gasvolumen gesammelten negativen Ladungsträger. Der Vervielfachungsfaktor k ist somit näherungsweise unabhängig vom Ort der Ionisationsspur im Gasvolumen — eine Voraussetzung dafür, daß dieser Detektor auch zur Spektrometrie geladener Teilchen eingesetzt werden kann, mit typischen Werten der relativen Energieauflösung von $\frac{\Delta E_k}{E_k} \simeq 5 \cdots 10\%$ für schwere geladene Teilchen bei $E_k \simeq 1$ MeV.

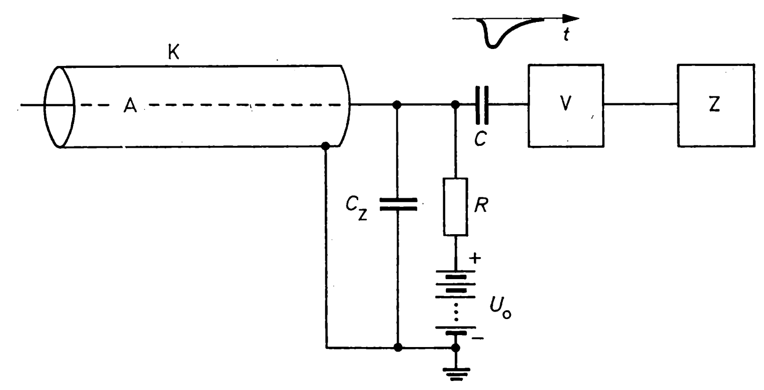


Abb. 5.8
Prinzipschaltbild eines hohlzylinderförmigen Zählrohres
A Anodendraht, K Katode, C_z Zählrohrkapazität, R Arbeitswiderstand, U_0 Anodenspannung, C Koppelkondensator, V Verstärker, Z Zählgerät

Eine Abschätzung des Verstärkungsfaktors k als Funktion der Anodenspannung ist mit der Beziehung

$$k(U_0) = \exp\left\{c\sqrt{\frac{U_0 \cdot a \cdot p}{\ln\frac{b}{a}}}\left[\sqrt{\frac{U_0}{U_{\min}}} - 1\right]\right\} \tag{5.45}$$

möglich, wobei c eine experimentell zu bestimmende Konstante und $U_{\min}$ die zur Auslösung der Gasverstärkung erforderliche minimale Zählrohrspannung (d. h. $k(U_{\min}) = 1$) und p den Gasdruck darstellen.

2. Ein typischer Anwendungsfall ist der zum Neutronennachweis häufig benutzte BF_3-Zähler. Nachgewiesen werden die geladenen Produkte der Reaktion $^{10}B(n, \alpha)^7Li$ (s. Abb. 4.26), die bevorzugt durch langsame und thermische Neutronen ausgelöst wird. Bei stark angereichertem Isotop ^{10}B im BF_3-Gas, einem Gasdruck um 10^4 Pa sowie einer Zählrohrlänge von 15 cm lassen sich damit für thermische Neutronen, die in Achsrichtung in das Zählrohr eintreten, Nachweiseffektivitäten um 20% erreichen.

Wird das BF_3-Zählrohr mit einer wasserstoffhaltigen Substanz, beispielsweise Paraffin, umgeben, in der schnelle Neutronen abgebremst werden, so können auch letztere mit dem BF_3-Zähler effektiv registriert werden. Durch spezielle Wahl der Größe und Form des Moderators kann dabei erreicht werden, daß die Nachweiseffektivität für schnelle Neutronen in einem weiten Energiebereich praktisch konstant ist (sog. long-counter).

5.3.4. Gasentladungszählrohre

1. Steigt die Zählrohrspannung U_0, so wächst $k(U_0)$ entsprechend (5.45) praktisch exponentiell. Dabei kommt eine wachsende Bedeutung der Photoionisation zu: Die von angeregten Gasmolekülen emittierten Photonen lösen aus anderen Gasmolekülen und vor allem aus der Katodenoberfläche Photoelektronen aus, welche ihrerseits wiederum zur Anode beschleunigt werden. Übersteigt U_0 den Wert $U_{\text{ausl.}}$, so bildet sich infolgedessen bereits bei Entstehung eines einzigen primären Ionenpaares eine das gesamte Zählrohrvolumen erfassende, selbständige, andauernde Entladung aus. Diese kann zur Teilchenzählung benutzt werden, wobei zwei unterschiedliche Möglichkeiten zur Unterbrechung der Entladung Anwendung finden.

2. In nichtselbstlöschenden Zählrohren, auch Geiger-Müller-Zählrohre genannt, wird eine große Zeitkonstante $\tau_z = C_z R \cong 10^{-3}$ s für die Aufladung der Detektorkapazität $C_z \simeq 10$ pF gewählt. Dadurch entlädt sich die Zählrohrkapazität während der Gasentladung so lange, bis die am Zählrohr anliegende Spannung kleiner als $U_{\text{ausl.}}$ wird, wodurch die Gasentladung abbricht. An C_z entsteht folglich ein negativer Impuls der Amplitude ($U_0 - U_{\text{ausl.}}$), welcher ohne Verstärkung direkt gezählt werden kann. Die Größe der Zeitkonstante τ_z wird durch die Sammelzeit der positiven Ionen im Zählrohr vorgegeben, die etwa 10^{-4} s beträgt und die Anstiegszeit des Impulses bestimmt. Sie ist die Ursache für die geringe erreichbare Zählgeschwindigkeit solcher Zählrohre.

3. Selbstlöschende Zählrohre können demgegenüber mit wesentlich kleineren τ_z, d. h., kleineren Arbeitswiderständen R, arbeiten. Durch Zusätze von Alkoholdämpfen zum Zählrohrgas (meist Argon) wird ein Abbruch der Entladung infolge der starken Absorption von Photonen durch die Alkoholmoleküle erreicht. Infolge der Photodissoziation der Alkoholmoleküle besitzen derartige Zählrohre eine begrenzte Lebensdauer im Zählbetrieb (etwa $10^9 \cdots 10^{10}$ Impulse), dafür gestatten sie höhere Zählgeschwindigkeiten als nichtselbstlöschende Zählrohre.

4. Gasentladungszähler finden Anwendung für den Nachweis vieler Arten von Mikroteilchen. Gammaquanten werden über die Entstehung von schnellen Elektronen im Katodenmaterial oder im Gas infolge von Compton-Effekt, Photoeffekt oder Paarbildung (s. Abschnitt 4.3.) nachgewiesen. Geladene Teilchen werden registriert, wenn die Zählrohrwand ausreichend dünnwandig ausgelegt ist, so daß die Teilchen in das empfindliche Zählrohrvolumen eindringen können.

Selbst Neutronen können nachgewiesen werden, indem das Zählrohr mit einem Cadmiummantel und Paraffin-Moderator umgeben wird. Hierbei wird die für langsame Neutronen sehr wahrscheinliche Reaktion Cd(n, γ) (s. Abb. 4.24) zur Erzeugung von Einfang-Gammaquanten genutzt, die ihrerseits, wie oben beschrieben, eine Entladung auslösen können.

5.3.5. Funkenzähler

Der Funkenzähler besteht aus zwei in geringem Abstand voneinander befindlichen Parallelplatten mit Alkohol-Argon-Gemisch-Füllung (s. Abb. 5.21a, S. 176). Bei ausreichend hoher Spannung $U_0 \geqq 10$ kV erfolgt eine Vervielfachung der Ladungsträger durch Stoßionisation im gesamten Volumen zwischen den Platten. Da die im Zählrohr erforderliche Sammelzeit entfällt, kommt es sehr schnell, innerhalb von 10^{-9} s, zur Ausbildung eines Funkendurchbruches an dem Ort des Teilchendurchganges. Sehr vorteilhaft ist die geringe Impulsanstiegszeit von 10^{-10} s, während die Totzeit ebenfalls bei etwa 10^{-3} s liegt. Der Nachweis kann über den großen elektrischen Impuls oder das Lichtsignal (Funken) erfolgen. Werden anstelle von Parallelplatten gekreuzte Paralleldraht-Ebenen verwendet, so kann auch der Ort des Funkendurchbruches elektrisch bestimmt werden.

5.4. Halbleiterdetektoren

5.4.1. Physikalische Grundlagen

1. Die Funktion von HL-Detektoren beruht auf der Ausnutzung der Eigenschaften von Übergängen zwischen HL-Materialien mit n-Leitung (Elektronenleitung) und p-Leitung (Lochleitung), die durch Einführung von Donatoren bzw. Akzeptoren in ein reines HL-Material erzeugt werden. Jedes der beiden Materialien ist für sich genommen elektrisch neutral — bewegliche und festsitzende Ladungen kompensieren sich.

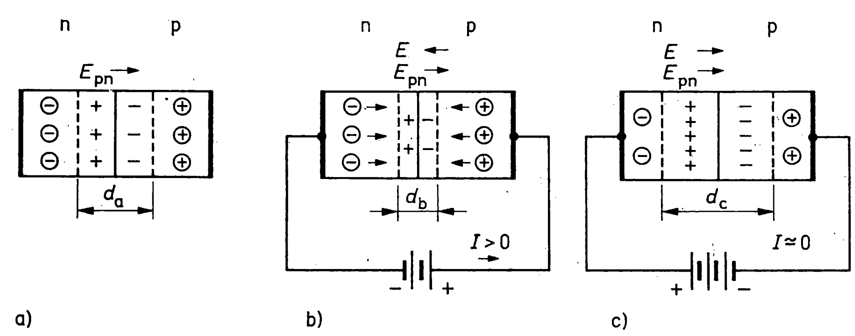


Abb. 5.9
Bildung eines p-n-Übergangs im Halbleiter
a) ohne äußere Spannungsquelle, b) mit Spannungsquelle in Leitrichtung, c) in Sperrrichtung des p-n-Übergangs
⊖ und ⊕ kennzeichnen bewegliche, — und + festsitzende Ladungen (Elektronen und Löcher bzw. Donatoren und Akzeptoren)

Werden beide Materialien in Kontakt gebracht (s. Abb. 5.9a), so diffundieren Elektronen bzw. Löcher aus dem n- bzw. p-Bereich in den angrenzenden Bereich mit entgegengesetztem Leitungstyp. Ihre elektrischen Ladungen kompensieren sich dabei teilweise gegenseitig, so daß im n-Gebiet eine positive Überschußladung (Raumladung) der unbeweglichen Donatoren und im p-Gebiet eine negative Überschußladung der unbeweglichen Akzeptoren entsteht. Zwischen beiden Bereichen bildet sich eine Potentialdifferenz von $U_{pn} \simeq 0{,}5$ eV aus, die eine weitere Diffusion von Ladungsträgern unterbindet. Da das Raumladungsgebiet sehr schmal ist, $d \leqq 10$ µm, entsprechen der geringen Potentialdifferenz hohe Feldstärken E_{pn} von einigen kV/cm.

Der p-n-Übergang besitzt elektrische Eigenschaften einer Diode. Wird der n-Bereich an die Katode und der p-Bereich an die Anode einer äußeren Spannungsquelle angeschlossen, so daß das äußere elektrische Feld E dem Feld E_{pn} entgegengerichtet ist, so kommt es zu einem ständigen Stromfluß im Halbleiter (s. Abb. 5.9b).

Bei Umpolung der Spannungsquelle (s. Abb. 5.9c) sind E_{pn} und E gleichgerichtet, es entsteht eine relativ breite Sperrzone, die an beweglichen Ladungsträgern verarmt ist, und es fließt praktisch kein Strom. Werden innerhalb dieser p-n-Sperrschicht durch einen zusätzlichen Mechanismus, beispielsweise infolge des Durchgangs eines ionisierenden Mikroteilchens, Elektronen und Löcher gebildet, so bewegen sich diese unter Wirkung des resultierenden Feldes $E_r = E_{pn} + E$ in Richtung auf die Anode bzw. Katode. Es kommt zu einem kurzzeitigen Stromfluß im äußeren Kreis, der nachgewiesen werden kann.

Es besteht somit eine gewisse Analogie zur Arbeitsweise der Ionisationskammer: alle entstehenden Ladungsträger werden ohne innere Verstärkung auf den Elektroden gesammelt. Der

Halbleiterdetektor besitzt jedoch gegenüber der gasgefüllten Ionisationskammer folgende entscheidende Vorteile:

— Die Masse des empfindlichen Volumens ist bei gleichen Dimensionen wesentlich höher, damit können Teilchen höherer Energie im Detektor vollständig abgebremst bzw. eine hohe Nachweiseffektivität erreicht werden.
— Der Energieverlust pro Ladungsträgerpaar ist im Halbleitermaterial etwa zehnfach kleiner als im Gas (vergleiche hierzu die Tabellen 5.1 und 5.2), damit besteht die prinzipielle Möglichkeit, wesentlich bessere Werte der Energieauflösung zu erreichen als in Ionisationskammern.
— Die Sammelzeiten der Ladungsträger liegen im Bereich 10 ··· 100 ns und sind damit wesentlich kürzer als in der Ionisationskammer. Dies bewirkt ein wesentlich besseres Zeitverhalten der HL-Detektoren im Vergleich zu allen gasgefüllten Ionisationsdetektoren.

2. Zur Herstellung von HL-Detektoren finden bisher fast ausschließlich Silicium- und Germaniumkristalle Anwendung. Ihre wichtigsten Eigenschaften sind in Tabelle 5.2 zusammengestellt. Der spezifische Widerstand des reinen Halbleitermaterials ϱ_i wird durch die Ladungsträgerdichten $n_i = p = n$ und die Beweglichkeit der Ladungsträger μ^+ und μ^- bestimmt,

$$\varrho_i = 1/[en_i(\mu^+ + \mu^-)]\,, \tag{5.46}$$

wobei n_i nach dem Boltzmannschen Gesetz stark von der Temperatur abhängt:

$$n_i = bT^{3/2} \cdot \exp\,[-\Delta E_B/kT]\,. \tag{5.47}$$

Tabelle 5.2
Eigenschaften von Silicium und Germanium bei $T = 300$ K

Charakteristik	Einheit	Silicium	Germanium
Ordnungszahl		14	32
Atommasse		28,09	72,59
Dichte	g/cm³	2,33	5,33
Beweglichkeit der Elektronen (μ^-)	cm²/(V · s)	1350	3900
Beweglichkeit der Löcher (μ^+)	cm²/(V · s)	480	1900
Breite der verbotenen Zone (ΔE_B)	eV	1,12	0,62
Energieverlust pro Elektron-Loch-Paar	eV	3,75	2,94
spezifischer Widerstand (ϱ)	Ω · cm	$2{,}4 \cdot 10^5$	65
Potentialdifferenz am p-n-Übergang (U_{pn})	V	0,7	0,3

Wegen der geringeren Breite ΔE_B bei Germanium lassen sich ausreichend geringe Ladungsträgerkonzentrationen n_i und damit ausreichend kleine Dunkelströme $I_d = 10^{-8}$ bis 10^{-10} A im Halbleitermaterial nur bei starker Abkühlung auf $T = 140 \cdots 160$ K erreichen. Demgegenüber können mit Silicium auch bei Zimmertemperaturen hohe ϱ_i-Werte erreicht werden.

Der Leitungstyp wird durch geringfügige Beimischungen bestimmt. Zusätze von Bor und Aluminium wirken als Akzeptoren, d. h. erzeugen p-Leitung. Zusätze von Phosphor oder Antimon wirken als Donatoren, d. h. erzeugen n-Leitung. Die Leitfähigkeit wird in diesen Fällen durch die Konzentration von Donatoren N_d bzw. Akzeptoren N_a bestimmt, so daß die entsprechenden spezifischen Widerstände ϱ_n bzw. ϱ_p aus

$$\begin{aligned} \varrho_n &= 1/e(n\mu^- + p\mu^+) \simeq (1/e)\,N_d\mu^- \\ \varrho_p &\simeq (1/e)\,N_a\mu^+ \end{aligned} \tag{5.48}$$

bestimmt werden können, wobei ϱ_n, $\varrho_p \ll \varrho_i$ gilt. Die Breite der an Ladungsträgern verarmten Übergangszone, die das eigentliche aktive Volumen des Detektors darstellt, läßt sich annähernd aus der Beziehung

$$d = 3{,}3 \cdot 10^{-5} \sqrt{\varrho_{n(\text{bzw. } p)} U_0} \tag{5.49}$$

ermitteln. Sie besagt, daß für Silicium bei $U_0 = 500$ V und $\varrho = 10^4\,\Omega \cdot$ cm die Schichtstärke $d = 0{,}07$ cm beträgt. Für Germanium ist sie viel geringer, auch hieraus folgt, daß Germanium als Detektormaterial nur bei starker Abkühlung geeignet ist. Aus (5.49) folgt weiterhin, daß auch nach Dotierung der HL-Materialien mit Donatoren oder Akzeptoren der spezifische Widerstand ϱ_p bzw. ϱ_n ausreichend hoch sein muß, was nur bei hochreinen Ausgangsmaterialien erreichbar ist.

Die Kapazität des HL-Detektors kann durch die Formel

$$C_d = 1{,}1 \cdot \varepsilon \cdot S/(4\pi d) \quad (C_d \text{ in pF}) \tag{5.50}$$

bestimmt werden, in der ε die Dielektrizitätskonstante und S die Detektorfläche bedeuten.

3. Die Forderung nach möglichst großer Stärke der aktiven Zone führte zur Anwendung sog. p-i-n-Übergänge (s. Abb. 5.10.). Zwischen hochdotierten n- und p-Bereichen, die nur geringe spezifische Widerstandswerte besitzen, wird ein breites schwachdotiertes Übergangsgebiet $\varrho_p \lesseqgtr \varrho_i$ gebracht. In diesem Gebiet herrscht eine hohe Feldstärke und erfolgt praktisch das gesamte Potentialgefälle.

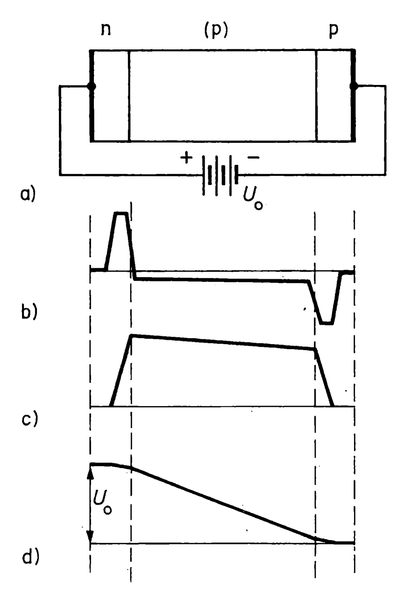


Abb. 5.10
Übergang vom Typ n-i-p zwischen dotierten n- und p-Halbleitern und eingefügtem schwachdotiertem (p)-Halbleiter
a) Prinzipschaltung, b) Raumladungsdichte, c) Elektrische Feldstärke, d) Potential im Halbleiter

5.4.2. Detektortypen und ihre Anwendung

1. Oberflächenbarrieren-Detektoren werden hauptsächlich aus n-Silicium-Scheiben hergestellt. Diese erhalten auf einer Seite einen Ni-Kontakt, die andere Seite wird mit Säure geätzt und danach an der Luft oxydiert. Die sich ausbildende dünne Oxidschicht stellt einen p-Halbleiter dar, die pn-Schichtstärke beträgt $d = (2 \cdots 5)\, 10^{-2}$ cm. Durch Aufdampfen einer sehr dünnen Goldschicht von $3 \cdot 10^{-6}$ cm wird der zweite Kontakt erzeugt. Infolge der geringen Stärke des p-n-Übergangs sind diese Detektoren vor allem zum Nachweis von α-Teilchen, Spaltbruchstücken und Protonen geringer Energie geeignet und besitzen eine relativ hohe Kapazität. Von Vorteil ist, daß sie ohne spezielle Kühlung arbeiten können und hohen Strahlenbelastungen ausgesetzt werden können.

2. Diffusions-Detektoren werden durch Diffusion von Donator- oder Akzeptoratomen in eine dünne Oberflächenschicht eines p- bzw. n-Halbleiters hergestellt. Häufig werden hierzu p-Silicium als Grundmaterial und Phosphor als Donator verwendet. Die erzeugten Schichtstärken des p-n-Übergangs liegen in der gleichen Größenordnung wie bei Oberflächenbarrieren-Detektoren, hieraus resultieren ähnliche Einsatzgebiete und Eigenschaften.

3. Siliciumdetektoren mit p-i-n-Übergang beruhen vor allem auf den Eigenschaften von Lithium-Beimischungen in Halbleitermaterialien. Lithium wirkt als Donator, besitzt sowohl in Si- wie auch in Ge-Kristallen eine sehr hohe Beweglichkeit μ_{Li} und zeichnet sich durch eine geringe Ionisationsenergie aus. Ausgangsmaterial ist p-Silicium, auf welches eine Lithiumschicht aufgedampft wird. Bei erhöhter Temperatur diffundieren die Lithiumatome etwa 0,1 mm tief in das Silicium, es bildet sich ein p-n-Übergang aus. Danach werden durch Anlegen eines entsprechenden elektrischen Feldes die positiven Li-Ionen in die Tiefe des p-Siliciums gedriftet, wo sie die Wirkung der vorhandenen Akzeptoren teilweise kompensieren und sich somit eine verarmte i-Schicht (mit sehr schwacher p-Leitfähigkeit) ausbildet.

Die Schichtstärke der i- bzw. (p)-Schicht läßt sich aus

$$d = \sqrt{2\mu_{Li} U t} \tag{5.51}$$

bestimmen, wobei U die anliegende Driftspannung, t die Driftzeit und μ_{Li} die Beweglichkeit der Li-Ionen bei der Drifttemperatur bedeuten. Es lassen sich Schichtstärken von $0{,}5 \cdots 1$ cm erreichen. Sie finden Anwendung zum Nachweis von Teilchen höherer Energie, vor allem auch von Elektronen. Ein weiterer Vorteil besteht darin, daß diese Detektoren nicht gekühlt zu werden brauchen. Dadurch liegt jedoch das Rauschen, ebenso wie bei allen bisher besprochenen Typen von Siliciumdetektoren, bei einem Energieäquivalent im Bereich $10 \cdots 100$ keV, was die erreichbare Energieauflösung begrenzt.

4. Germaniumdetektoren vom p-i-n-Typ beruhen ebenfalls auf der Einführung von Lithium in das HL-Material. Ge(Li)-Detektoren können in sog. planarer oder koaxialer Form (siehe Abb. 5.11) hergestellt werden, wobei aktive Volumina bis zu 15 cm³ bzw. 100 cm³ erreicht werden können. Ge(Li)-Detektoren müssen wegen der o. g. Eigenschaften des Germaniums, aber auch, um das Rückdriften des Lithiums aus dem Halbleitermaterial zu verhindern, bei tiefen Temperaturen betrieben und aufbewahrt werden. Dadurch bleibt das Rauschen sehr niedrig, und es werden extrem hohe Werte der relativen Energieauflösung $\frac{\Delta E}{E} \lessapprox 0{,}1\,\%$ für $E \simeq 1$ MeV erreicht.

Ihr Einsatz erfolgt vor allem zur γ-Spektrometrie, wobei die höhere Ordnungszahl des Germaniums gegenüber dem Silicium einen weiteren wesentlichen Vorteil hinsichtlich erhöhter Ausbeute des Photoeffektes (siehe (4.49)) bringt. Von Nachteil ist die erhöhte Anfälligkeit dieser Detektoren gegenüber Strahlenschäden. In Abb. 5.12 ist ein γ-Spektrum einer ^{60}Co-Quelle dargestellt, das mit einem 10-cm³-Ge(Li)-Detektor gemessen wurde. Die ausgezeichnete Trennung

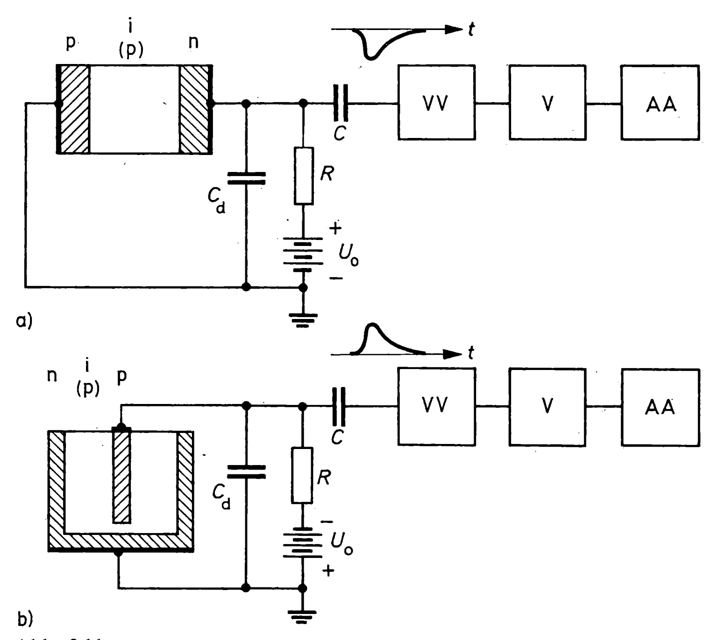


Abb. 5.11
Schaltungsvarianten für Ge(Li)-Detektoren
a) Planardetektor, b) Koaxialdetektor; VV Vorverstärker, V Linearverstärker, AA Vielkanalamplitudenanalysator

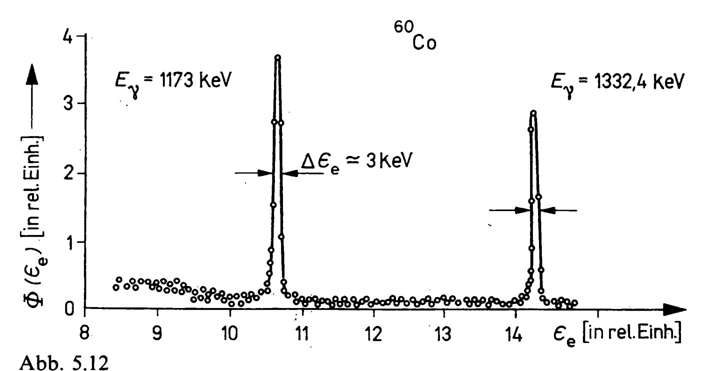


Abb. 5.12
Typisches Gammaspektrum einer ^{60}Co-Quelle, aufgenommen mit einem Ge(Li)-Spektrometer mit einer relativen Energieauflösung von $\frac{\Delta E}{E} = 0{,}25\,\%$

der beiden γ-Linien der Co-Quelle kennzeichnet die hervorragenden Einsatzmöglichkeiten von Ge(Li)-Detektoren in der γ-Spektrometrie.

5. Der mit Einführung von Si- und Ge-Detektoren in die Teilchen- und Quantenspektroskopie in den 60-er Jahren erreichte enorme Fortschritt bezieht sich in erster Linie auf die sehr geringen Werte der relativen Energieauflösung $\Delta E/E$. Typische $\Delta E/E$-Werte guter Detektoren der unterschiedlichen Art liegen bei:

— Ge(Li), stickstoffgekühlt, 662 keV γ-Strahlung — 0,25%,
— Si(Li), stickstoffgekühlt, 5,9 keV γ-Strahlung — 3%,
— Si (reinst), Raumtemperatur, 6 MeV α-Strahlung — 0,25%,
— Ge (reinst), stickstoffgekühlt, 122 keV γ-Strahlung — 0,4%.

Ihre prinzipiellen Nachteile liegen in der Begrenztheit der Volumina (zwischen 5 cm^3 und 200 cm^3 Maximalvolumen) sowie der Notwendigkeit der Stickstoffkühlung bei den meisten Typen.

6. Um die genannten Nachteile zu umgehen, werden neue Halbleitermaterialien gesucht, die bei Raumtemperaturen als Teilchendetektoren geeignet und in großen Kristallen züchtbar sind. Einige solcher Verbindungshalbleiter seien im folgenden kurz genannt:

— HgJ_2: Große Kristalle sind schwer zu züchten, das Material ist relativ teuer. Die besten Werte der relativen Energieauflösung liegen bei Raumtemperatur für 122 keV γ-Strahlung bisher bei 2,5%.
— CdTe(S): Bisher sind mit großen Kristallen keine guten Parameter erreichbar. Der analoge Wert der relativen Energieauflösung für 122 keV γ-Strahlung und Raumtemperatur liegt bei 3,5%.
— GaAs: Bisher sind mit diesem Material, das bereits seit 1960 als Detektormaterial untersucht wird, nur sehr kleine Detektoren herstellbar.

Zusammenfassend kann festgestellt werden, daß trotz intensiver Suche noch keine Materialien gefunden wurden, welche die stickstoffgekühlten Ge- oder Si-Detektoren in breitem Maße ersetzen könnten.

5.5. Szintillationsdetektoren

5.5.1. Wirkungsprinzip

1. Der Szintillationsdetektor besteht aus zwei Hauptbestandteilen, dem Szintillator und dem Sekundärelektronenvervielfacher, kurz SEV genannt (siehe Abb. 5.13).

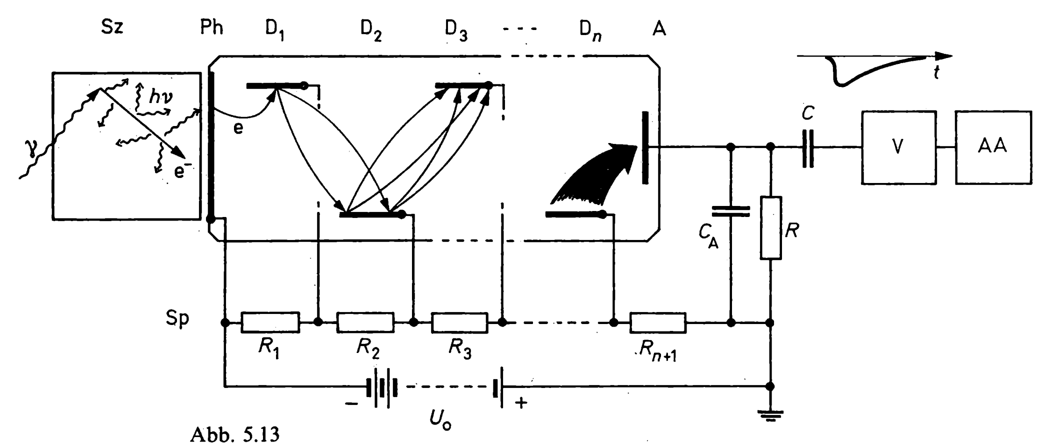


Abb. 5.13
Wirkungsweise und Prinzipschaltung eines Szintillationsdetektors
Sz Szintillator, Ph Photokatode, $D_1 \cdots D_n$ Dynoden, A Anode, Sp Spannungsteiler, C_A Anodenkapazität

Szintillatoren sind Substanzen, die unter Einwirkung schneller geladener Teilchen selbst Photonen im sichtbaren oder UV-Spektralbereich aussenden. Auch Gammaquanten oder Neutronen können Szintillationen hervorrufen, jedoch nur über den Zwischenschritt der Erzeugung geladener Teilchen wie Elektronen, Positronen, Rückstoßprotonen, Spaltbruchstücke usw. in den entsprechenden elektromagnetischen oder Kernwechselwirkungen (s. Abschn. 4.3. und 4.4.). Neben der Forderung nach hoher Emissionswahrscheinlichkeit für Photonen bei Anregung der Szintillationssubstanz infolge Ionisationsbremsung, muß auch die Durchsichtigkeit des Szintillators für die emittierten Photonen gewährleistet sein, damit auch bei größeren Szintillatorstärken das optische Signal für den Nachweis benutzt werden kann. Letztere Forderung bedeutet, daß Emissions- und Absorptionsspektren gegeneinander verschoben sein müssen.

Die Aufgabe des SEV besteht darin, das schwache optische Signal des Szintillators in einen registrierbaren elektrischen Impuls umzuwandeln. An der Photokatode des SEV auftreffende Lichtquanten lösen über den äußeren Photoeffekt Elektronen geringer Energie aus. Diese werden durch ein geeignetes elektrisches Feld abgesaugt und in Richtung auf die erste sog. Dynode beschleunigt. Beim Auftreffen auf die Dynodenoberfläche löst jedes einfallende Elektron im Mittel zwei bis drei Sekundärelektronen aus, die wiederum beschleunigt werden und auf die zweite Dynode aufprallen usw. Im Ergebnis einer solchen Verstärkungskette von 10 bis 14 Dynoden entsteht ein 10^5- bis 10^9fach verstärkter Elektronenstrom, der auf der Anode aufgefangen wird und hier einen negativen elektrischen Impuls erzeugt, der durch die entsprechende Elektronik registriert werden kann.

2. Betrachten wir den Nachweisprozeß eines geladenen Teilchens der Energie E_k im Szintillationsdetektor etwas genauer: unter der Lichtausbeute N_0 verstehen wir die Zahl der Photonen, die entlang der Teilchenbahn im Szintillator infolge der Ionisationsbremsung erzeugt werden. Sie wird bestimmt durch die Beziehung

$$N_0 = C_{EF} \cdot \frac{E_k}{h\nu} \tag{5.52}$$

mit der mittleren Energie $h\nu$ der Photonen ($h\nu \approx 3$ eV) und dem sog. Konversionskoeffizienten C_{EF} des Szintillators.

Die zeitliche Verteilung der Photonenemission wird durch zwei Prozesse bestimmt: Die zur Teilchenabbremsung und Ausbildung angeregter Zustände erforderliche Zeit bestimmt die ‚Anstiegsgeschwindigkeit' der Photonenemission. Diese Prozesse verlaufen sehr schnell, d. h. im Zeitbereich 10^{-10} bis 10^{-9} s. Die Lebensdauer τ der angeregten Zustände liegt meist im Bereich 10^{-5} bis 10^{-9} s, d. h., sie ist wesentlich größer als die ‚Anstiegszeit' der Emission. Die Emissionsrate $N(t)$ kann daher als einfache Exponentialfunktion in guter Näherung beschrieben werden,

$$\dot{N}(t) = \frac{N_0}{\tau} \exp(-t/\tau), \tag{5.53}$$

wobei allerdings angenommen wird, daß der Abklingprozeß nur durch eine Zeitkonstante τ beschrieben werden kann, was nicht für alle Szintillatoren zutrifft.

Infolge der Absorption von Photonen im Szintillator, unvollständiger Reflexion des Lichtes an den Wänden, Absorption im sog. Lichtleiter zwischen Szintillator und Photokatode sowie anderer Verluste gelangen nur $g \cdot N_0$ (mit $g < 1$) Photonen zur Photokatode. Diese lösen $C_{FE} \cdot g \cdot N_0$ Photoelektronen aus, wobei der Konversionskoeffizient für diesen Prozeß $C_{FE} \approx 0{,}05 \cdots 0{,}1$ sehr klein ist. Die Anzahl der entstandenen Photoelektronen ist somit um Größenordnungen geringer als das Verhältnis $\frac{E_k}{h\nu}$, sie bestimmt letztlich die Statistik des Nachweisprozesses im Szintillationsdetektor und damit die erreichbare Energieauflösung.

Bezeichnen wir mit M den Vervielfachungskoeffizienten des SEV, so beträgt die Zahl der Elektronen an der Anode des SEV $M \cdot C_{FE} \cdot g \cdot N_0$. Die zeitliche Verteilung des Anodenimpulses entspricht etwa dem Exponentialgesetz (5.53), da die zeitlichen Fluktuationen im Vervielfachungsprozeß in der Größenordnung von 10^{-9} s liegen und somit klein im Vergleich zu τ sind.

Die Impulsamplitude an der parasitären Anodenkapazität C bei vollständiger Ladungssammlung (d. h. im Falle $RC_A \gg \tau$) beträgt folglich

$$U_a = \frac{Q}{C_A} = \frac{-M \cdot C_{FE} \cdot gN_0 \cdot e}{C_A} = \frac{-E_k C_{FE} \cdot C_{EF} \cdot g \cdot M \cdot e}{h\nu \cdot C_A}. \tag{5.54}$$

Die Impulshöhe ist somit proportional der Teilchenenergie — der Szintillationsdetektor ist zur Spektrometrie geladener Teilchen geeignet.

3. Betrachten wir folgendes Zahlbeispiel: Gegeben sind $E_k = 100$ keV; $h\nu = 3$ eV; $C_{FE} = C_{EF} = 0{,}1$; $g = 0{,}2$; $C_A = 20$ pF; $M = 10^6$. Es entstehen $N_0 = 0{,}1 \cdot \frac{10^5}{3} = 3{,}33 \cdot 10^3$ Photonen, davon gelangen 666 an die Photokatode und lösen dort 67 Photoelektronen aus. An der Anode werden $6{,}7 \cdot 10^7$ Elektronen gesammelt, das entspricht einer Impulsamplitude von $\Delta U_a \approx 0{,}5$ V. Der relative Fehler der Impulsamplitude kann auf der Grundlage von (5.19) abgeschätzt werden. Setzt man hier „das schwächste Glied“ in der Kette statistischer Prozesse, d. h. die Zahl der Photoelektronen, ein, so ergibt sich im vorliegenden Fall ein Fehler von 12,5% allein aus der Statistik.

Tatsächlich werden mit Szintillationsdetektoren typische Werte der relativen Energieauflösung $\frac{\Delta E_k}{E_k} = 8 \cdots 15\%$ erreicht, also eine geringere Auflösung als mit Halbleiterdetektoren. Ein wesentlicher Vorteil der Szintillationsdetektoren besteht jedoch in der Größe des empfindlichen Volumens und damit der hohen Nachweiseffektivität.

4. Als Szintillatoren sind zahlreiche feste, flüssige und gasförmige, anorganische oder organische Substanzen geeignet.

Die am häufigsten verwendeten anorganischen Substanzen sind die Monokristalle NaI(Tl), CsI(Tl) und LiI(Eu) sowie polykristallines ZnS(Ag), wobei die in Klammern angegebenen Elemente als sog. Aktivatoren in sehr geringen Mengen den entsprechenden Kristallen zugesetzt werden. Bei Teilchendurchgang werden Elektron-Loch-Paare im Kristall gebildet. Ihre Abregung erfolgt nur mit geringer Wahrscheinlichkeit über die Rekombination — in diesem Falle würden Absorptions- und Emissionsspektren übereinstimmen, und die Szintillationsquanten würden bereits in geringen Schichtdicken absorbiert. Vielmehr werden die Anregungszustände in den sog. Lumineszenzzentren eingefangen, welche durch die im Kristallgitter eingebauten Aktivator-Atome gebildet werden. Letztere entsenden die Szintillationsquanten im gewünschten Wellenlängenbereich.

Unter den organischen Szintillatoren gibt es sowohl Monokristalle (Stilben, Anthrazen u. a.) als auch Lösungen von bestimmten organischen Verbindungen (p-Terphenyl, Tetraphenylbutadien, Diphenyloxazol u. a.) in Lösungsmitteln oder amorphen Polymeren (Polystyren, Polyvinyltoluen u. a.). Der Lumineszenzmechanismus beruht auf der Anregung molekularer Schwingungszustände. Diese haben die Eigenschaft, daß Absorptions- und Emissionsspektren unterschiedlich sind, so daß die erforderliche Durchsichtigkeit vorhanden ist. Durch Zusätze sog. Wellenlängenshifter wird meist eine bessere Anpassung des Emissionsspektrums an das Absorptionsspektrum der Photokatode erreicht.

Organische Szintillatoren zeichnen sich durch eine wesentlich kürzere Abklingzeit τ aus, besitzen daher hervorragende Zeiteigenschaften. Einige Substanzen haben darüber hinaus die

Eigenschaft, daß die Abklingkurve durch eine schnelle und eine langsame Zeitkonstante gekennzeichnet ist, wobei der relative Anteil beider Komponenten von der Größe des spezifischen Energieverlustes dE/dx in der Teilchenspur abhängt. Damit wird es möglich, an Hand der Analyse der Form des Lichtimpulses zwischen einem Elektron und Proton (oder schwereren Teilchen) zu unterscheiden, selbst wenn beide die gleiche Energie besitzen und im Szintillator vollständig abgebremst werden. Tabelle 5.3 enthält eine Zusammenstellung wichtiger Eigenschaften einiger anorganischer und organischer Szintillatoren.

Tabelle 5.3
Eigenschaften gebräuchlicher Szintillatoren

Material	$\tau/10^{-9}$ s	$C_{EF}/\%$
NaI(Tl)	250	6
CsI(Tl)	700	1,8
LiI(Eu)	1200	4,2
ZnS(Ag)	100 ··· 1000	6 ··· 12
Anthracen ($C_{12}H_{10}$)	30 und 400	4
Stilben ($C_{14}H_{12}$)	6 und 400	1,6 ··· 2,8
p-Terphenyl in Xylen	2	2
Diphenyloxazol in Toluen	3	1,2
Tetraphenylbutadien in Polystyren	5	1,6
p-Terphenyl in Polyvinyltoluen	3	2

5. Die in Tabelle 5.3. aufgeführten Szintillatortypen können als „klassisch" bezeichnet werden, da ihre Entwicklung bereits in den 50er und 60er Jahren erfolgte. Ihr prinzipieller Nachteil gegenüber den HL-Detektoren besteht in der begrenzten relativen Energieauflösung, die typische Bestwerte um 8 % für 622 keV γ-Strahlung nicht unterschreitet. Daneben sind die kristallinen Materialien teilweise spröde und hygroskopisch. Der wesentliche Vorteil von Szintillationsdetektoren besteht jedoch in ihrer maximal erreichbaren Größe: Bis auf ZnS(Ag) lassen sich von deren kristallförmigen Szintillatoren Volumina von mehreren Litern züchten. Plast- und Flüssigkeitsszintillatoren sind ohnehin unbegrenzt im Volumen. Auch hinsichtlich ihrer Dichte (3,67 [g cm^{-3}] für NaJ(Tl) und 4,51 [g cm^{-3}] für CdJ(Tl)) sichern die anorganischen Szintillatoren eine hohe Nachweiseffektivität gegenüber γ-Strahlung (Fotoeffekt).

Die Suche nach neuen Szintillatoren in den letzten Jahren hat eine Reihe von Materialien mit teilweise sogar noch besseren Eigenschaften ergeben. Genannt seien:

$Bi_4Ge_3O_{12}$ (genannt „BGO"): Infolge der hohen Dichte des Materials von 7,13 [g cm^{-3}] besitzt das Material eine wesentlich höhere γ-Effektivität als NaJ(Tl) und ist daher als Material für kompakte Detektoren und Anti-Compton-Abschirmungen geeignet. Es besitzt eine relativ gute Energie- und Zeitauflösung.

BaF_2: Dieses Material ist infolge einer Lichtkomponente mit extrem kurzer Anstiegs- und Abklingzeit (0,12 ns bzw. 0,8 ns) als schnellster Szintillator für γ-Strahlung hervorragend zur präzisen Zeitnahme geeignet. Mit einer Dichte von 4,88 [g cm^{-3}] ist die Nachweiseffektivität ebenfalls hoch. Es ist Pulsformdiskriminierung zwischen γ- und Teilchenstrahlung möglich.

Beide Materialien erobern sich, trotz schwieriger Herstellung, in den letzten Jahren immer mehr Anwendungsgebiete.

5.5.2. Typische Anwendungsbeispiele

1. Weite Verbreitung für Nachweis und Spektrometrie von γ-Quanten hat der NaI(Tl)-Szintillationsdetektor gefunden. Nachzuweisende geladene Teilchen entstehen hierbei über die in 4.3. genannten Prozesse. Wegen der relativ hohen Kernladungszahl des Iod ($Z = 53$) ist der Photoeffekt in diesem Kristall sehr wahrscheinlich (s. (4.49)). Ein typisches Meßspektrum dieses Detektors zeigte bereits Abb. 5.1 a. Neben dem Photopeak tritt deutlich das kontinuierliche Elektronenspektrum infolge des Compton-Effektes (s. (4.54)) auf. Weiterhin entsteht der sog. Rückstreupeak durch Photoabsorption der rückwärts gestreuten, monoenergetischen Quanten (s. (4.53)).

Mit einem entsprechenden Konvertermaterial, beispielsweise dünnem Cd-Blech, umgeben, ist dieser Detektor auch zum Nachweis langsamer Neutronen geeignet.

2. Stilbenkristalle, aber auch kleine flüssige und Plastszintillatoren (bis ca. 1000 cm^3) werden zum Nachweis und zur Spektrometrie schneller Neutronen über die Rückstoßprotonen (s. Abschn. 4.4.3.) eingesetzt. Theoretisch stellt die Ansprechfunktion für eine konstante Neutronenlinie E_n eine Rechteckfunktion (s. (4.87)) dar. Die experimentelle Ansprechfunktion wurde bereits in Abb. 5.1 b gezeigt, sie unterscheidet sich im Bereich kleiner ε_p infolge von Randeffekten wesentlich von der theoretischen. Dennoch kann dieser Detektor zur groben Spektrometrie eingesetzt werden, indem das Neutronenspektrum aus der Ableitung des Rückstoßprotonenspektrums $\frac{d\Phi}{d\varepsilon_p}$, genauer des gemessenen Detektorimpulshöhenspektrums, reproduziert wird.

Häufiger ist jedoch sein Einsatz im Verband von Flugzeitspektrometern (s. Abschn. 5.8.2.) schneller Neutronen, wobei die hohe Zeitschärfe dieser Detektoren genutzt wird. Ungenauigkeiten der Zeitmessung mit diesem Detektor können $< 10^{-9}$ s gehalten werden. Ein weiterer Vorteil besteht weiterhin in der möglichen Unterscheidung zwischen Neutronen und Gammaquanten auf Grundlage der o. g. Unterschiede der Impulsform bei Stilben, Anthracen und speziellen Szintillationsflüssigkeiten.

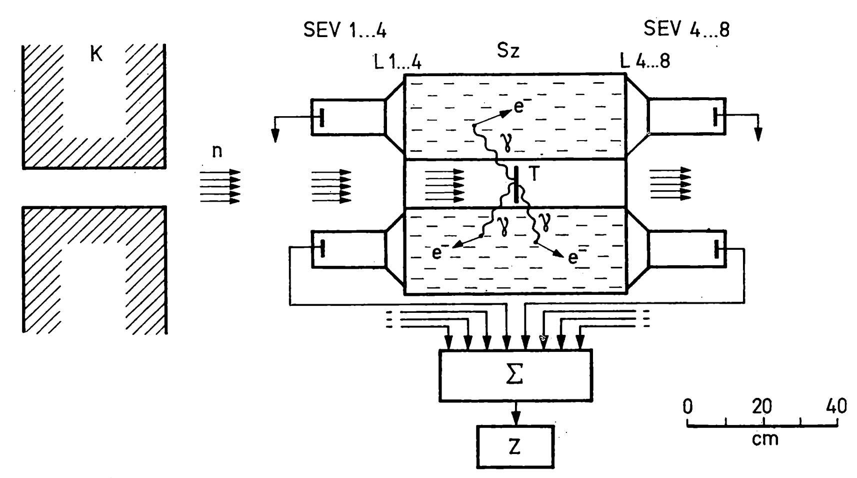


Abb. 5.14
Großvolumiger, hohlzylinderförmiger Flüssigkeitsszintillator mit acht SEV für den Nachweis von Einfang-Quanten in 4π-Geometrie
K Kollimator, L Lichtleiter, Sz Szintillator, T Target, Σ elektronischer Summator, Z Zählgerät

3. Flüssige Szintillatoren werden für spezielle Zwecke auch in sehr großen Volumina (bis zu einigen hundert Litern!) eingesetzt, wobei in der Regel das optische Signal von mehreren SEV gleichzeitig registriert wird. Solche Detektoren besitzen eine hohe Nachweiseffektivität selbst für schwach ionisierende hochenergetische Teilchen und Gammaquanten. Durch „Beladung“ der Szintillationsflüssigkeit mit Li-, B- oder Cd-haltigen Verbindungen kann auch für langsame Neutronen hohe Nachweiseffektivität erreicht werden.

In Abb. 5.14 ist als Beispiel ein hohlzylinderförmiger Flüssigkeitsdetektor abgebildet, der in „4π-Geometrie“ alle Einfangquanten, die im Targetmaterial entstehen, nachweist.

5.6. Spurdetektoren

5.6.1. Übersicht

Spurdetektoren sind Nachweisgeräte, in denen die Wechselwirkung eines geladenen Teilchens mit Substanzen zur Sichtbarmachung und Registrierung der Teilchenbahn genutzt wird. Da die Ionisationsbremsung an sich keine sichtbare Spur erzeugt (selbst in guten Szintillatoren ist die leuchtende Spur für eine optische Registrierung zu schwach), müssen in jedem Falle zusätzliche „vergrößernde“ bzw. „verstärkende“ physikalische Prozesse herangezogen werden. Dies kann z. B. die Kondensation von Flüssigkeitströpfchen aus übersättigtem Dampf oder die Bildung von Gasbläschen in einer überhitzten Flüssigkeit an den Ionen in der Teilchenspur sein.

Angestrebt wird die Messung der räumlichen Lage, Länge und Stärke (bzw. Dichte der sichtbaren Objekte) der Spur, ihre Krümmung in einem äußeren Magnetfeld sowie die Dichte der δ-Elektronen längs der Spur. Das Ziel besteht darin, durch Vergleich der Meßwerte mit den theoretischen Beziehungen (s. Abschn. 4.2.2. und 4.2.3.) Informationen über Entstehungs- bzw. Eintrittsort, Energie, Masse, Ladung und Impuls des Mikroteilchens abzuleiten. Nicht jeder Spurdetektor ist jedoch geeignet, alle genannten Informationen überhaupt oder mit geringem Fehler zu liefern, woraus sich seine Einsatzmöglichkeiten ableiten. Weiterhin werden die

Tabelle 5.4
Vergleich einiger Charakteristika von Spurdetektoren

Typ	Steuerbarkeit	Dauer der Empfindlichkeit in s	Totzeit in s	räumliche Auflösung in cm
Kernemulsion	—	(∞)	0	10^{-4}
Nebelkammer	+	10^{-2}	30	10^{-2}
Diffusionskammer	—	(∞)	(1)	10^{-2}
Blasenkammer	—	10^{-2}	1	10^{-2}
Funkenkammer	+	10^{-6}	10^{-2}	$5 \cdot 10^{-2}$
Streamerkammer	+	$5 \cdot 10^{-7}$	10^{-3}	$5 \cdot 10^{-2}$

Einsatzmöglichkeiten von Spurdetektoren wesentlich durch ihr Zeitverhalten beeinflußt, d. h. davon, ob sie steuerbar sind, wie groß ihre Totzeit und die Dauer des empflindlichen Zeitbereiches sind.

Im Vergleich zu den früher besprochenen Detektoren besteht ein sehr wesentlicher Vorteil von Spurdetektoren darin, daß einige es gestatten, Kern- oder Elementarteilchenumwandlungen im Detektorbereich vollständig zu erfassen, indem die Spuren sowohl des Geschoßteilchens wie auch aller geladenen Reaktionsprodukte gleichzeitig registriert werden. Jedes einzelne Reaktionsereignis kann so kinematisch vollständig ausgewertet und analysiert werden.

Die Tabelle 5.4 enthält eine Zusammenstellung wichtiger Charakteristika von Spurdetektoren.

5.6.2. Kernemulsionen

1. Bereits die Entdeckung der Radioaktivität durch BECQUERELL im Jahre 1896 beruhte auf der Belichtung von Fotoschichten durch ionisierende Strahlung. Kernemulsionen sind fotografische Schichten mit besonderen Eigenschaften. Entlang der Teilchenspur werden infolge der Ionisation mikroskopisch kleine Bereiche der Silberbromid-Körner zu metallischem Silber (sog. Entwicklungszentren) reduziert. Es entsteht, wie bei der Belichtung eines üblichen Films, ein latentes Bild. Beim Entwickeln der bestrahlten Emulsion wird dieses latente Bild durch weitere Reduzierung des AgBr in ein bleibendes Bild der Teilchenspur umgewandelt.

2. Besonderheiten von Kernemulsionen im Vergleich zu üblichen Filmen bestehen hauptsächlich in einer starken Erhöhung des AgBr-Gehalts, der Verwendung von Schichtstärken bis über 1000 µm (im Vergleich zu 10 µm) sowie der Verwendung von Korngrößen im Bereich von nur 0,05 ... 0,2 µm (im Vergleich zu 0,5 ... 3 µm). Dadurch werden der spezifische Energieverlust $-\left(\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}x}\right)$ erhöht, eine vollständige Abbremsung der Teilchen in der Emulsion angestrebt bzw. die räumliche Auflösung erhöht. Durch Übereinanderstapeln vieler Emulsionsschichten können große empfindliche Volumina geschaffen werden, was für die Registrierung hochenergetischer Teilchen besonders wichtig ist.

3. Die Ausmessung der Spur erfolgt mittels Mikroskop und ist daher sehr zeitaufwendig und mühsam. Moderne Auswerteanlagen sind jedoch rechnergekoppelt und sichern eine teilweise automatisierte Spurauswertung, so daß dieser Nachteil von Kernemulsionen teilweise kompensiert wird. Gemessen werden:

— die Reichweite R, falls die Spur in der Emulsion endet (vgl. Formeln (4.9) bis (4.11)),
— die Dichte der entwickelten Silberkörner, welche annähernd proportional dem spezifischen Energieverlust $-\left(\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}x}\right)$ ist (vgl. Formeln (4.5) bis (4.7)),
— die Anzahl von δ-Elektronen pro Wegeinheit (vgl. (4.17)),
— der mittlere Ablenkwinkel $\langle\alpha\rangle$ infolge vielfacher Streuung des Mikroteilchens auf der Wegstrecke l an den Coulomb-Feldern der Emulsionsatome. Der Winkel $\langle\alpha\rangle$ hängt mit der Teilchengeschwindigkeit v, dem Impuls p und der Ladungszahl z nach

$$\langle\alpha\rangle = b \cdot z\sqrt{l}/p \cdot v$$

zusammen. Die Größe b ist eine Materialkonstante der Emulsion.

Ein prinzipieller Nachteil von Kernemulsionen ist der völlige Verlust der Zeitinformation über das registrierte Ereignis.

4. Mit Kernemulsionen sind wichtige Entdeckungen gemacht worden, vor allem bei der Untersuchung kosmischer Strahlung. So konnte POWELL im Jahre 1947 durch Nachweis von π^+-μ^+-Zerfällen und π^--Einfang mit Kernzertrümmerung (s. Abb. 5.15) die π-Mesonen entdecken.

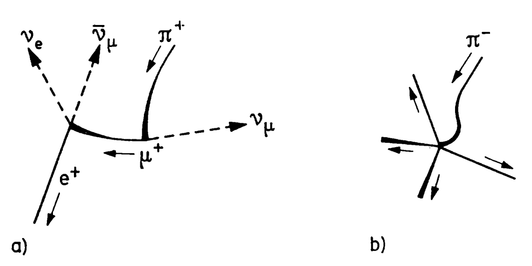


Abb. 5.15
Nachweis von π-Mesonen mittels Kernemulsion
a) π^+-μ^+-Zerfall (gestrichelte Linien: nichtsichtbare Spuren), b) π^--Einfang mit Kernzertrümmerung

Auch heute werden Kernemulsionen, insbesondere an Bord von Raumschiffen, zur Erforschung kosmischer Strahlung eingesetzt. In diesem Fall ist die Kompaktheit von Kernemulsionspaketen von besonderem Vorteil.

Zur Spektrometrie schneller Neutronen über die Ausmessung von Richtung und Reichweite der in der Emulsion entstehenden Rückstoßprotonen werden diese ebenfalls eingesetzt.

5.6.3. Nebelkammer

1. Der 1912 von WILSON zuerst erprobten Nebelkammer liegt das Prinzip der Kondensation von Flüssigkeitströpfchen aus übersättigtem Dampf an den Ionen einer Teilchenspur zugrunde. Der übersättigte Zustand wird durch adiabatische Expansion (Expansionskammer) eines gesättigten Gas-Dampf-Gemisches in einer geschlossenen Kammer erzeugt (s. Abb. 5.16a). Steigt das Volumen von V_1 auf V_2, so gilt für das Verhältnis der entsprechenden Dampfdrücke p_1 bzw. p_2 die Beziehung

$$\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^k \tag{5.55}$$

mit dem Verhältnis der Wärmekapazitäten $k = \frac{C_p}{C_V}$. Gleichzeitig kommt es zur adiabatischen Abkühlung des Gas-Dampf-Gemisches, entsprechend dem Poissonschen Gesetz:

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{k-1}. \tag{5.56}$$

Nach der Expansion ist p_2 größer als der Sättigungsdruck p_{2s}, d. h., es hat sich ein übersättigtes Gas-Dampf-Gemisch gebildet, charakterisiert durch die Größe $S = \frac{p_2}{p_{2s}}$, genannt Übersättigungsfaktor. Liegt der Übersättigungsfaktor im Bereich $4 < S < 8$, so können bereits einzelne Ionen als Kondensationskeime wirken, d. h. zur Bildung eines Flüssigkeitströpfchens führen. Beleuchtet man kurz nach der Expansion das Kammervolumen, so wird eine Tröpfchenkette längs der Teilchenbahn sichtbar, die stereoskopisch fotografiert werden kann.

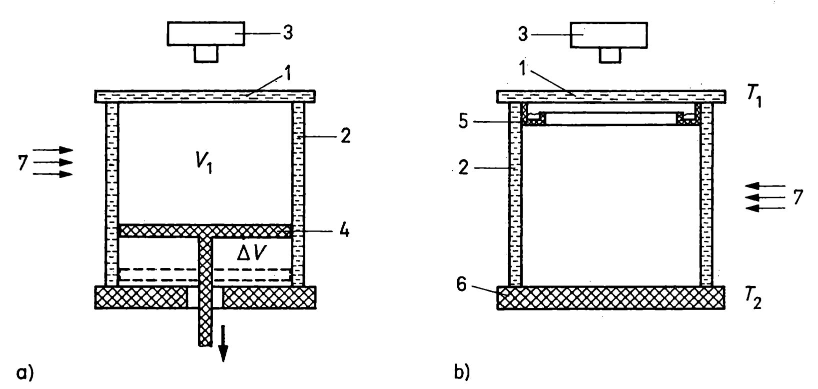


Abb. 5.16
Prinzipieller Aufbau von Spurdetektoren auf der Grundlage von übersättigtem Gas-Dampf-Gemisch
a) Expansionskammer, b) Diffusionskammer
1 Glasplatte, 2 Glaszylinder, 3 Fotoapparat, 4 beweglicher Kolben, 5 ringförmige, mit Alkohol gefüllte Rinne, 6 gekühlte Bodenplatte, 7 Lichteinfall

2. Der Mechanismus der Tröpfchenbildung läßt sich wie folgt verstehen: Der Sättigungsdampfdruck p_r über einer gekrümmten, elektrisch nicht geladenen Flüssigkeitsoberfläche ist größer als der über einer ebenen Oberfläche p_∞. Beide sind über die Beziehung

$$p_r = p_\infty \exp\,[2\sigma M/rRT\varrho] > p_\infty \tag{5.57}$$

miteinander verbunden, in der σ die Oberflächenspannung, M das Molekulargewicht der Flüssigkeit, r den Tröpfchenradius, R die Gaskonstante, T die Temperatur und ϱ die Flüssigkeitsdichte bezeichnen. Erst bei $Sp_\infty > p_r$ ist der Dampf über der gekrümmten Oberfläche übersättigt. Dies tritt offenbar für ein bestimmtes S erst ab einem minimalen Tröpfchenradius r_K ein. Ist $r < r_K$, so ist $p_r > Sp_\infty$, und das Tröpfchen verdampft. Ist $r > r_K$, so wächst das Tröpfchen durch Kondensation des Dampfes an. Da $r_K \simeq 10^{-7}$ cm beträgt, bedeutet dies, daß zur Tröpfchenbildung aus übersättigtem Dampf ungeladene Kondensationskeime in der Größe $> 10^{-6}$ cm vorhanden sein müssen — dies können z. B. Staubpartikel sein.

Völlig anders ist die Situation im Falle eines elektrisch einfach geladenen Tröpfchens, hier gilt anstelle (5.57) die Gleichung

$$p_r = p_\infty \exp\left[(2\sigma/r - (Ze)^2/8\pi r^4)\,\frac{M}{RT\varrho}\right], \tag{5.58}$$

so daß die Bedingung $Sp_\infty > p_r$ auch für kleinste Radien erfüllbar ist. Dies ist die Ursache für die Kondensation von Tröpfchen an Ionen. In Abb. 5.17 sind die Beziehungen (5.57) und (5.58) dargestellt. Im Bereich oberhalb der jeweiligen Kurve wächst, darunter verdampft das Flüssigkeitströpfchen. Liegt der Wert der Übersättigung im Bereich $S < \left(\frac{p_r}{p_\infty}\right)_{max} \simeq 4$, so bleibt der Tröpfchenradius um ein Ion im Bereich $r \leqq 5 \cdot 10^{-8}$ cm, es kann nicht fotografisch registriert werden. Ist dagegen $S > \left(\frac{p_r}{p_\infty}\right)_{max} \simeq 4$, so wächst das Tröpfchen bis zu makroskopischer Größe $r \geqq 10^{-3}$ cm heran und kann sichtbar gemacht, d. h. fotografiert werden.

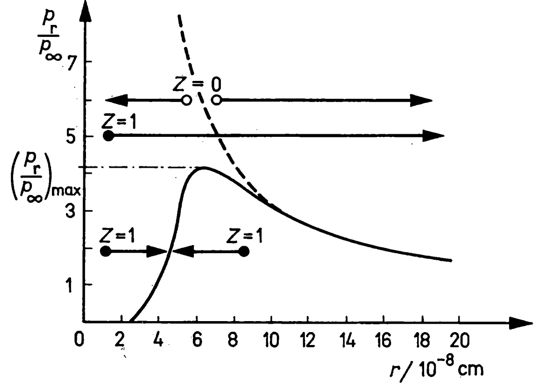


Abb. 5.17
Zusammenhang zwischen Dampfdruck p_r und Tröpfchenradius r entsprechend (5.57) und (5.58) für ungeladene bzw. einfach geladene Tröpfchen (gestrichelte bzw. ausgezogene Kurve); ● und ○ symbolisieren das Verhalten geladener bzw. ungeladener Tröpfchen unter verschiedenen Anfangsbedingungen.

3. Die Nebelkammer kann in einem äußeren Magnetfeld arbeiten, so daß neben der Reichweite und der Tröpfchendichte, die in Maß für $-\left(\frac{dE}{dx}\right)$ ist, auch der Krümmungsradius der Bahn bestimmt werden kann.

Mit Hilfe der Nebelkammer wurden viele grundlegende Entdeckungen gemacht. So die des Neutrons durch Chadwick im Jahre 1932 und des Positrons durch Anderson im gleichen Jahr. Abbildung 5.18 zeigt den Nachweis einer Paarbildungsreaktion $e^- + e^+$ an einer dünnen Bleifolie im Kammervolumen (nach Blackett und Occialini, 1933).

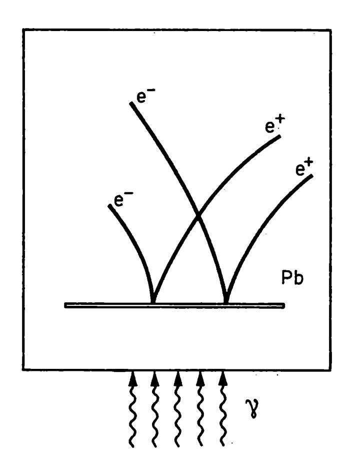


Abb. 5.18
Nebelkammerspuren von Elektron-Positron-Paaren, die durch γ-Quanten in einer Bleifolie erzeugt werden. Die Kammer befindet sich in einem senkrecht zur Bildebene ausgerichteten Magnetfeld.

5.6.4. Diffusionskammer

Eine Modifikation des gleichen Prinzips wird in der sog. Diffusionskammer zum Spurnachweis benutzt (s. Abb. 5.16b). Die Übersättigung entsteht hier durch Diffusion von Alkoholdämpfen, die kontinuierlich über einer Verdampfungsrinne mit der Temperatur T_1 entstehen, in Richtung auf eine gekühlte Metallplatte mit der Temperatur T_2. Auf der Diffusionsstrecke befindet sich ein $5 \cdots 10$ cm breites Gebiet mit dem für die Spurbildung geeigneten Übersättigungsbereich $4 < S < 8$.

5.6.5. Blasenkammer

1. Die Blasenkammer wurde im Jahre 1950 von GLASER entwickelt. In gewisser Analogie zum Prinzip der Nebelkammer läßt sich auch eine Flüssigkeit eine endliche Zeit im überhitzten Zustand halten, ehe sie zum Sieden kommt. Zur Bildung von Dampfbläschen müssen zunächst mikroskopisch kleine Hohlräume mit Radien $r \geqq r_K$, sog. Siedekeime, gebildet werden, wozu der Flüssigkeit in diesem Raumgebiet eine Energiemenge von einigen hundert eV zugeführt werden muß. Die Größe des kritischen Radius r_K läßt sich als die Beziehung

$$r_K = 2\sigma/(p_\infty - p) \tag{5.59}$$

ermitteln, wobei p_∞ den Dampfdruck der Flüssigkeit bei der Temperatur T und p den hydrostatischen Druck auf die Flüssigkeit bedeuten. Sie liegt meist um $r_K \simeq 10^{-6}$ cm.

Die erforderliche lokale Erhitzung wird durch die Abbremsung von δ-Elektronen, die entlang der Teilchenspur entstehen, erklärt. Diese Annahme wird dadurch bestätigt, daß die beobachtete Bläschendichte tatsächlich proportional zu $\left(\frac{z}{v}\right)^2$ ist, wie das durch (4.17) gefordert wird (im relativistischen Fall: proportional zu $\frac{z^2}{\beta^2}$).

Die Lebensdauer der Siedekeime liegt im Bereich $10^{-6} \cdots 10^{-7}$ s, zum Anwachsen der Tröpfchen auf die erforderliche Größe von $10^{-3} \cdots 10^{-2}$ cm ist etwa 1 ms erforderlich. Der überhitzte Zustand der Flüssigkeit läßt sich durch Druckänderung (Expansion) innerhalb 1 ms erreichen. Folglich muß die Druckänderung bereits mehr als 1 ms vor dem Teilchendurchgang eingeleitet werden, d. h., die Blasenkammer ist nicht steuerbar durch die nachzuweisenden Ereignisse. Der schematische Aufbau einer Blasenkammer ist auf Abb. 5.19 dargestellt.

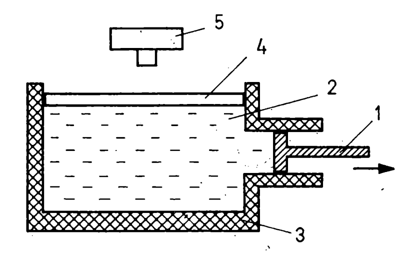


Abb. 5.19
Schematischer Aufbau einer Blasenkammer
1 Kolben, 2 Arbeitsflüssigkeit, 3 Metallgehäuse, 4 ebene Glasplatte, 5 Fotoapparat (stereo)

2. In der Praxis werden als Flüssigkeiten im Detektorvolumen verflüssigter Wasserstoff, Propan oder Xenon verwendet. Die Kammergröße erreicht Werte von einigen m^3. Die Kammern werden meist in Magnetfelder von $\geqq 10^6$ A/m gesetzt. Insgesamt stellen Blasenkammern dieser Größe außerordentlich aufwendige ingenieur-technische Anlagen dar. Der Aufwand wird gerechtfertigt durch die Einsatzmöglichkeiten in der Hochenergiephysik: Durch die relativ hohe Dichte der Arbeitsflüssigkeit können selbst Teilchen im GeV-Bereich vollständig abgebremst werden. Es können außerordentlich komplizierte Wechselwirkungsprozesse mit vielen Teilchenspuren registriert werden. Ein Beispiel dieser Art, der Nachweis für die Erzeugung eines $\bar{\Sigma}^-$-Hyperons, ist auf Abb. 5.20 dargestellt.

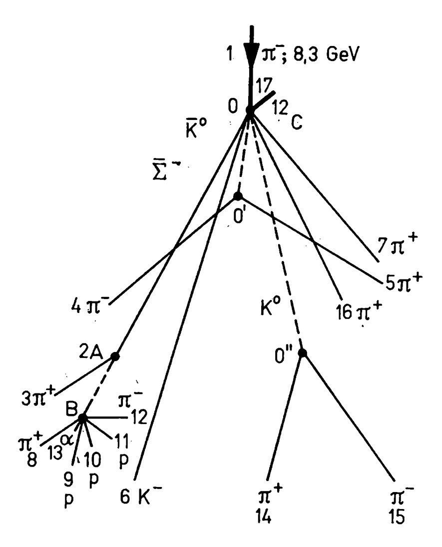


Abb. 5.20
Rekonstruktion einer Blasenkammeraufnahme, die zur Entdeckung des $\bar{\Sigma}^-$-Hyperons führte.

5.6.6. Funken- und Streamerkammern

1. Funkenkammern (s. Abb. 5.21 b) stellen im Prinzip Parallelschaltungen vieler Funkenzähler (s. Abschn. 5.3.5.) dar. Häufig wird jedoch keine Gleichspannung U_0 angelegt, sondern kurzzeitige Spannungsimpulse mit großer Amplitude, etwa in der Größenordnung $10^{-6} \cdots 10^{-7}$ s bzw. $10 \cdots 20$ kV, die durch äußere Detektoren ausgelöst werden. Dadurch ergibt sich die Möglichkeit einer gezielten Vorauswahl nachzuweisender Ereignisse. Durch stereoskopische Fotografie der Funkendurchbrüche kann die Teilchenbahn rekonstruiert werden. Moderne Funkenkammern bestehen aus kreuzweise angeordneten Paralleldrahtschichten, so daß die Koordinaten der Funkendurchbruchstelle auch über elektrische Signale an den entsprechenden Drähten ermittelt werden können und eine Sofortauswertung jedes Ereignisses auf einer EDV-Anlage möglich wird. Ähnliche Anordnungen finden auch für Proportionalkammern immer breitere Anwendung in der Hochenergiephysik.

Die Genauigkeit der Bahnbestimmung mit der Funkenkammer wird von der Zahl und dem Abstand der Ebenen bestimmt und ist im Vergleich zu anderen Verfahren relativ schlecht. Der spezifische Energieverlust kann nicht bestimmt werden.

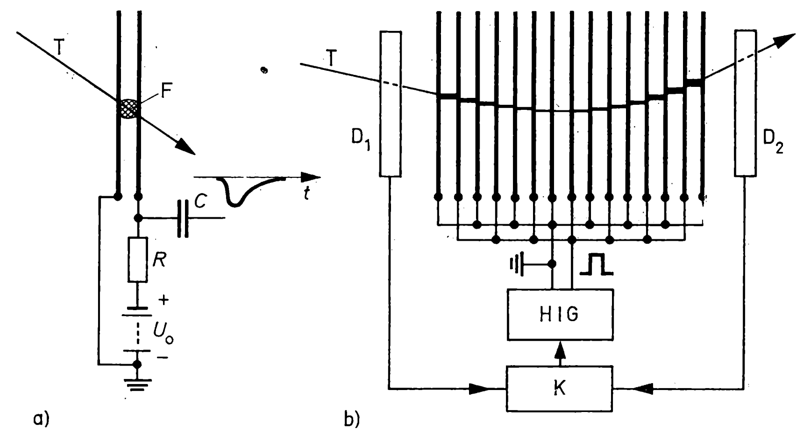


Abb. 5.21
Prinzipieller Aufbau von Funkenzähler und -kammer
a) Funkenzähler mit konstanter Arbeitsspannung U_0
b) gesteuerte Funkenkammer im Magnetfeld (senkrecht zur Bildebene)
T Teilchenbahn, F Funkendurchbruch, D_1 und D_2 Steuerdetektoren, K Koinzidenzschaltung, HIG Hochspannungs-Impulsgenerator

2. Die von Čikowani und Dolgoshjein entwickelte Streamerkammer (s. Abb. 5.22) stellt eine Weiterentwicklung der Funkenkammer dar. Bei ihr breitet sich die Gasentladung nicht in Feldrichtung, sondern längs der Teilchenspur aus. Das wird dadurch erreicht, daß durch Anlegen großer, aber extrem kurzer, Hochspannungsimpulse (etwa 10^{-8} s bzw. $10^5 \cdots 10^6$ V) der Gasentladungsprozeß in der sog. Streamerphase, vor Ausbildung eines Funkendurchbruchs, abgebrochen wird. Dabei bilden sich entlang der Spur ca. 1 mm lange, leuchtende „Schläuche", die sog. Streamer aus, welche zwar lichtschwächer als Funken aber noch fotografisch registrierbar sind. Vorteile der Streamerkammer sind: Höhere Genauigkeit der Bahnkoordinaten-

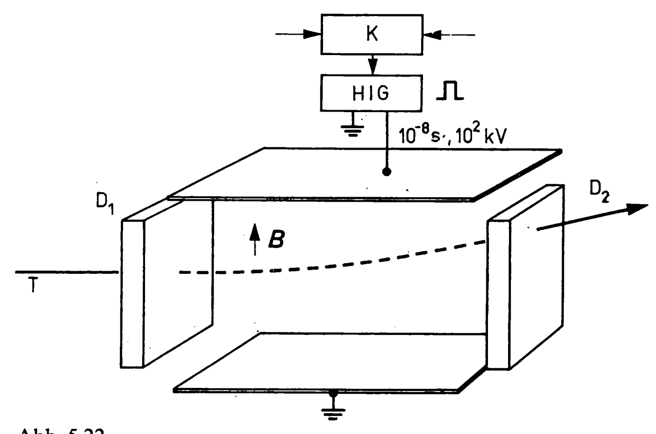


Abb. 5.22
Teilchenspur in einer gesteuerten Streamerkammer im Magnetfeld
B magnetische Induktion, weitere Bezeichnungen wie in Abb. 5.21

bestimmung; großer Elektrodenabstand; Proportionalität der Streamerdichte zum spezifischen Energieverlust. Impulserzeugung und Registrierung der Ereignisse sind dagegen schwieriger als bei der Funkenkammer.

5.7. Čerenkov-Detektoren

1. Der in Abschnitt 4.2.4. beschriebene Čerenkov-Effekt kann zum Teilchennachweis und auch zur Spektrometrie genutzt werden. Den Aufbau eines Čerenkov-Spektrometers zeigt Abb. 5.23. Die zu untersuchende Strahlung fällt von links auf den Radiator, in welchem die Čerenkov-Strahlung entsteht. Nach (4.34) ist die minimale Teilchengeschwindigkeit durch $\beta_{min} = \frac{1}{n}$ gegeben.

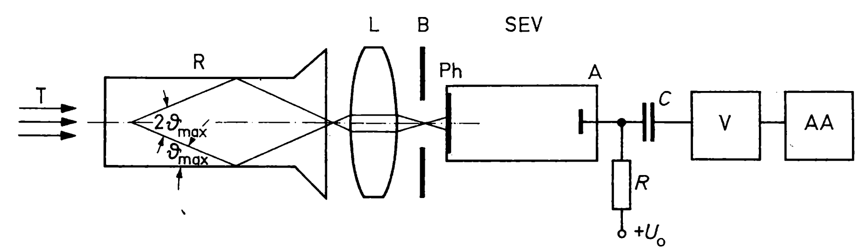


Abb. 5.23
Schematischer Aufbau eines Čerenkov-Spektrometers
T Teilchenstrahl, R Radiator, L Linsensystem, B Blende, SEV Sekundärelektronenvervielfacher, Ph Photokatode, A Anode, V Verstärker, AA Amplitudenanalysator

Infolge der Bedingung für die Totalreflexion des Lichts am Radiatorrand ergibt sich ein maximaler Abstrahlungswinkel ϑ_{max}, bis zu welchem das Čerenkov-Licht auf die Photokatode des SEV gesammelt wird, aus

$$\sin \vartheta_{max} = \frac{1}{n}. \tag{5.60}$$

Damit wird aus (5.60) und (4.33) auch eine maximale Teilchengeschwindigkeit β_{max} festgelegt, die nach

$$\beta_{max} = \frac{1}{\sqrt{n^2 - 1}} \tag{5.61}$$

ermittelt werden kann. Der Teilchennachweis erfolgt also nur im Geschwindigkeitsbereich

$$\Delta\beta = \beta_{max} - \beta_{min} = \frac{1}{\sqrt{n^2 - 1}} - \frac{1}{n}. \tag{5.62}$$

Durch Wahl unterschiedlicher Radiatormaterialien kann dieser Bereich verschoben werden. Weitere Informationen über den Teilchendurchgang erhält man aus der Intensität der Strahlung und dem Zeitpunkt ihrer Entstehung an Hand der SEV-Impulse.

2. Als bedeutsames Anwendungsbeispiel von Čerenkov-Spektrometern sei auf den Versuchsaufbau, der zur Entdeckung des Antiprotons führte, hingewiesen. Schwierigstes Problem war dabei die exakte Trennung zwischen π^--Mesonen und Antiprotonen. Dies erfolgte durch zwei-

fache Magnetanalyse sowie Flugzeitbestimmung (s. Abschn. 5.8.2.) zwischen den Detektoren D_1 und D_2 und durch zwei Čerenkov-Detektoren C_1 und C_2. Letztere gewährleisteten eine sichere Unterscheidung zwischen Antiprotonen mit $\beta(p) = 0{,}77$ und Mesonen mit $\beta(\pi^-) = 0{,}99$.

5.8. Weitere Spektrometrieverfahren

5.8.1. Ablenkspektrometer

1. Der Ablenkung geladener Teilchen in elektrischen oder magnetischen Feldern infolge der elektrischen und der Lorentz-Kraft (3.1.) kann zur Spektrometrie geladener Teilchen genutzt werden. Dies ist beispielsweise bereits mit dem homogenen elektrostatischen Feld des Plattenkondensators (s. Abb. 5.24) möglich, wenn ein dünner Teilchenstrahl mit der Energie E_k in x-Richtung, d. h. parallel zu den Platten, eingeschossen wird.

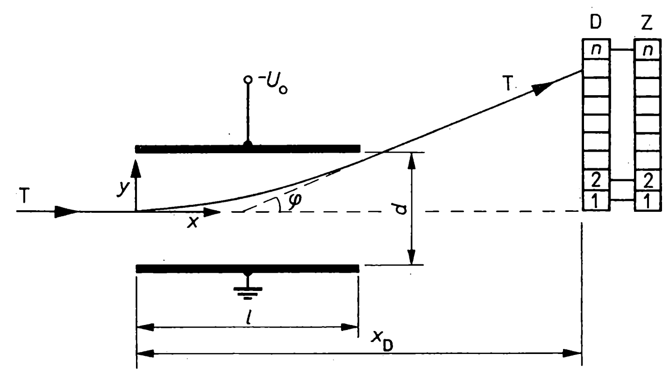


Abb. 5.24
Teilchenenergieanalyse im elektrostatischen Querfeld
T Teilchenbahn, D Detektorbatterie, Z Zählgeräte

Die Bewegungsgleichung in y-Richtung lautet

$$m_T \ddot{y} = ze \frac{U_0}{d}. \tag{5.63}$$

Da $\frac{dx}{dt} = v$ konstant ist, kann die Umformung

$$\ddot{y} = \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\right) = \frac{d}{dx}\frac{dx}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}\right) = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 \cdot \frac{d^2y}{dx^2} = v^2 \frac{d^2y}{dx^2}$$

vorgenommen werden, und aus (5.63) folgt

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{ze}{m_T v^2}\frac{U_0}{d} = \frac{ze}{2E_k}\cdot\frac{U_0}{d}. \tag{5.64}$$

Nach zweifacher Integration über x erhalten wir die Ablenkung in y-Richtung am Ort der Detektorbatterie $x = x_D$ zu

$$y(x_D) = \frac{ze}{2E_k} \cdot l \left(x_D - \frac{l}{2}\right) \frac{U_0}{d}, \tag{5.65}$$

d. h., die Ablenkung ist umgekehrt proportional zu E_k. Somit kann aus den Zählraten der Detektoren auf das Energiespektrum der Teilchen geschlossen werden.

Der Ablenkwinkel φ nach Durchlaufen des Plattenpaares ergibt sich aus

$$\tan \varphi = \frac{dy}{dx_D} = \frac{ze}{2E} l \frac{U_0}{d} \approx \varphi . \tag{5.66}$$

Eine zahlenmäßige Abschätzung des Ablenkwinkels zeigt die Hauptproblematik solcher Spektrometer — die Erzeugung sehr hoher elektrischer Feldstärken: Für $l = 10$ cm, $z = 1$, $E_k = 10^6$ eV ergibt sich bei $\frac{U_0}{d} = 10^5 \text{ V} \cdot \text{cm}^{-1}$ ein Ablenkwinkel von nur $\varphi \approx 2{,}86°$!

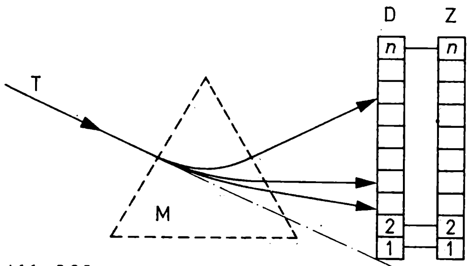


Abb. 5.25
Teilchenimpulsanalyse im magnetischen Querfeld
T Teilchenbahnen, M Magnetfeld (senkrecht zur Bildebene), D Detektorbatterie, Z Zählgeräte

2. Auch das magnetische Querfeld B ist, wie in Abb. 5.25 schematisch dargestellt, zur Spektrometrie geeignet. Aus der Bedingung der Gleichheit von Zentrifugal- und Lorentz-Kraft ergibt sich für den Krümmungsradius ϱ der Teilchenbahn

$$\varrho = \frac{p}{z} \cdot \frac{1}{eB} . \tag{5.67}$$

Aus der Ablenkung im Magnetfeld kann folglich auf den Teilchenimpuls p geschlossen werden. Der Quotient p/z wird Steifheit des Strahls genannt.

Wiederum soll ein Zahlenbeispiel die erforderlichen Feldstärken verdeutlichen: Für $m = m_p$, $z = 1$ und $\varrho = 144$ cm benötigt man bei $E_k = E_p = 1$, 10^2 bzw. 10^4 MeV Feldstärken von $B = 10^{-1}$, 1 bzw. 10 T!

Man sieht, daß der Übergang zur Erforschung von Teilchen bei immer höheren Energien den Einsatz von Magneten mit immer größeren Feldstärken bedingt, die letztlich nur noch auf der Basis der Supraleitung erzeugt werden können.

Magnetspektrometer haben weite Verbreitung als Präzisionsgeräte mit höchster Auflösung gefunden.

3. Als Beispiel eines speziellen Spektrometers soll das Massenspektrometer nach Dempster (1918) vorgestellt werden. Es handelt sich im Unterschied zu den oben besprochenen um ein einkanaliges Meßgerät mit höchster relativer Auflösung bezüglich der Teilchenmasse bis zu

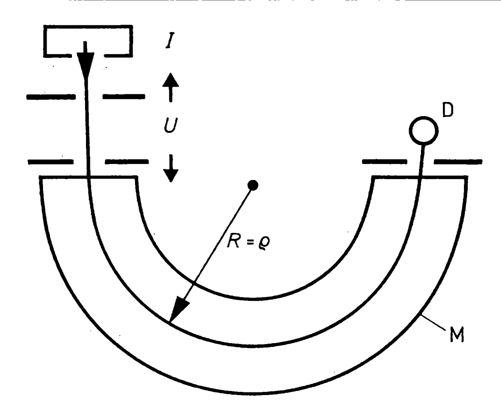


Abb. 5.26
Aufbau des Massenspektrometers nach DEMPSTER
I Ionenquelle, U Beschleunigungsspannung, M Magnetfeld, D Detektor

$\frac{\Delta m_T}{m_T} = 10^{-6}$. Den prinzipiellen Aufbau zeigt Abb. 5.26. Zur Analyse der Teilchenmassen aus der Ionenquelle werden alle Ionen zunächst im elektrischen Längsfeld auf die Energie

$$E_k = \frac{m}{2} v^2 = zeU \tag{5.68}$$

beschleunigt. Im nachfolgenden Magnetfeld werden die Ionen bezüglich ihres Impulses analysiert. Nur solche Ionen, die sich mit einem Krümmungsradius $\varrho = R$ bewegen, d. h. der Bedingung

$$B \cdot \varrho = \frac{p}{ez} = \frac{m_T v}{e \cdot z} = \sqrt{\frac{2 m_T U}{ze}} \tag{5.69}$$

genügen, werden im Detektor D nachgewiesen. Durch Veränderung von U kann bei gegebenem z und $B \cdot \varrho$ die Massenverteilung der Ionen analysiert werden. Sind die Ionisationsgrade z unbekannt, so wird aus (5.69) das Verhältnis $\frac{m_T}{z}$ bestimmt.

5.8.2. Flugzeitspektrometer

1. Die Messung des Zeitintervalls t, welches ein Teilchen zum Durchlaufen der Strecke L benötigt, ist ein Maß für die Geschwindigkeit und nach

$$E_k = \frac{m_T}{2} v^2 = \frac{m_T}{2} \left(\frac{L}{t}\right)^2, \tag{5.70}$$

bei bekannter Teilchenmasse m, für die Energie des Mikroteilchens. Zur Realisierung dieses Spektrometerprinzips ist es erforderlich, sowohl den Zeitpunkt des Abfluges am Beginn der Flugstrecke L wie auch der Ankunft am Ende der Flugstrecke mit ausreichend kleiner Zeitunschärfe $\Delta t \ll t$ zu bestimmen. Der Startmoment kann entweder durch Verwendung einer Impulsquelle mit ausreichend kleiner Impulsbreite $\Delta t_i \ll t$, durch Nachweis eines begleitenden Teilchens oder Verwendung eines dünnen Durchschußdetektors (s. Abb. 5.27a, b und c) ermittelt werden. Am Ende der Flugstrecke wird das Teilchen durch einen ausreichend schnellen Detektor, dessen Zeitunschärfe Δt_D ebenfalls der Bedingung $\Delta t_D \ll t$ genögen muß, nachgewiesen.

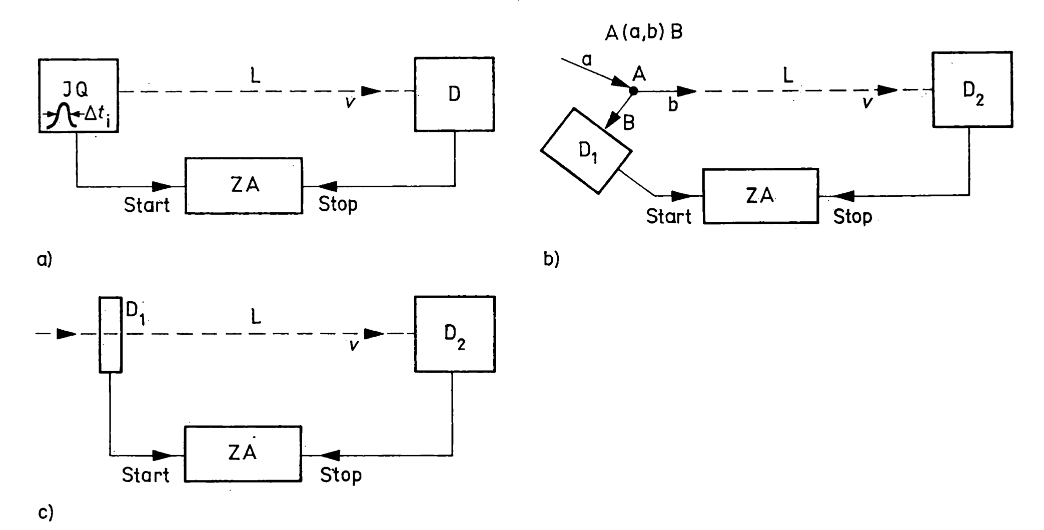


Abb. 5.27
Prinzipieller Aufbau von Flugzeitspektrometern
a) mit Impulsquelle, b) Methode der assoziierten Teilchen, c) Spektrometer mit Durchschußdetektor
IQ Impulsquelle, D Detektoren, L Flugstrecke, ZA Zeitanalysator

Die relative Energieauflösung eines solchen Spektrometers ergibt sich aus (5.70) zu

$$\frac{\Delta E_k}{E_k} = 2\frac{\Delta v}{v} = 2\frac{\Delta t}{t} = 2v \cdot \frac{\Delta t}{L}, \tag{5.71}$$

wobei Δt die Gesamtzeitunschärfe bedeutet, die sich aus Δt_i, Δt_D und der Unschärfe der Zeitmessung Δt_z bestimmt:

$$\Delta t = [(\Delta t_i)^2 + (\Delta t_D)^2 + (\Delta t_z)^2 + (\Delta t_L)]^{1/2}. \tag{5.72}$$

Bei Verwendung von Start- und Stop-Detektoren (Abb. 5.27b und c) gehen in (5.72) anstelle Δt_i und Δt_D die Größen Δt_{D_1} und Δt_{D_2} ein. Die Größe Δt_L charakterisiert die Zeitunschärfe infolge geometrischer Ungenauigkeiten ΔL der Flugstrecke L.

Aus (5.71) folgt, daß das Verhältnis $\frac{\Delta t}{L}$ ein Maß für die Energieauflösung des Spektrometers ist. An gepulsten Beschleunigern werden Werte $\Delta t_i \approx 1$ ns und Flugstrecken $L \simeq 100$ m verwendet, d. h. $\frac{\Delta t}{L} = 10^{-2}/(\text{ns} \cdot \text{m}^{-1})$ erreicht.

2. Besondere Bedeutung hat die Flugzeitmethode für die Spektrometrie von Neutronen im gesamten Energiebereich von 10^{-5} bis 10^8 eV gewonnen.

Die Flugzeit von Neutronen läßt sich leicht aus der zugeschnittenen Formel

$$t/\text{ns} = \frac{72{,}3 \cdot L/\text{m}}{\sqrt{E_n/\text{MeV}}} \tag{5.73}$$

berechnen.

Als typisches Spektrometer von Resonanzneutronen sollen die Parameter des Flugzeitspektrometers am Impulsreaktor IBR-30 in Dubna genannt werden. Der Impulsreaktor erzeugt im Mittel 10^{17} Neutronen pro Sekunde mit einer Impulsbreite $\Delta t_i \simeq 3$ μs und einem Abstand von 0,1 s. Die Flugstrecke beträgt $L = 1000$ m, d. h. $\frac{\Delta t}{L} \simeq 3 \text{ ns} \cdot \text{m}^{-1}$.

Für schnelle Neutronen liegen die nach (5.73) bestimmten Flugzeiten in ns-Bereich. Die Impulsbreite Δt_i, Detektorauflösung Δt_D und andere Zeitunschärfen müssen wegen der Forderung $\Delta t \ll t$ sämtlich $\leqq 1$ ns sein. Diese Bedingung wird durch Szintillationsdetektoren mit organischen Szintillatoren erfüllt, die daher weite Verwendung gefunden haben (s. Abschn. 5.5.).

5.8.3. Diffraktionsspektrometer

Die Entstehung von Intensitätsmaxima bei der Reflexion von Mikroteilchen der Wellenlänge λ an Einkristallen entsprechend der Braggschen Beziehung (4.45) kann zur Teilchenspektrometrie genutzt werden. Besonders weite Verbreitung hat diese Methode für die Spektrometrie der Röntgen- und weichen Gammastrahlung sowie kalter und thermischer Neutronen gefunden, deren Wellenlänge nach (4.72) den charakteristischen Gitterabständen im Festkörper entspricht. Der prinzipielle Aufbau einer solchen Anlage ist Abb. 5.28 zu entnehmen.

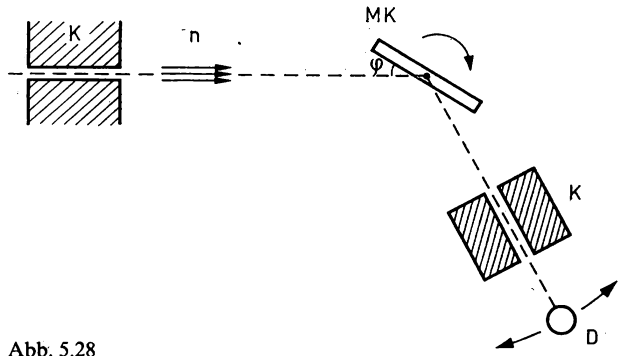


Abb. 5.28
Schematischer Aufbau eines Diffraktionsspektrometers für langsame Neutronen
K Kollimatoren, MK Monokristall (drehbar), D BF_3-Zählrohr (schwenkbar)

Literaturhinweise zu Kapitel 5

Abe 73, Abr 77, Ada 67, Aki 67, All 71, Bir 64, Byc 71, Cha 76, Cha 78, Cit 84, Eng 74, Fün 59, Gol 69, Gor 82, Her 66, Kal 66, Kle 79, Kle 84, Kme 63, Kow 70, Kur 75, Leu 80, Mei 69, Mei 75, Mei 84, Muc 74, Ros 49, Sch 73, Sch 75, Sch 83, Sto 85, Vja 61, Wei 70, Wei 71, Zan 78, Zel 82

6. Grundeigenschaften und Symmetrien von Kernen und Elementarteilchen

Zu den grundlegenden Eigenschaften der Kerne und Elementarteilchen gehören Größen, die eine eindeutige Charakterisierung dieser Teilchen selbst sowie ihrer Umwandlungen ermöglichen. Unter ihnen sind solche, bereits aus der klassischen Physik bekannten Charakteristika, wie kinetische Energie, Impuls, Drehimpuls, elektrische Ladung, Masse oder Ruhenergie, magnetisches Dipol- und elektrisches Quadrupolmoment, zur Beschreibung der Form sowie der inneren Ladungs- und Massenverteilungen Radien und Deformationsparameter. Da Kerne und Elementarteilchen als Mikroteilchen den Gesetzen der Quantenmechanik genügen, kommen solche typischen quantenmechanischen Charakteristika hinzu, wie Paritäten und Konjugationen. Völlig neue, erst mit der Kern- und Elementarteilchenphysik entwickelte Begriffe sind eine Reihe ladungsartiger Quantenzahlen, wie Isospin, Baryonen- und Leptonenladungen oder -zahlen, Seltsamkeit, Charm, Bottom und Top.

Eine wichtige Rolle spielen in diesem Bereich der Struktur der Materie die Symmetrien. Schon aus der klassischen Mechanik ist als Noether-Theorem bekannt, daß Symmetrieoperationen, die für ein System gelten, auf Größen führen, die in diesem System erhalten bleiben. Einfache Beispiele sind die Invarianz der klassischen Hamilton-Funktion oder des Hamilton-Operators der Quantenmechanik gegenüber räumlichen Translationen. Diese Translationsinvarianz führt bei abgeschlossenen Systemen auf die Erhaltung des Gesamtimpulses. Ähnlich folgt der Energiesatz aus der Invarianz der Hamilton-Funktion bezüglich der Translation der Zeit. Aus der Relativitätstheorie folgt die Invarianz relativistischer Systeme bezüglich der speziellen Lorentz-Transformation. Umgekehrt schränkt jeder empirisch gefundene Erhaltungssatz durch die dazugehörige Symmetrieforderung die möglichen Formen der Grundgleichungen eines Systems und damit die Zahl der Lösungen ein. Erhaltungssätze und Symmetrien sind daher z. B. bei der Suche nach Theorien für die Wechselwirkungen der Elementarteilchen von unschätzbarem Nutzen. Die meisten der Symmetrieoperationen, wie die oben genannten oder gegenüber räumlicher Inversion, also gegenüber Paritätstransformation und Invarianz gegenüber Zeitumkehr sowie ihre Gültigkeit bzw. Verletzung sind für die verschiedenen Wechselwirkungen recht gut bekannt. Der Umfang und Charakter des Buches erlauben es nicht, den theoretischen Formalismus für den Zusammenhang zwischen Symmetrien und Erhaltungssätzen, der sich auf die Gruppentheorie stützt, hier darzulegen. Wir werden jedoch die Auswirkungen der wichtigsten Symmetrien und Erhaltungssätze behandeln.

6.1. Ladungen

Mit dem Begriff der elektrischen Ladungen verbinden wir zwei Eigenschaften, die nicht unmittelbar miteinander zusammenhängen. Erstens stellt die elektrische Ladung eine Konstante dar, die die Intensität der Wechselwirkung eines geladenen Teilchens mit dem elektrischen Feld zu berechnen gestattet. Denken wir dabei an das Coulombsche Gesetz in den folgenden beiden Schreibweisen:

$$\boldsymbol{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{r^2} = Q_1 \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, Q_2) . \tag{6.1}$$

Zweitens ist die elektrische Ladung eine additive Größe, für die ein Erhaltungssatz gilt. Man kennt heute neben der elektrischen Ladung weitere ladungsartige Quantenzahlen, wie die Paryonenzahl, die elektronische, myonische und tauonische Leptonenzahl, die Seltsamkeit sowie Charm, Bottom und Top. Die tauonische Leptonenzahl sowie die drei zuletzt genannten Quantenzahlen werden erst in Kapitel 14 behandelt.

6.1.1. Elektrische Ladungen

1. Bei der systematischen Untersuchung der Röntgenstrahlung der Atome entdeckte H. G. J. Moseley 1913 einen gesetzmäßigen Zusammenhang zwischen der Ordnungszahl Z der Atome und der Wellenlänge λ der Röntgenstrahlung. Im Unterschied zu den optischen Spektren zeichnen sich die Röntgenspektren durch ihren unkomplizierten, durch relativ wenige Linien bestimmten Charakter, durch eine von den chemischen Perioden unabhängige Struktur beim Übergang von Element zu Element und durch ihre Unabhängigkeit von der chemischen Bindung aus, in denen sich die strahlenden Atome befinden. Diese Eigenschaften erlauben auf der Grundlage des Gesetzes von Moseley eine eindeutige und unter den unterschiedlichsten Bedingungen mögliche experimentelle Ermittlung der chemischen Ordnungszahl. Die Abb. 6.1 zeigt die lineare Abhängigkeit der Größe $\sqrt{1/\lambda}$ für die K-, L- und M-Serien der Atome zwischen $11 \leqq Z \leqq 92$.

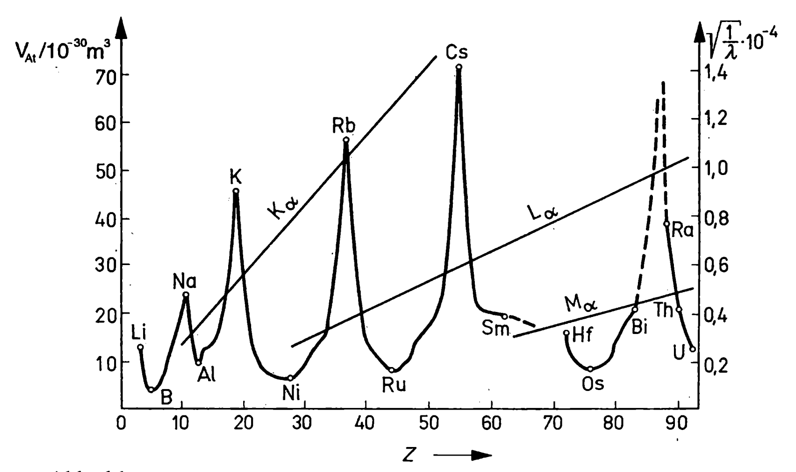


Abb. 6.1
Atomvolumina und Moseley-Diagramm als Funktion der Kernladungszahl

2. Man kann das von Moseley experimentell gefundene Gesetz leicht auf der Grundlage des Bohrschen Atommodells herleiten. Die Energie F_n der Hüllenniveaus und der Radius r_n der Bohrschen Bahnen ergeben sich für die Hauptquantenzahl n zu

$$E_n = \frac{Z_{\text{eff}}e^2}{2r_n} = \frac{m_e}{2}\left(\frac{Z_{\text{eff}} \cdot e^2}{\hbar n}\right)^2, \tag{6.2}$$

$$r_n = \frac{1}{Z_{\text{eff}}m_e}\left(\frac{\hbar n}{e}\right)^2. \tag{6.3}$$

Mit m_e ist die Masse des Elektrons, mit Z die Kernladungszahl und mit Z_{eff} die effektive, durch die Abschirmung der Atomhülle um s_{nl} verminderte Kernladungszahl

$$Z_{eff} = Z - s_{nl} \tag{6.4}$$

bezeichnet. Die Energie der charakteristischen Röntgenstrahlung berechnet sich aus (6.1) und (6.2) zu

$$\hbar\omega_{1,2} = E_{n1} - E_{n2} = \frac{m_e}{2}\left(\frac{e^2}{\hbar}\right)^2\left(\frac{Z^2_{eff\,1}}{n_1^2} - \frac{Z^2_{eff\,2}}{n_2^2}\right). \tag{6.5}$$

Führt man die Abschirmzahl s_{nl} nicht für die Niveaus, sondern für die Übergänge als $s_{\Delta n \Delta l}$ ein, dann kann man schreiben

$$\hbar\omega_{1,2} = \left(\frac{m_e}{2}\right)\left(\frac{e^2}{\hbar}\right)^2 (Z - s_{\Delta n \Delta l})^2 \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2}\right). \tag{6.6}$$

Für die K_α-Linie erhält man das Moseley-Gesetz, wenn $s_{\Delta n \Delta l} \approx 1$ gesetzt wird. In dieser Form ist es von ihm zuerst experimentell ermittelt worden. Für die Frequenz ν_{K_α} gilt

$$\nu_{K_\alpha} = R_\infty (Z - 1)^2 \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2}\right) = \frac{3}{4} R_R (Z - 1)^2 . \tag{6.7}$$

R_∞ ist die Rydberg-Konstante. Trägt man $\sqrt{\nu_{K_\alpha}}$ über Z auf, so ergeben sich Geraden. Die Energien der K_α-Linien liegen für die in der Natur vorkommenden Elemente unterhalb 100 keV. Für Ca ($Z = 20$) ergibt sich 3.36 keV, für U ($Z = 92$) erhält man 98,4 keV.

In Abb. 6.2 ist das Niveauschema der inneren Elektronen der Atomhülle dargestellt. Die Röntgenlinien treten bei Übergängen von äußeren auf innere Bahnen auf. Da sie auf Lochzustände erfolgen, sind die Quantenzahlen der Niveaus mit denen der fehlenden Elektronen identisch. An die Stelle von $L = S = J = 0$ der abgeschlossenen Schale tritt nun $L = l$, $S = s$, $J = j$ der Schale mit dem fehlenden Elektron. Es gelten die Auswahlregeln $\Delta l = \pm 1$, $\neq 0$, $\Delta j = 0, \pm 1$, nicht $0 \to 0$. Wegen $\Delta l \neq 0$ gibt es z. B. keinen Übergang von der L_I- auf die K-Schale. Die Linien K_{α_1} und K_{α_2} entsprechen den Übergängen $2P_{1/2} \to 1S_{1/2}$ und $2P_{3/2} \to 1S_{1/2}$. Die Übergänge von den M-, N-Niveaus auf die K-Schale sind die K_β-, K_γ-Linien.

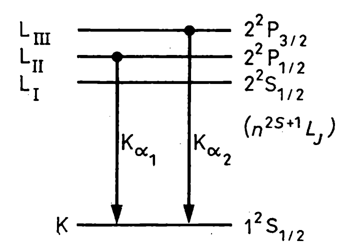


Abb. 6.2
Energieniveauschema der inneren Hüllenelektronen des Atoms

3. Gegen Ende der vierziger Jahre, als Myonen mit hinreichender Intensität an den Synchrozyklotronen zur Verfügung standen, erkannte man, daß es sich bei diesem Teilchen um eine Art schweres Elektron handelt. Der somit zu erwartende Einfang negativer Myonen durch Atomkerne auf Bohrsche Bahnen wurde 1949 erstmalig von W. Y. Chang über die dabei auftretende myonische Röntgenstrahlung experimentell beobachtet. Es zeigte sich viel später, daß sie eine hervorragende Möglichkeit zur Bestimmung der Kernladungszahl Z ist. Fängt ein Atomkern ein negatives Myon ein, dann ist in der Atomhülle ein Elektron zu viel, es wird abgegeben, da es weniger fest gebunden ist als das Myon. Man spricht von Myonenatom. Die

Energie der Myonen-Atomniveaus ist wegen (6.2) infolge $m_\mu \approx 207 m_e$ etwa 207mal größer als die Energie der entsprechenden Niveaus der elektronischen Atomhülle. Für die myonische K_{α_1}-Linie ergeben sich z. B. Energien, die bei den Elementen von Ca bis U Werte von 0,8 bis 6,0 MeV annehmen. Sie sind somit um zwei Zehnerpotenzen größer als die Energien der elektronischen K_{α_1}-Linien.

Der Radius der Bohrschen Myonenbahn ist etwa 207mal kleiner als der Radius der entsprechenden Elektronenbahnen. Bis $n = 14$ sind alle Myonenbahnradien kleiner als der Radius der 1s-Elektronenbahnen der K-Schale. In (6.6) ist somit $s_{\Delta n \Delta l} = 0$ zu setzen; es gibt dort keine Abschirmung durch die Elektronenhülle. Von $Z = 10$ an taucht die 1s-Myonenbahn in das Kerninnere ein. Vom Standpunkt der Quantenmechanik aus betrachtet, haben alle s-Wellenfunktionen der Myonen im Kerninnern einen von null verschiedenen Wert. Daraus ergeben sich Abweichungen für die Energie der myonischen Röntgenstrahlung, verglichen mit (6.6). In Abb. 6.3 sind für den $2P_{1/2} \rightarrow 1S_{1/2}$-Übergänge, d. h. für die K_{α_1}-Myonenlinie, die unkorrigierten Energiewerte gemäß (6.6) und die experimentellen Werte für alle $Z < 100$ eingezeichnet.

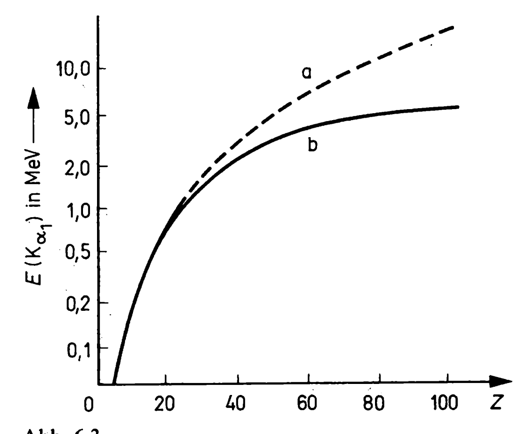


Abb. 6.3
Myonische Röntgenstrahlenergie der K_{α_1}-Linie als Funktion der Kernladungszahl Z
a) theoretische Werte für den Kern als Punktladung, b) experimentelle Werte

Die myonischen Röntgenstrahlen gewinnen in Wissenschaft und Technik immer mehr an Bedeutung für Anwendungen, u. a. zur Bestimmung der chemischen Zusammensetzung von Festkörpern, Flüssigkeiten, lebenden Organismen usw. Ihr Einsatz ist in zweierlei Hinsicht von Vorteil. Erstens erzeugen die Myonen keine langlebige Radioaktivität in der Probe. Zweitens können infolge der großen Energie der myonischen Röntgenstrahlung von bis zu einigen MeV relativ dicke Materieschichten von ihnen durchdrungen werden, ohne daß entscheidende Verzerrungen des Spektrums auftreten. Somit ist mit Hilfe von Ge(Li)-Detektoren, deren Auflösung in der Größenordnung von 1 keV liegt, die Z-, d. h. die chemische Analyse außerhalb vieler Körper mit hoher Genauigkeit möglich.

4. Von CHADWICK wurde die Bestimmung der Kernladungszahl Z erstmals mit Hilfe der Rutherfordschen Streuformel durchgeführt. Er wählte im Experiment mit α-Strahlen konstanten Ablenkwinkel ϑ und konstante kinetische Energie E_k, so daß bei experimentell bestimmten differentiellem Wirkungsquerschnitt $(d\sigma/d\Omega)_\vartheta$ nur noch Z unbekannt war, denn es gilt gemäß (B. 111)

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_\vartheta = \left(\frac{Z_1 Z_2 e^2}{8\pi\varepsilon_0 E_k}\right)^2 \sin^{-4}\left(\frac{\vartheta}{2}\right). \tag{6.8}$$

Die Ergebnisse der ersten Versuche lauteten $Z(\text{Cu}) = 29{,}3 \pm 0{,}45$ und $Z(\text{Pt}) = 77{,}4 \pm 0{,}77$.

5. Zur Z-Bestimmung können auch andere Effekte herangezogen werden, für die es einen eindeutigen Zusammenhang zwischen einer meßbaren Größe und Z gibt. Typische Beispiele sind der Elektroneneinfang und die innere Konversion. In Kernreaktionen entstehen oft radioaktive Kerne, die neutronendefizit sind und somit über den E-Einfang in Konkurrenz zum β^+-Zerfall zerfallen können. In den meisten Kernreaktionen und Kernzerfällen entstehen angeregte Kerne, so daß die Wahrscheinlichkeit von innerer Konversion gegeben ist.

6. Zur Bestimmung der Ladung z der Elementarteilchen können ebenfalls eine ganze Reihe von Effekten herangezogen werden. Wichtige und sehr verbreitete Methoden sind die Auswertung der Spuren in Spurendetektoren nach der spezifischen Ionisation und der mittleren Reichweite. Gemäß (4.6) ergibt sich z. B. für die Ionisationsbremsung eine Proportionalität $-\mathrm{d}E/\mathrm{d}x \sim z^2$ bzw. für die mittlere Reichweite $\langle R \rangle \sim z^{-2}$ (4.10). Auch elektrische und magnetische Querfelder sind zur z-Bestimmung geeignet. Der Ablenkwinkel eines Teilchens ist im elektrischen Querfeld gemäß (5.66) z. B. proportional zu z, der Krümmungsradius im magnetischen Querfeld gemäß (5.69) proportional zu z^{-1}.

6.1.2. Ergebnisse der Ladungsbestimmungen

1. Die elektrische Ladung ist auch im Bereich der Kerne und Elementarteilchen eine gequantelte Größe. In der Gleichung

$$Q = ze \tag{6.9}$$

für den Zusammenhang zwischen der Ladung Q und der Elementarladung e erweist sich der Proportionalitätsfaktor z immer als ganze Zahl. Bei den Elementarteilchen p, $\bar{\text{p}}$, e^-, e^+, μ^-, μ^+, π^-, π^+ usw. ist $z = 1$. Es gibt auch Elementarteilchen mit $z = 2$, z. B. das Δ^{++}-Teilchen. Auch in den Kernen und Antikernen ist $|z|$ immer eine ganze Zahl.

2. Das Moseleysche Gesetz hat eine wichtige Rolle bei der Ermittlung der chemischen Ordnungszahlen gespielt. Einerseits wurde eindeutig bewiesen, daß die chemische Ordnungszahl mit der Kernladung identisch ist. Anderseits konnte die Einordnung der chemischen Elemente in das System nach D. I. Mendeleev, die im wesentlichen über die chemischen Eigenschaften erfolgt war, präzisiert und bestätigt werden. Aus den Röntgenspektren und (6.7) wurde offensichtlich, daß es bis zum Uran 92 Elemente geben muß.

3. In allen bekannten Umwandlungsprozessen der Kerne und Elementarteilchen erwies sich die elektrische Ladung als Erhaltungsgröße. Der Satz von der Erhaltung der elektrischen Ladung lautet

$$\sum_i Q_i = \text{const.} \tag{6.10}$$

Einige Beispiele sollen diesen fundamentalen Satz demonstrieren. In der ersten künstlich ausgelösten Kernreaktion ${}^{14}_{7}\text{N}(\alpha, \text{p}){}^{17}_{8}\text{O}$ ist die Summe der elektrischen Ladungen des Eingangskanals gleich der im Ausgangskanal. Das gleiche gilt für die Annihilationsreaktion $\text{p} + \bar{\text{p}} \to 2\pi^+ + 2\pi^- + \pi^0$. In den folgenden Zerfällen ist die Summe der Ladungen der Zerfallsprodukte gleich der Ladung des zerfallenden Teilchens: $\text{n} \to \text{p} + \text{e}^- + \bar{\nu}$, $\pi^0 \to \text{e}^- + \text{e}^+$ und $\Lambda \to \text{p} + \pi^-$.

6.1.3. Die Suche nach freien Quarks

Seit der Formulierung der Quarkhypothese im Jahre 1964 wird intensiv nach freien Quarks gesucht. In der übergroßen Mehrheit dieser Experimente wurde kein Hinweis für die Existenz von Teilchen mit Drittelladungen gefunden. Dieser Befund ist konsistent mit der Hypothese, daß der permanente Einschluß der Quarks eine Eigenschaft der Quantenchromodynamik ist.

Die Experimente zur Quarksuche lassen sich in zwei Gruppen einteilen: Erstens in die Suche nach Quarks, die in hochenergetischen Stößen von Elementarteilchen erzeugt werden. Im Ergebnis dieser Experimente konnte lediglich die obere Grenze des Verhältnisses der erzeugten Quarks zu den erzeugten Pionen zu 10^{-11} ermittelt werden. Dabei sind solche Experimente nur für Quarks mit Massen von bis zu etwa 10 GeV/c^2 empfindlich. In die zweite Gruppe gehört die Suche nach freien Quarks in der Natur. Wenn freie Quarks existieren, dann müßten sie in Quark-Atomen oder -Kernen gebunden sein, sollten sich dann aber durch die gebrochene elektrische Ladung identifizieren lassen. Man hat nach Quarks im Ozeanwasser, in Meteoriten usw. gesucht. Das Ergebnis war wieder nur eine obere Grenze, nämlich daß weniger als ein Quark auf 10^{24} Nukleonen zu finden sind.

Nur von einem einzigen Experiment an der Universität Stanford (USA) wurde über ein positives Ergebnis berichtet. In einem geeigneten Magnetfeld wurden ähnlich wie im Millikan-Versuch kleine, etwa 100 µg schwere diamagnetische Niobium-Kügelchen zum Schweben gebracht. Bei 39 Messungen mit 13 Kügelchen wurden in 5 Fällen eine negative Ladung von $(-0{,}343 \pm 0{,}011)$ e und in 9 Fällen eine positive Ladung von $(0{,}328 \pm 0{,}007)$ e gemessen, während die übrigen Messungen ganzzahlige Ladungen von $(0{,}001 \pm 0{,}003)$ e ergaben. Die Zahl der gebrochenen Ladungen ergibt sich zu 10^{-20} pro Nukleon in Niobium. In einem ähnlich empfindlichen Experiment in Italien, das mit Hilfe kleiner, etwa 200 µg schwerer Eisenzylinder durchgeführt wurde, fand man nur ganzzahlige Ladungen. Eine endgültige Bestätigung oder Widerlegung dieser Experimente ist zweifellos von größter Wichtigkeit. Selbst wenn der Quarkeinschluß eine Eigenschaft der Quantenchromodynamik ist, erscheint es möglich, daß einige Quarks mit gebrochenen Ladungen aus Frühphasen der Entwicklung des Kosmos übriggeblieben sind.

6.1.4. Baryonen- und Leptonenladungen, Seltsamkeit

1. Während der Entdeckung und der Untersuchung der Eigenschaften der in Tabelle D 4. aufgeführten Elementarteilchen wurden neben anderen die folgenden zwei wichtigen Gesetzmäßigkeiten gefunden: Erstens sind die meisten dieser Elementarteilchen instabil; sie zerfallen im spontanen, radioaktiven Zerfall in andere Elementarteilchen mit kleineren Massen. Die Tabelle D 4. liefert eine hinreichende Zahl von Beispielen dafür. Zweitens endet die Zerfallskette eines Baryons immer wieder mit einem Baryon. Der Baryonenzerfall wird zwar im Rahmen einheitlicher Theorien vorausgesagt, konnte bisher aber experimentell nicht nachgewiesen werden. Der Zerfall eines ruhemassebehafteten Leptons endet immer wieder mit mindestens einem ruhemassebehafteten Lepton in der Zerfallskette, sofern keine Antiteilchen die Reaktion auslösen, d. h. im spontanen Zerfall. Durch diese Maßnahme der Natur ist der Baryonen- und der Leptonenbestand unter irdischen Normalbedingungen in Abwesenheit von Antimaterie gesichert.

Das für den Zerfall der Baryonen in Mesonen und Leptonen existierende Verbot wird durch eine neue Quantenzahl, die Baryonenladung oder Baryonenzahl, für die der Erhaltungssatz

$$\sum_i B_i = \text{const} \qquad (6.11)$$

gilt, geregelt. Für Baryonen ist $B = +1$, für Antibaryonen ist $B = -1$, während für alle anderen Teilchen $B = 0$ ist. Die Einbeziehung der Antibaryonen führt zur Erhaltung der Baryonenladung und nicht zur Erhaltung der Zahl der Baryonen. Einige Beispiele sollen die Wirkung dieses Erhaltungsgesetzes deutlich machen:

$$\begin{array}{lllll} & Z^0 \rightarrow e^+ + e^- , & p + \bar{p} \rightarrow 2\gamma , & p + p \rightarrow p + p + p + \bar{p} , & d \nleftrightarrow \pi^+ + \gamma , \\ B: & 0 = 0 + 0 & 1 - 1 = 0 & 1 + 1 = 1 + 1 + 1 - 1 & 2 \neq 0 + 0 . \end{array} \qquad (6.12)$$

Die letzte dieser Reaktionen ist verboten, sie wird im Experiment auch nicht beobachtet.

2. Das für den Zerfall der Leptonen in ruhemasselose Teilchen existierende Verbot muß durch zwei Erhaltungsgrößen, für die jeweils ein Erhaltungssatz gilt, geregelt werden. Die elektronische Leptonenladung L_e ist eine Eigenschaft der Elektronen und der elektronischen Neutrinos. Es ist $L_e = 1$ für das Elektron und das Elektronenneutrino und $L_e = -1$ für die beiden Antiteilchen. Für alle anderen Teilchen ist $L_e = 0$. Es gilt

$$\sum_i L_{e_i} = \text{const} . \qquad (6.13\text{a})$$

Die Reaktion $\mu \nleftrightarrow e + \gamma$ wird experimentell nicht beobachtet. Würde man dem Myon $L_e = 1$ zuordnen, so wäre sie aber nicht verboten. So wie es einen Unterschied zwischen den elektronischen und myonischen Neutrino gibt, so muß es auch einen Unterschied zwischen den leptonischen Ladungen der Elektronen und Myonen geben. Die Regelung erfolgt über die myonische Leptonenladung L_{μ_i} und den Erhaltungssatz

$$\sum_i L_{\mu_i} = \text{const} . \qquad (6.13\text{b})$$

In Analogie zur elektronischen und myonischen Leptonenladung gibt es noch eine dritte, die tauonische, für die auch ein Erhaltungssatz existiert.

3. In hochenergetischen Stößen stark miteinander wechselwirkender Teilchen wie Nukleonen und Pionen werden Teilchen erzeugt, die sich durch bemerkenswerte Eigenschaften auszeichnen. Man mußte es z. B. seltsam finden, daß diese innerhalb der kurzen Wechselwirkungszeit von etwa 10^{-23} s über die starke Wechselwirkung erzeugten Teilchen nicht in der gleichen kurzen Zeit wieder zerfallen (siehe Tabelle D 4.), weil einem solchen starken Zerfall kein damals bekanntes Verbot widersprach. Der Zerfall erfolgt mit der großen Lebensdauer von etwa 10^{-10} s, d. h., wie wir nun wissen, über die schwache Wechselwirkung. Man fand es weiter seltsam, daß diese nunmehr als seltsam bezeichneten Teilchen nur zusammen mit ganz bestimmten, damals noch unbekannten, aber auch seltsamen Teilchen erzeugt werden können. Beispiele dafür liefern die folgenden Reaktionen:

$$p + \pi^- \rightarrow \Lambda + K^0 \quad \hat{=} \ H + K \qquad (6.14\text{a})$$

$$n + \pi^- \rightarrow \Sigma^0 + K^- \quad \hat{=} \ H + K \qquad (6.14\text{b})$$

$$p + \pi^- \rightarrow \Xi^0 + 2K^0 \quad \hat{=} \ H + 2K \qquad (6.14\text{c})$$

$$p + \pi^- \rightarrow \Omega^- + K^+ + 2K^0 \ \hat{=} \ H + 3K \qquad (6.14\text{d})$$

In solchen Reaktionen treten Hyperonen H immer zusammen mit Kaonen auf.

Die Erklärung der beiden seltsamen Fakten fanden 1953 M. Gell-Mann und K. Nishijima, indem sie eine neue Quantenzahl, die Seltsamkeit S, einführten und für sie einen Erhaltungssatz postulierten. Für die starke und elektromagnetische Wechselwirkung gilt dieser Satz streng, bei der schwachen Wechselwirkung sind Änderungen der Seltsamkeit um $\Delta S = 1$ zugelassen. Bei der Festlegung der Zahlenwerte geht man davon aus, daß Pionen und einige andere neutrale Mesonen, wie z. B. η, ω, ϱ und Φ sowie die Nukleonen nicht seltsam sind, d. h. $S = 0$ haben,

daß aber alle anderen Hadronen mit verschwindender Charm- und Bottom-Quantenzahl seltsame Teilchen sind, also einen von 0 verschiedenen Wert von S haben. In Tabelle D 4. ist die Seltsamkeit für alle hier in Betracht kommenden Teilchen angegeben. Man sieht, daß die Seltsamkeit der Hyperonen identisch ist mit der Zahl der in den Reaktionen (6.14) auftretenden Kaonen. Man hätte die Seltsamkeit daher z. B. auch Kaonenladung oder Kaonenzahl nennen können.

Der Erhaltungssatz für die starke und elektromagnetische Wechselwirkung lautet:

$$\sum_i S_i = \text{const}\,. \tag{6.15}$$

Einige Beispiele sollen die Anwendung deutlich machen:

$$\begin{array}{llll} \pi^- + p \to \Lambda \;\; + K^0; & \pi^- + p \nrightarrow \Sigma^+ \;\; + K^-; & \Omega^- \nrightarrow \Xi^0 \;\; + \pi^-; & \Xi^0 \nrightarrow \Lambda \;\; + \pi \\ S\colon\; 0 + 0 = -1 + 1 & 0 \;\; + 0 \neq -1 - 1 & -3 \neq -2 + 0 & -2 \neq -1 + 0 \end{array} \tag{6.16}$$

Sobald die seltsamen Teilchen erzeugt sind, können sie nicht über die starke oder elektromagnetische Wechselwirkung, d. h. mit Lebensdauern kleiner als 10^{-16} s, zerfallen. Dazu müßte $\Delta S = 0$ sein. So ist in der ersten Reaktion der Zerfall des Λ-Hyperons in die beiden Eingangspartner über diese beiden Wechselwirkungen wegen $\Delta S = 1$ streng verboten. Über die schwache Wechselwirkung ist er, wie man auch aus der Tabelle D 4. erkennen kann, möglich.

6.2. Dichteverteilungen

Bevor wir zur Besprechung der Methoden und der Ergebnisse der Dichteverteilungsermittlungen übergehen, müssen zwei Bemerkungen zum Begriff des Radius der Dichteverteilung gemacht werden.

Im allgemeinsten Fall kann davon ausgegangen werden, daß die zu untersuchenden Dichteverteilungen keinen scharf begrenzten Rand haben. Man kann also nicht von Kugeln mit homogener Dichteverteilung $\varrho(\boldsymbol{r})$ gemäß

$$\varrho(\boldsymbol{r}) = \begin{cases} \dfrac{4}{3}\,\pi R^3 & \boldsymbol{r} \leqq R \\ 0 & r > R \end{cases} \tag{6.17}$$

ausgehen. Vielmehr kann man Verteilungen erwarten, die mit einem mittleren quadratischen Radius

$$\langle r^2 \rangle = \frac{\int\limits_0^\infty r^2 4\pi r^2 \varrho(\boldsymbol{r})\, \mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\int\limits_0^\infty 4\pi r^2 \varrho(\boldsymbol{r})\, \mathrm{d}\boldsymbol{r}} \tag{6.18 a}$$

beschrieben werden können. Dieser geht in den Radius einer gleichförmig gefüllten oder geladenen Kugel mit dem Radius R gemäß

$$R = \sqrt{\frac{5}{3}\,\langle r^2 \rangle} \tag{6.18 b}$$

ein.

Der Radius hängt auch von der Art der Sonden ab, mit denen er ermittelt wird. Das ist eine Folge der unterschiedlichen, zur Wirkung kommenden Wechselwirkungen. Streuexperimente mit Elektronen an Elementarteilchen und Kernen laufen über die elektromagnetische Wechselwirkung ab. Sie können also über den mittleren quadratischen Radius der elektrischen Ladungs-

verteilung $\sqrt{\langle r_z^2 \rangle}$ Auskunft geben. Er erfaßt nur die Verteilung der Protonen. Streuversuche mit Neutronen laufen, wenn man von ihrem magnetischen Dipolmoment absieht, über die starke Wechselwirkung ab. Sie liefern also Aussagen über den mittleren quadratischen Radius der starken Wechselwirkung. Da hieran alle Nukleonen beteiligt sind, nicht nur die Protonen, wird mit Neutronen die Massenverteilung mit $\sqrt{\langle r_A^2 \rangle}$ ermittelt. In den folgenden Abschnitten werden wir die Ermittlung dieser beiden Verteilungen getrennt behandeln, und zwar für die Kerne und die Nukleonen.

6.2.1. Ladungsdichteverteilung der Kerne

Zur Ermittlung des Radius der Ladungsdichteverteilung der Kerne gibt es eine ganze Reihe von Methoden. Dazu gehören Abschätzungen aus der Zerfallsenergie beim Betazerfall, aus der Isotopieverschiebung der optischen Spektrallinien sowie zwei genauere Methoden, die Streuung schneller Elektronen an Atomkernen und die Methode der Anregung und Messung der myonischen Röntgenstrahlung der Kerne. Wir werden hier nur die Streuung relativistischer Elektronen behandeln. Sie wurde erstmals 1955 von R. L. HOFSTADTER angewendet. Die Elektronen dringen in den Kern als „Sonden" ein und werden in Abhängigkeit von dem dort herrschenden Potential abgelenkt. Aus den Messungen des Streuexperiments kann auf den mittleren quadratischen Radius der Verteilung der elektrischen Ladungen geschlossen werden sowie auf die Art der Verteilung überhaupt. Die Abb. 6.4 zeigt die Potentialform für drei verschiedene Ladungsverteilungen, für Punkt-, Oberflächen- und Volumenladung. Das Experiment gibt die Antwort darauf, welche davon realisiert ist. Die Energie der Elektronen ist gemäß (3.15) so zu wählen, daß die Bedingung $\lambda_e \ll R$ erfüllt wird. Das ist der Fall, wenn $E_k(e) > 100$ MeV ist (siehe Abb. 3.8). Elektronen mit solchen Energien sind relativistisch zu betrachten. Die Streuung relativistischer, spinbehafteter Punktladungen ist 1929 von N. F. MOTT berechnet worden. Der Wirkungsquerschnitt der Mottschen Streuung berücksichtigt in drei Faktoren die Rutherfordsche Streuung (B. 111), die Lorentz-Kontraktion des Elektrons und den Einfluß des Elektronenspins. Im M-System gilt (10.153):

$$(\mathrm{d}\sigma/\mathrm{d}\Omega)_{\mathrm{MOTT}} = (\mathrm{d}\sigma/\mathrm{d}\Omega)_{\mathrm{RUTH.}} \cdot \beta^4(1-\beta^2)^2\,[1-\beta^2 \sin^2(\Theta/2)]\,. \tag{6.19 a}$$

Da oberhalb 100 MeV für Elektronen $\beta \approx 1$ ist, folgt wegen $(1-\beta^2) \approx mc^2/E_k$ und $1-\sin^2(\Theta/2) \approx \cos^2(\Theta/2)$

$$(\mathrm{d}\sigma/\mathrm{d}\Omega)_{\mathrm{MOTT}} \approx (\mathrm{d}\sigma/\mathrm{d}\Omega)_{\mathrm{RUTH.}} \cdot \cos^2(\Theta/2)\,. \tag{6.19 b}$$

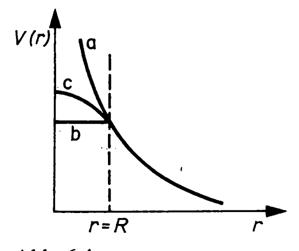


Abb. 6.4
Elektrostatisches Potential für verschiedene Ladungsverteilungen
a) Punktladung, b) Oberflächenladung, c) Volumenverteilung

Diese einfache Abhängigkeit gilt allerdings nur dann, wenn die Bedingung $Z/137 \ll 1$ erfüllt ist. Für Werte von $Z \gtrsim 10$ an muß von der analytischen Form von (6.9a) zu numerischen Verfahren übergegangen werden.

Die räumliche Ausdehnung des Atomkerns muß zu Abweichungen von der für Punktladungen geltenden Mottschen Streuformel führen. Die quantitative Erfassung erfolgt über den Formfaktor F:

$$(\mathrm{d}\sigma/\mathrm{d}\Omega)_\Theta = (\mathrm{d}\sigma/\mathrm{d}\Omega)_{\mathrm{MOTT}} \cdot F^2 . \tag{6.20}$$

Im Falle verschwindenden mittleren Radius $\langle r_z^2 \rangle = 0$ liegt eine Punktladung vor, und F^2 muß voraussetzungsgemäß identisch mit 1 sein. Liegt jedoch eine Ladungsverteilung mit $\langle r_z^2 \rangle \neq 0$ vor, dann wird $F^2 < 1$, da sich infolge von Interferenz Materiewellenzüge gegenseitig auslöschen, die von verschiedenen Punkten des Kerns ausgehen und geeigneten Gangunterschied haben. Die Funktion F^2 hat, wie aus der Optik bekannt ist, bei bestimmten Winkeln ausgeprägte Minima. Aus ihrer Lage kann der mittlere Radius der Ladungsverteilung mit (10.144) berechnet werden. Aus der Größe des im Streuprozeß übertragenen Impulses $\boldsymbol{q}$ kann man über (10.149) auf die Ladungsverteilung und den mittleren quadratischen Radius schließen.

Die Bestimmung des Verlaufs der Ladungsverteilung $\varrho(\boldsymbol{r})$ ist nicht einfach, insbesondere für kleine Radien, d. h. für große $\boldsymbol{q}$. Die vollständige Kenntnis von $\varrho(\boldsymbol{r})$ erfordert die vollständige Kenntnis von $F(q^2)$ für alle Werte von q, wobei q^2 gleich der Mandelstamschen Variablen t ist (2.32, B. 46). Die Experimente werden jedoch immer mit einer durch den zur Verfügung stehenden Beschleuniger bedingten Höchstenergie durchgeführt, d. h., es kann nur ein bestimmter Maximalimpuls übertragen werden. Die Genauigkeit der so ermittelten Verteilung $\varrho(\boldsymbol{r})$ ist wegen (10.149) bei kleinen Radien gering. Oft bestimmt man $\varrho(\boldsymbol{r})$, indem verschiedene vorgegebene Funktionen mit dem Ziel in (10.149) eingesetzt werden, den experimentellen Verlauf von $F(q^2)$ optimal zu reproduzieren. In Abb. 6.5 ist $F^2(q^2)$ für die Streuung von 750-MeV-

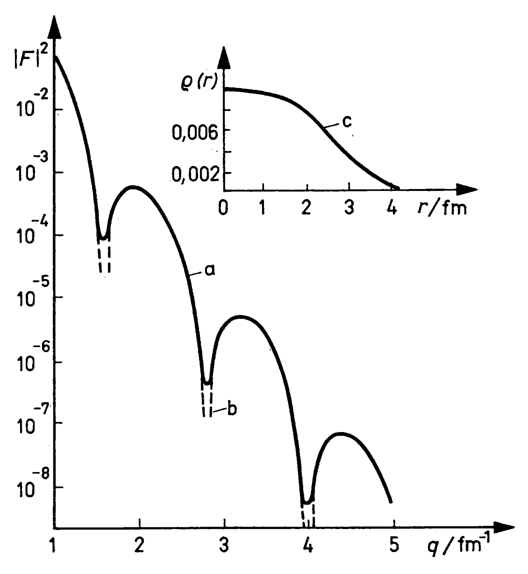


Abb. 6.5
Quadrat des Formfaktors der elastischen Streuung von 750-MeV-Elektronen an $^{16}_{8}O$.
a) experimentelle Kurve, b) theoretische, mit der Ladungsverteilung von c) erhaltene Kurve

Elektronen an $^{16}_{8}O$ gezeigt. Man sieht drei sehr stark ausgeprägte Minima. Die experimentelle Kurve a) wird durch die theoretische b) gut reproduziert. Letztere konnte mit einer Vorgabefunktion $\varrho(r)$ erhalten werden, wie sie Kurve c) zeigt.

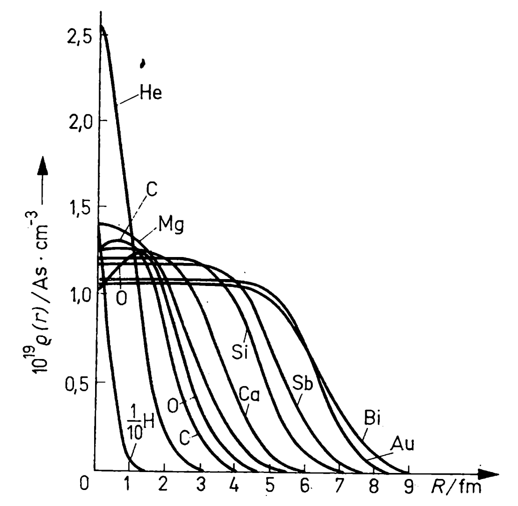


Abb. 6.6
Ladungsdichte einiger Kerne aus Elektronenstreuexperimenten

In Abb. 6.6 ist die Ladungsdichte für verschiedene Kerne eingezeichnet. Man sieht, daß sie keinen scharf begrenzten Radius besitzen. Es gibt ein nicht vernachlässigbares Intervall, in dem die Ladungsdichte stetig auf null abfällt. Die Beschreibung erfolgt am besten durch die Fermi-Verteilung

$$\varrho(r) = \varrho_0/(1 + e^{+(r-R)/\delta}), \tag{6.21}$$

die in Abb. 6.7 dargestellt ist. Für alle Kerne gilt für den Abfall des ϱ/ϱ_0 von 0,9 auf 0,1: $d = 4{,}4\delta = 2{,}4 \cdot 10^{-15}$ m. Weiter fällt in Abb. 6.6 auf, daß für kleine Radien $\varrho(r)/\varrho_0 = 1$ ist, ausgenommen Kerne mit $Z \leqq 8$. Dieser Verlauf der elektrischen Ladungsdichte entspricht dem Fall der Volumenladung von Abb. 6.4. In vielen Untersuchungen konnte gezeigt werden, daß

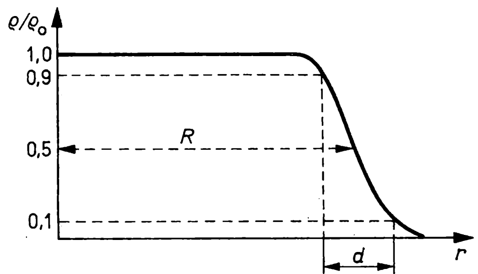


Abb. 6.7
Fermi-Verteilung der Ladungsdichte im Kern

für die stabilen Nuklide mit der Kernladungszahl Z und der Massenzahl A der mittlere quadratische Radius $\sqrt{\langle r_z^2 \rangle}$ aus dem Zusammenhang

$$\sqrt{\langle r_z^2 \rangle} = \sqrt[3]{A} \cdot 10^{-15}\ \mathrm{m} \tag{6.22}$$

berechnet werden kann. Nähert man den Kern mit diffuser Oberfläche durch eine Kugel mit dem Radius R_Z und gleichmäßiger Ladungsverteilung an, so findet man

$$R_Z = \sqrt{\frac{5}{3} \langle r_z^2 \rangle} = r_0 \sqrt[3]{A} = 1{,}29 \sqrt[3]{A} \cdot 10^{-15}\ \mathrm{m}\,. \tag{6.23}$$

In Abschnitt 6.2.2. wird dieser Radius mit dem der Massenverteilung des Kerns verglichen. Genauere Messungen zeigen, daß r_0 leicht von Z abhängt und zwischen 1,10 und 1,50 liegt (siehe auch 9.4.2., Punkt 5).

6.2.2. Massendichteverteilung der Kerne

1. Auch für die Bestimmung des mittleren quadratischen Radius der Massenverteilung des Atomkerns gibt es eine ganze Reihe von Methoden. Als erste ist die von RUTHERFORD gemachte Entdeckung der anormalen Streuung von α-Teilchen an Kernen zu nennen. Sie gibt keine genauen Werte, erlaubte aber erstmalig auf Grund einer einfachen Abschätzung den Kernradius einzuführen. Solange die Energie der α-Teilchen kleiner ist als die Höhe der Coulomb-Barriere (3.13, 14) befolgt der differentielle Wirkungsquerschnitt das auf der Grundlage von elektrischen Punktladungen abgeleitete Gesetz (B. 111) der Rutherford-Streuung. Bei größeren Energien geraten die α-Teilchen in den Bereich der Kernkräfte und werden durch diese gestreut. Man prägte in diesem Zusammenhang im Gegensatz zur normalen, zur Rutherford-Streuung, den Begriff der anormalen Streuung der α-Teilchen. Sie setzt ein, wenn sich die kinetische Energie der α-Teilchen und die Höhe der Coulomb-Barriere E_C gleichen. Man erhält daraus für den Radius der Kernkraft die Abschätzung

$$R \sim \frac{zZe^2}{4\pi\varepsilon_0 E_k(\alpha)}\,. \tag{6.24}$$

2. Eine genauere Methode zur Bestimmung des Radius der Kernmassendichteverteilung beruht darauf, daß die Zerfallskonstante λ des α-Zerfalls eine sehr stark vom Kernradius abhängige Funktion ist (9.36):

$$\lambda = \lambda_0\, \mathrm{e}^{-G} = \frac{v}{R}\, \mathrm{e}^{-(a - b\sqrt{R})}\,. \tag{6.25}$$

Da die Geschwindigkeit der α-Teilchen v, die Größen λ, a und b meßbar bzw. berechenbar sind, kann man aus (6.25) R berechnen.

3. Auch aus einer Transmissionsmessung mit schnellen Neutronen an einem Absorber der Dicke δ läßt sich der Kernkraftradius bestimmen. Wenn $\dot{N}_0$ und $\dot{N}$ die Neutronenzählrate vor und nach dem Absorber sind, so gilt gemäß (2.53)

$$\frac{\dot{N}}{\dot{N}_0} = \mathrm{e}^{-N_V \sigma_T \delta}\,. \tag{6.26}$$

Für schnelle Neutronen ist $\lambda\!\!\!^{-} \ll R$, so daß die Wirkungsquerschnitte für die elastische Streuung und für Kernreaktionen den geometrischen Wert (2.52) annehmen:

$$\begin{aligned} \sigma_{el} &= \pi R^2\,;\ \sigma_{unel} = \pi R^2\,, \\ \sigma_T &= \sigma_{el} + \sigma_{unel} = 2\pi R^2\,. \end{aligned} \tag{6.27}$$

Damit erhält man durch Einsetzen in (6.27) für R den Ausdruck

$$R = \sqrt{\frac{\sigma_T}{2\pi}} . \tag{6.28}$$

Die genaue Bestimmung der Wirkungsquerschnitte ist jedoch nicht einfach, so daß die Methode ihre Grenzen hat.

4. Genauer ist die Methode der elastischen Streuung schneller Neutronen an Kernen. Sie ergibt ähnliche Winkel- und $F(q^2)$-Verteilungen, wie sie bei der Streuung schneller Elektronen auftreten. In Abb. 6.8 ist ein typisches Beispiel gezeigt. Es handelt sich um den auf einen konstanten Faktor normierten differentiellen Wirkungsquerschnitt der elastischen Streuung von 14,5 MeV Neutronen an Bleikernen. Auffallend sind die vier relativen Minima der Winkelverteilung. In der Abb. 6.8 sind auch die Ergebnisse eingezeichnet, die unter der Annahme eines Rechteckpotentials als Streuzentrum in Bornscher Näherung als (10.144) erhalten wurden. Für $k \cdot R_0 = 8{,}35$ wird die Winkelverteilung am besten reproduziert. R_0 ergibt sich dann aber zu $1{,}7 \cdot 10^{-15}$ m. Das ist viel zu groß. Bessere Rechnungen berücksichtigen anstelle des Kasten- ein realistisches Potential und die Absorption von Neutronen.

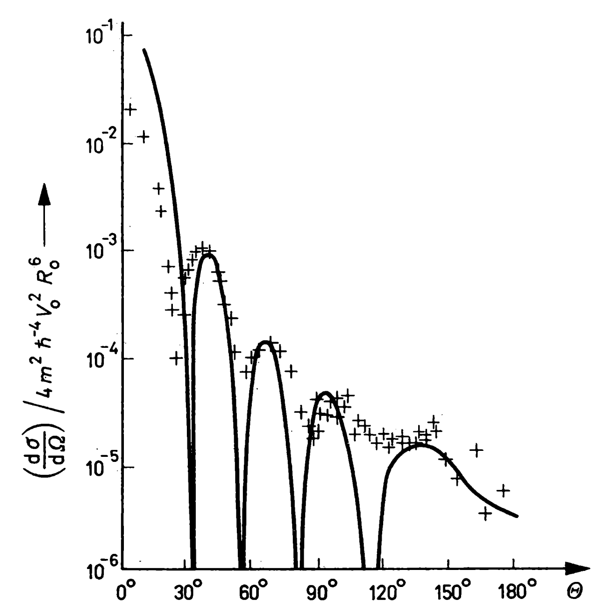


Abb. 6.8
Winkelverteilung elastisch gestreuter 14,5-MeV-Neutronen an Bleikernen
experimentelle Werte und angepaßte Kurve für Streuung am Rechteckpotential in Bornscher Näherung

5. Die Ergebnisse der Bestimmung der Massendichteverteilung in den stabilen Kernen lassen sich so als Funktion von der Massenzahl zusammenfassen, wie sie mit (6.21) für die Protonendichte gefunden wurde. Für den mittleren quadratischen Radius der Kernmassenverteilung gilt in Analogie zu (6.22)

$$\sqrt{\langle r_A^2 \rangle} = \sqrt[3]{A} \cdot 10^{-15} \text{ m} . \tag{6.29}$$

Daraus folgt für den Radius eines Kernes mit homogener Massenverteilung

$$R_A = \sqrt{\frac{5}{3}\langle r_A^2\rangle} = 1{,}29 \cdot 10^{-15}\ \mathrm{m}\ \sqrt[3]{A} = r_0\sqrt[3]{A}\,. \tag{6.30}$$

Wie beim Radius der Verteilung der elektrischen Ladung im Kern, so hängt auch hier der Einheitsradius r_0 genau genommen leicht von A ab, und zwar ebenfalls im Intervall zwischen 1,10 und 1,50. Eine Folge dieser näherungsweisen Unabhängigkeit von A ist eine nahezu konstante Dichte der Kernmaterie:

$$\varrho = \frac{m}{V} = \frac{A}{\frac{4\pi}{3}R_A^3} = \frac{3A}{4\pi r_0^3 A} \approx 10^{14}\ \mathrm{g/cm^3}\,. \tag{6.31}$$

In Tabelle 6.1 sind die Dichten der Kernmaterie und einiger astronomischer Körper gegenübergestellt. Man sieht, daß sich die Kernmaterie durch die größte Dichte auszeichnet. Die Dichte der Pulsare kommt noch am nächsten an die der Kernmaterie heran. Das ist ein Argument dafür, daß die Pulsare zum Teil aus Neutronenmaterie bestehen. Die große Dichte der Kernmaterie zeugt von der außerordentlichen Stärke der Kernkraft. Diese Stärke kommt auch durch die Größenordnung der Bindungsenergie zum Ausdruck. Wie wir in Abschnitt 6.3.2. sehen werden, liegen diese im Kernbereich bei einigen MeV. In der Atomhülle sind dagegen Bindungsenergien von einigen eV charakteristisch. Die näherungsweise Unabhängigkeit der Kerndichte von der Massenzahl A zeugt vom Sättigungscharakter der Kernkraft. Wir besprechen das ebenfalls in Abschnitt 6.3.2.

Tabelle 6.1
Vergleich der Dichte der Kernmaterie mit der von astronomischen Körpern

Körper	Erde	Sonne	Syrius B	Pulsare	Kerne
Dichte in g/cm³	5,55	1,41	$5 \cdot 10^4$	$10^6 \cdots 10^{10}$	10^{14}

6.2.3. Formfaktoren der Nukleonen

1. Mit relativistischen Elektronen wurden auch Streuversuche zur Ermittlung der elektromagnetischen Struktur und des Radius der Nukleonen durchgeführt. Den schematischen Aufbau eines typischen Experiments zeigt die Abb. 6.9. Mit Hilfe spezieller Magnetspektrometer

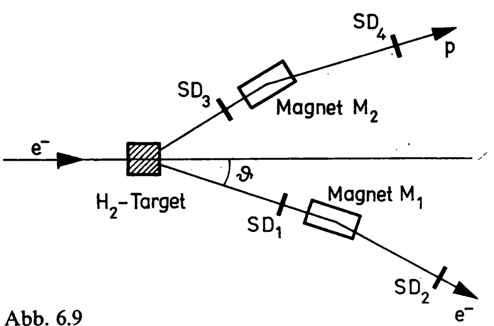


Abb. 6.9
Versuchsschema der Elektronenstreuung an Nukleonen
SD Szintillationsdetektoren

wurden Präzisionsmessungen des bei bestimmten Ablenkwinkeln übertragenen Impulses durchgeführt. Der Wirkungsquerschnitt der e-p-Streuung wurde an Targets aus flüssigem Wasserstoff gemessen. Der Wirkungsquerschnitt der e-n-Streuung ergibt sich durch Messung des Wirkungsquerschnitts der e-d-Streuung an Targets aus flüssigen Deuterium, Subtraktion der e-p- von den e-d-Daten und Korrektur des Ergebnisses auf den Einfluß der Bindungskräfte des Deuterons:

$$(\mathrm{d}\sigma/\mathrm{d}\Omega)_{(\mathrm{e\text{-}n})} = (\mathrm{d}\sigma/\mathrm{d}\Omega)_{(\mathrm{e\text{-}d})} - (\mathrm{d}\sigma/\mathrm{d}\Omega)_{(\mathrm{e\text{-}p})} + \mathrm{K}\,. \tag{6.32}$$

Die Auswertung des Experiments macht die Berücksichtigung der magnetischen Streuung erforderlich, d. h. die Streuung von Punktladungen mit magnetischem Moment. M. N. ROSENBLUTH führte 1950 zu diesem Zwecke für jedes der beiden Nukleonen neben dem elektrischen einen magnetischen Formfaktor ein. Damit die Endformel der Rosenbluth-Streuung keine Interferenzglieder zwischen elektrischer und magnetischer Streuung enthält, setzt man den elektrischen und den magnetischen Formfaktor mit der Abkürzung $\tau = (q/2E_{0\mathrm{N}})^2$ gemäß

$$\begin{aligned} G_{\mathrm{E}}(q^2) &= F_1(q^2) - \tau F_2(q^2)\,, \\ G_{\mathrm{M}}(q^2) &= F_1(q^2) + \tau F_2(q^2) \end{aligned} \tag{6.33}$$

zusammen. Die Normierung erfolgt für die G-Faktoren auf die totale Ladung und das totale magnetische Moment für die F-Faktoren auf die totale Ladung und das anormale, nicht-Diracsche magnetische Moment:

$$\begin{aligned} F_1^{(\mathrm{p})}(0) &= 1(e)\,, & G_{\mathrm{E}}^{(\mathrm{p})}(0) &= 1(e)\,, \\ F_1^{(\mathrm{n})}(0) &= 0\,, & G_{\mathrm{E}}^{(\mathrm{n})}(0) &= 0\,, \\ F_2^{(\mathrm{p})}(0) &= 1{,}79\mu_{\mathrm{K}}\,, & G_{\mathrm{M}}^{(\mathrm{p})}(0) &= \mu_{\mathrm{p}} = 2{,}79\mu_{\mathrm{K}}\,, \\ F_2^{(\mathrm{n})}(0) &= -1{,}91\mu_{\mathrm{n}}\,, & G_{\mathrm{M}}^{(\mathrm{n})}(0) &= \mu_{\mathrm{n}} = -1{,}91\mu_{\mathrm{K}}\,. \end{aligned} \tag{6.34}$$

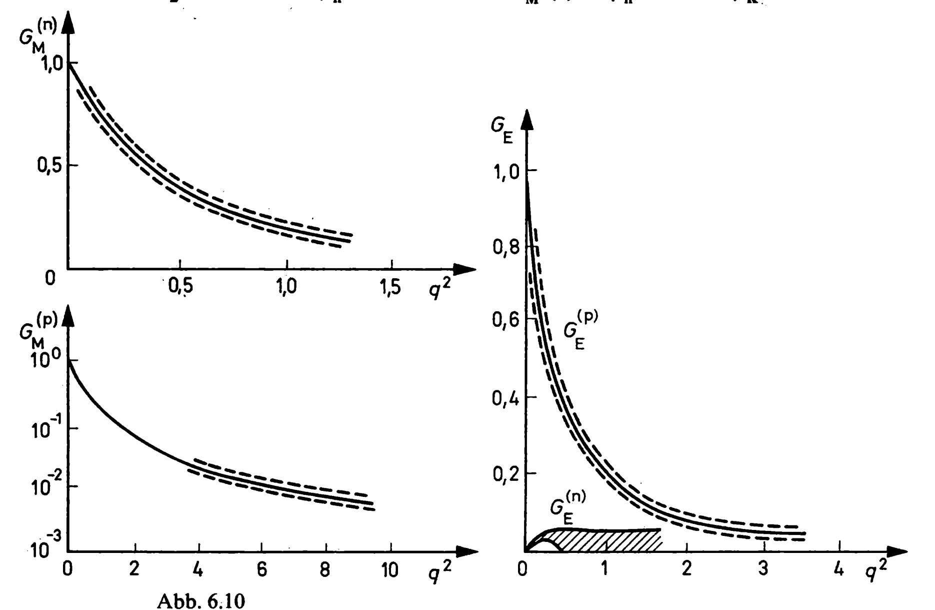


Abb. 6.10
Experimentelle Formfaktoren der Elektronenstreuung an Protonen und Neutronen. Die gestrichelt gezeichneten Kurven geben die Fehlergrenzen an. Die Abszissenwerte sind in (GeV/c^2) angegeben

Mit diesen G-Formfaktoren ergibt sich für den differentiellen Wirkungsquerschnitt der Rosenbluth-Streuung

$$(\mathrm{d}\sigma/\mathrm{d}\Omega) = (\mathrm{d}\sigma/\mathrm{d}\Omega)_{\mathrm{MOTT}} \frac{G_{\mathrm{E}}^2 + G_{\mathrm{M}}^2}{1 + \tau} + 2\tau G_{\mathrm{M}}^2 \tan^2 \Theta/2\,. \tag{6.35a}$$

Zur leichteren Auswertung der experimentellen Daten bringt man diesen Ausdruck in die Geradenform:

$$(\mathrm{d}\sigma/\mathrm{d}\Omega)/(\mathrm{d}\sigma/\mathrm{d}\Omega)_{\mathrm{MOTT}} = A(q^2) + B(q^2) \tan^2 \Theta/2\,. \tag{6.35b}$$

Die experimentellen Formfaktoren sind in Abb. 6.10 dargestellt. Sie lassen sich durch die folgenden einfachen Formeln zusammenfassen:

$$G_{\mathrm{E}}^{(\mathrm{p})}(q^2) = G_{\mathrm{M}}^{(\mathrm{p})}(q^2)/\mu_{\mathrm{p}} = G_{\mathrm{M}}^{(\mathrm{n})}(q^2)/\mu_{\mathrm{n}} \tag{6.36a}$$

$$\approx (1 + q^2/0{,}71)^{-2} \qquad (q \text{ in GeV}/c^2)\,, \tag{6.36b}$$

$$G_{\mathrm{E}}^{(\mathrm{n})}(q^2) = 0\,. \tag{6.36c}$$

Aus (6.36a, b) erkennt man, daß die Formfaktoren G mit ein und derselben Formel beschrieben werden können. Die Gleichung (6.36b) ist die phänomenologische Dipolformel. Sie beschreibt den Verlauf der experimentellen Kurven recht gut.

2. Auch im Falle der Nukleonen kann man versuchen, aus den Formfaktoren die Verteilung der elektrischen Ladung zu ermitteln. Beim Atomkern war es möglich, zuverlässige Aussagen über die Dichteverteilung der Ladung bei großen Radien zu erhalten. Für kleine Radien sind die Ergebnisse nicht eindeutig, da sich die experimentellen Formfaktoren besonders für große q-Werte durch verschiedene Funktionen $\varrho(r)$ reproduzieren lassen. Bei den Nukleonen kommen noch zwei erschwerende Faktoren hinzu. Erstens hat man es nicht nur mit elastischer Streuung zu tun, und zweitens braucht man für den Zusammenhang zwischen Formfaktor und Ladungsdichteverteilung über die Fourier-Transformation relativistisch invariante Lösungen. Diese lassen sich aber nicht angeben.

Mit den heute zur Verfügung stehenden experimentellen Daten und theoretischen Mitteln läßt sich mit einer Fourier-Transformation im Massenmittelpunkt-System auf der Grundlage der Dipolformel (6.36b) eine Ladungsdichteverteilung

$$\varrho(r) = \varrho_0\, \mathrm{e}^{-\alpha r} \tag{6.37}$$

angeben. Darin ist $\alpha = 4{,}25 \cdot 10^{15}\ \mathrm{m}^{-1}$ und $\varrho_0 = 5{,}88 \cdot 10^{-26}\ \mathrm{C} \cdot \mathrm{m}^{-3}$. Der mittlere quadratische Radius ergibt sich zu

$$\sqrt{\langle r^2 \rangle} = 0{,}80 \cdot 10^{-15}\ \mathrm{m}\,. \tag{6.38}$$

Die physikalische Bedeutung dieser Aussagen ist allerdings mit einer bestimmten Vorsicht zu betrachten, da ein im M-System ruhendes, also im L-System bewegtes, Nukleon zugrunde liegt.

6.3. Ruh- und Bindungsenergien

6.3.1. Relative und absolute Masseneinheiten

Die chemische Atommassenskala beruht auf der Masseneinheit 1/16 der Atommasse von Sauerstoff. Die physikalische Atommassenskala hatte zur Masseneinheit 1/16 der Atommasse des Nuklids ${}^{16}_{8}\mathrm{O}_8$, d. h. eines der drei im natürlichen Sauerstoff enthaltenen Isotope. Wenn auch die

Isotope ^{17}O und ^{18}O nur mit geringen Anteilen im Sauerstoff enthalten sind, so ergeben sich doch merkliche Abweichungen zur chemischen Atommassenskala. Seit 1961 wird auf Beschluß der IUPAP (*I*nternational *U*nion of *P*ure and *A*pplied *P*hysics) und der IUPAC (*I*nternational *U*nion of *P*ure and *A*pplied *C*hemistry) eine gemeinsame Atommassenskala benutzt. Die Atommasse ist hier auf das Nuklid $^{12}_{6}C_6$ mit $A = 12$ bezogen. Diese Festlegung hat den Vorteil, daß ^{12}C in einer sehr großen Zahl chemischer Verbindungen mit fast allen chemischen Elementen vorkommt, so daß die Massenspektroskopie auf ein ausreichendes Spektrum an Verbindungen aller Elemente zurückgreifen kann. Die Umrechnung der neuen atomaren Masseneinheit u und der Masseneinheit der früheren physikalischen Skala mit 1 ME = 1/16 Masse von ^{16}O erfolgt über den Zusammenhang

$$1 m_u = 1\,\mathrm{u} = (1/12)\ \text{Masse von}\ ^{12}C = 1{,}000317917\ \mathrm{ME}\,. \tag{6.40}$$

Für den Übergang zu absoluten Massen erhält man aus der in Gramm ausgedrückten Atommasse (in der Kernphysik die Massenzahl A) und der Avogadro-Konstante $N_A = 6{,}022045 \cdot 10^{23}\,\mathrm{mol}^{-1}$

$$1 m_u = (\mathrm{g\,mol}^{-1}) \cdot N_A^{-1} = 1{,}660565 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}\,. \tag{6.41}$$

Die Umrechnung in Energieeinheiten liefert mit dem Einsteinschen Zusammenhang $E = mc^2$

$$1\,\mathrm{u} \mathrel{\hat{=}} 0{,}931501 \cdot 10^6\,\mathrm{eV}\,. \tag{6.42}$$

In den Massenwerttabellen gibt man gewöhnlich die Masse der Atome an. Die Kernmasse ergibt sich als Differenz von Atom- und Hüllenmasse. Die Bindungsenergie der Elektronen kann für die meisten Zwecke vernachlässigt werden.

6.3.2. Bindungs-, Separations- und Paarenergie

1. Experimentell wurde gefunden, daß die Kernmasse kleiner ist als die Summe der den Kern aufbauenden Einzelmassen der Nukleonen. Der Massendefekt beträgt

$$\Delta m = Z m_p + N m_n - m_K(Z, N) > 0\,. \tag{6.43}$$

Das Energieäquivalent des Massendefekts ist die Bindungsenergie E_B des Kerns

$$E_B = \Delta m c^2 = \Delta E_0 > 0\,. \tag{6.44}$$

Die Bindungsenergie des Kerns wird beim Aufbau des Kerns frei; sie muß aufgewendet werden, wenn der Kern in die ihn aufbauenden Nukleonen zerlegt werden soll. Sie ist ein Maß für die Kernstabilität. Ein Kern ist um so stabiler, je größer seine Bindungsenergie ist.

Spezielle Bindungs- und Separationsenergien wurden für die Nukleonen und für Nukleonengruppen eingeführt:

$$E_B^{(p)} = E_S^{(p)} = E_B(N, Z) - E_B(N, Z - 1)\,, \tag{6.45}$$

$$E_B^{(n)} = E_S^{(n)} = E_B(N, Z) - E_B(Z, N - 1)\,, \tag{6.46}$$

$$E_B^{(\alpha)} = E_S^{(\alpha)} = E_B(N, Z) - E_B(N - 2, Z - 2) - E_B(Z = N = 2)\,. \tag{6.47}$$

Bei der Berechnung der Bindungsenergie des α-Teilchens im Kern gemäß (6.47) wurde berücksichtigt, daß es erst gebildet werden muß und dabei seine Bindungsenergie $E_B(\alpha) = E_B(Z = N = 2)$ frei wird. In der Tabelle 6.2 sind einige Bindungs- und Separationsenergien angegeben.

2. Eine aufschlußreiche Größe ist die Bindungsenergie pro Nukleon, die spezifische Bindungsenergie $\varepsilon = E_B/A$. Eine Übersicht geben Tabelle 6.2 und Abb. 6.11. Sieht man von

Tabelle 6.2
Einige Kernbindungs- und Separationsenergien

Nuklid	Z	A	N	m_u/u	E_B/MeV	$\frac{E_B}{A}\Big/$MeV
${}^1_0n_1$	0	1	1	1,0086652		
${}^1_1H_0$	1	1	0	1,0078252		
${}^2_1D_1$	1	2	1	2,0141022	2,2247	1,112
${}^3_1T_2$	1	3	2	3,0160497	8,4823	2,827
${}^4_2He_2$	2	4	2	4,0026033	28,2950	7,074
${}^{12}_6C_6$	6	12	6	12,0000000	92,1605	7,680
${}^{16}_8O_8$	8	16	8	15,9949150	127,6170	7,976
${}^{120}_{50}Sn_{70}$	50	120	70	119,90221	1020,55	8,51
${}^{181}_{73}Ta_{108}$	73	181	108	180,94803	1452,24	8,02
${}^{238}_{92}U_{146}$	92	238	146	238,05081	1801,72	7,58

den leichtesten Kernen ab, dann ist in grober Näherung E_B/A eine Konstante. Sie beträgt ca. 8 MeV. Diese Konstante spiegelt den Sättigungscharakter der Kernkräfte wider, d. h. die Tatsache, daß jedes Nukleon nur mit einer beschränkten Anzahl benachbarter Nukleonen wechselwirkt. Der Begriff des Sättigungscharakters ist auch von anderen Kräften bekannt, z. B. von der homöopolaren (kovalenten) chemischen Bindung.

Zwei Wasserstoffatome vereinen sich z. B. zu einem Wasserstoffmolekül, weil es energetisch vorteilhafter ist, wenn sich in der K-Schale zwei Elektronen anstelle von einem befinden. Im H_2-Molekül werden bei den Wasserstoffkernen beide Elektronen genutzt. Die Bindungsfähigkeit, ihre Valenz, wird dadurch voll abgesättigt. Nach außen ist das Molekül neutral. Es zeigt sehr wenig Reaktionsneigung. Im Gegenteil dazu ist atomarer Wasserstoff sehr reaktionsfreundig. Ähnliche Verhältnisse liegen bei der Kernkraft zwischen den Nukleonen vor. Wäre die Kernkraft langreichweitig, dann würde sie viele Nukleonen erfassen. Das würde in Anbetracht der großen Stärke der Kernkraft zu einer noch größeren Bindungsenergie führen. Bei der langreichweitigen Coulomb-Kraft, die mit r^{-2} abnimmt, ist der entsprechende Anteil an Bindungsenergie zwischen einem und den restlichen Kernprotonen durch $E_B^{(C)} \sim e(Z-1)\,e$ und zwischen allen Kernprotonen durch $Ze(Z-1)\,e$ gegeben. Aus der Unabhängigkeit der spezifischen Bindungsenergie des Kerns von A folgt daher die Kurzreichweitigkeit. Das heißt, die Nukleonen wechselwirken mit einem oder höchstens mit zwei oder drei benachbarten Nukleonen über die starke Wechselwirkung, nicht aber mit $A-1$. Diese Überlegungen werden auch durch die von A fast unabhängige Kerndichte (6.31) bestätigt.

Die spezifische Bindungsenergie ε ist, wie man deutlich aus Abb. 6.11 sieht, nicht genau konstant. Bei $A \approx 56$, d. h. im Gebiet um Eisen, gibt es ein Maximum mit 8,8 MeV. Nach beiden Seiten fällt ε ab. Die Kerne im Maximum sind am stabilsten. Das wird auch dadurch bestätigt, daß sich die leichtesten Kerne im Prinzip durch Fusion zu mittelschweren Kernen vereinigen lassen, da diese energetisch günstiger sind, d. h. Bindungsenergie frei wird. Die schwersten Kerne haben eine Tendenz zur Spaltung und werden dabei ebenfalls in mittelschwere Kerne umgewandelt. Auch das ist energetisch vorteilhaft, die überschüssige Bindungsenergie wird dabei freigesetzt.

In Abb. 6.12 ist die spezifische Bindungsenergie für Kerne mit $A < 30$ über A aufgetragen. Es wird eine Vielzahl relativer Maxima und Minima beobachtet. Die Maxima liegen bei ${}^4_2He_2$, ${}^8_4Be_4$, ${}^{12}_6O_6$, ${}^{16}_8O_8$, ${}^{20}_{10}Ne_{10}$ usw., d. h., es handelt sich um gg-Kerne. Jeder dieser Kerne enthält die gleiche Zahl jeweils gepaarter Protonen und Neutronen. Offentlichtlich ist die

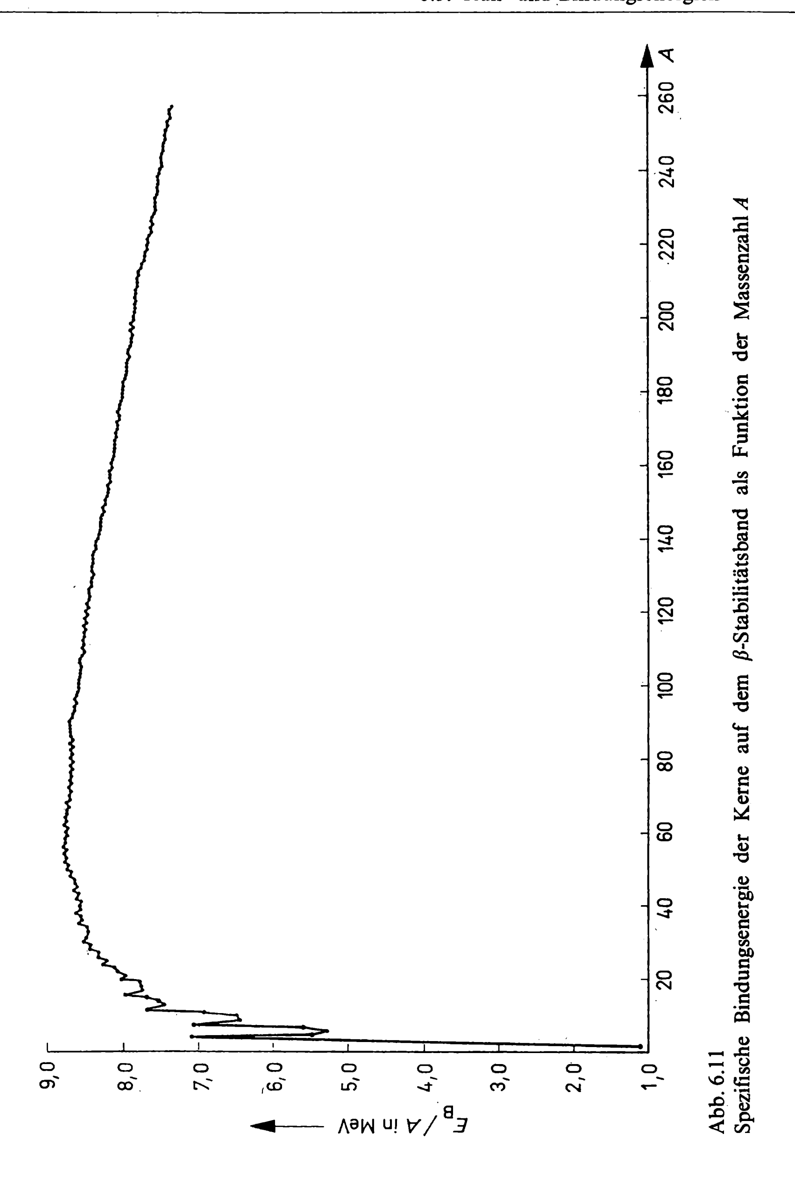


Abb. 6.11
Spezifische Bindungsenergie der Kerne auf dem β-Stabilitätsband als Funktion der Massenzahl A

Vereinigung zweier gleichartiger Nukleonen zu einem Paar vorteilhaft. Dieser Gedanke wird dadurch gestützt, daß die relativen Minima gerade für uu-Kerne, d. h. für ${}^{2}_{1}D_1$, ${}^{6}_{3}Li_3$, ${}^{10}_{5}B_5$, ${}^{14}_{7}N_7$ usw., auftreten. Die Messungen zeigen, daß für alle Kerne, ungeachtet der Größe von A, ungepaarte Nukleonen weniger fest gebunden sind. Die in Abb. 6.13 dargestellte Abhängigkeit der Bindungsenergie $E_B^{(n)} = E_S^{(n)}$ der Neutronen in Kernen mit geradem Z im Gebiet von Zirconium mit $Z = 40$ als Funktion von N bestätigt diese Schlußfolgerung.

3. Der energetische Vorteil, der durch Paarbildung erzielt wird, kann durch die Paarenergie fixiert werden. Man betrachtet zur Definition der Paarungsenergie der Neutronen einen

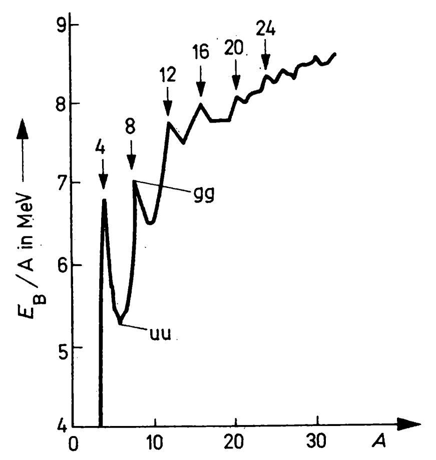


Abb. 6.12
Spezifische Bindungsenergie der leichten Kerne als Funktion der Massenzahl A

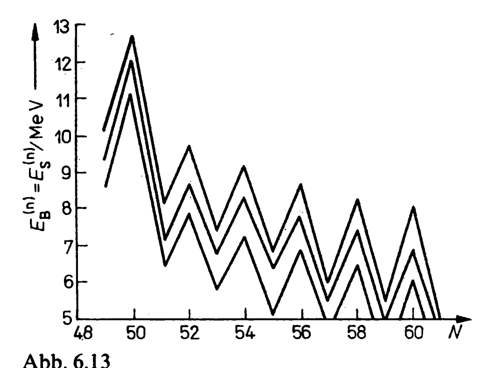


Abb. 6.13
Bindungs- bzw. Separationsenergie des Neutrons als Funktion der Neutronenzahl bei gerader Protonenzahl im Gebiet um Zirconium (Z = 42, 40, 38 von oben nach unten)

Kern mit Z Protonen und einer geraden Anzahl N Neutronen. Dann sei die Paarungsenergie die Differenz der Bindungsenergie zweier ungepaarter Neutronen und eines Neutronenpaares:

$$E_P^{(n)} = 2E_B^{(n)} - E_B^{(2n)} = [2E_B(Z, N) - 2E_B(Z, N-1)] - [E_B(Z, N) - E_B(Z, N-2)] , \tag{6.48}$$

$$E_P^{(n)} = E_B(Z, N) - 2E_B(Z, N-1) + E(Z, N-2) ,$$
$$E_P^{(n)} = E_S^{(n)}(Z, N) - E_S^{(n)}(Z, N-1) . \tag{6.49}$$

Die letzte Gleichung ermöglicht noch die folgende Definition der Paarenergie: Es ist die Energie, die aufgewendet werden muß, um aus einem Kern mit einer geraden Anzahl von Neutronen eins herauszulösen. Da diese Betrachtungen unabhängig von den speziellen Eigenschaften der Neutronen sind, können sie unmittelbar auf Protonen übertragen werden:

$$E_P^{(p)} = 2E_B^{(p)} - E_B^{(2p)} = E_S^{(p)}(N, Z) - E_S^{(p)}(Z - 1, N) . \tag{6.50}$$

In Tabelle 6.3 sind die Neutronenseparations- und Paarenergien für die Ca-Isotope angegeben. Man sieht, daß die Separationsenergie $E_S^{(n)}$ für ungepaarte Neutronen kleiner ist als für gepaarte Neutronen. Zur Entfernung eines ungepaarten Neutrons aus einem g-N-Kern muß dieses nicht nur aus dem Kern entfernt, sondern vorher ein Neutronenpaar aufgebrochen werden. Daher ist die Paarenergie in Höhe von ca. 3 MeV zusätzlich aufzuwenden, wenn ein gepaartes Neutron entfernt, also ein Paar aufgebrochen werden soll.

Tabelle 6.3
Neutronenseparations- und Paarenergien der Ca-Isotope

Isotop	${}^{38}_{20}Ca_{18}$	${}^{39}_{20}Ca_{19}$	${}^{40}_{20}Ca_{20}$	${}^{41}_{20}Ca_{21}$	${}^{42}_{20}Ca_{22}$	${}^{43}_{20}Ca_{23}$	${}^{44}_{20}Ca_{24}$
$E_S^{(n)}$/MeV	20,86	13,22	15,80	8,02	11,82	7,75	11,15
$E_P^{(n)}$/MeV	1,95	−6,69	2,59	−7,79	3,81	−3,07	3,39

Isotop	${}^{45}_{20}Ca_{25}$	${}^{46}_{20}Ca_{26}$	${}^{47}_{20}Ca_{27}$	${}^{48}_{20}Ca_{28}$	${}^{49}_{20}Ca_{29}$	${}^{50}_{20}Ca_{30}$
$E_S^{(n)}$/MeV	7,49	10,47	7,30	9,79	5,00	6,79
$E_P^{(n)}$/MeV	−3,65	2,98	−3,24	2,56	−4,79	1,79

Aus Tabelle 6.3 ist noch eine zweite Gesetzmäßigkeit entnehmbar, die systematische Änderung von S_n und P_n vor, zwischen und nach den Neutronenzahlen 20 und 28. Darauf soll bei der Erörterung der magischen Zahlen eingegangen werden.

6.3.3. Experimentelle Methoden

Im Experiment können Massen und Massenunterschiede bzw. ihre Energieäquivalente bestimmt werden. Man unterscheidet in der Kernphysik vier grundsätzlich verschiedene Methoden: Massen-, Zerfalls-, Reaktions- und Hochfrequenzspektrometrie. Da die erste und letzte dieser Methoden nicht zu den typisch kernphysikalischen gerechnet werden können, behandeln wir nur die zweite und dritte ausführlich. In der Elementarteilchenphysik sind spezielle Methoden entwickelt worden. Sie lassen sich aber in die Einteilung Massen-, Zerfalls- und Reaktionsspektrometrie einordnen. Die verbreitetste Methode der Elementarteilchenphysik zur Bestimmung der Masse oder Ruhenergie der Elementarteilchen ist der kombinierte Einsatz homogener magnetischer Querfelder und Spurendetektoren. Das Magnetfeld dient als Impulsfilter, in dem es eine Krümmung der Teilchen hervorruft, deren Radius gemäß (5.69) eine eindeutige Funktion der Teilchenmasse ist, aber auch von ihrer Geschwindigkeit abhängt. Bestimmt man gleichzeitig die mittlere Reichweite $\langle R \rangle$ der Teilchen in dem Spurendetektor, die nach (4.10) von der kinetischen Energie abhängt, dann läßt sich die Geschwindigkeit eliminieren.

6.3.3.1. Massenspektrometrie

Die Massenspektrometer sind im Abschnitt 5.8.1. als eine Art des Ablenkspektrometers behandelt worden. Es gibt sehr unterschiedliche Ausführungen, die sich durch die Art der Kombination elektrischer und magnetischer Felder und durch die Art der Teilchendetektierung unterscheiden. Die relativen Fehler der Massenbestimmung der Nuklide betragen heute bis

zu 10^{-6}, d. h., die Bindungsenergie der Kerne wird bis auf $10^{-2}\%$ genau ermittelt. Bei 1 MeV sind das allerdings immer noch 0,1 keV!

6.3.3.2. Zerfallsspektroskopie

Die Zerfallsspektroskopie gestattet, den Massen- bzw. den Energieunterschied zu bestimmen, der zwischen zwei durch einen Zerfallsprozeß miteinander verbundenen Kernen besteht. In Abb. 6.14 sind drei Zerfallsmöglichkeiten der Kerne dargestellt, der α-, β^-- und β^+-Zerfall. Ein Zerfall ist laut (2.24) immer dann möglich, wenn die Summe der Ruhenergie der Zerfallsprodukte kleiner ist als die Ruhenergie des Mutterkerns und wenn er nicht durch Erhaltungssätze verboten ist. In Kernruhenergien ausgedrückt, lautet die Bedingung für den radioaktiven Zerfall also:

$$E_{0\mathrm{K}}(A, Z) > \sum_i E_{0i}(A_i \leqq A; Z_i \leqq Z)\,. \tag{6.51}$$

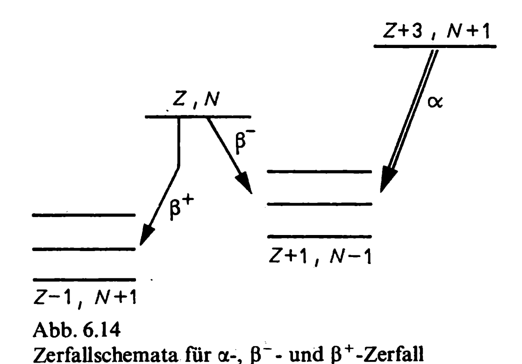


Abb. 6.14
Zerfallschemata für α-, β^-- und β^+-Zerfall

Der Differenzbetrag tritt in Form von kinetischer Energie auf oder, wenn der Zerfall nicht in den Grundzustand des Tochterkerns erfolgt, auch in Form von Anregungsenergie. Wir betrachten die am häufigsten vorkommenden Zerfallsarten gesondert.

1. Beim α-Zerfall mit der Zerfallsgleichung (2.26) gilt:

$$E_0(A, Z) = E_0(\mathrm{R}) + E_0(\alpha) + E_\mathrm{k}(\mathrm{R}) + E^*(\mathrm{R}) + E_\mathrm{k}(\alpha)\,. \tag{6.52}$$

Die Abkürzung R steht für Rückstoßkern und kann durch A-4, Z-2 oder N-2, Z-2 ersetzt werden. $E^*(\mathrm{R})$ ist die Anregungsenergie des Rückstoßkerns. Die Summe der kinetischen Energien ist gemäß (2.25) die Zerfallsenergie E_Q. Es ist also beim α-Zerfall

$$E_Q(\alpha) = E_\mathrm{k}(\mathrm{R}) + E_\mathrm{k}(\alpha) = E_0(A, Z) - E_0(\mathrm{R}) - E_0(\alpha) - E^*(\mathrm{A})\,. \tag{6.53}$$

Nur wenn $E_Q(\alpha) > 0$ ist, kann der α-Zerfall stattfinden. Da $E_0(\alpha)$ bekannt ist, $E_\mathrm{k}(\mathrm{R})$, $E^*(\mathrm{R})$ und $E_\mathrm{k}(\alpha)$ gemessen werden können, verbleiben in (6.53) als Bestimmungsgrößen $E_0(A, Z)$ und $E_0(\mathrm{R})$. Ist eine davon bekannt, dann kann die andere aus dem α-Zerfall ermittelt werden.

Zwischen $E_\mathrm{k}(\mathrm{R})$ und $E_\mathrm{k}(\alpha)$ besteht eine einfache Beziehung, die aus Energie- und Impulserhaltung folgt, wenn angenommen wird, daß der Impuls des zerfallenen Kerns $p_\mathrm{R}(N, Z) = 0$ ist, weil dann auch im L-System $|\boldsymbol{p}_\alpha| = |-\boldsymbol{p}_\mathrm{R}|$ gilt. Folglich ist

$$E_\mathrm{k}(\mathrm{R}) = E_\mathrm{k}(\alpha) \cdot \frac{E_0(\alpha)}{E_0(\mathrm{R})}\,. \tag{6.54}$$

Einsetzen in (6.53) mit $E^*(\mathrm{R}) = 0$ liefert

$$E_\mathrm{k}(\alpha) = E_Q \frac{E_0(\alpha)}{E_0(\alpha) + E_0(\mathrm{R})} \,. \tag{6.55}$$

Den größten Teil der kinetischen Energie trägt das α-Teilchen fort. Ein geringer Teil, der bei den schweren Kernen etwa 2% beträgt, wird vom Rückstoßkern übernommen.

2. Beim β^--Zerfall geht eine Umwandlung der Form

$$^A_Z X_N \rightarrow {}^A_{Z+1}X_{N-1} + \mathrm{e}^- + \bar{\nu} \tag{6.56}$$

vor sich. Die Energiebilanz lautet

$$E_0(A, Z) = E_0(\mathrm{R}) + E^*(\mathrm{R}) + E_\mathrm{k}(\mathrm{R}) + E_0(\mathrm{e}) + E_\mathrm{k}(\mathrm{e}) + E(\bar{\nu}) \,. \tag{6.57}$$

Die Abkürzung R steht hier für einen Kern mit $Z + 1, N - 1$. Die kinetische Energie des Tochterkerns ist, wie sich leicht zeigen läßt, vernachlässigbar klein. Nehmen wir an, daß das Elektron die sich normalerweise auf Elektron und Antineutrino verteilende Energie vollständig übernimmt, also die Energie $E_{\mathrm{k,\,max}}(\mathrm{e})$ hat, dann gilt mit $E^* = 0$

$$E_0(A, Z) = E_0(\mathrm{R}) + E_0(\mathrm{e}) + E_{\mathrm{k,\,max}} \,. \tag{6.58}$$

Ermittelt man $E_{\mathrm{k,\,max}}(\mathrm{e})$ experimentell als Grenzenergie des β-Spektrums mit Hilfe eines Betaspektrometers, dann läßt sich bei Kenntnis der einen der beiden Kernruhenergien die andere bestimmen. Den Zusammenhang mit den tabellierten Atommassen erhält man durch Addition von Z Elektronenruhenergien auf beiden Seiten von (6.58)

$$E_\mathrm{Atom}(A, Z) = E_\mathrm{Atom}(A, Z + 1) + E_{\mathrm{k,\,max}}(\mathrm{e}) \,. \tag{6.59}$$

Die Betazerfallsenergie $E_Q(\beta^-)$ (6.64) ist identisch mit der kinetischen Maximalenergie der Elektronen des β^--Spektrums. Beim Zerfall von $^3_1\mathrm{H}_2$ in $^3_2\mathrm{He}_1$, mit $T_{1/2} = 12{,}26\,\mathrm{a}$ beträgt sie z. B. 18 keV.

3. Beim β^+-Zerfall findet eine Umwandlung der Form

$$^A_Z X_N \rightarrow {}^A_{Z-1}X_{N+1} + \mathrm{e}^+ + \nu \tag{6.60}$$

statt. Für die Energiebilanz erhält man unter Berücksichtigung der bei der Ableitung von (6.58) gemachten Voraussetzungen

$$E_0(A, Z) = E_0(\mathrm{R}) + E_0(\mathrm{e}) + E_{\mathrm{k,\,max}}(\mathrm{e}) \,. \tag{6.61}$$

Den Übergang zu den Atommassen vollzieht man durch Addition von Z Elektronenmassen auf beiden Seiten. Es ergibt sich

$$E_\mathrm{Atom}(A, Z) = E_\mathrm{Atom}(\mathrm{R}) + 2E_0(\mathrm{e}) + E_{\mathrm{k,\,max}}(\mathrm{e}) \,. \tag{6.62}$$

Auch hier kann nach der experimentellen Bestimmung von $E_{\mathrm{k,\,max}}(\mathrm{e})$ eine der beiden Ruhenergien ermittelt werden. Die Zerfallsenergie beträgt

$$E_Q(\beta^+) = E_\mathrm{Atom}(A, Z) - E_\mathrm{Atom}(A, Z - 1) - 2E_0(\mathrm{e}) \,, \tag{6.63}$$

ganz im Gegensatz zum Fall des β^--Zerfalls mit

$$E_Q(\beta^-) = E_\mathrm{Atom}(A, Z) - E_\mathrm{Atom}(A, Z + 1) \,. \tag{6.64}$$

4. Als Beispiel aus der Elementarteilchenphysik betrachten wir den Zerfall des positiven Pimesons und des dabei entstehenden Myons. Als bekannt können wir die Ruhenergien dieser beiden Teilchen voraussetzen. Sie wurden aus der Ablenkung im magnetischen Querfeld mit

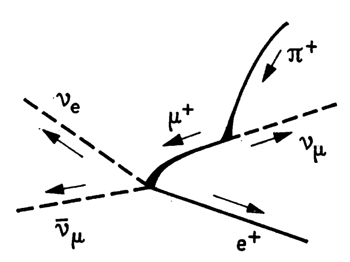


Abb. 6.15
Rekonstruktion der in einer Kernemulsion durch die Produkte eines π^+-μ^+-Zerfalls verursachten Spuren

kleinem Fehler bestimmt. Die Abb. 6.15 zeigt die rekonstruierten Spuren der Zerfallsprodukte. Daß es sich im Bild oben rechts um ein positiv geladenes Pion und nach dem ersten Zerfall um ein positives Myon handelt, folgt aus einer Analyse dieser Spuren nach ihrer Krümmung im magnetischen Querfeld und aus der spezifischen Ionisation. Die Untersuchung vieler solcher Aufnahmen in Kernemulsionen zeigt, daß die Reichweite der auftretenden Myonen immer etwa gleich groß ist. Als mittlere Reichweite $\langle R \rangle(\mu)$ fand man etwa 600 µm, was einer kinetischen Energie $E_k(\mu) = 4$ MeV entspricht. Ein Einteilchenzerfall ist nicht möglich, da für ihn Energie- und Impulssatz nicht gleichzeitig erfüllt werden können. Außerdem zeigt die Differenz

$$E_0(\pi) - E_0(\mu) = 33 \text{ MeV}, \tag{6.65}$$

daß weit mehr Energie freigesetzt wird als die 4 MeV, die das Myon mitnimmt. In Anhang B 3.5. wird gezeigt, daß solche festen Werte der kinetischen Energie nur bei Zerfallsprodukten aus dem Zweiteilchenzerfall auftreten. Da eine dritte Spur nicht beobachtet wird, muß angenommen werden, daß es sich um ein neutrales Teilchen handelt. Ein Photon kann es nicht sein, denn dieses würde bei der großen Energie von (33 — 4) MeV = 29 MeV Elektron-Positron-Paare erzeugen. Die Ruhenergie $E_0(\text{X})$ des neutralen Teilchens läßt sich berechnen. Aus Energie- und Impulssatz folgt

$$E_0^2(\text{X}) = [E_0(\pi) - E_0(\mu)]^2 - 2E_0(\pi)\, E_k(\mu)\,. \tag{6.66}$$

Setzt man alle Werte ein, so ergibt sich $E_0(\text{X}) = 0$. Da es nicht das Photon sein kann, liegt der Schluß nahe, daß es sich um ein Neutrino handelt. Aus dem Satz von der Erhaltung der Leptonenladung folgt, daß es ein Neutrino sein muß. Andere Untersuchungen zeigten, daß dieses Neutrino nicht mit dem aus dem β-Zerfall bekannten identisch ist. Man nennt es myonisches Neutrino.

Der Zerfall des positiven Myons zeichnet sich auch dadurch aus, daß nur eine sichtbare Spur auftritt. Aus e/m-Messungen im magnetischen Feld und aus der spezifischen Ionisation folgt eindeutig, daß es sich um die Spur eines Positrons handelt. Da die Länge der Spur von Aufnahme zu Aufnahme unterschiedlich ist, kann es sich gemäß Anhang B 3.5. nicht um einen Zweiteilchenzerfall handeln. Andererseits ist der Satz der Leptonenladung nur erfüllbar, wenn ein elektronisches Neutrino und ein myonisches Antineutrino emittiert werden. Für diesen Dreiteilchenzerfall sind alle experimentellen Daten erklärbar. Es gilt also

$$\pi^+ \to \mu^+ + \nu_\mu\,; \qquad \mu^+ \to e^+ + \bar{\nu}_\mu + \nu_e\,. \tag{6.67}$$

5. Als zweites Beispiel aus der Elementarteilchenphysik betrachten wir die Bestimmung der Ruhenergie, bzw. der Masse des 1983 beim Zerfall der Mesonenresonanz

$$\text{J}, \Psi(3, 10) \to \xi + \gamma \tag{6.68}$$

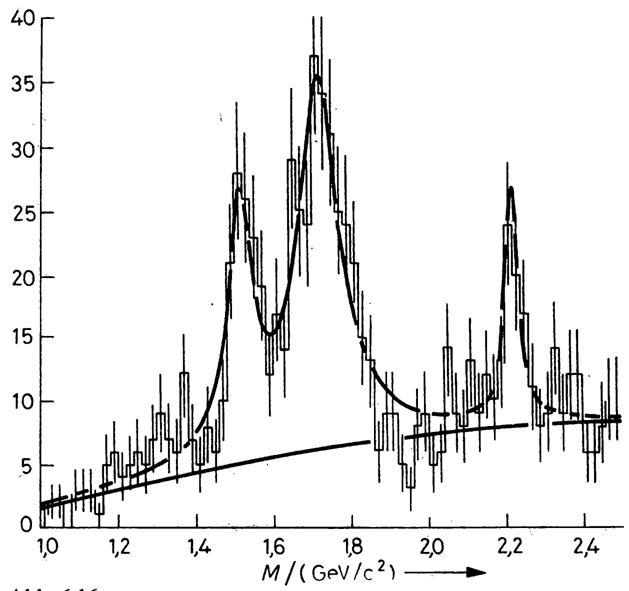


Abb. 6.16
Das K^+K^--Massenspektrum, welches beim Zerfall J, $\psi \to \gamma K^+K^-$ mit Hilfe des MARK-III Detektors am SPEAR-Speicherring des Stanford Linear Accelerator Centers beobachtet wurde. Als Abszisse wird die an Hand von Formel (6.70) berechnete Masse des K^+K^--Systems gezeichnet. Die beiden Maxima bei 1,5 und 1,7 GeV/c^2 rühren von den bekannten f'- und Θ-Mesonen her. Das Maximum bei M = 2,22 GeV/c^2 wurde als Evidenz für das neue Teilchen ξ gedeutet (Ordinate N).

entdeckten ξ-Teilchens, über dessen Interpretation bisher noch keine völlige Klarheit herrscht. Die Zahl in der Klammer gibt die Invarianzmasse in GeV/c^2 an. J, Ψ(3, 10) wird als niederenergetischste Resonanz des Charmoniumsystems gedeutet, d. h. als gebundener Zustand aus einem Charm- (c) und einem Anticharm- ($\bar{c}$) Quark. Bei ihrem Zerfall wurden im Photonenspektrum drei Maxima gefunden; sie sind in Abb. 6.16 gezeigt. Zwei davon rühren von den bekannten Mesonen f'(1, 525) und Θ(1, 690) her. Das dritte Maximum wird von einem neuen Teilchen verursacht, dem ξ. Man ordnet die drei Maxima einem Zerfall zu, in dessen Ergebnis ein Meson mit der Masse M(M) und Photonen der Energie E_γ auftreten. Aus der Kinematik des Zweiteilchenzerfalls folgt mit (B. 93)

$$E_\gamma = \frac{M^2(\mathrm{J}, \Psi)\, c^4 - M^2(\mathrm{M})\, c^4}{2M(\mathrm{J}, \Psi)} \tag{6.69}$$

oder, da die Ruhenergie des J, Ψ und die Energie des Photons bekannt sind, ergibt sich für die Ruhenergie des Mesons

$$M(\mathrm{M})\, c^2 = \sqrt{M^2(\mathrm{J}, \Psi)\, c^4 - 2M(\mathrm{J}, \Psi)\, c^2 \mathrm{E}_\gamma}\,. \tag{6.70}$$

Daraus folgt $M(\xi)$ = 2,22 GeV/c^2, d. h., man kann schreiben ξ(2, 22).

6.3.3.3. Reaktionsspektroskopie

Die Reaktionsspektroskopie gestattet die Bestimmung der Energieunterschiede zwischen den an der Reaktion beteiligten Zuständen. Wir behandeln hier drei Beispiele, in denen nur Grundzustände der Reaktionspartner beteiligt sind.

1. Die Ruhenergie des Neutrons läßt sich nicht mit dem Massenspektrometer bestimmen, da es ungeladen ist. CHADWICK bestimmte 1932 die Neutronenmasse durch Analyse der experimentellen Ergebnisse der Bestrahlung von Stickstoff und Wasserstoff mit Neutronen in einer Nebelkammer über Impuls- und Energieerhaltung.

Wir wählen die folgende Reaktion zur Bestimmung der Neutronenmasse:

$$^{14}_{7}\mathrm{N}_7 + {}^{1}_{0}\mathrm{n}_1 \to {}^{1}_{1}\mathrm{p} + {}^{14}_{6}\mathrm{C}_8\,; \qquad E_\mathrm{k}(\mathrm{n}) = \frac{1}{40}\,\mathrm{eV}\,. \tag{6.71}$$

Die Benutzung thermischer Neutronen zur Auslösung der Reaktion hat den Vorteil, daß $\boldsymbol{p}_\mathrm{n} \approx 0$ gesetzt werden kann und daß $E_\mathrm{k}(\mathrm{n})$ eindeutig feststeht. Die Energie der Protonen wird im Experiment, z. B. in der Nebelkammer über Reichweite und Krümmung, zu $E_\mathrm{k}(\mathrm{p}) = 0{,}585$ MeV bestimmt. Die Energiebilanz der Reaktion lautet

$$E_0(^{14}\mathrm{N}) + E_0(\mathrm{n}) = E_0(^{14}\mathrm{C}) + E_0(\mathrm{p}) + E_\mathrm{k}(^{14}\mathrm{C}) + E_\mathrm{k}(\mathrm{p})\,. \tag{6.72}$$

Um auf die Ruhenergien der Atome zu kommen, wird auf beiden Seiten $7E_0(\mathrm{e})$ zugefügt. Das ergibt

$$E_0(\mathrm{n}) = E_\mathrm{Atom}(^{14}\mathrm{C}) - E_\mathrm{Atom}(^{14}\mathrm{N}) + E_\mathrm{Atom}(^{1}\mathrm{H}) + E_\mathrm{k}(\mathrm{p}) + E_\mathrm{k}(^{14}\mathrm{C})\,. \tag{6.73}$$

Die Differenz ist aus der Massenspektroskopie zu 0,156 MeV bekannt, die Masse des Wasserstoffatoms ebenfalls. Es verbleibt nur noch $E_\mathrm{k}(^{14}\mathrm{C})$ als unbekannte Größe. Wegen Impulserhaltung und $\boldsymbol{p}_\mathrm{n} \approx 0$ folgt

$$|\boldsymbol{p}_\mathrm{p}| = |-\boldsymbol{p}_{(^{14}\mathrm{C})}| \quad \text{und} \quad v_{(^{14}\mathrm{C})} = v_\mathrm{p} \cdot \frac{E_0(\mathrm{H})}{E_0(^{14}\mathrm{C})} \tag{6.74}$$

und wegen $v = \sqrt{2E_\mathrm{k}/m}$ folgt

$$E_\mathrm{k}(^{14}\mathrm{C}) = E_\mathrm{k}(\mathrm{p}) \cdot \frac{E_0(\mathrm{p})}{E_0(^{14}\mathrm{C})} \tag{6.75}$$

Einsetzen liefert $E_0(\mathrm{n})$.

2. In Abb. 6.17 sind die Energieverhältnisse für die Reaktion $^{10}_{5}\mathrm{B}_5(\mathrm{n}, \alpha)^{7}_{3}\mathrm{Li}_4$ dargestellt. Wenn $^{10}_{5}\mathrm{B}_5$ mit thermischen Neutronen beschossen wird, bildet sich im ersten Stadium einer Compoundkernreaktion der Zwischenkern $^{11}_{5}\mathrm{B}_6$ mit der Anregungsenergie E^*. Wegen der geringen

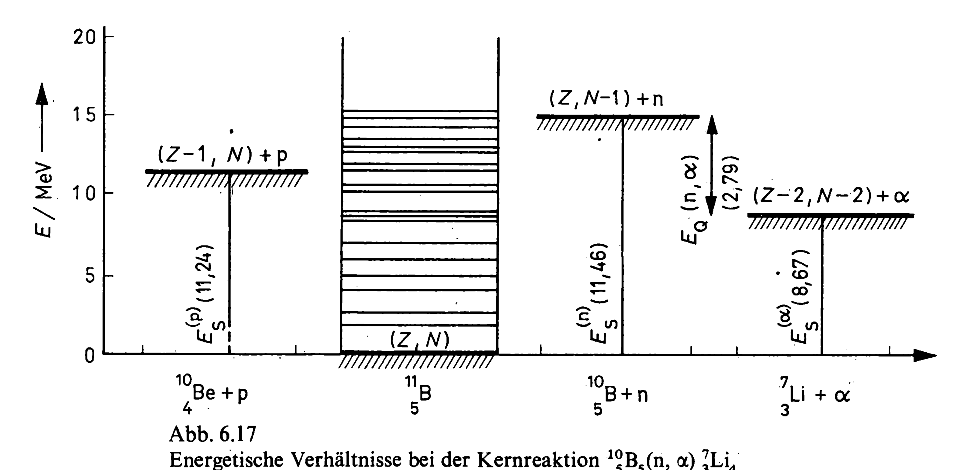


Abb. 6.17
Energetische Verhältnisse bei der Kernreaktion $^{10}_{5}\mathrm{B}_5(\mathrm{n}, \alpha)\, ^{7}_{3}\mathrm{Li}_4$

Energie des Inzidenzteilchens von ca. 0,025 eV kann, wie aus einer Energiebilanz der Reaktion folgt (siehe 10.1.2.) die Anregungsenergie der Separationsenergie $E_S^{(n)} = 11{,}46$ MeV des Neutrons gleichgesetzt werden. Der angeregte Kern zerfällt durch Emission eines α-Teilchens. Dazu wird die Separationsenergie $E_S^{(\alpha)} = 8{,}67$ MeV verbraucht. Die Reaktionsenergie ergibt sich somit zu $E_Q = E_S^{(n)} - E_S^{(\alpha)} = 2{,}79$ MeV. Da E_Q positiv ist, handelt es sich um eine exotherme Reaktion. Auf die Ruhenergie der beteiligten Grundzustände kommt man mit (6.46) und (6.47) über

$$E_Q = E_S^{(n)} - E_S^{(\alpha)} = E_B(Z-2, N-2) - E_B(Z, N-1)\,. \tag{6.76}$$

3. Als Beispiel aus der Elementarteilchenphysik betrachten wir die Bestimmung der Ruhenergie des π^-- und des π^0-Mesons in der Einfangsreaktion

$$\pi^- + p \rightarrow n + \gamma \tag{6.77}$$

und in der Pionenumladereaktion

$$\pi^- + p \rightarrow n + \pi^0\,; \qquad \pi^0 \rightarrow 2\gamma\,. \tag{6.78}$$

Im Gefolge der gleichzeitig ablaufenden Reaktionen treten neben Neutronen auch γ-Quanten auf, deren Energie sich genau bestimmen läßt. Da die Ruhenergien des Protons und des Neutrons bekannt sind, eignen sich die Reaktionen zur Bestimmung der Ruhenergie der beiden Pionen. Die Versuchsanordnung zeigt Abb. 6.18. In einem Synchrozyklotron werden Protonen beschleunigt und auf ein Beryllium-Target gerichtet. Die dabei entstehenden langsamen π^--Mesonen ($\vartheta = 90°$) gelangen auf ein Wasserstofftarget, in dem die Reaktionen (6.77) und (6.78) ablaufen. Das Energiespektrum der γ-Quanten der Reaktion wurde mit Hilfe eines Paarbildungsspektrometers in einem Raum mit geringem radioaktivem Untergrund gemessen.

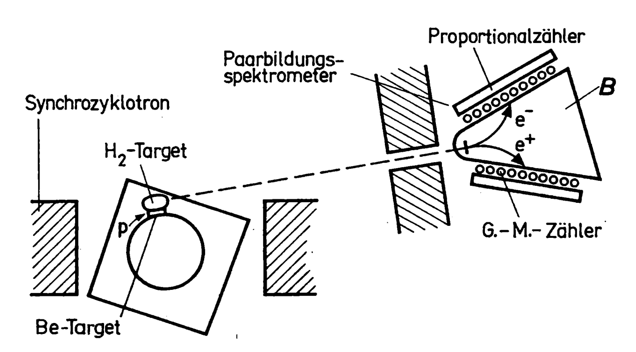


Abb. 6.18
Versuchsanordnung zur Bestimmung der Ruheenergie des negativen und des neutralen Pions

Abb. 6.19 zeigt dieses Spektrum, es enthält bei 131 MeV ein schmales und zwischen 53 und 87 MeV ein breites, niedrigeres Maximum. Das Maximum bei 131 MeV erklärt sich aus der Reaktion (6.77). Die Energiebilanz der Reaktion lautet:

$$E_k(\pi^-) + E_0(\pi^-) + E_0(p) = E_0(n) + E_k(n) + E_\gamma\,. \tag{6.79}$$

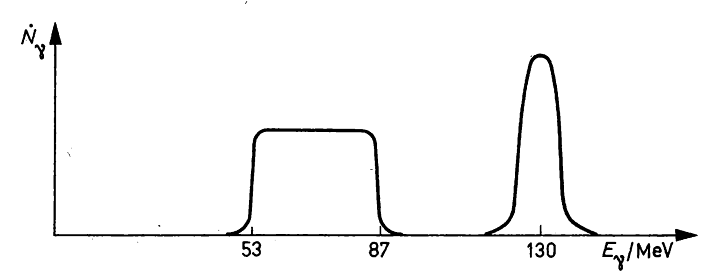


Abb. 6.19
Gammaspektren der Reaktionen (6.77), (6.78)

Die Energie der unter einem festen Winkel beobachteten γ-Quanten hat einen fixierten Wert für den Moment des Einfangs. Also kann man schlußfolgern, daß es sich tatsächlich, wie in (6.77) angenommen, um einen Zweiteilchenzerfall handelt. Da $E_k(\pi^-) \approx 0$ gesetzt werden kann und $\boldsymbol{p}_\gamma = -\boldsymbol{p}_n$ ist, folgt

$$E_0(\pi^-) = E_0(\mathrm{n}) - E_0(\mathrm{p}) + E_\gamma + \frac{E_\gamma^2}{2E_0(\mathrm{n})}. \tag{6.80}$$

Einsetzen der Zahlenwerte lieferte im ersten Versuch $E_0(\pi^-) = (140 \pm 1{,}3)$ MeV.

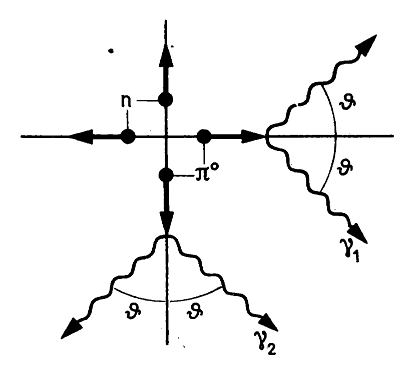


Abb. 6.20
Zur Winkelverteilung der Gammastrahlung im Experiment zur Bestimmung der Ruhenergien des π^- und des π° über die Reaktionen (6.77), (6.78)

Die Energie des π^0-Mesons kann aus den Grenzenergien des breiten Maximums des γ-Spektrums ermittelt werden. Würde das Pion im Ruhezustand zerfallen, dann betrüge die Energie der beiden Annihilationsquanten gemäß Abb. 4.18 $E_\gamma = m_0c^2$, d. h., es ergäbe sich ein fester Wert. Wegen der kurzen Lebensdauer des Myons ($\approx 10^{-6}$ s) erfolgt die Annihilation aber in der Bewegung mit $v \lessapprox c$, d. h., die Energie der γ-Quanten ändert sich infolge Doppler-Effekts. Da die π-Mesonen isotrop in alle Richtungen des Raumes emittiert werden, fallen in den Beobachtungswinkel γ-Quanten mit Energie, die zwischen einem Maximal- und einem Minimalwert liegen. Das veranschaulicht die Abb. 6.20. Die Energie der Pionen ist in allen Richtungen die gleiche, damit auch der Winkel ϑ. Eingezeichnet sind zwei Zerfälle unter einem Winkel

von 90°. Die Extremalenergien der γ-Quanten und die Ruhenergie der Pionen ergeben sich zu

$$E_{\gamma,\,\min} = \frac{E_0(\pi^0)\,(1-\beta)}{2\sqrt{1-\beta^2}}; \qquad E_{\gamma,\,\max} = \frac{E_0(\pi^0)\,(1+\beta)}{2\sqrt{1-\beta^2}} \tag{6.81}$$

$$E_0(\pi^0) = 2\sqrt{E_{\gamma,\,\min}\cdot E_{\gamma,\,\max}}\,. \tag{6.82}$$

Das Ergebnis des ersten Versuches lautete $E_0(\pi^0) = (135{,}4 \pm 1{,}5)$ MeV.

6.3.3.4. Hochfrequenzspektroskopie

Die Energien der Rotationsniveaus der Moleküle hängen vom Trägheitsmoment Θ ab und damit von den Kernmassen. Bei Übergängen zwischen den Rotationsniveaus werden elektromagnetische Wellen im cm-Bereich emittiert. Beim Einbau unterschiedlicher Isotope eines Elements in die Moleküle ergeben sich Frequenzverschiebungen, die mit großer Genauigkeit gemessen werden können. Damit ist auch die Isotopenmasse mit großer Genauigkeit ermittelbar. Für Moleküle eines symmetrischen Rotators ergibt sich für den Übergang von einem Niveau mit dem Spin $J + 1$ auf eines mit dem Spin J der folgende einfache Zusammenhang mit der Frequenz ν des elektromagnetischen Übergangs:

$$\nu = 2J\,\frac{\hbar}{4\pi\Theta} - \alpha\left(v + \frac{1}{2}\right). \tag{6.83}$$

Hier ist α ein Korrekturfaktor, der die Schwingungen des Moleküls berücksichtigt, und v seine Schwingungsquantenzahl.

6.3.4. Energieoberfläche der Nuklide

Trägt man die Gesamtheit aller experimentell bestimmten und mit Hilfe von Modellvorstellungen berechneten Kernruhenergien über dem Z-N-Diagramm auf, dann erhält man wegen eines prinzipiellen Energieunterschiedes der gg-, ug- und gu- sowie uu-Kerne (siehe 8.115) eine dreifach aufgefächerte Energieoberfläche der Gesamtheit aller Nuklide. Die Abb. 6.21, 6.22 zeigen diese dreifache Aufspaltung durch zwei Isobarenschnitte für gg- und uu-Kerne, sowie uA-Kerne. Aus den Eigenschaften der Energieoberfläche lassen sich eine Reihe von wichtigen Schlußfolgerungen ziehen. Hier sollen nur die Isobaren- und Isotopenregeln erörtert werden.

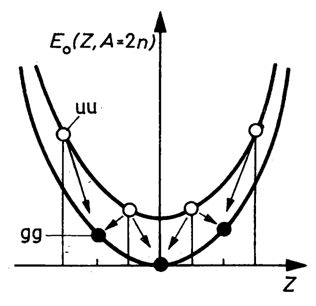


Abb. 6.21
Isobarenschnitte für gg- und uu-Kerne

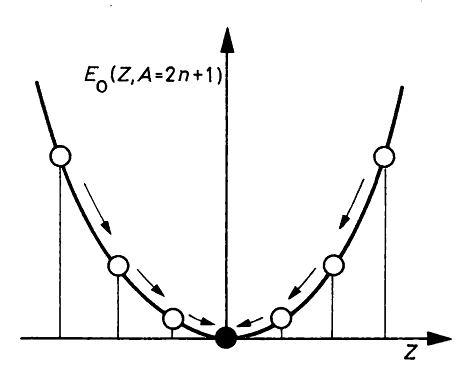


Abb. 6.22
Isobarenschnitt für uA-Kerne

6.3.4.1. Isobarenregeln

1. Die erste Mattauchsche Isobarenregel lautet: Zu jeder ungeraden Atommasse $A = 2n + 1$ gibt es in der Regel nur ein stabiles Isobar. Ein Schnitt durch die Energieoberfläche für $A = 2n + 1 = \text{const}$, wie er in Abb. 6.22 dargestellt ist, zeigt, daß auf Grund der Parabelform der Energieabhängigkeit von Z Kerne auf den „Hängen" des Energietals über eine β-Zerfallskette in einen Kern zerfallen, der auf der „Talsohle" liegt. Voraussetzung ist, daß der Energieunterschied zwischen benachbarten Kernen groß genug ist.

Die beiden scheinbaren Ausnahmen lassen sich dadurch erklären, daß die Halbwertszeit jeweils des einen der zueinander gehörigen Isobarenpaare infolge des großen Spinunterschiedes der Grundzustände so groß ist, daß der Zerfall bisher nicht festgestellt werden konnte. Es sind dies die Isobare $^{113}_{48}\mathrm{Cd}$ ($I = 1/2$), $^{113}_{49}\mathrm{In}$ ($I = 9/2$) und $^{123}_{51}\mathrm{Sb}$ ($I = 7/2$), $^{123}_{52}\mathrm{Te}$ ($I = 1/2$). Bei den Massenzahlen $A = 5$ und $A = 147$ zerfällt der einzige Kern, der gegen β-Zerfall stabil ist, durch α-Umwandlung. Außer $A = 5$ und $A = 147$ ist jede ungerade Massenzahl zwischen 1 und 209 mit einem stabilen Kern vertreten. Der letzte stabile Kern ist $^{209}_{83}\mathrm{Bi}$.

2. Die zweite Mattauchsche Isobarenregel lautet: Zu jeder geraden Massenzahl $A = 2n$ gibt es fast keine doppelt ungeraden stabilen Kerne; es kann aber zwei oder drei doppeltgerade stabile Isobare geben.

Diese Regel folgt aus dem Verlauf der in Abb. 6.21 dargestellten Aufspaltung der Energieoberfläche, wenn man berücksichtigt, daß es keinen doppelten Betazerfall gibt. Ausnahmen von dieser Regel sind die Kerne $^{2}_{1}\mathrm{D}$, $^{6}_{3}\mathrm{Li}$, $^{10}_{5}\mathrm{Be}$, $^{14}_{7}\mathrm{N}$, $^{50}_{23}\mathrm{V}$ und $^{180}_{73}\mathrm{Ta}$. Die Stabilität der vier leichten uu-Kerne erklärt sich aus der Steilheit des Energietales, die keine stabilen gg-Kerne

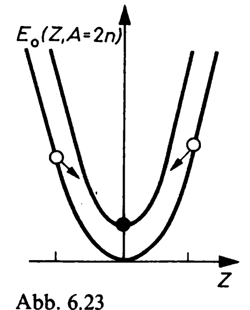


Abb. 6.23
Isobarenschnitt für gerade Massenzahl bei den leichtesten Kernen

ermöglicht (s. Abb. 6.23). Bei ${}^{50}_{23}V$, das in ${}^{50}_{22}Ti(\beta^+)$ oder ${}^{50}_{24}Cr(\beta^-)$ und bei ${}^{180}_{73}Ta$, das in ${}^{180}_{72}Hf(\beta^+)$ oder ${}^{180}_{74}W(\beta^-)$ zerfallen könnte, verbieten die hohen Spinunterschiede zwischen den Grundzuständen von $\Delta I = 6$ bzw. 8 einen Betazerfall.

Insgesamt gibt es zu jeder geraden Massenzahl $A = 2n$ wenigstens einen stabilen Kern, ausgenommen $A = 8$, ${}^{3}_{4}Be$ zerfällt sofort nach der Bildung in 2 α-Teilchen.

6.3.4.2. Isotopenregeln

Die Isotopenregeln geben Antwort auf die Frage nach der Zahl der zu geradzahligen und ungeradzahligen Ordnungszahlen Z gehörigen stabilen Isotope. Wir behandeln sie nach den Isobarenregeln, obgleich sie historisch gesehen bereits von F. W. Aston gefunden wurden, wenn auch nicht in allen Konsequenzen, lange bevor die Isobarenregeln bekannt waren. Mit Hilfe der übersichtlicheren Isobarenregeln lassen sich die Isotopenregeln leichter verstehen.

1. Die erste Isotopenregel lautet: Elemente mit ungerader Ordnungszahl $Z = 2n + 1$ besitzen höchstens zwei stabile Isotope, die sich mindestens um zwei Masseneinheiten voneinander unterscheiden müssen. Insgesamt sind es 55 solcher Elemente. Nur in 12 Fällen gibt es zwei stabile Isotope von u-Z-Kernen. Das sind z. B. ${}^{10,\,11}_{5}B$, ${}^{14,\,15}_{7}N$, ${}^{35,\,37}_{17}Cl$, ${}^{39,\,41}_{19}K$, ${}^{63,\,65}_{29}Cu$. Im Bereich der Elemente mit stabilen Isotopen, d. h. unterhalb $Z = 83$ besitzen zwei u-Z-Elemente kein stabiles Isotop: ${}_{43}Tc$ und ${}_{61}Pm$.

Stabile Isotope von Elementen mit ungeradem Z müssen im allgemeinen gerades N haben, denn nach dem 2. Mattauchschen Isobarensatz gibt es oberhalb $Z = 7({}^{14}_{7}N)$ keine stabilen uu-Kerne. Daraus folgt, daß stabile Isotope von u-Z-Elementen nicht benachbart sein können (${}^{69,\,71}_{31}Ga$, ${}^{79,\,81}_{35}Br$, ${}^{107,\,109}_{47}Ag$, ${}^{121,\,123}_{51}Sb$, ${}^{151,\,153}_{63}Eu$, ${}^{191,\,193}_{77}Ir$, ${}^{203,\,205}_{81}Tl$). Weitere Isotope dieser Elemente können nicht stabil sein, da sie zu hoch an den Hängen des Energietals liegen und somit durch Betaumwandlung zerfallen (${}^{67,\,73}_{31}Ga$, ${}^{77,\,83}_{35}Br$, usw.).

Die in der Natur nicht durch stabile Isotope vertretenen u-Z-Elemente Tc und Pm wurden bis in die 30er Jahre als Eka-Mn gesucht. Unter Eka-Element versteht man nach D. I. Mendeleev ein in einer bestimmten chemischen Gruppe stehendes, noch nicht bekanntes homologes chemisches Element. Beispiele sind Eka-$Mn_1({}_{43}Tc)$, Eka-$Mn_2({}_{61}Pm)$ und Eka-$Mn_3({}_{75}Re)$. Tabelle 6.4 zeigt die Einordnung der Homologen.

Tabelle 6.4
Homologe chemische Elemente

Chemische Perioden	Chemische Gruppen				
	V	VI	VII	VIII	
4	V	Cr	Mn(25)	Fe	Co
5	Nb	Mo	Tc(43)	Ru	Rh
Lanthanide	Pr	Nd	Pm(61)	Sm	Eu
6	Ta	W	Re(75)	Os	Ir

Bei diesen Untersuchungen konnte 1925 das dritte homologe Element des Mangans, das Re, gefunden werden, nicht aber das erste und zweite Homologe. Ihr Fehlen erwies sich als Gesetzmäßigkeit. Die bei der Elementebildung entstandenen Isotope konnten nicht bis in unsere Zeit bestehen, da sie längst radioaktiv zerfallen sind. Nach den Mattauchschen Isobarensätzen kann zu jeder Massenzahl eines Elements mit ungeradem Z nur ein stabiles Isobar existieren, denn uu-Kerne fallen nach der 2. Isobarenregel heraus. Abbildung 6.24 zeigt, daß die zu ${}_{43}Tc$ benachbarten Elemente ${}_{41}Nb$, ${}_{42}Mo$, ${}_{44}Ru$, ${}_{45}Rh$ bereits stabile Isotope besitzen,

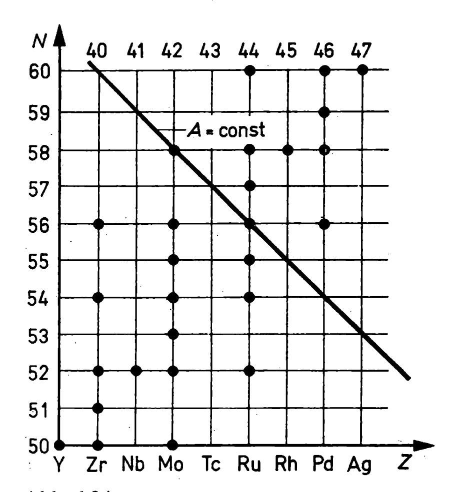


Abb. 6.24
Verteilung der stabilen Nuklide in der Umgebung von Technetium

die Isobare der in Frage kommenden Isotope des $_{43}$Tc sind. Für $_{61}$Pm liegen die Verhältnisse analog.

2. Die zweite Isotopenregel lautet: Elemente mit gerader Ordnungszahl $Z = 2n$ besitzen oft wesentlich mehr als zwei stabile Isotope. So vereinigt $_{50}$Sn mit 10 die größte Zahl der stabilen Isotope auf sich. Insgesamt gibt es 211 stabile g-Z-Kerne.

3. Zusammenfassend kann festgestellt werden, daß die folgenden Gesetzmäßigkeiten gelten:

1. Es gibt mehr stabile Isotope für $Z = 2n$ (mindestens 2) als für $Z = 2n + 1$ (höchstens 2).
2. Für $Z = 2n + 1$ gibt es in zwei Fällen gar kein stabiles Isotop ($Z = 43, 61$).
3. Es gibt mehr stabile Isotope für $N = 2n$ (mindestens 2) als für $N = 2n + 1$ (höchstens 2), Ausnahmen sind $N = 2$ und 4.
4. Für $N = 2n + 1$ gibt es in neun Fällen gar keinen stabilen Kern ($N = 19, 21, 35, 39, 45, 61, 89, 115, 123$).

Diese Tatsachen unterstreichen die hervorragende Rolle der Paarung der Nukleonen gleicher Art. Das kam bereits bei der Diskussion der Bindungsenergie der leichten Kerne, der Separations- und der Paarenergie zum Ausdruck. Bei der Entwicklung der Kernmodelle, die wir in Kapitel 8 behandeln, mußte das besonders berücksichtigt werden.

6.4. Eigendrehimpulse und magnetische Momente

1. Historisch betrachtet war die Beobachtung der Hyperfeinstrukturaufspaltung (HFS-Aufspaltung) der Spektrallinien der Atomhülle und damit der Hüllenniveaus die experimentelle Grundlage für die Einführung des Kernspins. 1925 hatten S. A. GOUDSMIT und G. E. UHLENBECK die Feinstruktur der Spektrallinien erklären können, indem sie dem Elektron einen Spin zuschrieben. Dadurch spaltet z. B., wie in Abb. 6.25a gezeigt, bei Natrium die D-Linie in zwei Linien D_1 und D_2 auf, d. h., wegen des Elektronenspins spaltet das 3P-Niveau in ein

Dublett auf, das mit $3^2P_{3/2}$ und $3^2P_{1/2}$ gekennzeichnet wird. Die Aufspaltung beträgt im Falle der Natriumlinien D_1 und D_2 0,6 nm. Die Feinstrukturaufspaltung liegt für die Elemente zwischen Wasserstoff und Uran im Bereich von 10^{-5} eV bis 0,1 eV.

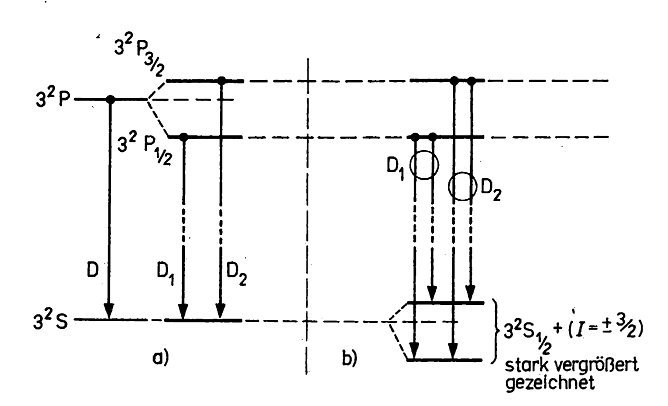


Abb. 6.25
Aufspaltung der Na-D-Linie
a) Feinstrukturaufspaltung infolge Elektronenspins, b) HFS-Aufspaltung infolge Kernspins

1927 zeigten A. N. TERENIN und L. D. DOBREZOV, daß die Natrium-D-Linien selbst auch aufspalten (Abb. 6.25b). Bei der D_1-Linie beträgt die Aufspaltung 0,0023 nm, bei der D_2-Linie 0,0021 nm; sie ist damit ca. 300mal kleiner als die durch den Einfluß des Elektronenspins hervorgerufene Aufspaltung. Diese HFS-Aufspaltung, die mit den hoch auflösenden Fabry-Perot-Interferenzspektrometern gemessen wurde, beträgt für die Elemente Wasserstoff bis Uran zwischen 10^{-7} und 10^{-5} eV, ist also allgemein um einige Zehnerpotenzen kleiner.

Die Erklärung des Effekts gaben 1927 E. BACK und S. A. GOUDSMIT, die die HFS-Aufspaltung von $^{209}_{83}Bi$ gemessen hatten und diese durch Einführung eines Kernspins der Größe $I = 9/2$ berechnen konnten. Sie stützen sich dabei auf eine bereits 1924 von W. PAULI ausgesprochene Vermutung, daß manche Kerne einen Eigendrehimpuls und gekoppelt mit diesem ein magnetisches Dipolmoment besitzen sollten, das zu einer meßbaren Aufspaltung der Spektrallinien führen könnte. Die im Experiment gefundene geringe Aufspaltung erklärt sich aus der Kleinheit des mit dem magnetischen Dipolmoment der Atomhülle zu einem Gesamtdipolmoment koppelnden magnetischen Kerndipolmoments. Bei den Na-D-Linien wird die HFS-Aufspaltung durch die Kopplung des $3^2S_{1/2}$-Terms mit dem Kernspin $I = 3/2$ über die magnetischen Momente erzeugt.

2. Wenn die HFS-Aufspaltung historisch gesehen der erste Anlaß zur Einführung des Spins und des magnetischen Dipolmoments bei Kernen und später bei den Elementarteilchen war, so blieb sie nicht der einzige Grund. Ihre Existenz folgt ganz allgemein aus den Orientierungseigenschaften der Mikroobjekte im elektrischen und magnetischen Felde, aus ihrem statistischen Verhalten als Fermionen oder Bosonen und aus der Gültigkeit des Drehimpulserhaltungssatzes auch bei Kern- und Elementarteilchenumwandlungen. Alle Elementarteilchen außer den Mesonen besitzen von Null verschiedenen Spin und damit auch ein magnetisches Moment.

Eine wichtige Besonderheit des Spinvektors eines Mikroteilchens besteht darin, daß er die einzige Möglichkeit für die Orientierung des Mikroteilchens im Raum ist. Das betrifft den Kern genauso wie die Elementarteilchen. Eine wichtige Folge dieser Tatsache ist der Zusam-

menhang zwischen jeder beliebigen, durch einen Vektor auszudrückenden, eine physikalische Eigenschaft des Mikroteilchens beschreibenden Größe $\boldsymbol{A}$ und dem Drehimpuls $\boldsymbol{I}$:

$$\boldsymbol{A} = a\boldsymbol{I} . \tag{6.84}$$

Dieser Zusammenhang gilt z. B. für das magnetische Dipol- und das elektrische Quadrupolmoment. Über ihre Kopplung mit dem Spin können Kerne und Elementarteilchen im Raum mit Hilfe magnetischer oder elektrischer Felder orientiert werden, bzw. ihre Orientierung gemessen werden, ausgenommen den Fall, daß der Spin Null ist. Daher sind die experimentellen Untersuchungen unmittelbar mit diesen beiden Größen verbunden.

6.4.1. Magnetische Dipolmomente

1. Der aus der klassischen Physik bekannte Zusammenhang zwischen magnetischem Dipolmoment, magnetischer Induktion und Wechselwirkungsenergie wurde auch bei der HFS-Aufspaltung der Spektrallinien der Atomhülle wiedergefunden. Wenn $\boldsymbol{\mu}_{\mathrm{N}}^*$ das magnetische Dipolmoment des Kerns ist, $\langle \boldsymbol{B}_{\mathrm{H}} \rangle$ die mittlere magnetische Induktion der Atomhülle im Kernvolumen und ΔE_I die HFS-Aufspaltung der Spektrallinien, so gilt das skalare Produkt

$$\Delta E_I = -\boldsymbol{\mu}_{\mathrm{N}}^* \langle \boldsymbol{B}_{\mathrm{H}} \rangle . \tag{6.85}$$

Der Unterschied zur klassischen Physik besteht darin, daß nicht jeder beliebige Wert von ΔE_I auftritt, sondern nur ganz bestimmte. $\boldsymbol{\mu}_{\mathrm{N}}^*$ ist gequantelt, somit auch ΔE_I. In Übereinstimmung mit dem allgemeinen Zusammenhang (6.84) und mit (6.85) wurde für $\boldsymbol{\mu}_{\mathrm{N}}^*$ der Ansatz gemacht

$$\boldsymbol{\mu}_{\mathrm{N}}^* = \boldsymbol{\mu}_{\mathrm{N}} \cdot \mu_{\mathrm{M}} = g\boldsymbol{I} . \tag{6.86}$$

Die geforderte Quantelung besorgt der Drehimpulsvektor $\boldsymbol{I}$; von den beiden Proportionalitätsfaktoren ist μ_{M} die Maßeinheit des magnetischen Dipolmoments, das sogenannte Magneton, und g das gyromagnetische Verhältnis, d. h. der Quotient aus dem Betrag des magnetischen Dipolmoments $\boldsymbol{\mu}_{\mathrm{N}}^*$, gemessen in Einheiten von μ_{M}, und des mechanischen Drehimpulses $\boldsymbol{I}$:

$$g = \frac{|\boldsymbol{\mu}_{\mathrm{N}}^*|}{|\boldsymbol{I}|}, \qquad [g] = \mathrm{T}^{-1}\,\mathrm{s}^{-1} . \tag{6.87}$$

Die Einheit des magnetischen Dipolmoments μ_{M} ist für ein Teilchen der Masse m und der Ladung Q definiert zu

$$\mu_{\mathrm{M}} = \frac{|Q|\,|\boldsymbol{I}|}{m} = \frac{Q \cdot \hbar}{2m} . \tag{6.88}$$

In der Atomhülle, wo das Elektron die magnetischen Eigenschaften bestimmt, hat man mit $m = m_e$, $|Q| = e$ und $|\boldsymbol{I}| = |s| = \hbar/2$ die Einheit Bohrsches Magneton genannt:

$$\mu_{\mathrm{B}} = \frac{e\hbar}{2m} = 9{,}274 \cdot 10^{-24}\,\mathrm{J \cdot T^{-1}} = 5{,}788 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{MeV \cdot T^{-1}} . \tag{6.89}$$

Im Kernbereich, wo auf jeden Fall das Proton die magnetischen Eigenschaften bestimmen sollte, tatsächlich aber auch das Neutron beteiligt ist, hat man als Einheit das Kernmagneton auf der Grundlage der Masse m_{p} des Protons und seiner Ladung e eingeführt:

$$\mu_{\mathrm{K}} = \frac{e\hbar}{2m_{\mathrm{p}}} = 5{,}0508 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{J \cdot T^{-1}} = 3{,}152 \cdot 10^{-14}\,\mathrm{MeV \cdot T^{-1}} . \tag{6.90}$$

Die magnetischen Momente der Atomhülle, des Atomkerns und der Elementarteilchen werden als Vielfaches von μ_B und μ_K angegeben. Im Falle des Kerns folgt damit aus (6.86)

$$\boldsymbol{\mu}_N^* = \boldsymbol{\mu}_N \mu_K = \mu_N \mu_K \frac{\boldsymbol{I}}{|\boldsymbol{I}|} = g\boldsymbol{I}\,. \tag{6.91}$$

Der Betrag von $\boldsymbol{\mu}_N$, also μ_N, ist eine Zahl, die den Maximalwert der z-Komponente des magnetischen Moments als Vielfaches von μ_K angibt und gleichzeitig als Vielfaches von $I_{z\,max}$.

2. Wir betrachten nun die Zusammensetzung des magnetischen Dipolmoments der Atomhülle und des -kerns, also eines Systems, das aus einer Vielzahl von Elementarteilchen aufgebaut ist, die ihrerseits Eigen-, aber auch Bahndrehimpulse haben. Wir beginnen mit dem magnetischen Moment $\boldsymbol{\mu}_E$ des Elektrons. Für das dem Spin entsprechende Dipolmoment gilt in Übereinstimmung mit (6.89) $\boldsymbol{\mu}_s = \boldsymbol{\mu}_B$. Für den Bahndrehimpuls erhält man $\boldsymbol{\mu}_l = \boldsymbol{\mu}_B \cdot \boldsymbol{l}$. Vergleicht man das Ergebnis mit (6.91) so wird offenbar, daß das gyromagnetische Verhältnis unterschiedliche Werte besitzt, nämlich $g_s = 2$ und $g_l = 1$. Daraus folgt, daß die Vektoren

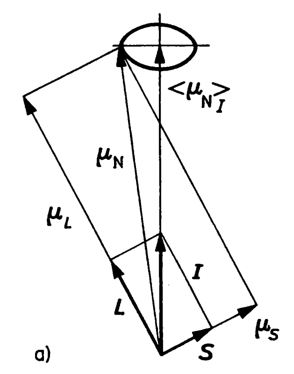


Abb. 6.26a
Kopplung der magnetischen Dipolmomente $\boldsymbol{\mu}_S$ und $\boldsymbol{\mu}_L$ zu $\boldsymbol{\mu}_N$ und Bildung der Projektion von $\boldsymbol{\mu}_N$ auf $\boldsymbol{I}$ bei fehlendem äußerem Magnetfeld $\boldsymbol{B}$

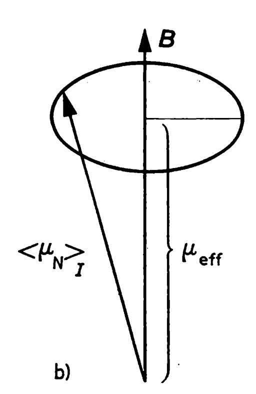


Abb. 6.26b
Präzession von $\boldsymbol{I}$ und damit von $\langle\boldsymbol{\mu}_N\rangle_I$ um $\boldsymbol{B}$ und Bildung von μ_{eff}

$\boldsymbol{\mu}_j = \boldsymbol{\mu}_s + \boldsymbol{\mu}_l$ und $\boldsymbol{j} = \boldsymbol{s} + \boldsymbol{l}$ nicht kolinear zueinander sind. Analoges gilt für die Vektoren $\boldsymbol{\mu}_J = \boldsymbol{\mu}_L + \boldsymbol{\mu}_S$ und $\boldsymbol{J} = \boldsymbol{L} + \boldsymbol{S}$ der Atomhülle. Für Atomhülle und Atomkern wird somit der Ansatz

$$\boldsymbol{\mu}_{\mathrm{H}} = g_{\mathrm{H}} \cdot \boldsymbol{J} = g_{S\mathrm{H}} \boldsymbol{S}_{\mathrm{H}} + g_{L\mathrm{H}} \boldsymbol{L}_{\mathrm{H}} = \boldsymbol{\mu}_{S\mathrm{H}} + \boldsymbol{\mu}_{L\mathrm{H}} \tag{6.92}$$

$$\boldsymbol{\mu}_{\mathrm{N}} = g_{\mathrm{N}} \cdot \boldsymbol{I} = g_{S\mathrm{N}} \boldsymbol{S}_{\mathrm{N}} + g_{L\mathrm{N}} \boldsymbol{L}_{\mathrm{N}} = \boldsymbol{\mu}_{S\mathrm{N}} + \boldsymbol{\mu}_{L\mathrm{N}} \tag{6.93}$$

gemacht. Die fehlende Kolinearität kommt in Abb. 6.26a anschaulich zum Ausdruck. Da $\boldsymbol{J}$ und $\boldsymbol{I}$ Erhaltungsgrößen sind und ihre Richtung nicht mit der Richtung von $\boldsymbol{\mu}_{\mathrm{H}}$ und $\boldsymbol{\mu}_{\mathrm{N}}$ zusammenfällt, präzediert $\boldsymbol{\mu}_{\mathrm{H}}$ um $\boldsymbol{J}$ und $\boldsymbol{\mu}_{\mathrm{N}}$ um $\boldsymbol{I}$. Die Komponenten $\mu_{\mathrm{H}x}$ und $\mu_{\mathrm{H}y}$ bzw. $\mu_{\mathrm{N}x}$ und $\mu_{\mathrm{N}y}$, die senkrecht auf der durch $\boldsymbol{J}$ bzw. $\boldsymbol{I}$ vorgegebenen z-Achse stehen, heben sich im zeitlichen Mittel weg, so daß der Mittelwert von $\boldsymbol{\mu}_{\mathrm{H}}$ bzw. $\boldsymbol{\mu}_{\mathrm{N}}$ gerade die Projektion von $\boldsymbol{\mu}_{\mathrm{H}}$ auf $\boldsymbol{J}$ bzw. von $\boldsymbol{\mu}_{\mathrm{N}}$ auf $\boldsymbol{I}$ ist. Wir bezeichnen sie mit $\langle \boldsymbol{\mu}_{\mathrm{H}} \rangle_J$ und $\langle \boldsymbol{\mu}_{\mathrm{N}} \rangle_I$.

In Abb. 6.26a sind diese Verhältnisse ohne äußeres Magnetfeld $\boldsymbol{B}$ dargestellt. Die Projektion von $\boldsymbol{\mu}_{\mathrm{N}}$ auf $\boldsymbol{I}$ ergibt sich in diesem Fall zu

$$\langle \boldsymbol{\mu}_{\mathrm{N}} \rangle_I = \left(\frac{\boldsymbol{\mu}_{\mathrm{N}} \cdot \boldsymbol{I}}{|\boldsymbol{I}|} \right) \frac{\boldsymbol{I}}{|\boldsymbol{I}|} = \boldsymbol{\mu}_{\mathrm{N}} \cdot \frac{\boldsymbol{I}}{|\boldsymbol{I}|} . \tag{6.94}$$

Es ist zu beachten, daß $\langle \boldsymbol{\mu}_{\mathrm{N}} \rangle_I$ ebenfalls ein Vektor ist. Da sich der Kern fast immer im Magnetfeld der Hülle $\boldsymbol{B}_{\mathrm{H}}$ und manchmal zusätzlich noch in einem äußeren Magnetfeld mit $\boldsymbol{B}_{\mathrm{a}}$ befindet, präzediert $\boldsymbol{I}$ zusammen mit $\langle \boldsymbol{\mu}_{\mathrm{N}} \rangle_I$ um die durch $\boldsymbol{B}$ vorgegebene z-Achse, wie es Abb. 6.26b zeigt. Im Experiment wird daher ein Effektivwert μ_{eff}, d. h. die Projektion von $\langle \boldsymbol{\mu}_{\mathrm{N}} \rangle_I$ auf $\boldsymbol{B}$, gemessen.

Die Überlegungen, die für den Atomkern auf (6.94) geführt haben, sind auch auf die Hülle anwendbar. Die Projektion $\langle \boldsymbol{\mu}_{\mathrm{H}} \rangle_J$ läßt sich durch $\boldsymbol{\mu}_{\mathrm{H}} \cdot \boldsymbol{J}/|\boldsymbol{J}|$ ausdrücken. Da sich ein Dipol im mittleren, von den Elektronen der Hülle am Kernort geschaffenen Magnetfeld als physikalisch vorgegebene z-Richtung antiparallel einstellt, kann man für die mittlere von der Hülle am Kernort erzeugte magnetische Induktion den Ansatz machen:

$$\langle \boldsymbol{B}_{\mathrm{H}} \rangle = -a \frac{\boldsymbol{J}}{|\boldsymbol{J}|} . \tag{6.95}$$

6.4.2. Experimentelle Methoden

Die experimentellen Methoden zur Bestimmung des Spins und des magnetischen Moments der Kerne und Elementarteilchen können in zwei Gruppen eingeteilt werden. Die erste faßt die Methoden zusammen, die auf einer Wechselwirkung der Kernmomente mit inneren Atom- oder Molekülfeldern aufbauen. Die Methoden der zweiten Gruppe beruhen im Gegensatz dazu auf einer Wechselwirkung der Kernmomente mit äußeren Feldern. Da die inneratomaren und innermolekularen Felder nicht mit großer Genauigkeit bekannt sind, zeichnen sich die Methoden der zweiten Gruppe im allgemeinen durch größere Genauigkeit aus. Aus der Vielfalt der Methoden behandeln wir nur einige wenige.

6.4.2.1. HFS-Aufspaltung im Magnetfeld der Atomhülle

1. Quantitativ gesehen beruht die eingangs zu 6.4. gegebene Erklärung der HFS-Aufspaltung und damit auch die Meßbarkeit des magnetischen Kerndipolmoments und des Kernspins auf der Kopplung der Drehimpulse von Hülle $\boldsymbol{J}$ und Kern $\boldsymbol{I}$ über die entsprechenden magnetischen Dipolmomente zum Gesamtdrehimpuls

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{J} + \boldsymbol{I} . \tag{6.96}$$

Die Kopplungsmöglichkeiten von $\boldsymbol{J}$ und $\boldsymbol{I}$ zu $\boldsymbol{F}$ sind durch (A. 23) vorgegeben. Sie genügen der Wertefolge

$$F = J + I, \quad J + I + 1, \dots |J - I|. \tag{6.97}$$

Bei $|J - I| = |I - J|$ bricht die Folge ab. Daher ergeben sich $2I + 1$ Kopplungsmöglichkeiten für $J \geqq I$ mit Werten zwischen $J + I$ bis $J - I$ und $2J + 1$ Kopplungsmöglichkeiten für $J < I$ mit Werten zwischen $J + I$ bis $I - J$.

2. Wenn die Niveauenergie der Hüllenelektronen ohne Berücksichtigung des Kernspins durch einen Term E_J bestimmt wird, so gilt bei Berücksichtigung des Kernspins

$$E_{J,I} = E_J + \Delta E_I. \tag{6.98}$$

Den zusätzlichen Term ΔE_I berechnet man mit (6.85). Das Minuszeichen bedeutet, daß antiparallele Einstellung der beiden Vektoren einen Maximalwert von ΔE_I, parallele einen Minimalwert ergeben. In Übereinstimmung mit (6.91), (6.94) und (6.95) erhält man

$$\Delta E_I = a \cdot \mu_N \mu_K \frac{\boldsymbol{J} \cdot \boldsymbol{I}}{|\boldsymbol{J}| \cdot |\boldsymbol{I}|} = \mu_N^* \langle \boldsymbol{B} \rangle \cdot \cos(\boldsymbol{J}, \boldsymbol{I}). \tag{6.99}$$

Aus der Identität

$$\boldsymbol{F}^2 = (\boldsymbol{J} + \boldsymbol{I})^2 = \boldsymbol{J}^2 + \boldsymbol{I}^2 + 2\boldsymbol{J}\boldsymbol{I} \tag{6.100}$$

folgt $\boldsymbol{J} \cdot \boldsymbol{I}$, und da $|\boldsymbol{J}| \cdot |\boldsymbol{I}| = \hbar^2 \sqrt{J(J+1)\, I(1+1)}$ ist, erhält man schließlich

$$\Delta E_I = \frac{a \cdot \mu_N \cdot \mu_K}{2} \frac{F(F+1) - J(J+1) - I(I+1)}{J(J+1)\, I(I+1)}. \tag{6.101}$$

Die HFS-Aufspaltung ΔE_I ist damit eine berechenbare Größe. Bezeichnet man den Proportionalitätsfaktor mit $A/2$, so ergibt sich z. B. für $J = 1/2$ und $F = 1/2 + I$ eine Aufspaltung von $(A/2)\, I$, im Falle $J = 1/2$ und $F = I - 1/2$ eine Aufspaltung $-(A/2)\,(I + 2)$.

3. Mit der Gleichung (6.101) kann man auf drei verschiedene Weisen den Kernspin bestimmen. Wenn $J > I$ ist, beträgt die Zahl der HFS-Linien wegen (6.97) $2I + 1$, woraus sofort I folgt. Im Falle $I > J$ macht man von der Intervallregel Gebrauch. Da für gegebenes Nuklid und Hüllenzustand J und I Konstanten sind, ergibt sich

$$\Delta E_I = \Delta E_{I,F} - \Delta E_{I,F-1} = \frac{A}{2} F, \tag{6.102}$$

wobei F die Werte (6.97) durchlaufen kann. Für benachbarte Niveaus folgt damit

$$\Delta E_I(F, F-1) : \Delta E_I(F-1, F-2) : \dots = (I + J) : (I + J - 1) : \dots \quad \dots \tag{6.103}$$

Aus den gemessenen Energiedifferenzen zwischen den Niveaus mit $F, F-1$; $F-1, F-2$ usw. können also I oder J bestimmt werden.

Neben der Intervallregel kann man J und I auch aus der Intensitätsregel ermitteln. Sie gibt für die einzelnen HFS-Linien die Intensitätsverhältnisse an. Die Intensität der Spektrallinien erweist sich proportional zur Zahl der Komponenten $2F + 1$, in die der entsprechende Term im Magnetfelde aufspaltet. In dem bereits betrachteten Falle mit $J = 1/2$ kann F die zwei Werte $F_1 = I + 1/2$ und $F_2 = I - 1/2$ annehmen. Daher folgt für das Intensitätsverhältnis

$$\frac{2F_1 + 1}{2F_2 + 2} = \frac{2(I + 1/2) + 1}{2(I - 1/2) + 1} = \frac{I + 1}{I}. \tag{6.104}$$

In einigen Fällen ist die Intensitätsregel die einzige von den drei genannten Möglichkeiten, den Kernspin zu bestimmen. Bei den Na-D-Linien z. B. wird die Aufspaltung praktisch durch das $3^2S_{1/2}$-Niveau mit den zwei Komponenten $F = 1$ und $F = 2$ allein bewirkt. Die Aufspaltung des $3^2P_{1/2}$- und $3^2P_{3/2}$-Niveaus ist zu gering, um berücksichtigt werden zu können. Die erste Methode eignet sich nicht, weil $I > J$, die zweite nicht, weil nur zwei Linien, also nur ein Intervall $\Delta E_{I'}$ beobachtet werden. Das Experiment liefert aber für das Verhältnis (6.104) den Wert 1,7, der sich durch $5/3 = 1{,}67$ annähern läßt.

Die Bestimmung des magnetischen Moments aus (6.101) ist relativ ungenau, da es bisher nicht möglich war, den Faktor a mit einer Genauigkeit zu berechnen, die 10% übertrifft. Es ist aber sehr einfach, das Vorzeichen des magnetischen Kernmoments zu ermitteln. Bei den wasserstoffähnlichen Atomen z. B. liegt das Unterniveau der HFS-Aufspaltung mit dem größeren F-Wert energetisch höher als das mit $F - 1$, wenn das magnetische Moment positiv ist.

6.4.2.2. HFS-Aufspaltung im äußeren Magnetfeld

Bei Einschalten eines äußeren Magnetfeldes mit der magnetischen Induktion $\boldsymbol{B}_a$ beträgt die Aufspaltung anstelle von (6.89)

$$\Delta E_I = -\mu_N^* \langle \boldsymbol{B}_H + \boldsymbol{B}_a \rangle \,. \tag{6.105}$$

Man unterscheidet zwei Fälle, schwaches und starkes äußeres Magnetfeld, und spricht von einem schwachen äußeren Magnetfeld, wenn die magnetische Wechselwirkung zwischen μ_H^* und $\langle \boldsymbol{B}_a \rangle$ viel kleiner ist als die zwischen μ_N^* und $\langle \boldsymbol{B}_H \rangle$, wenn also erstere vernachlässigt werden kann:

$$\mu_H^* \langle \boldsymbol{B}_a \rangle \ll \mu_N^* \langle \boldsymbol{B}_H \rangle \,. \tag{6.106}$$

Da $\langle \boldsymbol{B}_H \rangle \approx (10^1 - 10^2)\,\mathrm{T}$ und $\mu_N^*/\mu_H^* \approx 1/1832$, kann man von einem schwachen äußeren Magnetfeld sprechen, wenn

$$\langle \boldsymbol{B}_a \rangle \ll \frac{10^2\,\mathrm{T}}{2000} \lesssim 10^{-2}\,\mathrm{T} \tag{6.107}$$

ist. In diesem Falle koppeln $\boldsymbol{J}$ und $\boldsymbol{I}$ zu $\boldsymbol{F}$, letzteres präzessiert, wie in Abb. 6.27a gezeigt, um die durch $\boldsymbol{B}$ ausgezeichnete z-Achse. Es liegt der anormale Zeeman-Effekt der HFS vor, der im

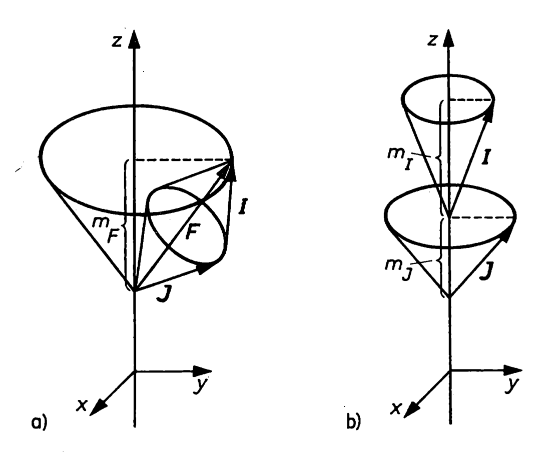


Abb. 6.27
Drehimpulsvektorkopplung a) bei Zeeman-Effekt, b) bei Paschen-Back-Effekt

allgemeinen, wenn die Zahl der Aufspaltungen groß genug ist, den Kernspin aus der Gesamtzahl der HFS-Aufspaltung zu bestimmen gestattet. Jeder der $2(J, I)_{\text{min}} + 1$ Werte von $\boldsymbol{F}$ führt zu $(2F + 1)$ Projektionsmöglichkeiten auf $\boldsymbol{B}$, insgesamt also zu $(2F + 1)$ Einstellungsmöglichkeiten m_F. In Abb. 6.28 sind die Aufspaltungen für $J = 1/2$, $I = 3/2$ dargestellt. Es ist $(2J + 1) = 2$, $m_{F_1} = (2F_1 + 1) = 5$, $m_{F_2} = 2F_2 + 1 = 3$ und $I = 3/2$.

Ein starkes äußeres Magnetfeld liegt für

$$\mu_{\text{H}}^* \langle \boldsymbol{B}_{\text{a}} \rangle \gg \mu_{\text{N}}^* \langle \boldsymbol{B}_{\text{H}} \rangle \,. \tag{6.108}$$

vor. Das ist der Fall, wenn $\langle \boldsymbol{B}_{\text{a}} \rangle \gg 10^{-2} \ldots 10^{-3}$ T. In diesem Falle werden, wie in Abb. 27b dargestellt, $\boldsymbol{I}$ und $\boldsymbol{J}$ entkoppelt. Das ist der Paschen-Back-Effekt oder der normale Zeeman-Effekt. Das magnetische Kerndipolmoment und das Dipolmoment der Hülle präzedieren unabhängig voneinander um $\langle \boldsymbol{B} \rangle$. Es gibt $m_J = 2J + 1$ und $m_I = 2I + 1$ Projektionen auf $\langle \boldsymbol{B} \rangle$ und ebensoviel Niveaus. Da aber μ_J^*, das magnetische Moment der Hülle, viel größer ist als μ_{N}^*, wird die Wechselwirkungsenergie hauptsächlich von ihm über E_J bestimmt, d. h., die Niveaus ordnen sich nach J mit m_J. Als Aufspaltung dieser zu m_J gehörenden Niveaus erscheinen die $2I + 1$ Einstellungen mit m_I als Unterniveaus. I kann aus der Zahl der zu vorgegebenem m_J auftretenden Aufspaltungen $m_I = 2I + 1$ bestimmt werden.

Beim anormalen Zeeman-Effekt lautet die Auswahlregel $\Delta F = 0, \pm 1$; $\Delta m_F = 0, \pm 1$. Die Übergänge mit $\Delta m_F = \pm 1$ sind elektrische Dipolübergänge; sie sind senkrecht zum magnetischen Feld polarisiert. Man kennzeichnet sie durch den Buchstaben σ. Übergänge mit $\Delta m_F = 0$ sind parallel zum magnetischen Feld polarisiert. Man kennzeichnet sie mit π. Im Falle der Abb. 6.28b sind sechs σ-Übergänge möglich. Da die Übergänge $1 \to 0$, $0 \to 1$ und $0 \to -1$, $-1 \to 0$ jeweils die gleiche Energie haben, treten sie im Spektrum als eine Linie auf. Dadurch werden insgesamt nur vier σ-Linien beobachtet, von denen nun aber zwei die doppelte Intensität aufweisen. π-Übergänge gibt es insgesamt drei. Aus der Zahl der σ- und π-Linien läßt sich der Kernspin eindeutig bestimmen. Aus den betrachteten Linien folgt $I = 3/2$. Im Falle $I = 1$ treten, um noch ein Beispiel zu nennen, drei σ- und zwei π-Linien auf.

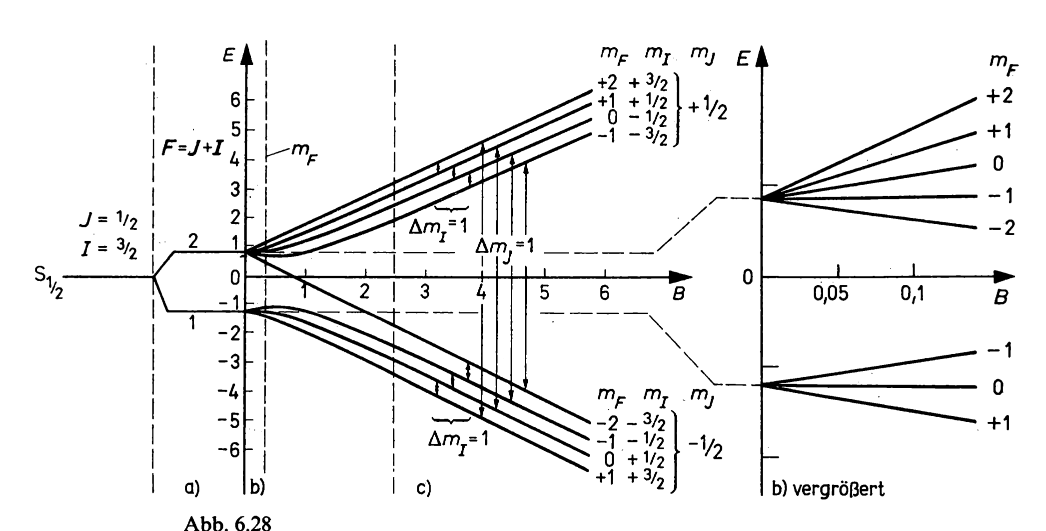


Abb. 6.28
HSF-Aufspaltung E als Funktion der magnetischen Induktion, beide in relativen Einheiten
a) ohne äußeres Magnetfeld, b) bei Zeeman-Effekt, c) bei Paschen-Back-Effekt

Wenn Paschen-Back-Effekt vorliegt, lauten die Auswahlregeln $\Delta m_I = \pm 1$, $\Delta m_J = 0$ oder $\Delta m_I = 0$, $\Delta m_J = \pm 1$. Diese Linien sind in Abb. 6.28c eingezeichnet. Im Unterschied zum Falle des anormalen Zeeman-Effekts spielt hier die Wechselwirkung zwischen I und dem äußeren Felde die bestimmende Rolle. Auch hier kann der Kernspin eindeutig bestimmt werden. Man nutzt dazu die Linien mit $\Delta m_I = \pm 1$. Die Genauigkeit der ermittelten Kerndipolmomente geht bis zu 0,1 %.

6.4.2.3. Molekülstrahlmethode

Der Stern-Gerlach-Versuch hat bekanntlich bei der Bestimmung des Spins und des magnetischen Moments des Elektrons und der Atomhülle eine bedeutende Rolle gespielt. Es war daher natürlich, ihn zur Bestimmung des magnetischen Kerndipolmoments einzusetzen. Bewegt sich ein Strahl neutraler Atome senkrecht zu den Magnetfeldlinien durch ein so stark inhomogenes Querfeld, daß die Inhomogenität des Feldes im Ausdehnungsbereich der magnetischen Dipole „Atomhülle" merklich ist, dann wird der Strahl proportional zu diesem magnetischen Dipolmoment abgelenkt. Der Versuchsaufbau ist in Abb. 6.29 dargestellt, ebenso die Polschuhform zur Erzeugung einer hinreichend großen Inhomogenität. Heute verwendet man zur Erhöhung des Stromes meist Magnete mit vier oder sechs Polen um die Symmetrieachse.

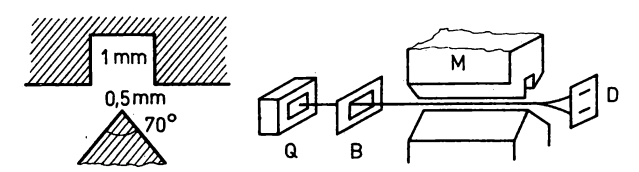


Abb. 6.29
Schematische Darstellung des Stern-Gerlach-Versuchs

Die ablenkende Kraft in der Richtung der Feldinhomogenität berechnet sich zu

$$F_z = \mu_z \frac{\partial \boldsymbol{B}_z}{\partial z} = \boldsymbol{\mu}^* \cos(\boldsymbol{\mu}^* \boldsymbol{B}) \cdot \operatorname{grad}(\boldsymbol{B}) . \qquad (6.109)$$

Die Anwendung dieser Methode auf die Messung des magnetischen Kerndipolmoments stößt auf ernste Schwierigkeiten. Erstens ist das Kerndipolmoment 10^3mal kleiner als das der Hülle, und zweitens muß die durch das Kerndipolmoment hervorgerufene Ablenkung im Untergrund der wesentlich größeren Strahlablenkung infolge des Hüllenmoments gesucht werden. Zur Kompensation der Hüllenmomente verwendet man Moleküle, in denen sich die Hüllenmomente der Atome aufheben (H_2, H_2O u. a.). Infolge der Kleinheit der magnetischen Kernmomente sind die Experimente trotzdem schwierig und die Ergebnisse mit großen Fehlern behaftet. Bei einem Gradienten von $\geqq 10$ T/cm wurden Ablenkungen von $\geqq 0{,}1$ mm erzielt und das magnetische Moment des Protons zu $2{,}5\mu_K$ bestimmt.

6.4.2.4. Kernresonanzmethode

1. Die Molekülstrahlresonanzmethode, die 1938 von I. Rabi eingeführt wurde, ist eine Weiterentwicklung des Stern-Gerlach-Versuchs. Wie bei diesem durchquert ein fein ausgeblendeter Strahl solcher Moleküle, die kein resultierendes Moment der Atomhüllen besitzen, das inhomogene Feld des 4- oder 6-Pol-Magneten A (Abb. 6.30). Die Auslenkung der sich zu $\boldsymbol{B}_1$ nach den Gesetzen der Richtungsquantelung einstellenden und um $\boldsymbol{B}_1$ präzedierenden Moleküle ist proportional zu μ_N^*. Die Moleküle werden infolge der Magnetfeldeigenschaften in die Mitte

des Spaltes zwischen den Polschuhen des Magneten C fokussiert, von wo sie in das Feld des ebenso wie A aufgebauten Magneten B gelangen, der sie infolge $\boldsymbol{B}_1 = \boldsymbol{B}_3$ und grad $\boldsymbol{B}_1 = -$grad $\boldsymbol{B}_3$ in umgekehrter Richtung ablenkt, also auf den Detektor D fokussiert.

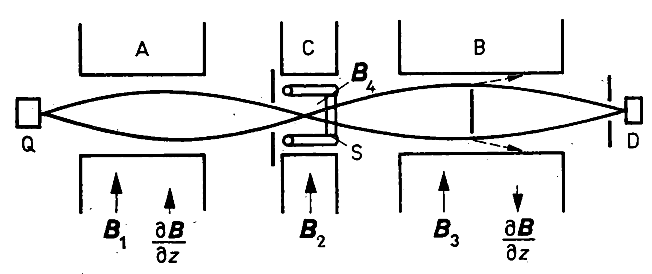


Abb. 6.30
Versuchsaufbau zur Messung magnetischer Kernmomente nach Rabi

Normalerweise werden sich die Kerne in Übereinstimmung mit dem thermodynamischen Gleichgewicht, die Einstellung zum Magnetfeld betreffend, im energetisch niedrigsten Zustand befinden. Wegen (6.85), d. h. $\Delta E_I = -\boldsymbol{\mu}_N^* \langle \boldsymbol{B} \rangle$, ist das der Zustand $I \cdot B$, da $(I - 1) \cdot B$, $(I - 2) \cdot B$ ... größere Werte bedeuten. Überführt man den magnetischen Dipol „Kern" in einen höheren energetischen Zustand $(I - 1) \cdot B$, dann wird dazu die Energie

$$E_I(I - 1) - E_I(I) = \Delta E_I = \frac{\mu \cdot \mu_K}{I} B\,\Delta I = g \cdot B\,\Delta I \tag{6.110}$$

benötigt. Geschieht die Überführung im Raum C, dann gerät ein so umorientierter Dipol nicht mehr in den Detektor D, er wird in B gegen die Wand gelenkt. Die Umorientierung kann sehr genau festgestellt werden. Im Raum C präzediert das Atom mit $\boldsymbol{\mu}_N^*$ um $\boldsymbol{B}_2$ mit der Larmor-Frequenz

$$\omega_L = \frac{\mu_N \mu_K B_2}{I\hbar}. \tag{6.111}$$

Eine Umorientierung erfolgt nur, wenn dem quantenmechanischen Kreisel Energie mit der gleichen Frequenz zugeführt wird. Das kann durch eine HF-Schleife mit dem zu $\boldsymbol{B}_2$ senkrechten magnetischen HF-Feld $\boldsymbol{B}_4(t)$ geschehen (Abb. 6.31). Im Resonanzfall rotieren die Atome mit

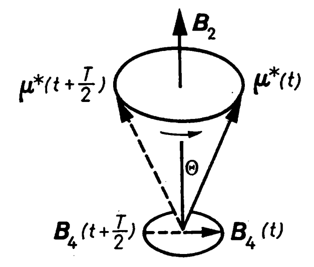


Abb. 6.31
Kopplung zwischen dem rotierenden Magnetfeld mit $\boldsymbol{B}_4$ und dem magnetischen Dipolmoment der Kerne beim Rabi-Experiment

$\boldsymbol{\mu}_N^*(t)$ um $\boldsymbol{B}_4(t)$, mit der gleichen Winkelgeschwindigkeit, so daß es zu einer Änderung von Θ kommt. Es ist dann

$$\omega_L = \omega_{res} = \frac{\mu_N \mu_K \, \Delta I_z B_2}{I\hbar}. \tag{6.112}$$

Da im allgemeinen hauptsächlich Übergänge mit $\Delta I_z = \Delta m_I = 1$ induziert werden, gilt in diesem Fall

$$E_I(\Delta m_I = 1) = \hbar\omega_L = \frac{\mu_N \mu_K B_2(\Delta I_z = 1)}{I} = g \cdot B_2(\Delta I_z = 1). \tag{6.113}$$

Man sieht, daß die Bestimmung von g oder, bei bekanntem I, von μ_N auf die Messung des Verhältnisses ω_{res}/B_2 hinausläuft. In Abb. 6.32 ist eine für $^7_3$Li-Kerne mit LiCl-Molekülen erhaltene experimentelle Kurve gezeigt, die die Resonanzschärfe und damit die hohe Genauigkeit der Methode demonstriert, die in der Größenordnung von 0,01 % für μ_N liegt.

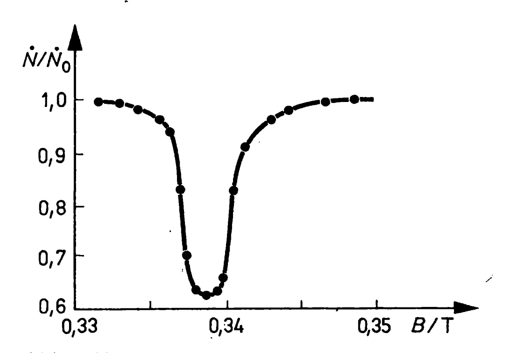


Abb. 6.32
Relativer Strom des Molekülstrahls im Rabi-Experiment als Funktion der magnetischen Induktion $\boldsymbol{B}_2$ bei der Resonanzfrequenz

2. Die Kernresonanzmethode wurde erstmals 1946 durch F. Bloch u. a. sowie E. M. Purcell u. a. auch auf flüssige und feste Proben ausgedehnt. Eine typische Anordnung zeigt die Abb. 6.33. Der Magnet 1 erzeugt ein homogenes Magnetfeld mit der magnetischen Induktion $\boldsymbol{B}_1$, so daß es in der Probe 4 zum Paschen-Back-Effekt kommt, also Hüllen- und Kernmoment entkoppelt werden. Mit der Spule 3 wird das magnetische HF-Feld $\boldsymbol{B}_2$ erzeugt, das wie im Versuch von Rabi durch Variation der Frequenz zum Umklappen des Kernspins führen kann; es steht senkrecht auf $\boldsymbol{B}_1$. Über die Spulen 2 wird ein zu $\boldsymbol{B}_1$ parallel gerichtetes, aber mit etwa 50 Hz gemäß

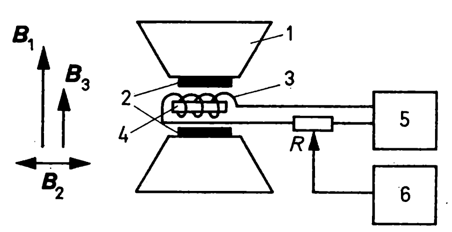


Abb. 6.33
Versuchsaufbau zur Kernresonanzmethode
1 Magnet, 2 Hilfsspulen, 3 HF-Spule, 4 Probe, 5 Generator, 6 Oszillograph

$\boldsymbol{B}_3(t) = \boldsymbol{B}_0 \sin \omega t$ zeitlich veränderliches Magnetfeld mit $\boldsymbol{B}_1$ überlagert. Dadurch erfolgt das Umklappen des Kernspins periodisch, so daß es mit dieser Frequenz z. B. auf einem Oszillographen sichtbar gemacht werden kann.

Die Kernresonanzmethode hat weitgehende Anwendung in der Molekül- und Festkörperphysik sowie in der Chemie gefunden, besonders aber auch in der Technik.

3. Abgesehen von den erst in den letzten Jahren in die Untersuchungen einbezogenen ultrakalten Neutronen, lassen sich Neutronen nicht in einem Gefäß als Probe ansammeln, um etwa in einem Kernresonanzversuch untersucht zu werden. Auch sind Neutronenstrahlen schwer kollimierbar, was für die Untersuchung in einer Anordnung nach RABI erforderlich wäre. Der Ausweg wurde 1940 von L. ALVAREZ und F. BLOCH gewiesen. Im Alvarez-Bloch-Versuch wird zwar die Resonanzmethode von RABI genutzt, aber die Forderung nach Kollimation wird durch die Forderung nach Polarisation der Teilchen ersetzt. Bei Neutronen erfolgt die Polarisation durch die magnetische Wechselwirkung mit den orientierten magnetischen Dipolen eines Ferromagnetikums (siehe auch 6.4.4.3, Punkt 3).

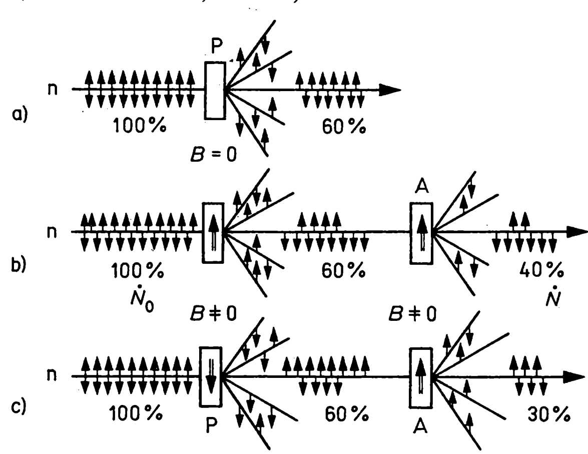


Abb. 6.34
Streuung und Polarisation von Neutronen an gesättigten Ferromagnetika
P — Polarisator, A — Analysator

Treffen Neutronen auf ein Target, hier im Alvarez-Bloch-Versuch auf ein Ferromagnetikum wie in Abb. 6.34, dann werden sie über die starke Wechselwirkung an den Atomkernen gestreut. Infolgedessen verringert sich ihre Rate von $\dot{N}_0$ auf $\dot{N}$. Quantitativ gilt nach Durchlaufen der Streudicke δ mit der Kernkonzentration N_V und dem Streuquerschnitt σ gemäß (6.26)

$$\dot{N} = \dot{N}_0 \cdot e^{-\sigma N_V \delta} . \tag{6.114}$$

Neben der Verringerung der Strahlintensität erfolgt eine Polarisation der Neutronen, denn die magnetische Wechselwirkung der Dipole hängt von der gegenseitigen Orientierung ab. Parallel ausgerichtete Dipole stoßen einander ab, antiparallel ausgerichtete ziehen sich an. F. BLOCH konnte 1936 zeigen, daß σ eine Funktion der Polarisation (siehe 6.4.4.3. und (6.132), (6.142))

$$P = \frac{\dot{N}_+ - \dot{N}_-}{\dot{N}_+ + \dot{N}_-} \tag{6.115}$$

ist, mit $\dot{N}_+$ und $\dot{N}_-$ als Zählraten der in Richtung bzw. in Gegenrichtung zur Magnetisierung des Ferromagnetikums ausgerichteten Neutronen. Bei paralleler Ausrichtung ist σ doppelt

so groß wie bei antiparalleler. Also wird der Strahl hinter dem Polarisator P mit Neutronen antiparalleler Ausrichtung angereichert. Diesen Sachverhalt veranschaulichen die rechten Teile der Abb. 6.34b und 6.34c. Demzufolge ist σ aus zwei Anteilen zusammengesetzt; aus σ_K, das die Kernwechselwirkung berücksichtigt, und aus σ_m, das der magnetischen Wechselwirkung entspricht:

$$\sigma = \sigma_K + \sigma_m . \tag{6.116}$$

Benutzt man einen zweiten Ferromagneten als Analysator, dann kann neben einer Intensitätsverminderung infolge Kernstreuung durch Änderung der Analysierrichtung die Polarisation relativ verstärkt oder sogar beseitigt werden, d. h., mit dem Polarisator wird die Ausrichtung der Neutronen erzeugt und bestimmt, mit dem Analysator wird sie analysiert.

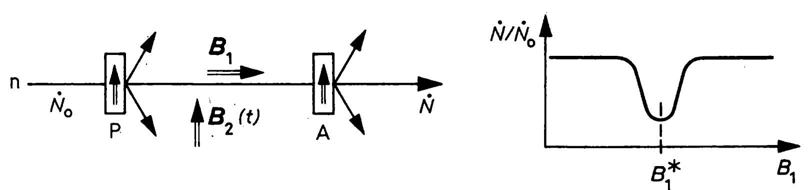


Abb. 6.35
Schema des Alvarez-Bloch-Versuchs mit thermischen Neutronen

Im Alvarez-Bloch-Versuch, dessen Schema Abb. 6.35 zeigt, fällt auf P und A ein Strahl thermischer Neutronen. Zwischen ihnen werden ein schwaches homogenes Magnetfeld $\boldsymbol{B}_1$ und ein dazu senkrechtes magnetisches HF-Feld $\boldsymbol{B}_2(t)$ eingeschaltet. Im Feld $\boldsymbol{B}_1$ erfahren die Neutronen eine Richtungsquantelung, und sie präzedieren mit ω_L um $\boldsymbol{B}_1$. Durch Drehen von A kann die Ausrichtung gefunden werden, der Betrag von μ_n^* mit Hilfe des HF-Feldes. Im Resonanzfalle erfolgt eine Energiezuführung auf die Neutronendipole. Diese ändern dabei ihre Orientierung, z. B. von $s = -1/2$ auf $s = +1/2$. Es gilt also gerade (6.112). Praktisch stellt man eine feste Frequenz ω ein und ändert $\boldsymbol{B}_1$. Am Detektor wird dann für die Resonanzinduktion $\boldsymbol{B}_1$ ein Minimum in $\Delta\dot{N}/\dot{N}$ beobachtet, wie es ebenfalls Abb. 6.32 zeigt.

6.4.2.5. Kernumwandlungsmethoden

1. Gegenwärtig sind die Spins der Grundzustände der stabilen und langlebigen Nuklide und der meisten Elementarteilchen zuverlässig bestimmt. Auch die magnetischen Dipolmomente sind relativ genau für diese Mikroobjekte gemessen worden. Anders sieht das bei den kurzlebigen Nukliden weit ab vom Betastabilitätsband aus, bei den angeregten Zuständen der Atomkerne, die in Kernumwandlungsprozessen entstehen bzw. angeregt werden, sowie bei sehr kurzlebigen oder neuen Elementarteilchen. Die Kernumwandlungsmethoden zur Bestimmung des Spins und des magnetischen Moments gehen von den Eigenschaften der Umwandlungsprodukte aus, die über den Umwandlungsmechanismus mit den Struktureigenschaften der Kerne, ihrer Anregungszustände bzw. mit denen der Elementarteilchen in Verbindung stehen. Wir werden hier nicht auf Methoden zur Bestimmung des magnetischen Moments eingehen. Es werden lediglich einige Beispiele der Spinbestimmung bei Elementarteilchen und Kernen über den Drehimpulserhaltungssatz besprochen, die das Wesen der Methode zeigen.

2. An der Gültigkeit des Drehimpulssatzes im Bereich der Mikrowelt gibt es heute keine Zweifel mehr. Sie gab es aber im Zusammenhang mit der Aufklärung des Betazerfalls. Der zunächst beobachtete Zerfall $n \to p + e^-$ widerspricht nicht nur dem Energie- und dem Impulssatz, sondern auch dem Drehimpulssatz, denn die Spins jedes der drei Teilchen sind $(1/2)\,\hbar$. Erst

die Postulierung der Teilnahme eines Antineutrinos an diesem Zerfall mit dem gleichen Spin durch W. PAULI 1933 und der spätere experimentelle Nachweis dieser ladungs- und ruhmasselosen Teilchen führten zu der Gewißheit, daß diese drei wichtigen Erhaltungssätze auch im Bereich der Mikrowelt erfüllt werden. Es gilt also richtig $n \to p + e^- + \bar{\nu}$ und $p \to n + e^+ + \nu$.

Auf dieser Grundlage läßt sich der Spin der im π-μ-Zweiteilchenzerfall (6.67)

$$\pi^+ \to \mu^+ + \nu_\mu, \tag{6.117a}$$

$$\pi^- \to \mu^- + \bar{\nu}_\mu \tag{6.117b}$$

entstehenden Myonen bestimmen. Da das Pion den Spin 0 hat, die Neutrinos aber $(1/2)\,\hbar$, kann für die Myonen nur $(1/2)\,\hbar$ erwartet werden, was von vielen Experimenten bestätigt wurde.

Der Spin des π^+ wurde exakt zuerst an Hand der beiden Umkehrreaktionen

$$p + p \to d + \pi^+ \qquad (a + A \to B + b), \tag{6.118a}$$

$$\pi^+ + d \to p + p \qquad (b + B \to A + a) \tag{6.118b}$$

ermittelt. In der Quantenmechanik wird für Umkehrreaktionen ganz allgemein der Reziprozitätssatz abgeleitet. Im M-System gilt (siehe 10.1.3.3)

$$(2I_A + 1)(2s_a + 1)\,p_a^2 \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\Theta,aA} = (2I_B + 1)(2s_b + 1)\,p_b^2 \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\Theta,bB}. \tag{6.119}$$

Nach $s_b = s_{\pi^+}$ aufgelöst, erhält man

$$s_{\pi^+} = \frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}\cdot\frac{p_p^2}{p_{\pi^+}^2}\cdot\frac{\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\Theta,pp}}{\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\Theta,d\pi^+}} - 1\right). \tag{6.120}$$

Einsetzen der experimentell bestimmten Impuls- und Wirkungsquerschnitte liefert $s_{\pi^+} = 0$.

3. Als Beispiel aus der Kernphysik betrachten wir den Eingangskanal der Compoundkernreaktion $a + A \to C^* \to B + b$. Der Drehimpulserhaltungssatz lautet hier

$$\boldsymbol{I}(a + A) = \boldsymbol{I}_a + \boldsymbol{I}_A + \boldsymbol{l}_{aA} = \boldsymbol{I}_{C^*} = \boldsymbol{I}_B + \boldsymbol{I}_b + \boldsymbol{l}_{Bb} = \boldsymbol{I}(B + b) \tag{6.121}$$

wobei mit $\boldsymbol{I}_i$ die Eigendrehimpulse der Reaktionspartner bezeichnet sind. Für den Ablauf einer Kernreaktion ergeben sich daraus strenge Konsequenzen. Führt man die Vektorsumme des Eingangskanalspins

$$\mathbf{S}_{aA} = \boldsymbol{I}_a + \boldsymbol{I}_A \tag{6.122a}$$

ein, so liegt diese in dem Intervall (Dreiecksregel)

$$|I_a - I_A| \leqq \mathrm{S}_{aA} \leqq I_a + I_A\,. \tag{6.122b}$$

Wenn $\boldsymbol{I}_a$ und $\boldsymbol{I}_A$ isotrop eingestellt sind, ergeben nicht alle Kombinationen mit $\boldsymbol{l}_{aA}$ einen bestimmten Drehimpuls $\boldsymbol{I}_{C^*}$. Auf Zustände mit diesem $\boldsymbol{I}_{C^*}$ führen dann bei vorgegebenem $\boldsymbol{l}_{aA}$ nur S-Werte in dem Intervall

$$|I_{C^*} - l_{aA}| \leqq \mathrm{S}_{aA} \leqq I_{C^*} + l_{aA}\,, \tag{6.122c}$$

bei vorgegebenem $\boldsymbol{S}$ nur l_{aA}-Werte des Intervalls

$$|I_{C^*} - S| \leqq l_{aA} \leqq I_{C^*} + S\,. \tag{6.122d}$$

Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die Einstellungen $(2I_{C^*} + 1)$ realisiert werden, ist

$$g = \frac{2I_{C^*} + 1}{(2I_a + 1)(2I_A + 1)}. \tag{6.123}$$

Die Größe g wird statistischer oder auch Gewichtsfaktor genannt.

Vollkommen analog kann man auch die rechte Seite von (6.121) behandeln. Konkrete Beispiele werden in Abschnitt 6.5.3. betrachtet.

6.4.3. Diskussion der Meßergebnisse

6.4.3.1. Nukleonen

1. Für die Nukleonen wurden die in Tabelle 6.5 zusammengestellten Werte des Spins und des magnetischen Moments ermittelt. Zum Vergleich sind die Daten für das Elektron mit aufgeführt. Der Spin ist in allen drei Fällen $(1/2)\,\hbar$. Beim magnetischen Dipolmoment gibt es aber erhebliche Unterschiede. Man hatte in Übereinstimmung mit der Theorie von Dirac die Werte μ_p (Dirac) $= \mu_K$ und μ_n (Dirac) $= 0$ erwartet. Gemessen wurde aber für das Proton ein um $1{,}793\mu_K$ größerer, für das Neutron ein um $1{,}913\mu_K$ kleinerer Wert. Beide Nukleonen sind also magnetische Dipole. Das negative Vorzeichen des Neutrons besagt, daß hier im Gegensatz zum Proton Spin und magnetisches Moment antiparallel eingestellt sind. Die gyromagnetischen Verhältnisse der Nukleonen ergeben sich gemäß (6.93) aus

$$\boldsymbol{\mu}_j = \boldsymbol{\mu}_s + \boldsymbol{\mu}_l = g_s\boldsymbol{s} + \boldsymbol{g}_l\boldsymbol{l}. \tag{6.124}$$

Tabelle 6.5
Spin und magnetische Momente des Elektrons und der Nukleonen

Teilchen	Z/e	s	μ[1])	g_s	g_l
e	−1	1/2	$1\mu_B$	2	1
p	+1	1/2	$+2{,}793\mu_K$	5,58	1
n	0	1/2	$-1{,}913\mu_K$	−3,82	0

Für das Elektron erhält man wegen $|\boldsymbol{\mu}_j| = 1 \cdot \mu_B$, $s = (1/2)\,\hbar$ und $Q = -e$ bekanntlich $g_s^{(e)} = 2$ und $g_l^{(e)} = 1$. Entsprechend ergeben sich für das Proton mit $|\boldsymbol{\mu}_j| = 2{,}793\mu_K$, $s = (1/2)\,\hbar$ und $Q = +e$ die Werte $g_l^{(p)} = 1$ und für $l = 0$: $g_s^{(p)} = 5{,}58$. Vom Neutron kann wegen $Q = 0$ auch für $l \neq 0$ kein Beitrag zu $\boldsymbol{\mu}_j$ kommen. Es ist also $g_l^{(n)} = 0$ und $g_s^{(n)} = -3{,}82$.

2. Die Abweichungen der Nukleonendipolmomente vom Diracschen Wert, die anormalen Anteile, deuten auf innere Ströme hin. Interessanterweise unterscheiden sich ihre Absolutbeträge

$$|\Delta\mu_p\mu_K| = |(\mu_p - 1)\,\mu_K| = 1{,}79\mu_K, \tag{6.125a}$$

$$|\Delta\mu_n\mu_K| = |\mu_n\mu_K| = 1{,}91\mu_K \tag{6.125b}$$

wenig voneinander. In den 60er Jahren wurde man darauf aufmerksam, daß $\mu_p/\mu_n \approx -2/3$ ist und konnte diesen Wert mit dem Quarkmodell erklären, auf das wir in Kapitel 14 zu sprechen kommen. Während der experimentelle Wert bei $0{,}685 \pm 0{,}015$ liegt, ergibt diese Theorie den Wert $-2/3 = -0{,}667$. Die anormalen Anteile lassen sich aber auch mit einem viel einfacheren Modell verstehen. Dazu wird für das Neutron angenommen, es bestehe mit der Wahrscheinlichkeit w aus einem Diracschen Proton p_0 und einem darum mit $l = 1$ rotierenden nega-

[1]) Die genauesten Werte sind $\mu_p = (2{,}7928456 \pm 0{,}0000011)\,\mu_K$, $\mu_n = (-1{,}91304184 \pm 0{,}00000088)\,\mu_K$.

tiven Pion und mit der Wahrscheinlichkeit $1 - w$ aus einem Diracschen Neutron. Das Proton denkt man sich mit der Wahrscheinlichkeit w als Diracsches Neutron n_0 realisiert, um das auf der 1p-Bahn ein positives Pion rotiert und mit $1 - w$ als Diracsches Proton. Also:

$$\begin{aligned} &\text{mit } w \text{ sei realisiert} \quad && n = p_0 + \pi^- \quad \text{und} \quad p = n_0 + \pi^+ \,, \\ &\text{mit } 1 - w \text{ sei realisiert} \quad && n = n_0 \qquad\qquad \text{und} \quad p = p_0 \,. \end{aligned} \tag{6.126}$$

Nimmt man nun noch an, daß das Pion auf der 1p-Bahn wegen $s = 0$ zwar kein magnetisches Eigendipolmoment, dafür aber ein seiner elektrischen Ladung proportionales magnetisches Bahndipolmoment

$$\mu(\pi^\pm) = \pm \frac{m_p}{m_\pi} \mu_K \approx \pm 7 \mu_K \tag{6.127}$$

hat, dann berechnet sich das anormale magnetische Dipolmoment des Neutrons und des Protons zu

$$\begin{aligned} \Delta\mu_n \mu_K &= w(\mu_{p_0} - 7)\, \mu_K + (1 - w)\, \mu_{n_0} \mu_K \\ &= -6w\mu_K = -1{,}85\mu_K \,, \end{aligned} \tag{6.128 a}$$

$$\begin{aligned} \Delta\mu_p \mu_K &= w(\mu_{n_0} + 7)\, \mu_K + (1 - w)\, \mu_{p_0} \mu_K - \mu_{p_0} \mu_K \\ &= +6w\mu_K = +1{,}85\mu_K \,. \end{aligned} \tag{6.128 b}$$

Um den experimentell ermittelten Wert zu reproduzieren, muß $w = 0{,}31$ gesetzt werden.

6.4.3.2. Die leichtesten Kerne

In Tabelle 6.6 sind links die experimentellen Spin- und Dipolmomentwerte aufgeführt. Sie lassen sich einfach verstehen, wenn angenommen wird, daß Spin und magnetisches Dipolmoment hauptsächlich durch die ungepaarten Nukleonen bestimmt werden und daß die Paarung gleichartiger Nukleonen zum Verschwinden von Spin und Dipolmoment führt. Die über die in der Mitte von

Tabelle 6.6
Spin und magnetisches Dipolmoment der leichten Kerne

Kern	Z	N	Spin	μ/μ_K	Orientierung			μ/μ_K	$\frac{E_B}{A}$/MeV
					p		n		
$^2_1$H	u	u	1	+0,857	$+\frac{1}{2}$		$+\frac{1}{2}$	0,880	1,112
$^3_1$H	u	g	1/2	+2,978	$+\frac{1}{2}$	+	$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right)$	2,793	2,827
$^3_2$H	g	u	1/2	−2,127	$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right)$		$+\frac{1}{2}$	−1,913	2,572
$^4_2$He	g	g	0	0	$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right)$	+	$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right)$	0,0	7,074
$^6_3$Li	u	u	1	+0,822	$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right)$	$+ \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) +$	$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right)$	0,880	5,332

Tabelle 6.6 eingezeichneten Spinorientierungen der Nukleonen erhaltenen Werte des magnetischen Dipolmoments zeigen, daß die Übereinstimmung mit den experimentellen Werten im Unterschied zum Spin nur näherungsweise erreicht wird. Der experimentelle Wert weicht in allen vier Fällen mit $\mu \neq 0$ etwas von der arithmetischen Summe der Dipolmomente ab.

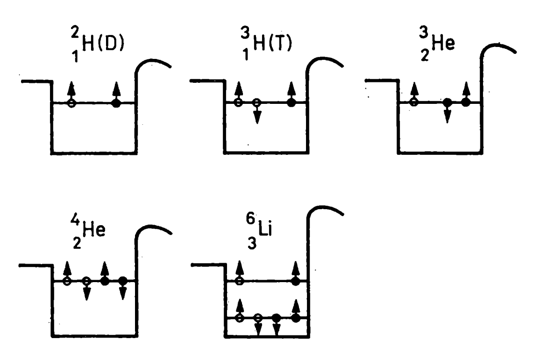


Abb. 6.36
Spinorientierung der Nukleonen in den leichtesten Kernen

Diese Ergebnisse ermöglichen eine Anordnung der Nukleonen in Paaren im Potentialtopf des Kerns, wie sie in Abb. 6.36 dargestellt ist. Aus der Gegenüberstellung der spezifischen Bindungsenergie ist zu erkennen, daß diese um so größer wird, je mehr Nukleonenpaare mit entgegengesetzt gerichtetem Spin enthalten sind.

6.4.3.3. Gesamtheit aller Kerne

1. Wie bereits für das $^4_2$He festgestellt werden konnte, ist für alle gg-Kerne $I = 0$ und $\mu_N = 0$. Das gilt ohne Ausnahme und paßt in das Bild der durchgängigen Bildung von Paaren aus Neutronen bzw. Protonen mit $I_{\text{Paar}} = 0$.

2. Für eine Reihe von u-Z-Kernen sind die experimentellen Ergebnisse in Tabelle 6.7 aufgeführt. In allen Fällen ist I halbzahlig und nicht größer als 9/2. Auch das deutet darauf hin,

Tabelle 6.7
Spin und magnetisches Dipolmoment
einiger stabiler und radioaktiver ug- und gu-Kerne im Grundzustand

uZ-Kern	Spin/$\hbar$	μ/μ_K	uN-Kern	Spin/$\hbar$	μ/μ_K
$^7_3$Li	3/2	+3,256	$^9_4$Be	3/2	−1,177
$^{15}_7$N	1/2	−0,283	$^{13}_6$C	1/2	+0,702
$^{23}_{11}$Na	3/2	+2,217	$^{25}_{12}$Mg	5/2	−0,855
$^{39}_{19}$K	3/2	+0,391	$^{41}_{20}$Ca	3/2	+0,214
$^{49}_{23}$V	7/2	+4,465	$^{57}_{26}$Fe	1/2	+0,090
$^{85}_{37}$Rb	5/2	+1,353	$^{87}_{38}$Sr	9/2	−1,093
$^{113}_{49}$In	9/2	+5,523	$^{125}_{52}$Te	1/2	−0,882
$^{181}_{73}$Ta	7/2	+2,351	$^{179}_{72}$Hf	9/2	−0,473
$^{203}_{81}$Tl	1/2	+1,611	$^{207}_{82}$Pb	1/2	+0,589

daß sich die Spins von Nukleonenpaaren kompensieren und daß der resultierende Kernspin vom letzten bzw. einigen wenigen Nukleonen bestimmt wird. Die Werte der magnetischen Dipolmomente bestätigen das. Übrigens ist μ_N nur in wenigen Fällen negativ. Ein Beispiel ist $^{15}_{7}N_8$, das nicht $\mu_N \approx 2{,}79\mu_K$, sondern $\mu_N = -0{,}283\mu_K$ hat.

3. Tabelle 6.7 bestätigt auch, daß die u-N-Kerne im wesentlichen nur kleine Spins und magnetische Momente haben. Wie bei den u-Z-Kernen ist der Spin halbzahlig. Auch hier finden sich μ_N-Werte mit entgegengesetzten Vorzeichen.

4. In Tabelle 6.8 sind die experimentellen Spinwerte und Dipolmomente einiger uu-Kerne aufgeführt. Es werden ohne Ausnahme nur ganzzahlige Werte des Spins beobachtet. Die Spinwerte gehen nicht über $I = 7$ bei $^{176}_{71}Lu$ hinaus. Ebenso nehmen die magnetischen Dipolmomente nur kleine Werte an, im Falle ^{176}Lu ergibt sich $+3{,}14$. Auch hier ist die Annahme gerechtfertigt, daß nur einige wenige Nukleonen zum Gesamtspin und Dipolmoment beitragen.

Tabelle 6.8
Spin, magnetisches Dipolmoment und Halbwertszeit der stabilen und einiger radioaktiver uu-Kerne im Grundzustand

Kern	Spin in $\hbar$	μ/μ_K	$T_{1/2}$	Kern	Spin in $\hbar$	μ/μ_K	$T_{1/2}$
$^{2}_{1}H$	1	+0,857	—	$^{138}_{57}La$	5	+3,707	10^{11} a
$^{6}_{3}Li$	1	+0,822	—	$^{142}_{59}Pr$	2	+0,250	19 h
$^{10}_{5}B$	3	+1,801	—	$^{154}_{63}Eu$	3	+1,971	16 a
$^{14}_{7}N$	1	+0,404	—	$^{166}_{67}Ho$	0	0	27 h
$^{24}_{11}Na$	4	+1,690	15 h	$^{176}_{71}Lu$	7	+3,143	$2 \cdot 10^{10}$ a
$^{44}_{21}Sc$	2	+2,563	4 h	$^{198}_{79}Au$	2	+0,566	2,7 d
$^{50}_{23}V$	6	+3,347	$8 \cdot 10^{15}$ a	$^{198}_{81}Tl$	2	0,002	5,3 h
$^{56}_{27}Co$	4	+3,803	77 d	$^{200}_{83}Bi$	7	[1])	35 m
$^{60}_{27}Co$	5	+3,754	5,3 a	$^{206}_{83}Bi$	6	+4,565	6,3 d
$^{72}_{31}Ga$	3	−0,132	14 h	$^{210}_{83}Bi$	1	+0,044	5 d

[1]) Kein experimenteller Wert bekannt

6.4.3.4. Elementarteilchen

1. Besondere Aufmerksamkeit verdient das Myon. Es ist in allen Konsequenzen ein schweres Elektron. Nicht nur die Spins stimmen überein, auch die magnetischen Momente. Das magnetische Moment des Myons wird also nicht wie das der Hadronen in μ_K, sondern in μ, in Bohrschen Magnetonen, gemessen.

Genaue Messungen ergaben, daß das magnetische Moment des Elektrons $\mu_e = (1{,}001\,159\,652\,209 \pm 0{,}000\,000\,000\,031)\,\mu_B$ beträgt. Die minimale Abweichung, das anormale magnetische Moment, wird einem virtuellen Photonenaustausch mit dem elektrischen Feld des Elektrons zugeschrieben. Das magnetische Moment des Myons wurde experimentell bestimmt. Es beträgt $(1{,}001\,165\,924 \pm 0{,}000\,000\,009)\,\mu_B$, d. h., es stimmt sehr gut mit dem theoretischen Wert von $1{,}001\,16\mu_B$ überein. Damit unterscheiden sich die beiden massebehafteten Leptonen sehr wesentlich von den Hadronen durch eine andere Größenordnung des magnetischen Moments.

2. Die Experimente ergaben, daß die Spins aller Grundzustände der Mesonen den Wert 0 haben und daß bei den Mesonenresonanzen, d. h. den angeregten Zuständen der Mesonen, auch die Spins 1 und 2 vorkommen. Alle Mesonen sind Bosonen.

3. Die Nukleonen und die Hyperonen haben alle im Grundzustand halbzahligen Spin, genauer $(1/2)\,\hbar$, bis auf das Omegahyperon, das sich als Mitglied des Baryonendekupletts durch $(3/2)\,\hbar$ auszeichnet. Die Baryonenresonanzen, d. h. die angeregten Zustände der Baryonen, können auch höhere halbzahlige Spinwerte haben; alle Baryonen sind Fermionen.

Magnetische Dipolmomente wurden nicht nur für die Nukleonen gemessen. Für die Hyperonen konnten die folgenden Ergebnisse ermittelt werden:

$$\mu_\Lambda = (-0{,}613 \pm 0{,}004)\,\mu_K\,, \qquad \mu_{\Xi^-} = (-1{,}85 \pm 0{,}75)\,\mu_K\,,$$

$$\mu_{\Sigma^-} = (+1{,}10 \pm 0{,}05)\,\mu_K\,, \qquad \mu_{\Xi^0} = (-1{,}250 \pm 0{,}014)\,\mu_K\,.$$

$$\mu_{\Sigma^+} = (+2{,}397 \pm 0{,}020)\,\mu_K\,,$$

6.4.4. Orientierte Teilchen

In der Kern- und Elementarteilchenphysik sind Experimente mit orientierten, d. h. mit ausgerichteten oder polarisierten Target- oder, bzw. und Geschoßteilchen ein wichtiges Mittel zur Untersuchung der Spinabhängigkeit der Wechselwirkungen zwischen ihnen. Da auch die Eigenschaften der Zerfallsprodukte radioaktiver Kerne vom Spin abhängen können, ist man bestrebt, für solche Untersuchungen Quellen mit orientierten Kernen einzusetzen. Wir nennen die Kerne in Targets und Quellen Probenkerne im Unterschied zu den Teilchen in Strahlen, den Strahlteilchen. Zwar gibt es Fälle, in denen derartige Informationen auch mit Hilfe nichtorientierter Teilchen erhalten werden können, aber dann ist meist die erforderliche Genauigkeit nicht zu erreichen oder man ist gezwungen, bei der Auswertung zusätzliche Annahmen zu machen. Die Ergebnisse vieler Experimente mit orientierten Teilchen können mit anderen Mitteln als dem der Orientierung gar nicht erhalten werden.

6.4.4.1. Polarisation und Ausrichtung

Man nennt ein System von Mikroteilchen, also von Kernen und Elementarteilchen orientiert, wenn die räumliche Verteilung der Teilchenspinrichtungen nicht isotrop ist. Eine klassische isotrope Richtungsverteilung zeichnet sich durch statistisch gleichmäßige Berücksichtigung aller Raumrichtungen aus. Da Spins quantenmechanische Drehimpulse sind, zeichnet sich hier die Isotropie dadurch aus, daß nur bestimmte — durch die Richtungsquantelung vorgegebene — Raumrichtungen zugelassen sind. Die Projektionen I_z des Spins $\boldsymbol{I}$ auf eine physikalisch ausgezeichnete Achse z können nur $2I + 1$ diskrete Werte zwischen $+I$ und $-I$ annehmen. Die Zahl der Projektionen m auf die ausgezeichnete Achse z ist im Falle der Isotropie für alle $2I + 1$ zugelassenen Einstellungen m_μ gleich groß. Da den Projektionen Zustände oder Unterzustände entsprechen, beschreibt man die zugehörigen Besetzungen durch Wahrscheinlichkeiten $W(m_\mu)$. Im Falle der Isotropie sind die Besetzungswahrscheinlichkeiten für alle Werte von m_μ gleich groß. Liegt Orientierung vor, werden also bestimmte Projektionen bevorzugt, dann sind diese Besetzungswahrscheinlichkeiten für unterschiedliche m_μ verschieden.

Aus Normierungsgründen muß die Summe aller Besetzungswahrscheinlichkeiten 1 ergeben, d. h., zur vollständigen Beschreibung einer Spinorientierungsverteilung müssen $2I$ Besetzungswahrscheinlichkeiten bekannt sein, oder ebensoviele Parameter, mit denen sie berechnet werden können. Die größte Verbreitung hat ein Satz von $2I$ Orientierungsparametern f_k gefunden, in dem die einzelnen f_k für Isotropie den Wert 0 und für vollständige Orientierung in einer einzigen Raumrichtung den Wert 1 liefern.

Die Orientierung von Mikroteilchen mit $I = 1/2$ wird vollständig mit Hilfe der Polarisation oder dem Polarisationsgrad P beschrieben:

$$f_1 = P = \frac{\langle I_z \rangle}{I}. \qquad (6.129)$$

Die Polarisation ist gleichbedeutend mit einer Orientierung der Spins vorwiegend in eine der beiden durch die Achse z vorgegebenen Richtungen. Die Berechnung des Mittelwertes $\langle I_z \rangle$ führt auf

$$\langle I_z \rangle = \frac{\Sigma\, m_\mu W(m_\mu)}{\Sigma\, W(m_\mu)}. \qquad (6.130)$$

Für $I = 1/2$, $m_\mu = \pm 1/2$ sind die Besetzungswahrscheinlichkeiten

$$W(m_\mu) = \frac{N(m_\mu)}{\Sigma N}; \quad W(+1/2) = \frac{N_+}{N_+ + N_-}; \quad W(-1/2) = \frac{N_-}{N_+ + N_-}, \qquad (6.131)$$

wobei N die Teilchenzahlen in den beiden Richtungen sind. Das Vorzeichen gibt an, ob der Spin dem die physikalische Richtung vorgebenden Feld gleich- oder entgegengerichtet ist. Für den Polarisationsgrad erhält man damit

$$P = 2\left[\frac{N_+}{2(N_+ + N_-)} - \frac{N_-}{2(N_+ + N_-)}\right] = \frac{N_+ - N_-}{N_+ + N_-}. \qquad (6.132)$$

Zur vollständigen Beschreibung von Mikroteilchen mit $I = 1$ wird ein zweiter Orientierungsparameter f_2 benötigt:

$$f_2 = a = \frac{3}{I(2I - 1)}\left[\langle I_z^2 \rangle - \frac{I(I+1)}{3}\right]. \qquad (6.133)$$

Man nennt f_2 auch die Ausrichtung, da dieser Parameter eine Orientierung entlang der z-Achse unabhängig von ihren beiden Richtungen angibt. In Abb. 6.37a, b sind die Polarisation und die Ausrichtung schematisch dargestellt. Der Mittelwert $\langle I_z^2 \rangle$ berechnet sich gemäß

$$\langle I_z^2 \rangle = \frac{\Sigma\, m_\mu^2 W(m_\mu)}{\Sigma\, W(m_\mu)}. \qquad (6.134)$$

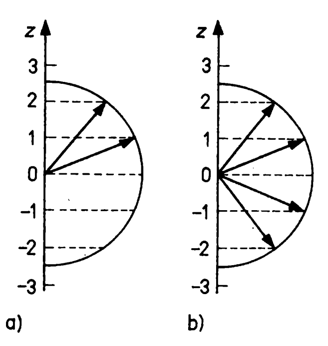


Abb. 6.37
Mikroteilchenorientierung
a) Polarisation, b) Ausrichtung

Da es für $I = 1$ drei Projektionen $m = +1, 0, -1$ gibt, hat man bei der Berechnung von P und a die Teilchenzahlen N_+, N_0 und N_- zu berücksichtigen.

Für Mikroteilchensysteme mit $I > 1$ müssen weitere Orientierungsparameter eingeführt werden. Der nächste für $I = 2$ lautet

$$f_3 = \frac{5}{I(I-1)(2I-1)} \left[\langle I_z^3 \rangle - \frac{I(I+1)}{5} \right]. \tag{6.135}$$

Er trägt keine besondere Bezeichnung, im Gegensatz zu den ersten beiden dieser Parameter. Der Mittelwert wird in Analogie zu (6.134), jedoch in der dritten Potenz von m_μ berechnet.

Allgemein gilt für die Beschreibung des Orientierungszustandes mit den Parametern f_k die folgende Regel: Ein System von Spins ist polarisiert, wenn mindestens einer der Parameter f_k mit ungeradem k von 0 verschieden ist; es ist ausgerichtet, wenn alle f_k mit ungeradem k gleich 0 und mindestens ein f_k mit geradem k ungleich 0 ist.

6.4.4.2. Orientierung von Probenteilchen

1. Eine wichtige Besonderheit des Spins der Mikroteilchen besteht darin, daß er die einzige Möglichkeit für die Orientierung des Mikroteilchens im Raum ist. Ist der Spin gleich 0, dann läßt sich das Mikroteilchen nicht orientieren. Eine wichtige Folge dieser Tatsache ist der Zusammenhang zwischen jeder beliebigen, durch einen Vektor zu beschreibenden physikalischen Eigenschaft eines Mikroteilchens gemäß (6.84). Solche Größen sind das magnetische Dipol- und das elektrische Quadrupolmoment. Über sie kann mit magnetischen oder elektrischen Feldern eine Orientierung erreicht werden. Am verbreitetsten ist die Einwirkung mit Hilfe magnetischer Felder über das magnetische Dipolmoment. Die Orientierungsmethoden lassen sich grundsätzlich in statische und dynamische einteilen, je nachdem ob statische oder dynamische, d. h. hochfrequente elektromagnetische Felder, benutzt werden.

2. Die statischen Methoden beruhen in der Regel auf der Anwendung starker magnetischer Felder. Infolge Zeeman-Effekts wird die Richtungsentartung der durch die Projektionen verursachten Unterzustände aufgehoben, wobei die Energieänderung, auch Wechselwirkungs- oder Zeeman-Energie genannt, mit (6.85) beschrieben wird. In Analogie zu (6.110) berechnet man die Aufspaltung zwischen zwei Unterzuständen zu

$$\Delta E_m = -\Delta m g B\,. \tag{6.136}$$

Für Paramagnetismus, also $g > 0$ ist der Zustand $m = I$ am intensivsten besetzt, für Diamagnetismus mit $g < 0$ der mit $I = -I$.

Die Zustandsbesetzung gehorcht der Boltzmann-Verteilung, ist also eine Funktion von der Temperatur T. Im thermodynamischen Gleichgewicht ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß sich ein Kern im Zustand m_μ befindet

$$W(m_\mu) = \frac{\exp(-\Delta E_m/kT)}{\sum\limits_{m=-I}^{+I} \exp(-\Delta E_m/kT)} \tag{6.137}$$

Für den speziellen Fall $I = 1/2$ ergibt sich damit eine Kernpolarisation

$$f_1 = P = \tanh\left(\frac{\mu_N B}{kT}\right). \tag{6.138}$$

Für $|\Delta E_m| \ll kT$ sind alle Unterzustände m_μ gleich intensiv besetzt. Unterschiedliche Besetzung und damit Kernorientierung liegen vor, wenn

$$|\Delta E_m| \gg kT \tag{6.139}$$

ist. Dann wird

$$f_1 = P \approx \frac{\mu_N B}{kT}. \tag{6.140}$$

Man erkennt, daß die erzielbare Orientierung um so größer ist, je größer das Kerndipolmoment und die magnetische Induktion und je niedriger die Temperaturen sind. Eine Abschätzung der erforderlichen Temperatur kann über (6.136) erfolgen. Nimmt man der Einfachheit wegen $\mu_N = 1$ an und $I = 1/2$, dann wird $\Delta E_m = 2\mu_K B$. Für $\Delta E_m = kT$ folgt daraus $B/T = k/\mu_K = 2{,}73 \cdot 10^3$ T/K. Die größten, heute mit Supraleittechnik realisierbaren Werte von B liegen zwischen 10 und 100 T, so daß die Temperatur T etwa 1 mK betragen muß.

Die Schwierigkeiten der praktischen Kernorientierung bestehen hauptsächlich darin, daß auch infolge der meist kleinen Werte von μ_N die Aufspaltung ΔE_m selbst bei äußeren Feldern mit sehr großem B kleiner als kT bleibt. Um Kernorientierungen von 70% zu erhalten müssen Induktionswerte von 10 bis 100 T und Temperaturen von bis hinab zu 1 mK erreicht werden. Größere B-Werte, als die technisch realisierbaren (oft bis zu 1000 T) stehen in paramagnetischen Ionen, in denen ungerade Elektronenzahlen in unaufgefüllten inneren Schalen vorkommen zur Verfügung. Zu ihnen zählen Ionen von Cr, Fe, Co, Ni, Mo, Ce, La, Nd, Ir, U und andere. Zur Orientierung dieser Kerne ist die Orientierung der Ionen in ihren Salzen erforderlich. Auf Grund des großen magnetischen Dipolmoments der Elektronen wird bereits mit Feldern von 0,01 bis 0,1 T vollständige Polarisation erzeugt. Größere B-Werte, als die technisch realisierbaren sind in diamagnetischen Atomen vorhanden, wenn diese in Ferromagnetika eingebettet werden. Zur Polarisation der ferromagnetischen Domänen sind ähnlich kleine Werte der äußeren magnetischen Induktion nötig, wie bei den paramagnetischen Ionen. Man nutzt zur Kernpolarisation auch die Wechselwirkung des Kernquadrupolmoments mit den im Innern von Kristallen herrschenden starken inhomogenen elektrischen Feldern mit Feldgradienten von 10^{17} bis 10^{18} V/cm^2.

3. Zur Erzielung tiefster Temperaturen von einigen mK setzt man meist die Methode der adiabatischen Entmagnetisierung oder die Methode der Lösung flüssigen ^{3}He in suprafluidem ^{4}He ein.

Ein wichtiges Beispiel der Anwendung der adiabatischen Entmagnetisierung ist die Polarisierung von radioaktiven ^{60}Co-Kernen zum Nachweis der Nichterhaltung der räumlichen Parität beim Betazerfall des ^{60}Co im Wu-Experiment (siehe 9.5.7.). Die radioaktiven ^{60}Co-Atome wurden anstelle von 0,5% der Mg-Atome in einem Ce-Mg-Doppelnitrat-Kristall, also einem Alaun, mit der Summenformel $Ce_2Mg_3(NO_3)_{12} \cdot 24\,H_2O$ eingebracht, der in einem Kryostaten mit flüssigem Helium auf 1,2 K gehalten wurde. Die Elektronenkonfigurationen der paramagnetischen Salzionen wurden durch ein starkes äußeres Magnetfeld, dessen Feldlinien horizontal durch das Salz verliefen, praktisch vollständig polarisiert. Die dabei entstandene Wärme wurde durch Abpumpen der Atome des infolge Unterdrucks siedenden Heliums abgeführt. Die paramagnetischen Ionen nahmen nun den energetisch tiefsten Zustand hinsichtlich des Magnetfeldes mit $m = I$ ein, dessen Energie um ΔE_m unter der desselben Terms ohne äußeres Magnetfeld liegt. Dann wurde das Magnetfeld langsam herabgeregelt, so daß das Salz ständig im thermodynamischen Gleichgewicht blieb. Gemäß (6.137) müssen mit abnehmender magnetischer Induktion höhere Terme des Zeeman-Multipletts besetzt werden. Die für die Übergänge erforderliche Energie wurde dem thermischen Energievorrat des Salzes entnommen, wodurch seine Temperatur auf 0,01 K absank. Die Besonderheit dieses Experiments besteht darin, daß das paramagnetische Salz zweierlei Zielen dient, nämlich der Erzeugung eines starken inneren Magnetfeldes und gleichzeitig einer tiefen Temperatur durch die adiabatische Entmagnetisierung. Man sollte erwarten, daß nach der adiabatischen Entmagnetisierung zwar eine tiefe Temperatur erreicht wird, aber mit der Abkühlung die Polarisation der Atomhüllen

und damit die Ausrichtung der inneren Felder verloren geht. Eine erneute Magnetisierung des Salzes würde zu einer erheblichen Temperaturerhöhung führen. Der im Experiment verwendete Alaunkristall hat eine große räumliche Anisotropie des g-Faktors. Führt man hier die adiabatische Entmagnetisierung so durch, daß die Magnetfeldlinien mit der Richtung zusammenfallen, in der der g-Faktor seinen Maximalwert hat, so erhält man eine intensive Abkühlung. Läßt man nach Erreichen der tiefen Temperatur ein schwaches Magnetfeld in der Richtung einwirken, in der der g-Faktor seinen Minimalwert hat (beim Alaun senkrecht zu der Richtung mit dem Maximalwert), dann erwärmt sich der Kristall nur unwesentlich. Im Wu-Experiment wird das zur Erhaltung der Polarisation der ^{60}Co-Elektronen erforderliche wesentlich schwächere Magnetfeld mit Hilfe einer Spule erzeugt, deren Feldlinien senkrecht auf denen des starken Magneten stehen, also in vertikaler Richtung verlaufen. Auf diese Weise hat man bei der tiefen Temperatur ein ausgerichtetes inneres Feld.

Die zweite Methode zur Erzeugung tiefster Temperaturen beruht auf der Tatsache, daß sich flüssiges ^{3}He in suprafluidem ^{4}He lösen läßt, also Lösungswärme verbraucht und danach verdampft werden kann, also Verdampfungswärme entzieht, wenn der Druck im Verdampfer hinreichend klein gehalten wird. Mit modernen Anlagen dieser Art werden Temperaturen von einigen wenigen mK auf beliebig lange Zeiten erzielt und das in beliebigen Materialien recht großer Abmessungen von vielen cm^3.

4. Bei den dynamischen Methoden macht man zunächst ebenfalls davon Gebrauch, daß die magnetischen Momente der Elektronen etwa um einen Faktor 10^3 größer sind, als die der Kerne. Sie lassen sich daher bereits bei einer Temperatur von 1 K und einer magnetischen Induktion von 2 T vollständig polarisieren. Durch Einstrahlung hochfrequenter elektromagnetischer Energie in den Resonanzfrequenzen wird über die magnetische Wechselwirkung zwischen den unpaarigen Elektronen und den Kernen die Polarisation auf letztere übertragen, indem Übergänge zwischen den Zeeman-Zuständen der Kern- und Elektronenwechselwirkung und ihrer Projektionen in einem starken Magnetfeld induziert werden. Die Vergrößerung der Kernpolarisation erreicht dabei einen Faktor $g_e/g_K \approx 10^3$, wobei g_e und g_K die gyromagnetischen Verhältnisse von Elektron und Kern sind. Diese Methoden der dynamischen Kernpolarisation machen von den Erscheinungen der paramagnetischen Elektronen- und magnetischen Kernresonanz Gebrauch.

In Metallen und Flüssigkeiten erfolgt die dynamische Erhöhung der Kernpolarisation über den Overhauser-Effekt, in paramagnetischen dotierten Kristallen über den Festkörpereffekt. Mit Hilfe des Festkörpereffekts kann man z. B. in La-Mg-Doppelnitrat-Kristallen mit der zum Alaun analogen Summenformel $La_2Mg_3(NO_3)_{12} \cdot 24\,H_2O$, die mit Nd^{3+}-Ionen dotiert sind bei etwa 1 K und 2 T Polarisationen von 70 bis 80% für Protonen erreichen.

In der Elementarteilchenphysik werden Protonentargets mit 100%iger Polarisation für Wechselwirkungen mit Sekundärteilchen benötigt, so daß die zusätzliche Forderung nach geringer magnetischer Induktion und deren Inhomogenität besteht. Im sogenannten eingefrorenen polarisierten Protonentarget wird diese hohe Polarisation durch Einstrahlung der HF-Energien in den Resonanzfrequenzen erreicht. Dann wird die Temperatur des Targets mit Hilfe der ^{3}He-^{4}He-Lösungsmethode auf weniger als 0,1 K abgesenkt, so daß die Spin-Gitter-Relaxationszeit sehr große Werte annimmt. Die magnetische Induktion wird von ursprünglich 2 T auf 0,5 T abgesenkt, indem die Apertur des Magneten vergrößert wird. Dadurch verringert sich nicht nur die Induktion, sondern auch die Inhomogenität des Feldes.

Eine andere wichtige dynamische Methode ist das optische Pumpen in für Licht der erforderlichen Wellenlänge durchsichtigen Medien, besonders in Gasen und Dämpfen. Die Orientierung erfolgt über die Resonanzabsorption der optischen Strahlung, wodurch Änderungen in den Besetzungswahrscheinlichkeiten hervorgerufen werden. Damit die Polarisation nicht innerhalb kürzester Zeiten durch Stöße zwischen den Atomen verloren geht, muß der Gasdruck klein, die Arbeitstemperatur kann groß sein.

6.4.4.3. Orientierung von Strahlteilchen

1. Historisch betrachtet war die erste Methode zur Erzeugung polarisierter Strahlteilchen die Nutzung der elastischen Streuung. Die Polarisierung ist hier das Resultat der Spin-Bahn-Wechselwirkung zwischen den Streupartnern, d. h. die Folge eines Potentials, das proportional ist zum Skalarprodukt aus dem relativen Bahndrehimpuls der Teilchen $\boldsymbol{L} = [\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}]$ und ihrer Spinfunktion $\boldsymbol{S} = (\boldsymbol{s}_1 + \boldsymbol{s}_2)/2$:

$$V_{LS} \approx (\boldsymbol{L} \cdot \boldsymbol{S}) . \tag{6.141}$$

Damit hängt sie von der gegenseitigen Orientierung dieser beiden Vektoren ab.

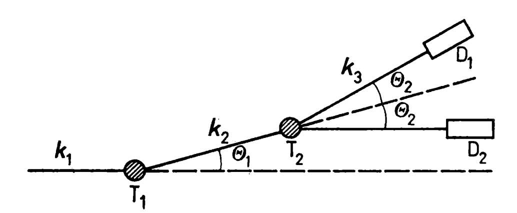


Abb. 6.38
Schematische Darstellung des Doppelstreuexperiments zur Strahlteilchenpolarisation über die Spin-Bahn-Wechselwirkung

Das Schema eines Experiments dieser Art ist in Abb. 6.38 dargestellt. Ein nichtpolarisierter Teilchenstrahl mit dem Wellenvektor $\boldsymbol{k}_0$ trifft auf das Target T_1, den Polarisator, von wo ein Teil davon mit $\boldsymbol{k}_1$ unter dem Winkel Θ_1 auf T_2, den Analysator, gelenkt wird. Als Folge der Spin-Bahn-Wechselwirkung kann wiederum ein Teil davon polarisiert sein. Hinsichtlich der Strahlrichtung ist das Ergebnis der ersten Streuung azimutalsymmetrisch. Nach der zweiten Streuung, nun in T_2, wird der Strahl abermals abgelenkt und zum Teil polarisiert. Danach bewegt er sich mit $\boldsymbol{k}_3$ in die Richtung Θ_2. Die Azimutalsymmetrie ist aber jetzt verloren gegangen. Um das zu verstehen, nehmen wir vorübergehend an, nach der ersten Streuung seien alle Streuteilchen positiv polarisiert worden. Dann sind in den Winkel Θ_1 genau so viele positiv polarisierte Teilchen gestreut worden, wie in den Winkel $-\Theta_1$ negativ polarisierte, weil im Inzidenzstrahl und im Target zunächst alle Spinrichtungen gleich intensiv vertreten sind. An der zweiten Streuung nehmen unter diesen Bedingungen nur Teilchen mit positiver Polarisation teil. Sie können nur in den Winkel Θ_2 abgelenkt werden. Im realen Experiment wird allerdings bei weitem keine vollständige Polarisation erreicht. Die azimutale Asymmetrie hängt somit vom Polarisationsgrad ab. Bei vollständiger Polarisation in T_1 und T_2 würden in einem der beiden Detektoren D_1 oder D_2 unter den Winkeln Θ_2 und $-\Theta_2$ keine Teilchen registriert werden können. Die Polarisationsvektoren zeigen nach den Streuungen in die Richtung der Normalen der Streuebenen $[\boldsymbol{k}_1 \times \boldsymbol{k}_2]$ bzw. $[\boldsymbol{k}_2 \times \boldsymbol{k}_3]$. Zwischen beiden sei der Winkel φ aufgespannt. Die Wahrscheinlichkeit der Streuung in einen bestimmten Raumwinkel hängt von der relativen Orientierung von $\boldsymbol{L}$ und $\boldsymbol{S}$ ab, also vom Winkel φ. Bei fixierter Energie erhält man für den Wirkungsquerschnitt

$$\sigma(\Theta_2, \varphi) = \sigma_{\text{unpol}}(\Theta_2)\left[1 + P_1(\Theta_1) \cdot P_2(\Theta_2) \cos \varphi\right] , \tag{6.142}$$

wobei $P_1(\Theta_1)$ und $P_2(\Theta_2)$ die Polarisationsgrade in T_1 und T_2 sind, die mit (6.132) mit den in Θ_2, bzw. $-\Theta_2$ gestreuten Teilchenzahlen N_+ und N_- berechnet werden können. Mit σ_{unpol} ist der Wirkungsquerschnitt für den nichtpolarisierten Strahl bezeichnet.

Doppelstreuexperimente haben zwei große Nachteile: Erstens sind die Strahlströme der polarisierten Sekundärteilchen sehr klein und zweitens liegen die Polarisationsgrade selbst in den günstigsten Fällen unterhalb 40%. Man hat daher seit den 50er Jahren die Entwicklung von Ionenquellen für Beschleuniger vorangetrieben, in denen die Kerne polarisiert werden. Auf diese Weise können Strahlströme von bis zu 1 mA und Polarisationsgrade von bis zu 100% erreicht werden.

2. Kernphysikalische Untersuchungen mit polarisierten beschleunigten Protonen, leichten und schweren Ionen sind heute weit verbreitet. Wir betrachten hier lediglich die Erzeugung polarisierter Protonen mit Hilfe von Ionenquellen am Eingang von Beschleunigern, weil dadurch das Prinzip deutlich wird, das auch bei den anderen Kernen verwendet wird. Die Methoden zur Kernpolarisierung in Ionenquellen lassen sich in zwei Gruppen einteilen. In den Grundzustandsquellen erfolgt die Kernpolarisierung aus dem Grundzustand der Hülle der Wasserstoffatome mit den Quantenzahlen $1^2S_{1/2}$, in den Anregungszustand- oder Lamb-Verschiebungsquellen aus dem $2^2S_{1/2}$-Zustand, den LAMB zu seinem berühmten Experiment benutzte.

Die Grundzustandsquelle besteht aus einem Dissoziator, in dem H_2-Moleküle mit Hilfe eines HF-Feldes in H^-- und H^+-Ionen sowie H-Atome zerlegt werden, aus einem Strahlformungssystem für die H-Atome, das gleichzeitig zur Trennung der Komponenten mit $m_J = \pm 1/2$ dient, aus dem Polarisator für die Wasserstoffkerne und aus einem Ionisator, der Ionenquelle am Eingang des Beschleunigers. Zur Strahlformierung kann wie im Stern-Gerlach-Versuch mit der einfachen, dort verwendeten Magnetform gearbeitet werden, besser jedoch zur Erhöhung des Strahlstromes mit einem Vier- oder Sechspolmagneten. Als Folge der Inhomogenität des Magnetfeldes werden die Atome mit der einen der beiden Einstellungen zum Magnetfeld, die mit $m_J = -1/2$ aus dem Strahl ausgelenkt, während die andere mit $m_J = +1/2$ in den Raum zwischen Magnet und Ionisator fokussiert wird, wo die Kernpolarisation durchgeführt wird. Dort steht ein hinsichtlich der Elektronendipolmomente vollständig polarisierter Strahl an Wasserstoffatomen zur Verfügung. Die Abhängigkeit der Energien der HFS-Zustände zeigt die Abb. 6.39, zwar nicht für den Grundzustand, sondern für zwei Anregungszustände, aber der prinzipielle Verlauf ist analog. Im Polarisator werden durch Einstrahlung von HF-Energie Kerne aus dem Zustand $m_J = +1/2$, $m_I = -1/2$ in den mit $m_J = +1/2$, $m_I = +1/2$ übergeführt. Damit wird eine 100%ige Kernpolarisation erreicht. Aus den verschiedensten Gründen kommt es danach zu einer teilweisen Depolarisation, so daß der Polarisationsgrad schließlich 80 bis 90% beträgt.

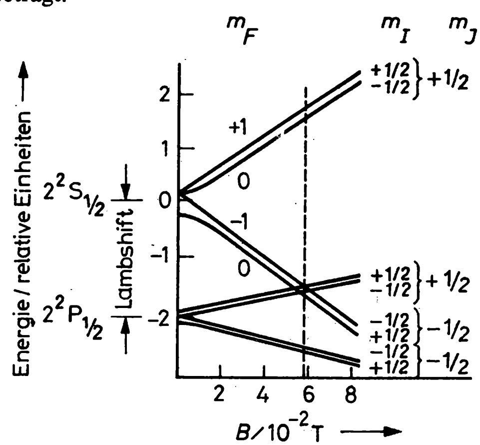


Abb. 6.39
HFS-Aufspaltung der ersten beiden Anregungszustände des Wasserstoffatoms

Die Lamb-Verschiebungsquellen haben den Vorteil, daß man auch negative Wasserstoffionen polarisieren kann, was für den Einsatz in elektrostatischen Tandemgeneratoren erforderlich ist. Hier werden zuerst Protonen, also H^+-Ionen, auf etwa 500 eV beschleunigt und durch eine Cs-Dampfatmosphäre geschossen, wobei etwa 10% der Ionen ein Elektron in den $2^2S_{1/2}$-Zustand einfangen, der die sehr große Lebensdauer von einigen ms hat. Mit der gleichen Energie durchlaufen sie anschließend eine mit Ar-Gas gefüllte Driftstrecke, wo die sich im $2^2S_{1/2}$-Zustand befindlichen Ionen intensiv ein zweites Elektron einfangen, diesmal vorwiegend auf den mit einer Lebensdauer von ca. 1 ns sehr kurzlebigen 2 P-Zustand. Für unsere Betrachtungen ist davon nur der $2^2P_{1/2}$-Zustand von Interesse. Seine Energie als Funktion von der angelegten magnetischen Induktion ist in Abb. 6.39 zusammen mit der des $2^2S_{1/2}$-Zustandes, beide aufgespalten in die HFS-Unterzustände dargestellt. Bei $5{,}75 \cdot 10^{-2}$T überlappen die Wellenfunktionen von je zwei der HFS-Unterzustände des $2^2S_{1/2}$- und des $2^2P_{1/2}$-Zustandes, so daß die Elektronen in den $m_J = -1/2$-Unterzuständen des $2^2S_{1/2}$-Zustandes mit der kurzen Lebensdauer in den Grundzustand übergehen. Auf diese Weise verbleiben nur in den $2^2S_{1/2}$, $m_J = +1/2$-Zuständen Elektronen, wobei die Protonen noch $m_I = \pm 1/2$ haben. Durch Einstrahlung von HF-Energie in Resonanz können die $m_I = -1/2$-Kerne in $m_I = +1/2$ übergeführt werden. Die Protonen sind dann 100%ig polarisiert, die Ionen zweifach positiv geladen.

3. Neutronenstrahlen bestehen auf Grund des Spins von $I = 1/2$ mit $m_I = \pm 1/2$ aus zwei Komponenten, die zur Polarisierung zu trennen sind. Dazu gibt es prinzipiell zwei Möglichkeiten, entweder über die Spinabhängigkeit der magnetischen Streuung an magnetischen Atomhüllen oder Kristallebenen, wobei das magnetische Dipolmoment ausschlaggebend ist, oder aber über die Spinabhängigkeit der Neutronenwechselwirkung mit polarisierten Atomkernen. Weniger effektiv sind Doppelstreuexperimente, wie sie in Punkt 1 beschrieben wurden.

Erstmals wurden thermische Neutronen, wie in 6.4.2.4. beschrieben, im Alvarez-Bloch-Versuch 1940 mit Hilfe von Eisenplatten polarisiert, die bis zur Sättigung magnetisiert waren. Die Polarisierung erfolgte an den polarisierten Hüllen der Streuatome. Parallel zur Polarisationsrichtung eingestellte Neutronen werden doppelt intensiv gestreut, verglichen mit antiparallel eingestellten, verlassen somit den Strahl, der sich dadurch mit antiparallel eingestellten Neutronen anreichert. Bei $B = 1$ T kann man $P = 0{,}6$ erreichen.

Langsame Neutronen können auch mit Hilfe der Neutronendiffraktion polarisiert und gleichzeitig monochromatisiert werden. Der Polarisationsgrad kann hier nahezu 100% betragen. Bei dieser Methode nutzt man die polarisierende Wirkung ferromagnetischer Einkristalle bei der Braggschen Reflexion an den Kristallebenen. Durch Wahl von Magnetfeldinduktion und Bragg-Winkel können die Amplituden der Kern- und der magnetischen Streuung an den Kristallebenen angeglichen werden. Dann ist für Neutronen mit antiparallelem Spin hinsichtlich der Magnetisierungsrichtung die summarische Streuamplitude gleich 0, so daß in den Bragg-Winkel parallel zur Magnetisierungsrichtung polarisierte Neutronen reflektiert werden. Der Nachteil der Methode besteht vor allem in der hohen Verlustrate der Neutronen.

Die spinabhängige Streuung der Neutronen über das magnetische Dipolmoment wird auch bei der Polarisation mit Hilfe von Spiegeln aus ferromagnetischem Metall, z. B. an Kobaltspiegeln, genutzt. Auch hier werden Neutronen mit parallel zur Magnetisierungsrichtung der Atome des Metalls eingestellten Spins an der Spiegelebene vollständig reflektiert.

Auf der Spinabhängigkeit der Wechselwirkung der Neutronen mit den Atomkernen beruht die polarisierende Wirkung der polarisierten Protonentargets, die in Anordnungen zu diesem Zweck als Filter dienen. Durchgelassen werden vorwiegend Neutronen, für die die Wechselwirkung mit den Protonen am geringsten ist. Maximale Streuung erfahren Neutronen, deren Spin parallel zum Protonenspin gerichtet ist, minimale Streuung die antiparallel eingestellten. Der Strahl wird auf diese Weise mit antiparallel eingestellten Neutronen angereichert. Mit polarisierten Protonentargets, wie sie in 6.4.4.2., Punkt 4, auf der Grundlage von La-Mg-

Doppelnitrat-Kristallen beschrieben wurden, sind in den breiten Energiegrenzen von 10^{-2} bis 10^5 eV für die Neutronen annähernd die gleichen Polarisationsgrade erreicht worden, wie für die Protonen.

Zur Polarisierung schnellerer Neutronen mit Energien von 1 MeV und mehr ist man gezwungen, Doppelstreuexperimente heranzuziehen.

6.5. Parität[1])

6.5.1. Parität als Quantenzahl

1. Kern- und Elementarteilchenzustände werden durch Eigenwerte von Operatoren, durch Quantenzahlen charakterisiert. Zu den wichtigsten zählen neben der Energie der Spin I und die Parität P oder π. Spin und Parität werden oft zu der Angabenkombination I^P oder I^π zusammengefaßt. Für die Elementarteilchen sind diese Angaben in Anhang D 4. enthalten, für die Kernniveaus bringt die Abb. 6.40 ein Beispiel.

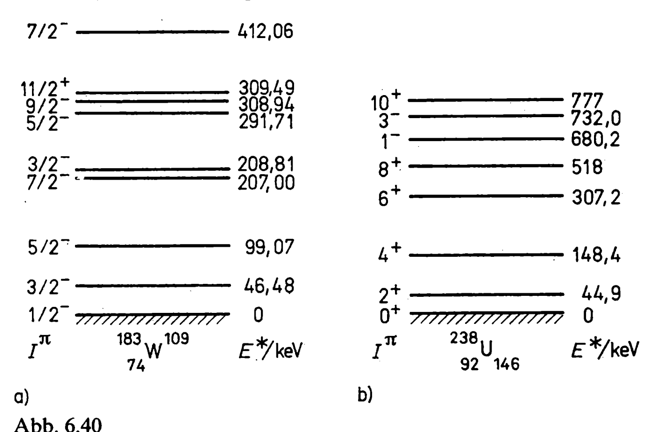


Abb. 6.40
Niveauschema eines uZ- und eines gg-Kerns mit den Charakteristika E und I^π

Zur Parität gibt es kein klassisches Analogon. Sie beschreibt die Spiegelsymmetrie der Wellenfunktion, das Verhalten der Wellenfunktion bei Rauminversion, d. h. bei Vorzeichenumkehr der Koordinaten. Da Rauminversion gleichbedeutend ist mit dem Übergang von einem rechts- in ein linkshändiges Koordinationssystem, was in Abb. 6.41 zu sehen ist, beschreibt die Parität das Verhalten der Wellenfunktion beim Übergang von Rechts- auf Linkssymmetrie. Die Symmetrie sollte keinen Einfluß auf den Ablauf physikalischer Prozesse haben, d. h., physikalische Gesetze sollten invariant sein gegen Rechts- und Linkssymmetrie, also gegen Rauminversion. Es ist also zunächst zu erwarten, daß die Parität eine Erhaltungsgröße ist.

2. Die Rauminversion führen wir mit dem Inversionsoperator **P** an einer Teilchenwellenfunktion $\psi(\boldsymbol{r}, t)$ durch. Der Operator soll das Vorzeichen der drei Descartesschen Raumkoordinaten umkehren, d. h., er vollzieht den Übergang von $\boldsymbol{r}$ auf $-\boldsymbol{r}$ in der Wellenfunktion:

$$\mathbf{P}\psi(\boldsymbol{r}, t) = \psi(-\boldsymbol{r}, t) . \tag{6.143}$$

[1]) Damit ist die räumliche Parität gemeint. Das Wort räumlich wird meist weggelassen.

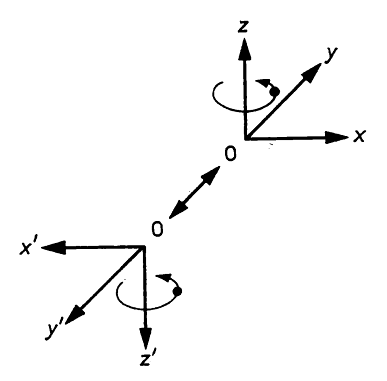


Abb. 6.41
Spiegelung eines Koordinatensystems durch Rauminversion

P ist der Eigenwert des Operators **P**. Um die Größe des Eigenwerts P zu finden, wird die Tatsache genutzt, daß eine zweite Inversion auf den ursprünglichen Zustand zurückführen muß:

$$\mathbf{PP}\psi(\boldsymbol{r}, t) = PP\psi(\boldsymbol{r}, t) = \psi(\boldsymbol{r}, t). \tag{6.144}$$

Daraus folgt

$$P^2 = 1; \qquad P = \pm 1. \tag{6.145}$$

Es ist also möglich, daß $\psi(\boldsymbol{r})$ bei Rauminversion sein Vorzeichen ändert. Wenn $P = +1$ ist, spricht man von einer geraden, im Falle $P = -1$ von einer ungeraden Funktion $\psi(\boldsymbol{r})$. P gehört zu den multiplikativen Quantenzahlen.

3. Da man überzeugt war, daß die physikalischen Prozesse nicht von der Links- oder Rechtssymmetrie des Raumes abhängen sollten, führte man den Beweis über die Erhaltung oder Nichterhaltung der Parität bei Rauminversion, ohne die Spezifik der Eigenschaften der vier fundamentalen Wechselwirkungen zu berücksichtigen. Daß eine derartige Abhängigkeit existieren könnte, wurde 1955 von T. D. LEE und C. N. YANG angenommen, die gleichzeitig Experimente zur Überprüfung vorschlugen. Bereits 1956 konnte im Wu-Experiment (siehe 9.5.7.) gezeigt werden, daß die Parität beim Betazerfall von ^{60}Co, also bei der schwachen Wechselwirkung keine Erhaltungsgröße ist. Für den mathematischen Beweis muß angenommen werden, daß die Wellenfunktion aus zwei Anteilen zusammengesetzt ist, einem mit Paritätserhaltung und einem ohne: $\psi = \psi_1 + F\psi_2$. Im Falle der starken, elektromagnetischen und wahrscheinlich auch der Gravitationswechselwirkung ist $F = 0$, nicht aber im Falle der schwachen Wechselwirkung.

6.5.2. Parität als Teilchen- und Systemeigenschaft

1. Aus der Gesamtheit der Erfahrung folgt, daß alle Teilchen mit von Null verschiedener Ruhmasse eine sogenannte innere Parität haben. Beim Elektron, Myon und bei den Baryonen ist $P = +1$, bei den entsprechenden Antiteilchen $P = -1$. Die Mesonen zeichnen sich alle durch negative innere Parität $P = -1$ aus (siehe Anhang D 4.) Teilchen mit positiver Parität nennt man gerade, mit negativer ungerade.

2. Neben der inneren Parität gibt es eine mit dem Bahndrehimpuls im Zusammenhang stehende Parität. Für ein System aus zwei nichtrelativistischen Teilchen oder aus zwei nichtrelativistischen Untersystemen mit den inneren Wellenfunktionen Ψ_A und Ψ_B und den die Relativbewegung mit den Drehimpulsen l_A und l_B bzw. $l_{A,B}$ beschreibenden Wellenfunktionen φ_{lA} und φ_{lB} oder $\varphi_{l,A,B}$ berechnet sich die Gesamtwellenfunktion zu

$$\Psi_{A+B} = \Psi_A \cdot \Psi_B \cdot \varphi_{l,A,B} \,. \tag{6.146}$$

Die Gesamtparität erhält man durch sukzessive Durchführung der Rauminversion bei jeder der einzelnen Wellenfunktionen. Damit wird

$$\mathbf{P}_{A+B}\Psi_{A+B} = P_A P_B P_{l,A,B} \Psi_A \Psi_B \varphi_{l,A,B} \,. \tag{6.147}$$

Ein System oder einen Zustand nennt man gerade, wenn die Inversion auf

$$\mathbf{P}_{A+B}\Psi_{A+B} = +\Psi_{A+B} \tag{6.148a}$$

führt und ungerade, wenn sich ergibt

$$\mathbf{P}_{A+}\Psi_{A+} = -\Psi_{A+B}. \tag{6.148b}$$

3. Die Drehimpulsabhängigkeit der Gesamtparität berechnet sich gemäß (A.14) zu

$$P_l = (-1)^l \,. \tag{6.149}$$

Für ein System aus den Teilchen oder Untersystemen A und B ergibt sich

$$P_{A+B} = P_A \cdot P_B (-1)^{l_{A,B}} \,. \tag{6.150}$$

4. Interessante Schlußfolgerungen ergeben sich aus der Anwendung von (6.149) und (6.150) auf den Kern. Da die inneren Paritäten der Nukleonen positiv sind, hängt P nur noch von den Bahndrehimpulsen der Nukleonen ab. Voraussetzung für die Ableitung dieser Gleichungen war die unabhängige Bewegung der Teilchen. Gerade diese Voraussetzung z. B. wird beim Schalenmodell gemacht, das von einer unabhängigen Bewegung der Nukleonen in dem von ihnen selbst geschaffenen Kernpotential ausgeht. Im Rahmen eines solchen Modells ergibt sich die Anwendung von (6.150) auf die A Nukleonen:

$$P = \prod_{i=1}^{A} P_i \left[(-1)^{\sum_{i=1}^{A} l_i}\right] = (-1)^{\sum_{i=1}^{A} l_i} \,. \tag{6.151}$$

Gemäß (6.149) ist die Parität des Nukleons gerade oder ungerade, je nachdem, ob l eine gerade oder ungerade Zahl ist. Beim Kern ist wegen (6.151) P gerade oder ungerade, je nachdem, ob $\sum_i l_i$ eine gerade oder ungerade Zahl ist. Eine Reihe weiterer Regeln sind:

a) Ein System aus einer beliebigen Zahl gerader Teilchen hat wieder gerade innere Parität.
b) Ein System aus einer ungeraden Zahl ungerader Teilchen hat ungerade innere Parität.
c) Da die Parität in den starken und elektromagnetischen Wechselwirkungen eine Erhaltungsgröße ist, kann sie sich in einem abgeschlossenen System nur ändern, wenn ein Teilchen mit ungerader innerer Parität eingefangen oder emittiert wird.
d) Wegen der Kopplung des Photons an das elektromagnetische Vektorpotential $\boldsymbol{A}$, das sein Vorzeichen bei Paritätsoperationen ändert, ist die Parität des Photons (-1).

In Übereinstimmung mit diesen Regeln haben wegen der Paarbildung gg-Kerne im Grundzustand immer positive Parität. Es gilt für sie also immer $I^P = 0^+$. Bei der Diskussion der Drehimpulse und magnetischen Momente zeigte sich, daß die Eigendrehimpulse durch Paarbildung kompensiert werden. Die Tatsache $P = +1$ für alle gg-Kerne bedeutet, daß sich die Bahndrehimpulse immer geradzahlig zusammensetzen.

Wenn die Parität der u-A-Kerne im Grundzustand nur durch verschwindenden Bahndrehimpuls ($l = 0$) des ungepaarten Nukleons bestimmt wäre, dann müßte hier immer $P = +1$ sein. Das ist aber nicht der Fall, wie zwei Beispiele zeigen sollen: ${}^{15}_{7}N^{8}$ mit $P = -1$ und ${}^{17}_{8}O^{9}$ mit $P = +1$. Das deutet darauf hin, daß sich das ungepaarte Nukleon z. B. im s- oder p- oder d- usw. Zustand befinden kann.

In den angeregten Zuständen eines Kerns können unterschiedliche Paritäten auftreten. gg-Kerne können ebenso wie u-A- und uu-Kerne in den Anregungszuständen sowohl positive als auch negative Parität haben.

6.5.3. Experimentelle Bestimmung der Parität

1. Wir wollen zunächst einige ganz allgemeine Feststellungen treffen:

a) Wenn in der Meßgröße $|\psi|^2$ enthalten ist, dann läßt sich P nicht bestimmen, da sich die Systemeigenschaften bei Rauminversion nicht ändern.

b) Wenn die Meßgröße einen Übergang zwischen zwei Zuständen kennzeichnet, die durch unterschiedliche Wellenfunktionen Ψ_1 und Ψ_2 beschrieben werden, dann läßt sich aus den Matrixelementen $\langle \Psi_2 | O_P | \Psi_1 \rangle$, die in den Übergangswahrscheinlichkeiten enthalten sind, eine Information über P_1 und P_2 gewinnen.

c) Möglichkeiten zur Bestimmung von P geben die Gleichungen (6.149), (6.150) und (6.151) bei Zerfällen oder Kernreaktionen, da man meist davon ausgehen kann, daß einige in den Formeln enthaltene Paritäten bekannt sind. Dazu betrachten wir in diesem Abschnitt ein Beispiel aus der Elementarteilchen- und zwei aus der Kernphysik. Darüber hinaus sind die Abschn. 9.5.7. und 9.6.4.2. der experimentellen Bestimmung der Parität gewidmet.

2. Als Beispiel aus der Elementarteilchenphysik wählen wir die Paritätsbestimmung des π^--Mesons in der Reaktion

$$\pi^- + D \rightarrow n + n\,. \tag{6.152}$$

Es kann angenommen werden, daß der π^--Einfang bei kleinen Geschwindigkeiten des Pions erfolgt, d. h. im s-Zustand mit $l = 0$. Für den Drehimpuls der linken Seite der Reaktion gilt daher

$$I_{\pi+D} = s_\pi + I_D + l_\pi = 0 + 1 + 0 = 1\,. \tag{6.153}$$

Die Parität berechnet sich für das System π + D gemäß (6.150) zu

$$P_{\pi+D} = P_\pi \cdot P_D(-1)^{l_\pi} \cdot (-1)^{l_D} = P_\pi \cdot 1 \cdot (-1)^0 \cdot (-1)^0\,. \tag{6.154}$$

Daß $P_D = +1$ ist, kann als bekannt vorausgesetzt werden.

Zu der Annahme $l_D \neq 0$ gibt es keinen Anlaß. Wegen Drehimpulserhaltung gilt

$$I_{n+n} = s_n + s_n + l_n = I_{\pi+D} = 1\,. \tag{6.155}$$

Es gibt daher zwei Zustände für den Zwei-Neutronen-Zustand: $l = 1$ mit antiparallelem Spin und $l = 0$ mit parallelem Spin. Die zweite Möglichkeit entfällt, da die Wellenfunktion eines Systems zweier identischer Fermionen antisymmetrisch sein muß. Für die Parität des Neutronensystems gilt somit

$$P_{n+n} = P_n^2(-1)^{l_n} = P_{\pi+D} = P_\pi\,. \tag{6.156}$$

Mit $l_n = 1$, also mit Neutronen im p-Zustand wird (6.155) erfüllt, also ist $P_\pi = -1$.

Allgemein kann festgestellt werden, daß die Paritäten aller Grundzustände der Mesonen negativ sind. Sie verhalten sich daher unter räumlichen Inversionen und Rotationen wie Pseudoskalare. Bei den angeregten Zuständen der Mesonenresonanzen kommen auch positive Paritäten vor. Die Grundzustände der Baryonen zeichnen sich durch positive Parität aus, ihre ange-

regten Zustände, die Baryonenresonanzen durch positive und negative Parität. Ein Blick auf die Tabelle in Anhang D 4. macht deutlich, daß sich Teilchen und Antiteilchen durch entgegengesetzte Parität auszeichnen.

3. Als erstes Beispiel aus der Kernphysik betrachten wir die Reaktion

$$p + {}^7_3\text{Li} \rightarrow {}^8_4\text{Be}\,. \tag{6.157}$$

Der Targetkern hat die Charakteristika $3/2^-$. Die Parität des Produktkerns nach verschiedenen Bahndrehimpulszuständen des Systems p + ^{7}Li berechnet man wegen (6.150) mit Hilfe von

$$P_a P_A (-1)^{l_{aA}} = P\,. \tag{6.158}$$

Für s- und d-Zustände ist diese Parität hier negativ, für p- und f-Zustände positiv. Die möglichen Drehimpulse der Zustände von ^{8}Be erhält man mit Hilfe von (6.122). Zusammen mit den Paritäten ergeben sich für die Zustände von ^{8}Be die folgenden Charakteristika:

$$\begin{aligned} &1^-, 2^- && \text{für} \quad l = 0\,,\\ &0^+, 1^+, 2^+, 3^+ && \text{für} \quad l = 1\,,\\ &0^-, 1^-, 2^-, 3^-, 4^- && \text{für} \quad l = 2\,,\\ &1^+, 2^+, 3^+, 4^+, 5^+ && \text{für} \quad l = 3\,. \end{aligned}$$

4. Als zweites Beispiel aus der Kernphysik betrachten wir die Compoundkernreaktion

$$p + {}^{19}_9\text{F} \rightarrow {}^{20}\text{Ne}^* \rightarrow {}^{16}_8\text{O} + \alpha\,. \tag{6.159}$$

Mit den Charakteristika $1/2^+$ für den Targetkern und 0^+ für α-Teilchen und den Produktkern ^{16}O im Grundzustand findet man mit Hilfe von (6.122) und (6.158) durch zusätzliche Berücksichtigung des Ausgangskanals als Charakteristika von Zuständen in ^{20}Ne*, über die die Reaktion ablaufen kann, die Werte 0^+, 1^-, 2^+, 3^- usw. Beim Zerfall aus Zuständen mit positiver Parität werden die α-Teilchen im s- bzw. d-Zustand emittiert, beim Zerfall aus Zuständen mit negativer Parität im p- bzw. f-Zustand. Von Zuständen mit 1^+, 2^-, 3^+ usw. kann kein Zerfall in den Grundzustand von ^{16}O erfolgen. Solche paritätsverletzenden Übergänge sind gesucht worden, konnten aber nicht gefunden werden.

6.6. Isospin

6.6.1. Ladungsunabhängigkeit der starken Wechselwirkung

1. Aus dem gesamten experimentellen Material über die Streuung von Elementarteilchen an Elementarteilchen und die Streuung von Elementarteilchen an Kernen folgt, daß die starke Wechselwirkung nicht von der elektrischen Ladung der Streupartner abhängt. Unterschiedlich geladene Teilchen verhalten sich in bezug auf die Kernkräfte genauso, wie sie sich verhalten würden, wenn sie keine elektrische Ladung besäßen. Insbesondere zeigen die (p—p)-, die (n—n)- und die (n—p)-Streuung gleiche Ergebnisse, wenn man auf die durch die elektrische Ladung dieser Teilchen hervorgerufenen Effekte korrigiert. Man hält dieses Ergebnis fest durch die Symbolik

$$(\text{p—p})_{\text{st.Ww}} \equiv (\text{n—n})_{\text{st.Ww}} \equiv (\text{n—p})_{\text{st.Ww}} \tag{6.160a}$$

oder, da die Streuung durch ein Potential V beschrieben werden kann, durch

$$V(\mathrm{p-p})_{\mathrm{st.Ww}} \equiv V(\mathrm{n-n})_{\mathrm{st.Ww}} \equiv V(\mathrm{n-p})_{\mathrm{st.Ww}}\,. \tag{6.160b}$$

Die Gleichung (6.160) ist die Bedingung der Ladungsunabhängigkeit der Kernkräfte.

Wenn man also die elektromagnetische Ladung ausschalten könnte, dann wären Proton und Neutron von den Resultaten ihrer Streuung am Kernpotential her beurteilt identische Teilchen. Analoges gilt für die Pionen. Korrigiert man auf die Effekte, die bei der Streuung durch die Anwesenheit ihrer elektrischen Ladung bedingt sind, dann ist das Resultat der allein durch die starke Wechselwirkung verursachten Pion-Pion- oder Pion-Hadronen-Streuung unabhängig von der elektrischen Ladung. Die drei unterschiedlich geladenen Pionen, das Ladungstriplett der Pionen, stellt vom Standpunkt der starken Wechselwirkung *ein* Teilchen dar. Das Proton und Neutron, ein Ladungsdublett, sind ebenfalls *ein* Teilchen in diesem Sinne, das Nukleon. Das gilt für alle Hadronen-Ladungs-Multipletts, also z. B. auch für die drei Σ-Hyperonen. Im Sinne der elektromagnetischen Wechselwirkung handelt es sich um unterschiedliche Teilchen oder um ein Teilchen in verschiedenen Ladungszuständen.

Genaue Experimente zeigen, daß die Ladungsunabhängigkeit der starken Wechselwirkung nicht ganz vollständig ist. Die Verletzung der Bedingung (6.160) beträgt aber nur 2%.

2. Eine andere, nicht minder wichtige Eigenschaft der Kernkraft ist die Ladungssymmetrie. Sie wird durch die weniger weitreichende Bedingung

$$V(\mathrm{p-p})_{\mathrm{st.Ww}} \equiv V(\mathrm{n-n})_{\mathrm{st.Ww}} \tag{6.161}$$

festgehalten. Sie kommt z. B. in den Charakteristika und der Struktur der Niveaus isobarer Kerne zum Ausdruck. Wir betrachten zunächst eine spezielle Art der Isobare, die Spiegelkerne. In ihnen sind die Protonen durch Neutronen, die Neutronen durch Protonen ersetzt worden, d. h., alle (p—p)-Bindungen durch (n—n)-Bindungen und umgekehrt. Das einfachste Beispiel sind die leichtesten Kerne ${}^3_1\mathrm{H}_2$ und ${}^3_2\mathrm{He}_1$. Die Bindungen sind in Abb. 6.42 symbolisch dargestellt. Im Falle der Ladungssymmetrie müßte der Unterschied der Bindungsenergie der beiden Kerne genau gleich der Coulomb-Energie im zweiten Kern sein. Tatsächlich ist aber ein geringerer Unterschied vorhanden. Unter Berücksichtigung aller Korrekturen wird die Ladungssymmetrie zu weniger als 1% verletzt.

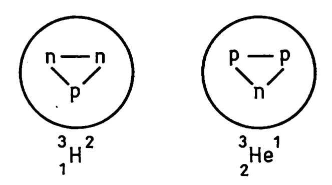


Abb. 6.42
Symbolische Darstellung der einfachsten Spiegelkerne

3. Wir betrachten nun isobare Spiegelkerne, in denen nicht nur (n—n)- durch (p—p)-Bindungen und umgekehrt ersetzt werden, sondern auch (p—n)- durch (p—p)- und (n—n)-Bindungen. In Abb. 6.43 sind Anregungsniveaus dreier Isobare mit $A = 12$ angegeben, die auffallende Eigenschaften besitzen: die exakte Übereinstimmung der Charakteristika I^π und die relativ gute Übereinstimmung ihrer Energien. Diese Tatsache ist um so verwunderlicher, als diese Niveaus in dem mittleren Kern ${}^{12}_6\mathrm{C}_6$ oberhalb von 15 MeV Anregungsenergie liegen, also dort, wo es keine gebundenen Zustände mehr gibt, sondern nur noch ungebundene, in Kernreaktionen über eine Resonanz im Wirkungsquerschnitt ermittelbare.

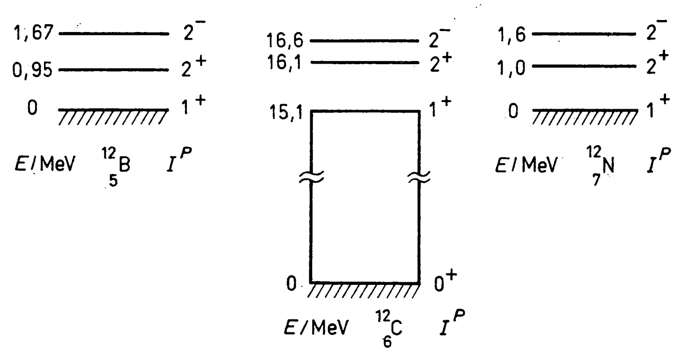


Abb. 6.43
Isobare Analogzustände dreier Kerne mit $A = 12$

Die relativ gute Übereinstimmung der Energie wurde unter Berücksichtigung zweier Korrekturen erreicht. Die Ruhenergien der Isobare und damit ihre Bindungsenergien unterscheiden sich durch die größere Ruhenergie des Neutrons im Vergleich zum Proton. Der Unterschied $E_0(\mathrm{n}) - E_0(\mathrm{p})$ beträgt 1,293 MeV. Das ist die erste Korrektur. Die zweite betrifft den Energieunterschied benachbarter isobarer Kerne infolge der zusätzlichen Coulomb-Abstoßung beim Isobar mit einem Proton mehr. Es ist

$$\Delta E_C = \frac{3}{5} \frac{e^2}{r_0 \sqrt[3]{A}} [Z^2 - (Z - 1)^2]. \tag{6.162}$$

Die Zahlenwerte des betrachteten Falls sind in der Tabelle 6.9 aufgeführt. Das Ergebnis ist bemerkenswert. Die Auswechslung der (p—p)- durch die (n—n)-Bindungen und umgekehrt sowie die Auswechslung der (p—n)- durch (n—n)- und (p—p)-Bindungen, hat im wesentlichen keinen Einfluß auf die Lage bestimmter Niveaus. Genauere Untersuchungen zeigen, daß die Natur dieser Niveaus, ihre unmittelbare physikalische Ursache, eine direkte Funktion dieser Bindungen ist. Also sind auch hier, innerhalb des Kerns, die Kernkräfte in guter Näherung unabhängig von der Ladung der Nukleonen.

Tabelle 6.9
Energieverhältnisse im Isobarentriplett mit $A = 12$

Nuklid	$^{12}_{5}B_7$	$^{12}_{6}C_6$	$^{12}_{7}N_5$
E_B/MeV	13,37	0	17,36
ΔE_0(n, p)/MeV	− 1,29	0	+ 1,29
ΔE_c/MeV	+ 3,12	0	− 3,55
$E(1^+)$/MeV	15,20	15,10	15,10

4. Wir betrachten an Hand von Abb. 6.44 ein weiteres Isobarenpaar, jetzt mit großer Kernladungszahl Z. Man hat lange Zeit angenommen, daß bei großen Werten von Z die Ladungsunabhängigkeit der Kernkräfte verlorengeht und damit auch die Übereinstimmung der Charakteristika E, I^π bestimmter Niveaus isobarer Kerne. Erst 1961 konnte durch das Auftreten ungebundener Kernzustände bei Kernreaktionen experimentell durch Resonanzen im Wirkungs-

querschnitt gezeigt werden, daß auch hier Übereinstimmung vorhanden ist. Die Korrektur auf die Coulomb-Abstoßung bringt einen rein additiven Beitrag von

$$\Delta E_C = \left(1{,}44\,\frac{Z}{\sqrt[3]{A}} - 1{,}13\right)\,\mathrm{MeV}\,. \tag{6.163}$$

Die hochangeregten Zustände in $^{201}_{83}Bi$ und in $^{12}_{6}C$ heißen isobare Analogzustände.

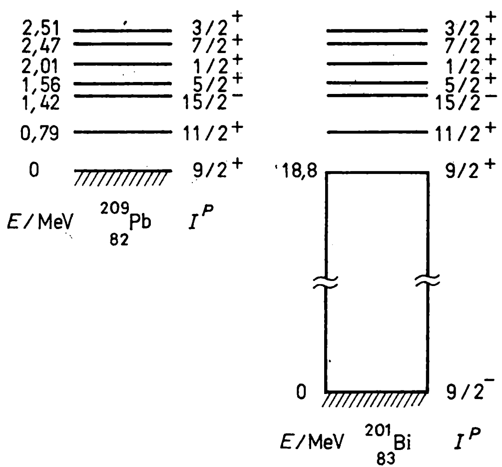


Abb. 6.44
Isobare Analogzustände in Kernen mit $A = 209$

6.6.2. Isospinformalismus für ein Teilchen

1. In 6.6.1. wurde gezeigt, daß die starke Wechselwirkung ladungsunabhängig ist. Insbesondere gilt das also auch für das Neutron und das Proton. Abstrahiert man von den elektromagnetischen Eigenschaften des Neutrons und des Protons und vom Ruhenergieunterschied, dann kann man beide als ein einziges Teilchen auffassen, das zweier unterschiedlicher Ladungszustände $Q = 0$ und $Q = +e$ fähig ist. Dieses Teilchen wird Nukleon genannt.

Ein Formalismus, der ein Teilchen in zwei Zuständen zu beschreiben gestattet, ist vom Spin her bekannt. Das Elektron hat z. B. den Spin $s = \hbar/2$; seine zwei Einstellungen in einem äußeren Feld mit der Richtung z werden durch zwei Quantenzahlen $s_z = \pm 1/2$ festgehalten. Diese beiden Quantenzahlen sind die Eigenwerte eines Operators $\boldsymbol{s}$, der die Wellenfunktion in den gewünschten der beiden Zustände bringt. Entsprechend wird der Spin der Nukleonen beschrieben. Die Wellenfunktion des Nukleons hängt nun zusätzlich von einer neuen Variablen, der Isospinvariablen ab, die in vollständiger Analogie zum Spin zu $t = \hbar/2$ mit $t_z = \pm 1/2$ gewählt wurde. Auf die Isospinkoordinate wirkt der Isospinoperator $\boldsymbol{t}$, der wie der Spinoperator $\boldsymbol{s}$ (siehe A 3.) drei Komponenten gemäß

$$\boldsymbol{t} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\tau} = \frac{1}{2}(\tau_1, \tau_2, \tau_3) \tag{6.164a}$$

haben soll, von denen die dritte diagonal gewählt wird, damit die Eigenwerte $t_3 = \pm 1/2$ den Werten der Isospinvariablen entsprechen und damit dem Ladungszustand, also den Analoga

zu den Spinobservablen $m_s = \pm 1/2$, d. h. den Ladungen $z = 1$ und $z = 0$ von Proton und Neutron. Die drei Koordinaten des Isospinoperators können durch die Pauli-Matrizen dargestellt werden:

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}; \quad \tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{6.164 b}$$

Der Eigenwert von t^2 ist $t(t + 1)$, d. h., für das Nukleon ergibt sich mit $t = 1/2$ der Wert 3/4. Die Eigenfunktionen von τ_3 zu den Eigenwerten $t_3 = \pm 1/2$ sind

$$\eta(t_3 = +1/2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \eta(t_3 = -1/2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{6.165}$$

Um den Isospinzustand eines freien Nukleons zu beschreiben wird der Orts-Spin-Anteil

$$\Phi(\boldsymbol{r}, s) = e^{i\boldsymbol{kr}} \chi(s); \quad \chi(s) = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}; \quad |a|^2 + |b|^2 = 1, \tag{6.166}$$

mit der Isospinfunktion $\eta(t)$ ergänzt

$$\varphi(\boldsymbol{r}, s, t) = \varphi(\boldsymbol{r}, s)\, \eta(t), \tag{6.167}$$

die nach der Basis (6.165) zerlegt wird:

$$\eta(t) = c\eta_t(t_3 = +1/2) + d\eta_t(t = -1/2) = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}; \quad |c|^2 + |d|^2 = 1. \tag{6.168}$$

Die Entwicklungskoeffizienten legen die Wahrscheinlichkeit fest, mit der sich das Nukleon in einem der beiden Ladungszustände befindet, mit $|c|^2$ in dem des Protons, mit $|d|^2$ in dem des Neutrons. Die Gesamtwellenfunktion des Nukleons

$$\Psi(\boldsymbol{r}, s, t) = \begin{pmatrix} c\Phi(\boldsymbol{r}, s) \\ d\Phi(\boldsymbol{r}, s) \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \Psi_p(\boldsymbol{r}, s) \\ \Psi_n(\boldsymbol{r}, s) \end{pmatrix} \tag{6.169}$$

ist eine zweikomponentige Funktion im Isospinraum. Im Zustand (6.169) ist der Ladungszustand des Nukleons nicht scharf fixiert.

2. Der für das Nukleon mit zwei Ladungszuständen eingeführte Isospin kann ganz allgemein auf andere Teilchen mit mehr oder weniger Ladungszuständen angewendet werden. Wie beim Spin sind das Quadrat des Isospinvektors $\boldsymbol{t}^2$ und seine Projektion $t_3 = t_z$ Erhaltungsgrößen. Der Eigenwert von $\boldsymbol{t}^2$ ist

$$t(t + 1) \tag{6.170 a}$$

mit den Werten

$$t = 0, 1/2, 1, 3/2, 2, 5/2, \ldots \tag{6.170 b}$$

im Wertebereich

$$t \geqq t_i \geqq -t. \tag{6.170 c}$$

Die mögliche Zahl der Projektionen t_z von $\boldsymbol{t}$ beträgt

$$N_t = 2t + 1, \tag{6.171 a}$$

der Wertebereich liegt innerhalb

$$t_z = t, t - 1, t - 2, \ldots, -t. \tag{6.171 b}$$

Mit Hilfe von (6.171 a) und der bekannten Zahl der Ladungszustände läßt sich für alle Teilchen der Isospin und seine Projektion $t_3 = t_z$ angeben. Beim Nukleon mit zwei Ladungszuständen ist

$(2t + 1) = 2$, d. h. $t = 1/2$ und $t_z = \pm 1/2$, wie wir bereits wissen. Das Λ-Hyperon kommt nur in einem Ladungszustand vor, d. h. $(2t + 1) = 1$, also $t = 0$ und $t_z = 0$. Das Pion besitzt die drei Ladungszustände π^+, π^0 und π^-. Es ist somit $2t + 1 = 3$, d. h. $t = 1$. Die Projektionen t_z können nur die Werte $+1(\pi^+)$, $0(\pi^0)$ und $-1(\pi^-)$ annehmen.

3. Zwischen Isospinprojektion t_z, elektrischer Ladung $z = Q/e$, Baryonenzahl B und Seltsamheit S, bzw. Hyperladung Y gibt es für alle Elementarteilchen den empirisch gefundenen Zusammenhang

$$z = Q/e = t_z + (B + S)/2 = t_z + Y/2\,. \tag{6.172}$$

Diese Gleichung gibt auch eine Begründung für die Wahl des Vorzeichens von t_z. Beim Proton ist z. B. $z = +1$, also muß $t_z = +1/2$ sein, damit (6.172) erfüllt werden kann. Beim Pion ist $B = 0$, also muß wegen $z = +1$ des π^+ auch $t_z = +1$ sein, usw. Das ist die Regelung für die Elementarteilchenphysik. Man findet manchmal in der Kernphysik die umgekehrte Vorzeichenwahl für die Nukleonen.

6.6.3. Isospinformalismus für ein System aus zwei Teilchen

1. Wir betrachten zuerst ein System aus zwei Nukleonen, dann aus einem Nukleon und einem Pion. Die verschiedenen Möglichkeiten der Isospinbildung sind in Tabelle 6.10 aufgeführt. Bei der Ermittlung des Isospins des Systems gehen wir von der Projektion auf die z-Achse aus, d. h. vom Ladungszustand. Dann wird die Frage gestellt, welche Isospinvektoren den gegebenen Ladungszustand zur Projektion haben können.

Tabelle 6.10
Isospin der Nukleon-Nukleon- und der Nukleon-Pion-Systeme

System	(nn)	(pp)	(np)	(π^+p)	(π^-p)	(π^0p)	(π^+n)	(π^-n)	(π^0n)
T_z	−1	+1	0	+3/2	−1/2	+1/2	+1/2	−3/2	−1/2
T	1	1	0; 1	3/2	3/2; 1/2	3/2; 1/2	3/2; 1/2	3/2	3/2; 1/2

Beim Nukleon ergibt sich als Summe der Projektionen T_z für die Systeme nn, pp und np eindeutig −1, 1 und 0. Die beiden ersten Projektionen sind von einem Vektor mit $|\boldsymbol{T}| = 1$ erhaltbar, die letztere jedoch von zwei, $|\boldsymbol{T}| = 0$ bzw. 1.

In den Systemen $p\pi^+$ und $n\pi^-$ ergibt die Summe T_z eindeutig $+3/2$ bzw. $-3/2$. Anders ist das in den Systemen $p\pi^-$ und $n\pi^+$. Hier ergibt sich T_z zu $-1/2$ bzw. $+1/2$. Diese Projektionen können von zwei Vektoren mit $|\boldsymbol{T}| = 1/2$ bzw. $3/2$ erhalten werden. Analoges gilt für die Systeme $p\pi^0$ und $n\pi^0$, wo die Projektionen eindeutig $T_z = \pm 1/2$ ergeben und von Vektoren mit $|\boldsymbol{T}| = 1/2$ bzw. $3/2$ erzeugt werden können.

2. Ein Vorteil der Einführung des Isospinbegriffs besteht in der damit geschaffenen und eben demonstrierten Möglichkeit, die zu einem Ladungsmultiplett gehörenden Teilchen mit einer einzigen Wellenfunktion zu beschreiben, in der die Ladungszustände als Koordinate berücksichtigt sind. Ein weiterer Vorteil besteht darin, daß man für Teilchen mit halbzahligem Spin ein erweitertes Pauli-Prinzip formulieren und erfolgreich verwenden kann.

Nach dem Pauliprinzip darf in einem Fermionensystem der Zustand nur mit einem einzigen Teilchen besetzt werden. Quantitativ läßt sich dieses Ausschließungsprinzip durch die Forderung fassen, die Wellenfunktion eines Systems identischer Fermionen sei antisymmetrisch bei

gleichzeitiger Vertauschung aller Koordinaten zweier beliebiger Fermionen. In einem System aus zwei Protonen oder zwei Neutronen gilt dann

$$\Phi(\boldsymbol{r}_1, s_1; \boldsymbol{r}_2, s_2) = -\Phi(\boldsymbol{r}_2, s_2; \boldsymbol{r}_1, s_1). \tag{6.173}$$

Die Einbeziehung des Isospins bedeutet hinsichtlich des Pauli-Prinzips, daß bei der Koordinatenvertauschung auch die Isospinkoordinaten zu vertauschen sind, wobei die Wellenfunktion gemäß (6.167) die Form

$$\Psi(1, 2) = \Phi(1, 2)\,\eta_T(1, 2) \tag{6.174}$$

hat. Für zwei Nukleonen hat der Gesamtisospin nur die Werte $T = 0, 1$. Das ist auch in Übereinstimmung mit der allgemeinen Regel (A.27) für die Vektoraddition von Drehimpulsen. Die Isospinwellenfunktion $\eta_T(1, 2)$ hat die gleiche explizite Gestalt, wie die Gesamtspinfunktion χ_{S, M_s} mit $S = 0, 1$, die in (7.5) angegeben ist. Sie kann daher entweder symmetrisch oder antisymmetrisch sein für $T = 1, 0$:

$$\eta_T(1, 2) = (-1)^{T+1}. \tag{6.175}$$

Das verallgemeinerte Pauli-Prinzip, das keine zusätzliche Forderung ist, sondern Bestandteil des Isospinformalismus, verlangt, daß die Gesamtwellenfunktion (6.174) antisymmetrisch bei der Vertauschung aller Koordinaten der beiden Teilchen ist, d. h.

$$\Psi(1, 2) = -\Psi(2, 1). \tag{6.176}$$

Diese Forderung läßt keine beliebige Kombination der Orts-Spin- und Isospinsymmetrie zu; es muß vielmehr gelten

$$\begin{aligned} T = 1&: \quad \text{Orts-Spin-Funktion antisymmetrisch}, \\ T = 0&: \quad \text{Orts-Spin-Funktion symmetrisch}. \end{aligned} \tag{6.177}$$

Liegt z. B. ein Zweinukleonensystem in einem Zustand mit dem relativen Bahndrehimpuls $l = 0$, d. h. einem symmetrischen Zustand vor, dann sind nach dem verallgemeinerten Pauli-Prinzip noch folgende Spin-Isospin-Kombinationen erlaubt:

$$\begin{aligned} &\text{pp-System:} \quad S = 0, \quad T = 1, \\ &\text{nn-System:} \quad S = 0, \quad T = 1, \\ &\text{np-System:} \quad S = 0, \quad T = 1, \\ &\phantom{\text{np-System:}} \quad S = 1, \quad T = 0. \end{aligned} \tag{6.178}$$

(n,n) (n,p) (p,p)

$T_z = -1$ Dineutron

$T_z = 0$ ${}^2_1\mathrm{D}^1$

$T_z = +1$ Diproton

Isospin	Spin
$T = 1$, Triplett, symmetrisch	$s = 0$, Singulett, antisymmetrisch
$T = 0$, Singulett, antisymmetrisch	$s = 1$, Triplett, symmetrisch

Abb. 6.45
Zustände des Zweinukleonensystems

Im np-System können die Nukleonen die Spins sowohl parallel, als auch antiparallel einstellen, je nach dem vorliegenden Gesamtisospin $T = 0$ oder 1. Da im pp- oder nn-System der Gesamtisospin nur $T = 1$ sein kann, sind Spin-Triplett-Zustände ausgeschlossen. Diesen Sachverhalt veranschaulicht die Abb. 6.45.

Mit dem verallgemeinerten Pauli-Prinzip (6.175) lassen sich alle in einem System möglichen Zustände (s, l, T) leicht ermitteln. Wir führen das für das Zweinukleonensystem noch für $l = 1$ durch, ordnen die Zustände nach T-Werten und geben sie in der üblichen spektroskopischen Schreibweise $(^{2S+1}L_l)$ in Tabelle 6.11 an.

Tabelle 6.11
Zustände der Zweinukleonensysteme

T	(n, n)	(n, p)	(p, p)
0		$^3s_1$, $^3d_3$, $^3d_1$, $^1p_1$	
1	$^1s_0$, $^3p_2$, $^3p_1$, $^3p_0$	$^1s_0$, $^3p_2$, $^3p_1$, $^3p_0$	$^1s_0$, $^3p_2$, $^3p_1$, $^3p_0$

Das verallgemeinerte Pauli-Prinzip liefert eine Reihe von Zuständen, andere schließt es aus. Es kann damit die Voraussetzung bestätigen, die zur Einführung des Isospins geführt hat, die Ladungsunabhängigkeit der Kernkräfte. Laut Tabelle 6.11 ergibt sich nach dem verallgemeinerten Pauli-Prinzip für das nn- und pp- System als niedrigster Zustand $^1s_0$ mit $T = 0$, $l = 0$ und $s = 0$. In Tabelle 6.10 hatten wir festgehalten, daß in diesen Systemen $T = 0$ nicht möglich ist, lediglich $T = 1$. Also ist auch der $^1s_0$-Zustand nicht möglich, d. h., es gibt keinen gebundenen Zustand für das System Dineutron und Diproton. Daher sind diese Zustände in Abb. 6.45 auch nicht eingezeichnet. Hingegen gibt es stabile Zustände des Systems np für $T = 0$, $l = 0{,}2$ und $s = 1$, die Zustände $^3s_1$ und $^3d_1$. Sie sind im Deuteron realisiert, der $^3d_1$-Zustand allerdings nur mit einer Wahrscheinlichkeit von 4%. Der $^1p_1$-Zustand wird als Streuzustand beobachtet. Die Voraussagen des verallgemeinerten Pauli-Prinzips werden also im Versuch mit den möglichen T-Werten bestätigt.

6.6.4. Isospinformalismus für ein System von vielen Teilchen

1. Wir betrachten als einziges System vieler Teilchen den Atomkern mit seinen A Nukleonen und seiner Z-fachen Ladung. Für den Operator des Isospins setzen wir

$$T = \sum_{i=1}^{A} T_i \tag{6.179}$$

Von den drei Komponenten von T hat wieder nur eine physikalische Bedeutung; wir nennen sie

$$T_3 = T_z = \sum_i T_i\,. \tag{6.180}$$

Für den Zusammenhang zwischen der elektrischen Ladung $Z = Q/e$, der Massenzahl A und der z-Komponente des Isospins gilt in Analogie zu (6.172)

$$Z = A/2 + T_z \tag{6.181}$$

oder

$$T_z = Z - A/2 = (Z - N)/2\,. \tag{6.182}$$

Man kommt zu diesem Ergebnis auch durch Einsetzen in (6.179), da jeder Summand eine z-Komponente vom Betrag 1/2 einbringt.

Der negative Wert des Neutronenüberschusses ist also gerade gleich der z-Komponente des Isospins T_z, ist ganz- oder halbzahlig, je nachdem, ob A gerade oder ungerade ist. Der maximal mögliche Gesamtisospin mit der Komponente T_z ist im niedrigsten Zustand von T

$$T_{\max} \geqq |T_{z,\max}| = \text{Max.}\,(|Z - A/2|) = A/2\,. \tag{6.183}$$

2. Wir betrachten nun die Anwendung des Isospinformalismus zunächst auf die leichten Kerne. Es zeigt sich, daß gewöhnlich der Minimalwert des Isospins realisiert ist, d. h.

$$T = \left| Z - \frac{A}{2} \right|\,. \tag{6.184}$$

Die Kerne mit $A = 2$ ($^2_1$H) und 4 ($^4_2$He) bilden jeweils ein Singlett, denn es ist bei ihnen $\boldsymbol{T} = 0$ und $2T + 1 = 1$. Die Isospinverhältnisse sind in Abb. 6.46 dargestellt. Beim α-Teilchen gibt es eine hohe Symmetrie in bezug auf Spin und Isospin. Das ist u. a. ein Grund für die große Bindungsenergie von 28 MeV.

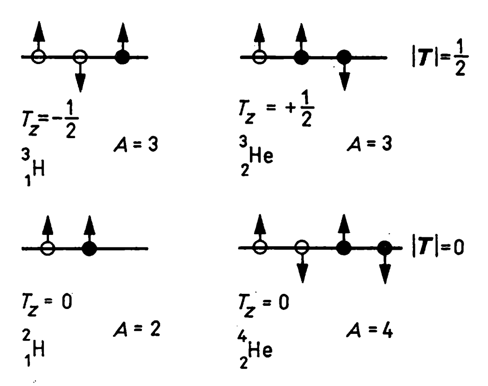


Abb. 6.46
Isospinkonfiguration bei $A = 2$, 3 und 4

Die Kerne mit $A = 3$ bilden ein isobares Dublett, denn es ist bei $^3_2$He $|\boldsymbol{T}| = 1/2$, $T_z = +1/2$ und bei $^3_1$H $|\boldsymbol{T}| = 1/2$ und $T_z = -1/2$. Die Zahl der Projektionen ist in Übereinstimmung mit der Existenz dieser zwei Kerne $2T + 1 = 2$.

Für $A = 5$ gibt es keine stabilen Kerne. Bei den Kernen mit $A > 5$ ist jeweils der niedrigste Isospinwert im Grundzustand realisiert. So haben z. B. die Kerne mit $A = 7$ ($^7_3$Li, $^7_4$Be) den Isospin $|\boldsymbol{T}| = 1/2$, obgleich auch $|\boldsymbol{T}| = 7/2, 5/2$ und $3/2$ möglich wäre. Für isobare Kerne mit ungeradem A findet man Isospindubletts, für gerade A-tripletts. Wir verifizieren dies und die Tatsache, daß stets der Grundzustand durch die minimale Isospinprojektion charakterisiert ist, am Beispiel der Isobarenkette mit $A = 55$. Es ergibt sich die Tabelle 6.12. In allen Fällen ist im Grundzustand der minimale T_3-Wert realisiert, niemals der Maximalwert:

$$T_{\max} = |T_{3,\max}| = A/2 = 27{,}5\,. \tag{6.185}$$

Tabelle 6.12
Isospin der Isobarenkette mit $A = 55$

Isobar	$^{55}_{24}$Cr	$^{55}_{25}$Mn	$^{55}_{26}$Fe	$^{55}_{27}$Co	$^{55}_{28}$Ni	$^{55}_{29}$Cu	$^{55}_{30}$Zn	$^{55}_{31}$Ga
$T_z = \|Z - A/2\|$	7/2	5/2	3/2	1/2	1/2	3/2	5/2	7/2

Ein Dublett zeigen Abb. 6.44 und 6.46, ein Triplett Abb. 6.43 und 6.47. Die Grundzustände der Kerne $^{12}_{5}B^7$ und $^{12}_{7}N^6$ zeichnen sich durch den Isospin $|\boldsymbol{T}| = 1$, d. h. $T_z = \pm 1$ aus. Das dritte Glied des Tripletts mit $|\boldsymbol{T}| = 1$, $T_z = 0$, das wegen $N_T = 2T + 1$ erwartet werden muß, findet sich oberhalb 15,1 MeV über dem Grundzustand von $^{12}_{6}C^6$ mit $\boldsymbol{T} = 0$ und $T_z = 0$. Die Abb. 6.47 zeigt die Nukleonenanordnung auf den Niveaus. In den Anregungszuständen mit $|\boldsymbol{T}| = 1$ befindet sich ein Nukleon auf einem höheren Niveau im Vergleich zu den übrigen drei auf dem dritten Niveau verbleibenden. Unabhängig von der Ladung dieses Nukleons besitzen die Zustände mit $|\boldsymbol{T}| = 1$ die gleichen Charakteristika E und I^π. Die Zustände mit $|\boldsymbol{T}| = 1$ in ^{12}C werden isobare Analogzustände genannt. Ihre Existenz ist ein Beweis für die Ladungsunabhängigkeit der Kernkräfte.

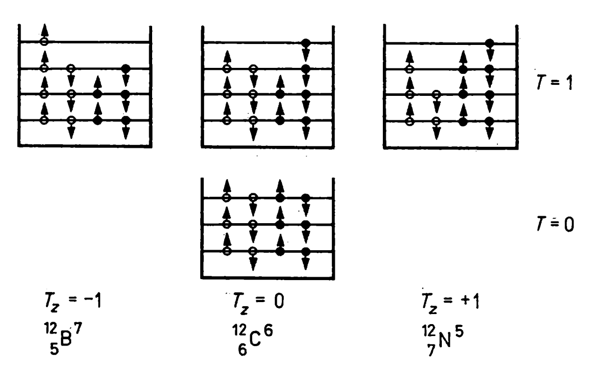


Abb. 6.47
Nukleonenzustände in den Kernen des isobaren Tripletts mit $A = 12$

In Abb. 6.44 sind die Analogzustände in $^{209}_{83}Bi$ den Anregungszuständen in $^{209}_{82}Pb$ gegenübergestellt. Auch hier ist weitgehendste Übereinstimmung vorhanden, d. h. Unabhängigkeit der Kernkraft von der elektrischen Ladung der Nukleonen realisiert. Die eingezeichneten angeregten Niveaus beider Kerne gehören einem isobaren Multiplett mit $A = 209$ und $T = 22^1/_2$ an. Der Grundzustand von ^{209}Pb hat den Isospin $22^1/_2$, der von ^{209}Bi den Isospin $21^1/_2$. Man kann für diese beiden Kerne eine analoge Nukleonenanordnung zeichnen, wie das Abb. 6.47 für den Fall $A = 12$ zeigt.

6.6.5. Isospinauswahlregeln

1. Bereits aus den bisher über den Isospin und seine Projektion besprochenen Fakten geht hervor, daß es sich um gute Quantenzahlen handeln muß. Also gibt es einen Satz von der Erhaltung des Isospins und Auswahlregeln. Eine systematische Untersuchung aller Kernreaktionen im weitesten Sinne offenbarte, daß in den Kernumwandlungen, die über die starke Wechselwirkung ablaufen, sowohl der Isospin $\boldsymbol{T}$ als auch seine Projektion T_z Erhaltungsgrößen sind. Die starke Wechselwirkung läßt also nur Reaktionen mit

$$|\Delta \boldsymbol{T}| = \Delta T_z = 0 \tag{6.186a}$$

zu. Aus dem experimentellen Material folgt auch, daß bei der elektromagnetischen Wechselwirkung nur die Projektion des Isospins Erhaltungsgröße ist, nicht aber der Isospin selbst. Hier gilt daher nur

$$|\Delta T_z| = 0\,. \tag{6.186b}$$

In den Kapiteln 9 und 14 wird gezeigt, daß bei der schwachen Wechselwirkung weder die Projektion noch der Isospin Erhaltungsgrößen sind. Vielmehr gilt hier

$$|\Delta T_z| = 1/2; \qquad |\Delta \boldsymbol{T}| = 1/2; 3/2. \tag{6.186c}$$

Man kann diese Auswahlregeln benutzen, um den Isospin bzw. seine Projektion von vorher nicht identifizierten Zuständen zu bestimmen bzw. Reaktionen und Reaktions- bzw. Zerfallskanäle von vornherein auszuschließen. Einige Beispiele demonstrieren die Möglichkeiten.

2. Die Reaktion

$${}^{2}\text{d} + {}^{2}\text{D} \rightarrow {}^{4}\text{He} + \pi^{0} \tag{6.187}$$

kann nicht ablaufen, da alle beteiligten Teilchen bis auf das Pion den Isospin Null haben, das Pion aber $\boldsymbol{T} = 1$. Eine Kombination mit $\Delta T = 0$ kann nicht gefunden werden. Weiter kann man in der Reaktion

$${}^{2}\text{d} + {}^{10}\text{B} \rightarrow {}^{10}\text{B}^{*} + {}^{2}\text{d}' \tag{6.188}$$

Zustände mit $|\boldsymbol{T}| = 1$ in ${}^{10}\text{B}^{*}$ nicht anregen, obgleich sie bei entsprechend hohen Energien existieren. Im Grundzustand hat ${}^{10}\text{B}$ den Isospin $\boldsymbol{T} = 0$. Über die Reaktion

$$\text{p} + {}^{10}\text{B} \rightarrow {}^{10}\text{B}^{*} + \text{p}' \tag{6.189}$$

ist es jedoch wohl möglich, Zustände mit $|\boldsymbol{T}| = 1$ in ${}^{10}\text{B}$ anzuregen.

Ein weiteres Beispiel ist die Reaktion

$$\text{p} + {}^{89}_{39}\text{Y}_{50} \rightarrow {}^{90}_{40}\text{Zr} \begin{cases} \nearrow {}^{89}_{39}\text{Y}_{50} + \text{p} & (6.190\text{a}) \\ \searrow {}^{89}_{40}\text{Zr}_{49} + \text{n}\,. & (6.190\text{b}) \end{cases}$$

Im Eingangskanal ist $\pm 1/2 + 11/2 = 5$ oder 6. Im Ausgangskanal (6.190a) kann daher ein Zerfall gemäß $11/2 \pm 1/2$ von $|\boldsymbol{T}| = 5$ bzw. 6 stattfinden. Anders ist das im Ausgangskanal (6.190b). Hier ist $9/2 + 1/2$ realisiert, d. h., der Zerfall kann nur über $|\boldsymbol{T}| = 5$ sattfinden.

6.7. Zeitumkehrinvarianz, Ladungskonjugation, G-Parität und PCT-Theorem

6.7.1. Zeitumkehrinvarianz

Der Operator der Zeitumkehr T bewirkt eine Vertauschung der Zeitkoordinate t mit $-t$; er dreht auch die Richtung aller Impulse um und vertauscht bei einer Reaktion die einlaufenden und auslaufenden Teilchen. Wenn das Energiespektrum auf positive Werte beschränkt ist, muß T ein antiunitärer Operator sein. Die starke und die elektromagnetische Wechselwirkung sind invariant unter der Operation der Zeitumkehr. Seit der 1964 gemachten Entdeckung, daß die CP-Invarianz beim Zerfall neutraler K-Mesonen verletzt ist, besteht Grund anzunehmen, daß die T-Invarianz bei diesen Zerfällen nicht gilt (siehe 13.3.5.).

Experimentell läßt sich die Zeitumkehrinvarianz durch die Anwendung des Prinzips des detaillierten Gleichgewichts überprüfen. Es sagt aus, daß die Beträge der Matrixelemente für eine Reaktion, z. B.

$$\text{p} + {}^{27}\text{Al} \rightarrow \alpha + {}^{24}\text{Mg} \tag{6.191a}$$

und für ihre Umkehrreaktion

$$\alpha + {}^{24}\text{Mg} \to \text{p} + {}^{27}\text{Al} \tag{6.191b}$$

bei gleicher Massenmittelpunktsenergie gleich sind.

Es ist bekannt, daß für ein Teilchen mit dem elektrischen Dipolmoment (EDM) $\boldsymbol{\mu}_e$ und dem Spin $\boldsymbol{\sigma}$ sowohl die Paritätsoperation P, als auch die Zeitumkehroperation das Skalarprodukt $\boldsymbol{\sigma\mu}_e$ in $-\boldsymbol{\sigma\mu}_e$ überführen (siehe auch 9.5.7., Punkt 2). Soll die Wechselwirkung des Teilchens mit dem elektromagnetischen Feld P- und T-invariant sein, dann muß das EDM eines Elementarteilchens verschwinden. Wenn bei atomaren oder molekularen Systemen ein EDM beobachtet wird, dann existieren immer zwei entartete oder nahezu entartete Energiezustände unterschiedlicher Parität. Das ist beim Neutron und anderen Elementarteilchen zweifellos nicht der Fall. Das Neutron ist ein Zustand mit fester Parität. Der Spinvektor $\boldsymbol{\sigma}$ zeichnet die einzige bevorzugte Raumrichtung für das elektrische $\boldsymbol{\mu}_e$ oder magnetische $\boldsymbol{\mu}_m$ Dipolmoment aus. $\boldsymbol{\mu}_e$ und $\boldsymbol{\mu}_m$ müssen parallel oder antiparallel zu $\boldsymbol{\sigma}$ eingestellt sein. Die experimentelle Bestimmung eines nichtverschwindenden EDM des Neutrons wäre demnach ein wichtiger Prüfstein für die Invarianz der Zeitumkehr T. Da die Zerfälle neutraler K-Mesonen andeuten, daß die T-Invarianz hier verletzt ist, kann man sogar erwarten, daß das Neutron ein nichtverschwindendes EDM besitzt. Die Mechanismen der CP- und damit auch der T-Invarianzverletzung werden heute noch nicht klar verstanden, so daß über verschiedene Modellvorstellungen unterschiedliche Werte des EDM des Neutrons berechnet werden. Eine genaue Messung würde die Zahl der möglichen Mechanismen einschränken.

Die bisher genaueste Angabe der oberen Grenze des EDM des Neutrons wurde von V. M. LOBAŠOV u. a. in Leningrad mit der empfindlichsten, derzeit zur Verfügung stehenden Methode der magnetischen Resonanz zu $|\boldsymbol{\mu}_e(n)| < 4 \cdot 10^{-25}$ e · cm erhalten. Dabei wird dem magnetischen ein elektrisches Feld überlagert. Die Wechselwirkung des EDM mit dem elektrischen Feld verschiebt die Präzessionsfrequenz des Neutronenspins im Magnetfeld. Diese Frequenzverschiebung wird für relativ zum Magnetfeld gleich- und entgegengesetzt gerichtetes elektrisches Feld gemessen. Die Größe der Frequenzverschiebung ist extrem klein. Bei einer elektrischen Feldstärke von ± 25 kV/cm und einem EDM von 10^{-25} e · cm beträgt sie $2{,}5 \cdot 10^{-6}$ Hz. Nur mit Hilfe ultrakalter Neutronen wird die Resonanzlinie schmal genug, um überhaupt eine Frequenzverschiebung messen zu können.

6.7.2. Ladungskonjugation

Die Existenz eines Antiteilchens mit der gleichen Masse und Lebensdauer, aber entgegengesetzter Ladung Q, Baryonenzahl B, Leptonenzahl L, Seltsamkeit S, Charm C', Bottom B' und Top T' gehört zu den exakten Vorhersagen der Quantenfeldtheorie und wurde durch eine Vielzahl von Experimenten bestätigt. Zur theoretischen Beschreibung dieses Sachverhalts führt man den Operator der Ladungskonjugation C ein. C wirkt auf die Wellenfunktion des Teilchens und führt ein Teilchen α mit den Quantenzahlen B, Q, L, S, C', B', T' in dessen Antiteilchen $\bar{\alpha}$ mit den Quantenzahlen $-B$, $-Q$, $-L$, $-S$, $-C'$, $-B'$, $-T'$ gemäß

$$C\,|\boldsymbol{p}, \alpha\rangle = \eta_\alpha\,|\boldsymbol{p}, \alpha\rangle = -\,|\boldsymbol{p}, \bar{\alpha}\,\rangle \tag{6.192}$$

über. C kommutiert mit allen Raum-Zeit-Operatoren. η_α hängt nur von den Eigenschaften des Teilchens α ab.

Wenn ein System betrachtet wird, dann ist die Ladungskonjugation auf das ganze System anzuwenden. Hinsichtlich der Bewegung elektrischer Ladungen bedeutet das die Änderung der Vorzeichen der Ladungen und des Feldes. Daher lassen sich die Trajektorien der Teilchen prinzipiell nicht von denen der Antiteilchen unterscheiden.

Die starke und elektromagnetische Wechselwirkung sind invariant gegenüber C, d. h., es kommutiert mit den Hamilton-Operatoren H_{st} und H_{elm}. Die schwache Wechselwirkung ist hingegen nicht invariant gegen C, d. h., C und H_{schw} kommutieren nicht miteinander. Im Unterschied zur räumlichen Parität lassen sich für die Ladungskonjugation nicht immer Eigenzustände angeben. Ein Teilchen kann ein Eigenzustand des Ladungskonjugationsoperators C sein, wenn es die Quantenzahlen $B = Q = L = S = C' = B' = T' = 0$ hat. In diesem Fall ist das Teilchen mit dem Antiteilchen identisch. Beispiele dafür sind die Teilchen π^0, ϱ^0, ω^0, φ^0, η^0, η^{10}, γ mit den Eigenwerten oder der Ladungsparität

$$\begin{aligned} C &= -1: \quad \gamma, \varrho, \omega, \varphi\,; \\ C &= +1: \quad \pi^0, \eta\,. \end{aligned} \tag{6.193}$$

Da das Photon an die Ladungen des elektromagnetischen Feldes gekoppelt ist und diese bei Anwendung von C das Vorzeichen wechseln, ist $C\,|\gamma\rangle = -|\gamma\rangle$. Wegen des Zerfalls $\pi^0 \to 2\gamma$ gilt entsprechend $C\,|\pi^0\rangle = +|\pi^0\rangle$.

Für ein System, wie das Positronium, das aus einem Teilchen-Antiteilchen-Paar besteht und das durch den Gesamtdrehimpuls $\boldsymbol{I}$, den Gesamtspin $\boldsymbol{S}$ und den Bahndrehimpuls $\boldsymbol{l}$ gekennzeichnet werden kann gilt

$$C\Psi(\text{Positronium}) = (-1)^{l+S}\, \Psi(\text{Positronium})\,. \tag{6.194}$$

Speziell für den Grundzustand mit $\boldsymbol{l} = 0$, $\boldsymbol{I} = \boldsymbol{S}$ gilt

$$\begin{aligned} &C(\text{Orthopositronium}, \boldsymbol{I} = 1) = -1\,, \\ &C(\text{Parapositronium}, \boldsymbol{I} = 0) = +1\,. \end{aligned} \tag{6.195}$$

Zustände mit $C = +1$ können in zwei Photonen, aber nicht in drei Photonen zerfallen, Zustände mit $C = -1$ können in drei, nicht aber in zwei Photonen zerfallen.

6.7.3. Die G-Parität

Für die starke Wechselwirkung lassen sich die Invarianzen unter der Ladungskonjugation C und dem Isospin $\boldsymbol{T}$ miteinander kombinieren. Die resultierende Operation der G-Parität ist auch für Systeme mit $Q = 0$ anwendbar. In Übereinstimmung mit (6.172) ist

$$T_3 = Q - \frac{B + S}{2}\,, \tag{6.196}$$

so daß der Operator der Ladungskonjugation C das Vorzeichen des Eigenwertes der 3. Komponente des Isospinoperators T_3 umkehrt:

$$CT_3 = -T_3 C\,. \tag{6.197a}$$

Für die Operatoren T_1 und T_2 gilt

$$\begin{aligned} CT_1 &= -T_1 C\,, \\ CT_2 &= +T_2 C\,. \end{aligned} \tag{6.197b}$$

Die Rotation um den Winkel π um die y-Achse im Isospinraum $R(\pi) = \exp(-\mathrm{i}\pi T_2)$ bewirkt

$$\begin{aligned} R(\pi)\, T_1 &= -T_1 R(\pi)\,, \\ R(\pi)\, T_2 &= +T_2 R(\pi)\,, \\ R(\pi)\, T_3 &= -T_3 R(\pi)\,. \end{aligned} \tag{6.198}$$

und hebt damit das negative Vorzeichen in (6.197a) und (6.197b) auf. Der Operator der G-Parität, definiert als

$$G = CR(\pi) = C \exp(-i\pi T_2) \tag{6.199}$$

kommutiert damit mit allen Isospinoperatoren T_i. Für Systeme mit $B = S = 0$ können auch Systeme mit der Ladung $Q \neq 0$ Eigenzustände von G sein. Der Eigenwert (± 1) wird als G-Parität des Teilchens bezeichnet. Die starke Wechselwirkung ist invariant unter der G-Parität, die elektromagnetische und schwache Wechselwirkung verletzen die G-Parität. Die G-Parität des neutralen Pions ist negativ, durch eine geeignete Phasenwahl wird auch den geladenen Pionen $G = -1$ zugeordnet: Für das π^0, das sich im Isospinzustand $|1, 0\rangle$ befindet ist $C\,|\pi^0\rangle = +|\pi\rangle$. Auf einen Isospineigenzustand $|T, T_3\rangle$ mit den Eigenwerten $T(T-1)$ von T^2 und T_3 von T_3 wirkt die Rotation $\exp(-i\pi T_2)$, so daß

$$\exp(-i\pi T_2)\,|T, T_3\rangle = (-1)^{T-T_3}\,|T, -T_3\rangle\,. \tag{6.200}$$

Demzufolge gilt $G\,|\pi^0\rangle = -|\pi^0\rangle$. Weiterhin führt C die geladenen Pionen $\pi^\pm$ in $\pi^\mp$ und $R(\pi)$ bewirkt die inverse Operation. Mit der Phasenkonvention $|\pi^\pm\rangle = +|1, \pm 1\rangle$ und $C\,|\pi^\pm\rangle = -|\pi^\mp\rangle$ folgt auch für die geladenen Pionen $G\,|\pi\rangle = -|\pi\rangle$. Die G-Parität ist wie die räumliche Parität eine multiplikative Quantenzahl. Die G-Parität eines Zustandes aus n Pionen ist

$$G\,|n\pi\rangle = (-1)^n\,|n\pi\rangle\,. \tag{6.201}$$

Die Invarianz der starken Wechselwirkung bezüglich der G-Parität bedeutet also, daß eine gerade und eine ungerade Anzahl von Pionen nicht miteinander gekoppelt sein können.

6.7.4. Das PCT-Theorem

Unter sehr allgemeinen Voraussetzungen, wie Lokalität und Lorentz-Invarianz läßt sich beweisen, daß jede Feldtheorie unter dem Produkt der Operatoren PCT invariant ist, auch wenn die Invarianz der entsprechenden Gesetze gegenüber den einzelnen Transformationen nicht gegeben ist. Anders ausgedrückt bedeutet diese Invarianz, daß das Produkt der drei Operationen mit dem Hamilton-Operator jeder dieser Feldtheorien kommutiert:

$$[PCT, H] = 0\,. \tag{6.202}$$

Die Reihenfolge der drei Operationen ist willkürlich. Entsprechend drei Faktoren gibt es $3! = 6$ Möglichkeiten der Schreibweise.

Angewendet auf einen Streuprozeß der Art

$$\mathrm{a} + \mathrm{b} \to \mathrm{c} + \mathrm{d} \tag{6.203a}$$

bedeutet das PCT-Theorem, daß alle Streuzustände dieser kombinierten Operation gegenüber invariant bleiben. Die Amplitude dieses Prozesses beschreibt also ebenso den PCT-transformierten Prozeß

$$\bar{\mathrm{c}} + \bar{\mathrm{d}} \to \bar{\mathrm{a}} + \bar{\mathrm{b}}\,. \tag{6.203b}$$

Nach dem PCT-Theorem sollen auch die Massen und Lebensdauern von Teilchen und Antiteilchen gleich und ihre magnetischen Momente entgegengesetzt gleich sein. Da die schwache Wechselwirkung nicht C-invariant ist, folgen diese experimentell überprüfbaren Konsequenzen noch nicht allein aus der Ladungskonjugations-Invarianz.

6.8. Elektrisches Quadrupolmoment

Die Wechselwirkungsenergie zwischen Hülle und Kern läßt sich exakt bestimmen. In Gl. (6.98) ist ein Ausdruck für die Energie eines Hüllenniveaus angegeben worden, wie er unter Berücksichtigung der Wechselwirkung zwischen magnetischem Hüllen- und Kerndipolmoment erhalten wird. Es gilt mit (6.102):

$$E_{J,I} = E_J + (A/2)\,[F(F+1) - J(J+1) - I(I+1)]\,. \tag{6.204}$$

Die experimentellen Werte von $E_{J,I}$ stimmen für die meisten Atome in sehr engen Fehlergrenzen mit den theoretischen überein. Bei einigen Atomen fand man ganz eindeutige Abweichungen von (6.98), insbesondere bei einigen Isotopen der Elemente der seltenen Erden, wie Eu, Lu u. a. Die Intervallregel (6.103) wird in diesen Fällen nicht erfüllt. Man konnte die experimentell gemessenen Niveauenergien mit den theoretischen in Übereinstimmung bringen, indem man eine zusätzliche Wechselwirkungsenergie einführte. Es gilt dann anstelle von (6.98), d. h. $E_{J,I} = E_J + \Delta E_I$, nunmehr

$$E_{J,I} = E_J + \Delta E_I + \Delta E_Q\,. \tag{6.205}$$

Dabei ist i. allg. $\Delta E_Q \ll E_J + \Delta E_I$. Die Energie ΔE_Q wird durch die Wechselwirkung der Atomhülle mit dem elektrischen Quadrupolmoment des Kerns verursacht.

6.8.1. Elektrische und magnetische Kernmomente

1. Das Vorhandensein eines magnetischen Dipolmoments und eines elektrischen Quadrupolmoments beim Kern läßt auf Strom- und Ladungsverteilungen im Kern schließen. Wir wollen das Potential $V(\boldsymbol{r})$ einer elektrischen Ladungsdichteverteilung $\varrho(\boldsymbol{r})$ im Kern in großem Abstand von ihm untersuchen, um den Einfluß bestimmter Formen der Ladungsdichteverteilung zu erfassen. Dabei gehen wir von der klassischen Vorstellung aus, der Kern sei im allgemeinsten

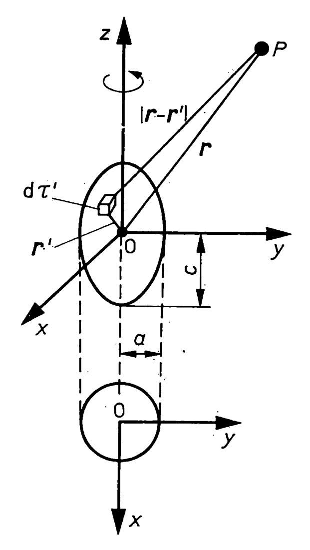


Abb. 6.48
Geometrie zur Ableitung des Potentials einer Ladungsverteilung

Falle ein System symmetrisch verteilter Ladungen, das um eine kerneigene Symmetrieachse z' rotiert. Wir legen den Ursprung des Koordinatensystems in seinen Massenmittelpunkt und sorgen dafür, daß die z-Achse mit dem Drehimpulsvektor zusammenfällt, wie es Abb. 6.48 zeigt. Dann ist die Ladungsdichteverteilung im zeitlichen Mittel axialsymmetrisch hinsichtlich z. In diesem Falle kann das Potential $V(\boldsymbol{r})$ dargestellt werden durch

$$V(\boldsymbol{r}) = \int_{\tau'} \frac{\varrho(\boldsymbol{r}')\,\mathrm{d}\tau'}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|} \tag{6.206}$$

mit der Ortsabhängigkeit

$$\frac{1}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|} = \frac{1}{r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\alpha} = \frac{1}{r}\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{r'}{r}\right)^l P_l(\cos\alpha)\,. \tag{6.207}$$

Dabei sind die $P_l(\cos\alpha)$ die Legendreschen Polynome. Da voraussetzungsgemäß $r'/r \ll 1$ gelten soll, konvergiert die Reihe schnell, und man braucht nur die ersten Glieder zu berücksichtigen:

$$V(r) = \frac{Ze}{r} + \frac{D}{r^2} + \frac{1}{2}\frac{Q_0}{r^3} + \cdots \tag{6.208 a}$$

$(l = 0)$	$(l = 1)$	$(l = 2)$
Das ist der Anteil, der durch die Kernladung	Das ist der Anteil, der durch ein Dipolmoment	Das ist der Anteil, der durch ein Quadrupolmoment
$\int \varrho\,\mathrm{d}\tau' = Ze$	$D = \int \varrho z'\,\mathrm{d}\tau'$	$Q_0 = \int \varrho(3z'^2 - r'^2)\,\mathrm{d}\tau'$ (6.208 b)
entsteht.	entsteht.	entsteht.

Würde man die Reihenentwicklung fortsetzen und nach Termen P_l ordnen, dann bekäme man weitere Glieder, Multipolglieder, mit der Multipolordnung 2^l.

Wie man sich die drei Formen der Ladungsverteilung vorstellen kann, zeigt die Abb. 6.49. Im oberen Teil wird eine einfache Anordnung aus wenigen Ladungen betrachtet, im unteren Teil schematisch das Analogon Kern mit vielen Ladungen.

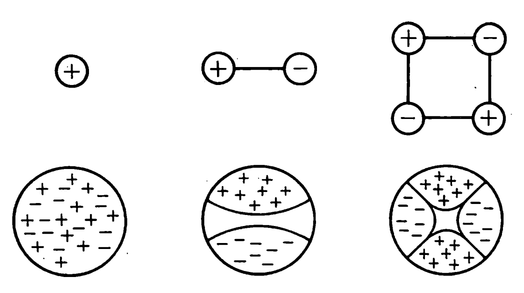


Abb. 6.49
Vereinfachte Darstellung der elektrischen Mono-, Di- und Quadrupolverteilung

2. Die Erfahrung des kernphysikalischen Experiments zeigt nun, daß Multipolmomente der Ordnung 2^l mit ungeradem l bei Kernen in den Grundzuständen nicht auftreten. Dieses Ergebnis kann als eine Folge des Satzes von der Erhaltung der Parität gewertet werden. Wir verifizieren diese Aussage am Beispiel des elektrischen Dipolmoments.

Wenn $w(\boldsymbol{r}_i')\,\mathrm{d}\tau_i'$ die Wahrscheinlichkeit ist, das i-te Proton im Raumelement $\mathrm{d}\tau_i'$ zu finden, dann ergibt sich die Ladungsdichteverteilung des i-ten Protons zu $\varrho(\boldsymbol{r}_i') = ew(\boldsymbol{r}_i')$. Der vom i-ten Proton verursachte Beitrag zur z-Komponente des Dipolmoments ist somit

$$D_i = e \int z_i' w(\boldsymbol{r}_i')\,\mathrm{d}\tau_i' . \tag{6.209}$$

Das elektrische Dipolmoment des Kerns im stationären Zustand ist die Summe dieser Integrale für alle Z Protonen des Kerns:

$$D = e \sum_i^z \int z_i' w(\boldsymbol{r}_i')\,\mathrm{d}\tau_i' = e \sum_i^z \int z_i' \,|\Psi(\boldsymbol{r}_1', \ldots, \boldsymbol{r}_z', \ldots, \boldsymbol{r}_A')|^2\,\mathrm{d}\tau' . \tag{6.210}$$

Bei Rauminversion ändert $|\Psi|^2$ sein Vorzeichen nicht, wohl aber die ungerade Funktion z_i. Also ist

$$D(\boldsymbol{r}) = -D(-\boldsymbol{r}) = 0 . \tag{6.211}$$

3. Man kann für die magnetische Wechselwirkung zwischen dem Magnetfeld, in dem sich der Kern befindet, und dem durch Rotation der Kernladungen entstehenden Kernvektorpotential in Analogie zum elektrischen Fall eine magnetische Wechselwirkungsenergie herleiten und sie in magnetischen Multipolen der Ordnung 2^l darstellen. Wie hier nicht gezeigt werden soll, gilt im stationären Zustand die Regel, daß alle magnetischen Multipole mit geradem l verschwinden. Dieses Ergebnis ist in Tabelle 6.13 zusammen mit dem für elektrische Multipole erhaltenen aufgeführt. Der Einfachheit halber kann man die Wörter „elektrisch" und „magnetisch" weglassen, da sowieso klar ist, daß es sich z. B. nur um ein magnetisches Dipolmoment handeln kann, wenn vom Dipolmoment des Kerns die Rede ist.

Tabelle 6.13
Multipolmomente des Atomkerns

l	E	M
0	$Ze \neq 0$	0
1	$D = 0$	$\mu \neq 0$
2	$Q \neq 0$	0
3	$O_e = 0$	$O_m \neq 0$

4. Die Potentiale von Multipolen nehmen mit zunehmender Ordnung des Multipols sehr schnell als Funktion der Entfernung ab, der Dipol mit r^{-2}, der Quadrupol mit r^{-4}, allgemein der Multipol der Ordnung 2^l mit r^{-2l}. Das Feld der Ladung e ist ein Monopol, es nimmt mit r^{-2} ab. Multipole höherer Ordnungen spielen daher fast keine Rolle für die Kerntheorie; man hat nur in einigen wenigen Fällen Oktupole und 16-Polmomente experimentell bestimmen können.

6.8.2. Quadrupolmoment und Kerndeformation

1. Man hat versucht, die Abweichungen der experimentellen Werte der HFS-Aufspaltung von den theoretischen Werten, wie sie (6.204) liefert, als Folge von elektrischen Quadrupolkonfigurationen zu erklären (6.205). Klassisch betrachtet ergeben sich zwischen dem Quadrupolmoment und der Kerndeformation die folgenden Zusammenhänge: Das Quadrupolmoment

$$Q_0 = \frac{1}{e} \int \varrho(\boldsymbol{r}')\,(3z'^2 - r'^2)\,\mathrm{d}\tau' \tag{6.212}$$

enthält die Ladungsdichte $\varrho(\boldsymbol{r}')$ und den Faktor $(3z'^2 - r'^2)$. Die Einheit von Q_0 ergibt sich wegen des Faktors e^{-1} zu cm^2. In Übereinstimmung mit Abb. 6.48 fassen wir z als Projektion von $\boldsymbol{r}'$ auf die Körperachse des rotationssymmetrischen Körpers auf. Für Kugelsymmetrie erhält man dann

$$r'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 = 3z'^2\,; \quad Q_0 = 0\,. \tag{6.213a}$$

Wenn

$$r'^2 < 3z^2\,, \quad \text{d. h.} \quad Q_0 > 0\,, \tag{6.213b}$$

liegt „Zigarrenform“ mit den Halbachsen $a = b < c$ vor. Der Fall

$$r'^2 > 3z^2\,, \quad \text{also} \quad Q_0 < 0 \tag{6.213c}$$

bedeutet „Linsenform“ mit den Halbachsen $a = b > c$. In einer Modellvorstellung faßt man das Quadrupolmoment als Eigenschaft eines homogen geladenen Rotationsellipsoids mit $\varrho(\boldsymbol{r}') = Ze/V$ und den Halbachsen $a = b$ und $c \neq a, b$ auf. Es gilt dann

$$Q_0 = \frac{2}{5} Z(c^2 - a^2)\,. \tag{6.214}$$

Meist sind die Abweichungen von der Kugelgestalt nicht groß. Man führt dann einen Radius R_0 ein, den eine Kugel mit dem gleichen Kernvolumen besitzen würde. Geht man von inkompressibler Kernmaterie aus, so gilt

$$\frac{4\pi}{3} a^2 c = \frac{4\pi}{3} R_0^3 \tag{6.215}$$

mit

$$R_0 = \frac{a + c}{2}\,. \tag{6.216}$$

Die Abweichungen von diesem Radius R_0 werden auf verschiedene Weise definiert (siehe dazu (6.224), (8.95, 96) sowie (8.155, 156)).

2. Man kann für Q_0 auch einen quantenmechanischen Ausdruck finden. Die Ladungsdichte $\varrho(\boldsymbol{r}')$ wird dann durch die Wellenfunktion beschrieben:

$$\varrho(\boldsymbol{r}') = Ze\Psi^*(\boldsymbol{r}') \cdot \Psi(\boldsymbol{r}')\,. \tag{6.217}$$

Q_0 ist der Erwartungswert des Operators $(3z'^2 - r'^2)$ für einen Kern, dessen Spin I in z-Richtung weist, d. h. der Erwartungswert für den Fall $m = I$:

$$Q_0 = \frac{1}{e} \langle \Psi^* \,|(3z'^2 - r'^2)|\, \Psi \rangle_{m=I}\,. \tag{6.218}$$

Im Falle $I = 0$ ist keine Achse ausgezeichnet, in bezug auf die eine Unsymmetrie auftreten könnte. Es ist dann immer $Q_0 = 0$.

3. Zur Bestimmung des Quadrupolmoments gibt es verschiedene Möglichkeiten, z. B. über die Wechselwirkung mit dem elektrischen Feld der Hülle oder über die Strahlung, die vom Atomkern emittiert wird. Dabei ist zu berücksichtigen, daß Q für den Fall eingeführt wurde, daß die physikalisch ausgezeichnete Richtung z' mit der Symmetrieachse des Kerns z zusammenfällt. Nun ist selbst im Falle maximaler Ausrichtung des Drehimpulses der Maximalwert des Kernspins kleiner als $|\boldsymbol{I}|$. Das kann damit erklärt werden, daß $\boldsymbol{I}$ und damit auch der Kern selbst um die physikalisch ausgezeichnete z-Achse schnell präzedieren. Im Experiment wird also nur eine Projektion gemessen. Ohne hier auf die Rechnung einzugehen, stellen wir fest,

daß es zwischen dem inneren Quadrupolmoment Q_0, dem gemessenen Quadrupolmoment Q und dem Kernspin den folgenden Zusammenhang gibt:

$$Q = \frac{I(2I-1)}{(I+1)(2I+3)} Q_0 . \tag{6.219}$$

In dem hier betrachteten Fall, da Symmetrieachse und physikalisch ausgezeichnete Richtung zusammenfallen, ist $Q \neq 0$ nur für $I \geqq 1$, selbst wenn $Q_0 \neq 0$ ist. Weiter sieht man, daß für $Q_0 \neq 0$ immer $Q < Q_0$ ist. Man kann zeigen, daß ganz allgemein für die Ordnung l von im Prinzip auf diese Weise meßbaren Multipolen die Beziehung

$$l \leqq 2I \tag{6.220}$$

erfüllt sein muß.

4. Wenn die Modellvorstellung eines Rotationsellipsoids der Kernform beim Auftreten von Quadrupolmomenten richtig ist, dann müßte sich das in einer besonderen Art der Anregungsniveaus der deformierten Atomkerne äußern. Ein Rotationsellipsoid hat quantenmechanisch gesehen im Vergleich zur Kugelform den zusätzlichen Freiheitsgrad der Rotation. Es muß also Niveaus geben, die verschiedenen Rotationsgeschwindigkeiten entsprechen, natürlich gequantelt. Derartige Zustände werden im Rahmen des Rotationsmodells betrachtet (siehe 8.4.3.). Hier folgen wir einer halbklassischen Behandlung.

Aus der klassischen Mechanik sind für die Rotationsenergie und den Drehimpuls die Beziehungen

$$E = \frac{J}{2}\omega^2 ; \qquad I = J\omega \tag{6.221}$$

bekannt. J ist das Trägheitsmoment und ω die Winkelgeschwindigkeit. In der Quantenmechanik tritt $\boldsymbol{I}$ gequantelt auf, gemäß $\hbar\sqrt{I(I+1)}$. Eliminiert man die Winkelgeschwindigkeit ω, dann erhält man für die Energiezustände eines solchen Rotators

$$E = \frac{\hbar^2}{2} I(I+1) . \tag{6.222}$$

Das Trägheitsmoment eines starren Rotationsellipsoids läßt sich leicht berechnen. Es beträgt im Falle der Kernkugel

$$J_0 = \frac{2}{5} m_K R_0^2 \tag{6.223}$$

und im Falle kleiner Abweichungen von R_0 gemäß

$$\Delta R = c - a , \tag{6.224}$$

$$J = J_0 \left(\frac{\Delta R}{R_0}\right)^2 . \tag{6.225}$$

Führt man den Deformationsparameter β wie in (8.155, 156) zu

$$\beta = \frac{16\pi}{45} \left(\frac{\Delta R}{R_0}\right)^2 \tag{6.226}$$

ein, so folgt

$$J = \frac{9}{8\pi} m_K R_0^2 \cdot \beta^2 . \tag{6.227}$$

Tatsächlich treten bei der Abregung der Anregungsniveaus deformierter Kerne ganze Banden von Rotationsübergängen auf, sobald $Q_0 \gtrsim 4$ barn ist. In Abb. 6.39 sind typische Beispiele aus den großen Deformationsgebieten aufgezeichnet. Auf dem Grundzustand mit $I^\pi = 1/2^-$ und dem angeregten Niveau bei 208,81 keV mit $I^\pi = 3/2^-$ von ^{183}W gibt es typische Rotationsniveaus mit $I^\pi = 5/2^-, 7/2^-, 9/2^-, \ldots$ Für die Energiedifferenzen zwischen diesen Niveaus gilt die Anwendung von (6.222)

$$E_I - E_{I_0} = \frac{\hbar}{2}[I(I+1) - I_0(I_0+1)]\,; \qquad I_0 \neq \frac{1}{2}\,. \tag{6.228}$$

Analoges gilt für die auf dem Grundzustand von ^{238}U mit 0^+ aufbauende Rotationsbande mit $2^+, 4^+, 6^+, 8^+, \ldots$ Aus den im Experiment bestimmten Energien der Rotationsübergänge, die im Gammaspektrum von anderen Übergängen wegen der Gültigkeit von (6.228) leicht unterschieden und somit identifiziert werden können, läßt sich J und damit Q_0 ermitteln. Ein Maß für das Quadrupolmoment Q_0 ist auch die Übergangswahrscheinlichkeit der Abregung eines Niveaus auf die tieferliegenden. Darauf kommen wir in 8.5.2. sowie 9.6.3. zu sprechen.

6.8.3. Experimentelle Ergebnisse

In der Abb. 6.50 sind folgende Ergebnisse der Quadrupolbestimmung von Kerngrundzuständen auf der Stabilitätslinie über Z aufgetragen. Es lassen sich eine Reihe wichtiger Feststellungen treffen:

a) Für bestimmte Z-Werte, die sogenannten magischen Zahlen 2, 8, 20, 28, 50 und 82 (siehe 8.3.2), ist $Q_0 = 0$.
b) Für magisches N ergeben sich besonders kleine Q_0-Werte.
c) Im allgemeinen sind die Quadrupolmomente nicht groß. Die Halbachsen a und b unterscheiden sich nur um 1 ... 2%. In den Gebieten $150 < A < 192$ und $A < 225$ gibt es aber erhebliche Abweichungen. Die Kerne in diesen Gebieten sind stark deformiert. Wenn die Quadrupolmomente größer sind als 4 barn, dann treten typische Rotationsniveaubanden auf, was als wichtiges Kriterium für den Nachweis der Deformation gelten kann. Typische Rotationsspektren treten auch im Gebiet $A \approx 25$ (Al, Mg) auf.
d) Während bei $A \approx 25$ bisher sowohl linsen- als auch zigarrenförmige Deformationen gefunden wurden, konnten bei den schweren deformierten Kernen noch keine Linsenformen im Grundzustand nachgewiesen werden.

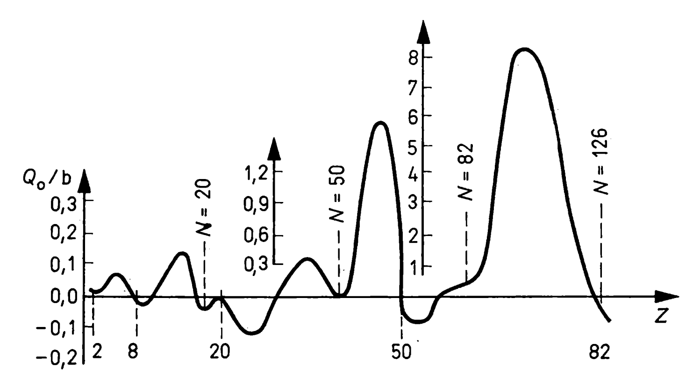


Abb. 6.50
Durch Anpassung an die auf der Grundlage von Meßwerten bestimmten Grundzustands-Quadrupolmomente Q_0 stabiler Nuklide erhaltener Kurvenverlauf $Q_0(Z)$

e) Die Erfahrung zeigt, daß Kerndeformationen abseits von den magischen Nukleonenzahlen auftreten. Dieses Faktum kann theoretisch auf der Grundlage von Modellvorstellungen erklärt werden. In Abb. 6.51 sind die Deformationsgebiete schematisch als Ellipse eingezeichnet.

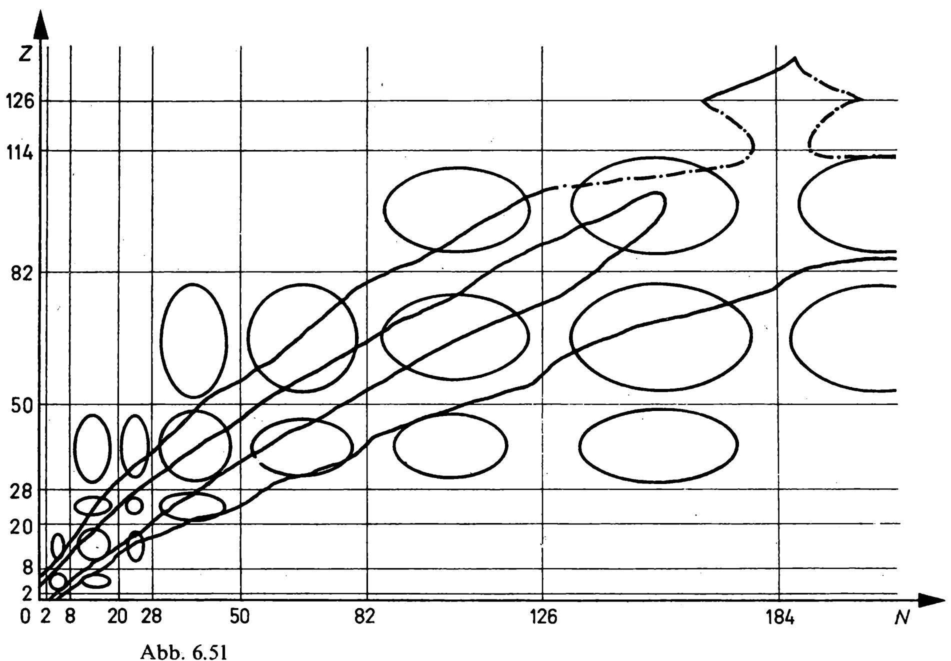


Abb. 6.51
Kerndeformationsgebiete im Z- über N-Diagramm

Literaturhinweise zu Kapitel 6

Bal 78, Bla 52, Bod 72/78, Boh 69/75, Fra 74, Gol 69, Her 60/66, Kop 56, Kor 54, Kra 73, Loc 70, Lon 73, Mar 71, May 79, Muc 74, Nau 84, Pau 69, Per 72, Pol 77, Pos 71, Ran 76, Šir 72, Seg 53, Sie 66, Sok 68, Wil 69

7. Starke Wechselwirkung zwischen Nukleonen

7.1. Zweinukleonenproblem und Kernkräfte

1. Die Frage nach der Natur der Kernkräfte und ihrer Wirkungsweise im nuklearen Vielteilchensystem ist für die Kernphysik von grundlegender Bedeutung. Eine zentrale Stellung dieses Problems ergibt sich vor allem daraus, daß die Ausarbeitung einer mikroskopischen, die Freiheitsgrade der einzelnen Nukleonen einführenden Beschreibung des Kerns von der Schrödinger-Gleichung für das quantenmechanische Vielteilchensystem

$$\left(\sum_{i=1}^{N} \frac{p_i^2}{2m_i} + V(1,\ldots,N) - E\right) \Psi(1,\ldots,N) = 0 \tag{7.1}$$

ausgehen muß. Die Ableitung der nuklearen Phänomene aus den Lösungen $\Psi(1, \ldots, N)$ dieser Grundgleichung setzt aber voraus, daß wir das Potential $V(1, \ldots, N)$ der Wechselwirkung zwischen den N Bestandteilen des Systems kennen.

2. Der historische Ausgangspunkt für die Untersuchung der Kernkräfte war die Entdeckung des Neutrons durch J. Chadwick im Jahre 1932 und die sich daran anschließende Hypothese von D. D. Ivanenko und W. Heisenberg, daß der Atomkern aus zwei Elementarteilchen, Neutronen und Protonen, aufgebaut ist. Erste Versuche von I. E. Tamm und D. D. Ivanenko, die np-Bindung durch Austausch eines Elektrons zwischen den beiden Teilchen zu erklären, schlugen fehl. Offenbar war die von E. Fermi angegebene Kopplungskonstante für die schwache Wechselwirkung, die im Kern den Zerfall eines Protons in Neutron, Elektron und Neutrino ermöglicht, viel zu klein, um die starke Bindung der Kerne zu erklären. Die gemessene Bindungsenergie der Kerne war so groß, daß man einen neuen Typ von Kräften annehmen mußte, deren Hauptkomponente eine starke Anziehung zwischen Nukleonen liefert. Erste Aussagen über grundlegende Eigenschaften dieser neuen Wechselwirkung gelangen E. Wigner, der die Änderung der Bindungsenergie pro Nukleon in leichten Kernen (d, ^{3}He, α-Teilchen) betrachtete. Er stellte fest, daß Kernkräfte eine Stärke von etwa 50 MeV besitzen, eine Reichweite von der Größenordnung 10^{-13} cm aufweisen und in Kernen paarweise wirken.

Wenn man das Potential $V(1, \ldots, N)$ in sehr guter Näherung aus Zweiteilchenpotentialen $V(ij)$ zusammensetzen kann,

$$V(1,\ldots,N) = \sum_{i<j=1}^{N} V(ij), \tag{7.2}$$

dann besteht ein direkter Zugang zur Untersuchung der Kernkräfte in der Analyse der freien Nukleon-Nukleon-Streuung und des gebundenen Zustandes des Zweinukleonensystems. Die ersten Messungen zur np-Streuung wurden Mitte der dreißiger Jahre im Energiebereich von einigen keV und MeV durchgeführt. Sie bewiesen, daß Kernkräfte zustandsabhängig sind. Die Nukleon-Nukleon-Streuexperimente nahmen in den fünfziger Jahren einen bedeutenden Aufschwung, als nach Fortschritten im Beschleunigerbau intensive Protonenstrahlen mit Energien bis zu etwa 350 MeV zur Verfügung standen. Anfang der sechziger Jahre waren die Messungen dann soweit vollständig, daß man aus Streudaten realistische Nukleon-Nukleon-Potentiale extra-

hieren konnte, die die experimentellen Ergebnisse im Energiebereich 0 bis 350 MeV gut wiedergaben.

Die quantenfeldtheoretischen Betrachtungen der Nukleon-Nukleon-Wechselwirkung begannen im Jahre 1935 mit der Hypothese von H. YUKAWA, daß die Kraftwirkung zwischen Nukleonen durch den virtuellen Austausch eines Teilchens mit von Null verschiedener Ruhemasse zustande kommt. Auf dieser Grundlage wurde zunächst das Potential berechnet, das dem Austausch eines einzelnen π-Mesons entspricht. Das Ein-Pion-Austauschpotential liefert eine gute Beschreibung der Kräfte, wenn sich die wechselwirkenden Nukleonen in großen Abständen ($\gtrsim 1$ fm) voneinander befinden. In den sechziger Jahren gelang es, weitgehend zu klären, wie der Austausch schwerer Mesonen die Kernkräfte bei mittleren Nukleonenabständen bestimmt.

In diesem Kapitel werden wir die Grundzüge einer phänomenologischen Analyse der Nukleon-Nukleon-Wechselwirkung darstellen und ihre Ergebnisse zusammenfassen. Die Mesonentheorie der Kernkräfte wird nur in sehr einfacher Form behandelt. Die Betrachtungen werden zeigen, daß die starke Wechselwirkung zwischen Nukleonen eine sehr komplexe Abhängigkeit von den Orts-, Spin- und Isospinfreiheitsgraden besitzt, wobei sich ein kompliziertes Zusammenspiel von anziehenden und abstoßenden Komponenten einstellt.

7.2. Zustände des Zweinukleonensystems

7.2.1. Klassifizierung

1. Die Wellenfunktion Ψ, die den Zustand eines Systems aus zwei, durch ein Potential V_{12} miteinander wechselwirkenden Nukleonen 1, 2 beschreibt, hängt von den Orts-, Spin- und Isospinkoordinaten der beiden Teilchen ab,

$$\Psi(x_1, x_2)\,, \qquad x_i \equiv \boldsymbol{r}_i, s_i, t_i\,, \qquad i = 1, 2\,.$$

Sie ist eine Lösung der Schrödinger-Gleichung

$$(H - \varepsilon)\,\Psi(x_1, x_2) = 0\,, \qquad H = T_1 + T_2 + V_{12}\,, \qquad T_i = \boldsymbol{p}_i^2/2m_i \tag{7.3}$$

zur Gesamtenergie ε. Hängt das Zweikörperpotential V_{12} nur über die Relativkoordinate $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2$ vom Ort der beiden Nukleonen ab, $V_{12} = V_{12}(\boldsymbol{r}, s_1, s_2, t_1, t_2)$, dann können wir die Wellenfunktion hinsichtlich Relativkoordinate $\boldsymbol{r}$ und Massenmittelpunktskoordinate $\boldsymbol{R} = (m_1\boldsymbol{r}_1 + m_2\boldsymbol{r}_2)/(m_1 + m_2)$ separieren,

$$\Psi(x_1, x_2) = \Phi(\boldsymbol{R})\,\psi(\boldsymbol{r}, s_1, s_2, t_1, t_2)\,.$$

Die ebene Welle $\Phi(R) = e^{i\boldsymbol{k}_M\boldsymbol{R}}$ beschreibt eine freie Bewegung des Massenmittelpunktes mit der Energie $E_M = \dfrac{m_1}{m_1 + m_2}\,\varepsilon$, $k_M^2 = \dfrac{2(m_1 + m_2)}{\hbar^2}\,E_M$. Die Wellenfunktion ψ der Relativbewegung folgt aus der Schrödinger-Gleichung für die Bewegung eines Teilchens mit der reduzierten Masse $\mu = m_1m_2/(m_1 + m_2)$ und der Energie $E = \varepsilon - E_M$

$$(T_r + V_{12} - E)\,\psi(\boldsymbol{r}, s_1, s_2, t_1, t_2) = 0\,, \qquad T_r = -\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{\partial^2}{\partial \boldsymbol{r}^2}\,. \tag{7.4}$$

Auf die Betrachtungen von 6.6.3. aufbauend, führen wir zunächst die Klassifizierung der Zustände nach den Quantenzahlen des Bahndrehimpulses der Relativbewegung, des Gesamtspins sowie des Gesamtisospins durch und wählen die nach dem verallgemeinerten Pauli-Prinzip erlaubten Zustände aus.

2. Wenn das Potential V_{12} nur vom Abstand $r = |\boldsymbol{r}|$ der Nukleonen abhängt, dann lassen sich die Ortszustände $\varphi(\boldsymbol{r})$ wegen der Zentralsymmetrie des Problems durch den Betrag L und die z-Komponente M_L des Bahndrehimpulses klassifizieren. Nach Gl. (A. 14) entspricht diese Angabe auch einer Klassifizierung nach dem Symmetrieverhalten der Wellenfunktion bei Spiegelung am Punkt $\boldsymbol{r} = 0$, das durch die Quantenzahl der Parität $P = (-1)^L$ charakterisiert wird. Es gilt z. B.:

$L = 0$: S-Zustand, symmetrisch;

$L = 1$: P-Zustand, antisymmetrisch;

$L = 2$: D-Zustand, symmetrisch.

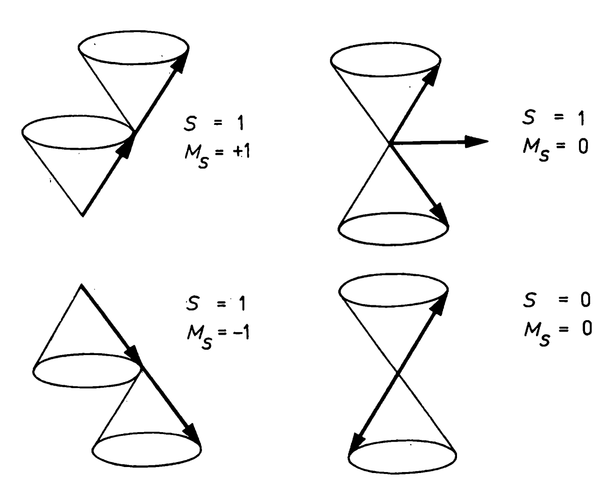


Abb. 7.1
Spinzustände des Zweinukleonensystems

Die möglichen Spinzustände des Zweinukleonensystems kann man durch Vektorkopplung der Nukleonenspins $\boldsymbol{s}_1, \boldsymbol{s}_2$ zum Gesamtspin $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{s}_1 + \boldsymbol{s}_2$ ermitteln. Nach den Regeln (A. 27) für die Vektoraddition von Drehimpulsen ergeben sich ein Triplettzustand $S = 1$, $M_S = 0 \pm 1$ und ein Singulettzustand $S = M_S = 0$, die einer Parallel- bzw. Antiparallelstellung der Spins entsprechen. Diese Kopplungen sind in der Abb. 7.1 durch aneinandergesetzte Drehimpulskegel geometrisch veranschaulicht. Die explizite Konstruktion der zugehörigen Spinwellenfunktionen $\chi_{SM_S}(s_1, s_2)$ aus den Spinfunktionen $\chi_{m_{s_i}}(s_i)$ der Nukleonen gelingt mit Hilfe der in Gl. (A. 26) allgemein definierten Clebsch-Gordan-Koeffizienten $\left(\frac{1}{2}\, m_{s_1}\, \frac{1}{2}\, m_{s_2} \middle|\, SM_S\right)$.

$$
\begin{aligned}
S = 0, \quad & M_S = 0: \ \chi_{00} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\chi_{+1/2}(s_1)\, \chi_{-1/2}(s_2) - \chi_{-1/2}(s_1)\, \chi_{+1/2}(s_2)), \\
S = 1, \quad & M_S = +1: \ \chi_{11} = \chi_{+1/2}(s_1)\, \chi_{+1/2}(s_2), \\
& M_S = 0: \ \chi_{10} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\chi_{+1/2}(s_1)\, \chi_{-1/2}(s_2) + \chi_{-1/2}(s_1)\, \chi_{+1/2}(s_2)), \\
& M_S = -1: \ \chi_{1-1} = \chi_{-1/2}(s_1)\, \chi_{-1/2}(s_2).
\end{aligned}
\tag{7.5}
$$

Man erkennt, daß die Triplettzustände bei Vertauschung der Spinkoordinaten der beiden Nukleonen symmetrisch sind. Der Singulettzustand ist antisymmetrisch. Definiert man den Spinaustauschoperator P^s_{12} durch $P^s_{12}\chi_{SM_S}(s_1, s_2) = \chi_{SM_S}(s_2, s_1)$, dann gilt

$$P^s_{12}\chi_{SM_S}(s_1, s_2) = (-1)^{S+1}\, \chi_{SM_S}(s_1, s_2)\,. \tag{7.6}$$

Enthält das Potential V_{12} in Gl. (7.4) auch nichtzentrale Komponenten, die nicht nur vom Betrag, sondern auch von der Richtung der Relativkoordinate $\boldsymbol{r}$ abhängen, dann bleiben lediglich der Gesamtdrehimpuls $\boldsymbol{J} = \boldsymbol{L} + \boldsymbol{S}$ und seine z-Komponente $J_z = L_z + S_z$ Erhaltungsgrößen der Bewegung. Im Triplettzustand $S = 1$ kann bei vorgegebenem Bahndrehimpuls L der Gesamtdrehimpuls nur die Werte $J = L, L \pm 1$ annehmen.

Völlig analog zu den Spins s_1, s_2 lassen sich auch die Isospins $\boldsymbol{t}_1$, $\boldsymbol{t}_2$ der beiden Nukleonen zum Gesamtisospin $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{t}_1 + \boldsymbol{t}_2$ koppeln. Es entstehen wiederum ein Triplettzustand $T = 1$, $M_T = 0, \pm 1$ und ein Sigulettzustand $T = 0$, $M_T = 0$. Die Projektionsquantenzahl $M_T = t_{3_1} + t_{3_2}$ stellt die Summe der Isospinprojektionen t_{3_i} der beiden Nukleonen dar, die den Ladungszustand der Nukleonen charakterisieren. Ein System aus zwei Nukleonen gleicher Isospinprojektion (zwei Protonen, $t_3 = +\frac{1}{2}$, zwei Neutronen, $t_3 = -\frac{1}{2}$) existiert nur in Zuständen mit der dritten Komponente $|M_T| = 1$ des Gesamtisospins. Da der Betrag eines Vektors nicht kleiner sein kann als eine Komponente, besitzen diese Zustände den Gesamtisospin $T = 1$. Für das np-System gilt $M_T = 0$; es kann sowohl im (symmetrischen) Isospintriplett, als auch im (antisymmetrischen) Isospinsingulettzustand vorliegen. Die Isospinfunktionen $\eta_{TM_T}(t_1; t_2)$ können analog zu den Spinwellenfunktionen $\chi_{SM_S}(s_1, s_2)$ (siehe Gl. (7.5)) geschrieben werden. Ihre Symmetrieeigenschaften bei Vertauschung der Isospinkoordinaten lassen sich mit Hilfe des Isospinaustauschoperators P^t_{12} entsprechend der Gl. (7.6) formulieren:

$$P^t_{12}\eta_{TM_T}(t_1, t_2) = \eta_{TM_T}(t_2, t_1) = (-1)^{T+1}\, \eta_{TM_T}(t_1, t_2)\,. \tag{7.7}$$

Die Lösungen der Schrödinger-Gleichung (7.4) können also in der Form

$$\psi = [\varphi_L(\boldsymbol{r})\, \chi_S(s_1, s_2)]_{JM_J}\, \eta_{TM_T}(t_1, t_2) \tag{7.8}$$

angesetzt werden, wobei die eckigen Klammern die Kopplung vom Bahndrehimpuls $\boldsymbol{L}$ und Spin $\boldsymbol{S}$ zum Gesamtdrehimpuls $\boldsymbol{J}$ symbolisieren. Für die Quantenzustände $\psi^{TM_T}_{(LS)JM_J}$ ist also eine spektroskopische Klassifizierung durch die Angabe $^{2S+1}L_J$ möglich.

3. Nach dem in 6.6.3. eingeführten verallgemeinerten Pauli-Prinzip sind in der Natur nur solche Zustände des Zweinukleonensystems realisiert, deren Wellenfunktionen $\psi^{TM_T}_{(LS)JM_J}$ bei Vertauschung aller Koordinaten der beiden Nukleonen antisymmetrisch sind,

$$P^x_{12}\psi(x_1, x_2) = \psi(x_2, x_1) = -\psi(x_1, x_2)\,. \tag{7.9}$$

Führt man den Ortsaustauschoperator P^r_{12} ein, der in diesem Falle wegen $\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2 = -(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1)$ der Paritätsoperation $\boldsymbol{r} \to -\boldsymbol{r}$ entspricht, dann läßt sich mit $P_{12} = P^r P^s P^t$ die Forderung (7.9) durch

$$P^r_{12}P^s_{12}P^t_{12}\psi^{TM_T}_{(LS)JM_J}(x_1, x_2) = (-1)^{L+S+T}\, \psi^{TM_T}_{(LS)JM_J} = -\psi^{TM_T}_{(LS)JM_J} \tag{7.10}$$

ausdrücken. Aus Gl. (7.10) erhält man die Bedingung

$$L + S + T \quad \text{ungerade}\,. \tag{7.11}$$

Die nach dem verallgemeinerten Pauli-Prinzip erlaubten Zustände des Zweinukleonensystems

$T = 0$:	Spinsingulett,	L ungerade,
	Spintriplett,	L gerade;

$T = 1$: Spinsingulett, L gerade,
Spintriplett, L ungerade;

sind in Tab. 7.1 zusammen mit den bei Paritätserhaltung möglichen Kopplungen aufgeführt.

Tabelle 7.1
Spektroskopische Klassifizierung der Zustände des Zweinukleonensystems

T	J				
	0	1	2	3	4
0	—	$^1P_1$ $[^3S_1, {}^3D_1]$	$^3D_2$	$^1F_3$ $[^3D_3, {}^3G_3]$	$^3G_4$
1	$^1S_0$ $^3P_0$	$^3P_1$ $[^3P_2, {}^3F_2]$	$^1D_2$	$^3F_3$	$^1G_4$ $[^3F_4, {}^3H_4]$

Die Klammern bezeichnen die bei Paritätserhaltung möglichen Kopplungen.

Der einzige gebundene Zustand des Zweinukleonensystems ist der Grundzustand des Deuterons mit $T = 0$, $S = 1$, L gerade. Die übrigen Zustände sind nur in Streuprozessen realisiert, wobei sich bei der pp-Streuung ($T = 1$) gegenüber der np-Streuung ($T = 0, 1$) wesentliche Einschränkungen in der Zahl der Zustände ergeben. In der pp-Streuung fallen alle Spintriplettzustände mit gerader Parität ($L = 0, 2, 4, ...$) heraus, da die Bedingung (7.11) nicht erfüllt ist.

7.2.2. Gebundener Zustand

1. Das Deuteron ist ein schwach gebundenes System. Seine Bindungsenergie E_d, die zuerst mit Hilfe der 2,62 MeV γ-Strahlung des ^{208}Tl in der Photospaltung gemessen wurde, beträgt nur

$$E_d = -(2{,}224644 \pm 0{,}000046)\ \text{MeV}. \tag{7.12}$$

Das magnetische Moment μ_d des Deuterons

$$\mu_d = (0{,}85735 \pm 0{,}00003)\ \mu_K \tag{7.13}$$

(ausgedrückt durch das Kernmagneton $\mu_K = e\hbar/2m_p c$) ist nur wenig kleiner als die Summe der magnetischen Momente von Neutron und Proton μ_n, μ_p ($\mu_d = \mu_n + \mu_p - 0{,}0222$). Nun sind aber die Momente μ_n, μ_p mit den Nukleonenspins verknüpft, die sich im Deuteron parallel zueinander ausrichten. Der für das magnetische Moment des Deuterons gefundene Wert weist also darauf hin, daß sich Neutron und Proton im Deuteron vorwiegend in einem S-Zustand befinden. In diesem Fall liefert die relative Bahnbewegung nur einen geringen Beitrag zum magnetischen Moment μ_d.

Mit Hilfe der in 6.4.3.4. erläuterten Molekularstrahlresonanzmethode wurde aber nachgewiesen, daß das Deuteron ein elektrisches Quadrupolmoment besitzt:

$$Q_d = (2{,}860 \pm 0{,}015) \cdot 10^{-27}\ \text{cm}^2. \tag{7.14}$$

Der Grundzustand des Deuterons ist folglich kein reiner S-Zustand, der vollständig kugelsymmetrisch wäre ($Q = 0$). Um das von Null verschiedene Quadrupolmoment des Deuterons zu erklären, wurde eine Tensorkraft $V_T(r)\ S_{12}$ eingeführt, deren Vorzeichen und Stärke von der

Orientierung der Nukleonenspins relativ zum Verbindungsvektor $\boldsymbol{r}$ der beiden Nukleonen abhängt (siehe Abb. 7.2a). Der Tensoroperator S_{12} entspricht der Wechselwirkung zweier magnetischer Dipole. Er wird so angesetzt, daß eine Mittelung über alle Raumrichtungen Null ergibt,

$$S_{12} = 3\frac{(\boldsymbol{\sigma}_1\boldsymbol{r})(\boldsymbol{\sigma}_2\boldsymbol{r})}{r^2} - (\boldsymbol{\sigma}_1\boldsymbol{\sigma}_2). \tag{7.15}$$

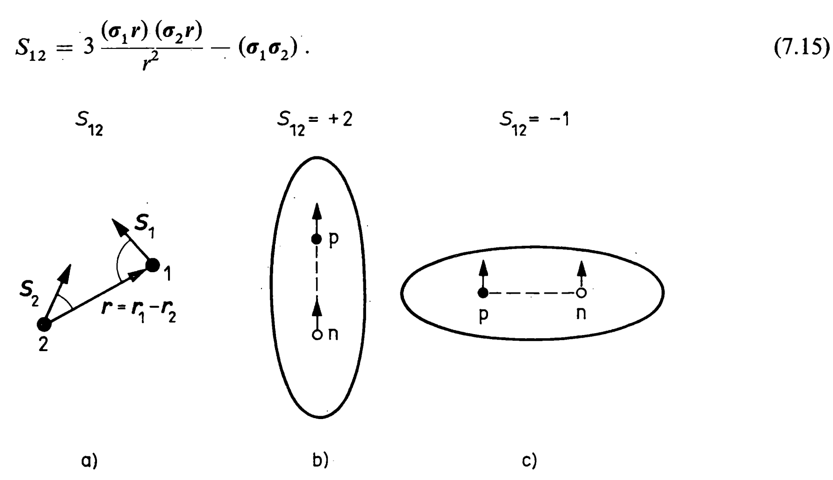


Abb. 7.2
Tensorkraft S_{12}
Werte des Tensoroperators bei speziellen np-Konfigurationen im Deuteron

Wählt man ein anziehendes Potential $V_T(r)$, $V_T(r) < 0$, dann wird der Beitrag der Tensorkraft zur np-Bindung am größten ($S_{12} = +2$), wenn eine in Spinrichtung gestreckte Konfiguration von Neutron und Proton vorliegt. Die Tensorkraft bevorteilt so die gestreckte ($Q > 0$) gegenüber einer abgeplatteten ($Q < 0$) Deformation des Deuterons (siehe Abb. 7.2b, c).

Der Operator (7.15) stellt im Ortsraum einen Tensor zweiter Stufe dar. Er koppelt also den S-Zustand an den D-Zustand. Der gemessene Wert für das Quadrupolmoment spricht dafür, daß im Grundzustand des Deuterons der D-Zustand zu etwa 4% der Zeit realisiert ist.

2. Um erste Aussagen über Reichweite und Stärke der Kernkräfte im Deuteron zu erhalten, vernachlässigen wir die Tensorkraft $V_T(r)\,S_{12}$ und setzen für die anziehende Zentralkraft ein Kastenpotential der Tiefe V_0 und der Reichweite R_0 an. Die Radialwellenfunktion $u_0(r)$ des S-Zustandes, $\varphi_0(r) = u_0(r)/r$, genügt dann nach (7.4) der Differentialgleichung

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2} + \varkappa^2\right) u_0(r) = 0\,, \qquad \varkappa^2 = \frac{2\mu}{\hbar^2}(V_0 - |E_\mathrm{d}|)\,, \qquad r < R_0\,. \tag{7.16}$$

Die Lösung von Gl. (7.16) mit den Randbedingungen für einen gebundenen Zustand, $u(0) = u(\infty) = 0$, liefert Aussagen darüber, wie man die Potentialparameter V_0, R_0 wählen muß, um die gemessene Bindungsenergie des Deuterons zu reproduzieren. Setzt man z. B. $R_0 = 1{,}7$ fm, dann ergibt sich eine Potentialtiefe von $V_0 \approx 35$ MeV. Die erhaltenen Werte belegen die kurze Reichweite und die Stärke der Kernkräfte. Außerhalb des Potentials ($r > R_0$) fällt die Wellenfunktion $u_0(r)$ exponentiell ab (siehe Abb. 7.3),

$$u_0(r) = c\mathrm{e}^{-\gamma r}\,, \qquad \gamma = \sqrt{\frac{2\mu}{\hbar^2}|E_\mathrm{d}|}\,, \qquad r \to \infty\,. \tag{7.17}$$

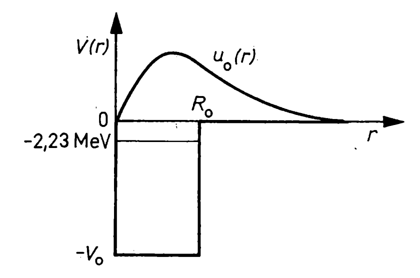


Abb. 7.3
Grundzustandswellenfunktion $u_0(r)$ des Deuterons für ein Kastenpotential der Tiefe V_0 und der Reichweite R_0

Der Parameter γ bestimmt die räumliche Abmessung des Deuterons. Da sein Wert $\gamma \approx 4{,}3$ fm etwa um den Faktor 2 größer als R_0 ist, ergibt sich eine hohe Aufenthaltswahrscheinlichkeit der beiden Nukleonen außerhalb der Reichweite der Kernkräfte. Dieser Umstand entspricht der geringen Bindungsenergie des Deuterons.

7.2.3. Streuzustände

1. Die wesentlichsten Informationen über die starke Wechselwirkung zwischen Nukleonen folgen aus einer Analyse der Nukleon-Nukleon-Streuung in einem breiten Bereich der Einschußenergie E_k. Um eine geeignete Parametrisierung der Meßgrößen durch Streuphasen einzuführen, erweitern wir den in Gl. (B. 115) für die Streuung spinloser Teilchen gegebenen Ansatz für die asymptotische Form der Gesamtwelle

$$\psi \to e^{ikr} + f(\vartheta, \varphi) \frac{e^{ikr}}{r}$$

auf den Fall der NN-Streuung. Wir ergänzen zunächst die einfallende ebene Welle durch die Spinfunktion χ_{SM_S}, $\varphi_e = e^{ikr}\chi_{SM_S}$, die die relative Spineinstellung der Nukleonen und die Orientierung des Gesamtspins auf die z-Achse beschreibt. Beim Streuvorgang können infolge der nichtzentralen Komponenten der NN-Wechselwirkung Prozesse auftreten, in denen die Nukleonenspins umklappen, so daß der Spinzustand des auslaufenden Strahls eine Überlagerung verschiedener Spinfunktionen darstellt. Um diesen Vorgang zu berücksichtigen, muß man die Streuamplitude durch eine Matrix $A_{M'_S M_S}(E_k, \vartheta, \varphi)$ ersetzen, deren Elemente die Amplitude der im Spinzustand $\chi_{SM'_S}$ auslaufenden Kugelwelle darstellen, wenn im Anfangszustand eine ebene Welle im Spinzustand χ_{SM_S} vorlag.

$$\psi \to e^{ikr}\chi_{SM_S} + \frac{e^{ikr}}{r} \sum_{M'_S} A_{M'_S M_S}\chi_{SM'_S} \,. \tag{7.18}$$

Das Absolutquadrat von $A_{M'_S M_S}$ liefert die Wahrscheinlichkeit, daß sich beim Streuvorgang die Orientierung des Gesamtspins ändert, $M_S \to M'_S$, wobei der Betrag von S erhalten bleibt.

In dieser Darstellung ist A eine Matrix aus vier Zeilen und Spalten. Ihre Elemente sind komplexe Funktionen der Streuwinkel ϑ, φ und der Einschußenergie E_k. Sie sind nicht alle unabhängig voneinander, da die Teilchenzahl im Stoßprozeß erhalten bleibt (Unitarität von A). Dadurch reduziert sich die Zahl der unabhängigen Parameter, die zur vollständigen Charakterisierung

von A notwendig sind. Für reine Zentralkräfte wird die Matrix $A_{M'_S M_S}$ außerdem diagonal, da kein Umklappen des Spins ($M_S \to M'_S \neq M_S$) erfolgen kann.

2. Bei den Experimenten zur NN-Streuung muß die experimentelle Anordnung so gewählt werden, daß man die notwendigen Informationen über den Betrag und die Phase der A-Matrixelemente möglichst vollständig gewinnt. Dazu mißt man eine Reihe von Größen, bei deren Berechnung die A-Matrixelemente in verschiedener Kombination (z. B. $|A_{M'_S M_S}|^2$, $A^*_{M''_S M_S} A_{M'_S M_S}$) eingehen.

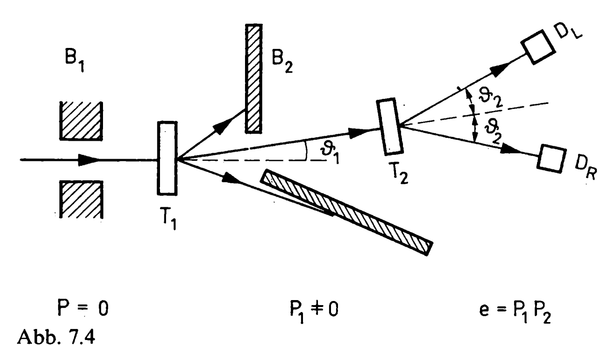


Abb. 7.4
Meßanordnung für ein Doppelstreuexperiment an den Targets T_1, T_2 unter den Winkeln ϑ_1, ϑ_2 mit Nachweis der Links-Rechts-Asymmetrie durch die Detektoren D_L, D_R

Die meisten NN-Streuexperimente sind Einfachstreuexperimente, bei denen der differentielle Wirkungsquerschnitt der elastischen Streuung $\sigma(\vartheta)$ bestimmt wird. Da Nukleonen einen Spin besitzen, können aber auch Spinpolarisationen auftreten. Eine Polarisation liegt vor, wenn im Nukleonenstrahl eine Vorzugsrichtung des Spins besteht (siehe auch 6.4.4.). Der Polarisationszustand eines Strahls wird beschrieben durch einen Polarisationsvektor $\boldsymbol{P}$, dessen Orientierung der Spinvorzugsrichtung entspricht und dessen Betrag den Polarisationsgrad angibt: $P = (N_+ - N_-)/(N_+ + N_-)$. Dabei bezeichnen N_+, N_- die Anzahl der Nukleonen mit Spin in positiver bzw. negativer z-Richtung. Ein Beschleuniger liefert im allgemeinen einen unpolarisierten Teilchenstrahl ($P = 0$). In der NN-Streuung können die gestreuten Nukleonen jedoch senkrecht zur Streuebene polarisiert sein, wenn das Wechselwirkungspotential V_{12} nichtzentrale Komponenten enthält, die den Nukleonenspin an eine ausgezeichnete Raumrichtung (z. B. $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{L}$) koppeln. Diese Polarisationserscheinungen untersucht man in Doppelstreuexperimenten, deren Meßanordnung in Abb. 7.4 skizziert ist. Die erste Streuung am Target T_1 (Polarisator) erzeugt einen partiell polarisierten Nukleonenstrahl, dessen Polarisationszustand P_1 in der zweiten Streuung (Analysator) gemessen wird. Bei der Streuung polarisierter Strahlen geht die Symmetrie des Problems um die Einschußrichtung verloren, so daß der differentielle Wirkungsquerschnitt nicht nur vom Polarwinkel ϑ, sondern auch vom Azimutwinkel φ abhängt. Der in der ersten Streuung erzeugte Polarisationsgrad folgt aus der Rechts-Links-Asymmetrie e der zweiten Streuung, die bei unpolarisiertem Strahl die Polarisation P_2 liefern würde: $e = P_1 P_2$. Wählt man speziell $\vartheta_1 = \vartheta_2 = \vartheta$, dann liefert e direkt das Quadrat des Polarisationsgrades:

$$e = \frac{\sigma(\vartheta, \varphi = 0) - \sigma(\vartheta, \varphi = \pi)}{\sigma(\vartheta, \varphi = 0) + \sigma(\vartheta, \varphi = \pi)} = P^2 . \tag{7.19}$$

Weitere Aussagen über die Eigenschaften der A-Matrixelemente folgen aus Dreifachstreuexperimenten, bei denen in der zweiten Streuung eine teilweise Depolarisation oder eine Drehung der Polarisationsebene erfolgt. In einer dritten Streuung wird die Änderung des Orientierungs-

zustandes nachgewiesen. Die Durchführung von Mehrfachstreuexperimenten stellt ein schwieriges Problem dar, da die zu messenden Streustrahlen geringe Intensität besitzen. Die Meßwerte sind mit einem großen Fehler behaftet. Die Untersuchung von Orientierungserscheinungen in der NN-Streuung ist jedoch von fundamentaler Bedeutung, da sie Aussagen über die spinabhängigen Nichtzentralkräfte in der NN-Wechselwirkung, besonders über den Spinbahnkopplungsterm ermöglichen.

3. Umfangreiche Meßdaten über Ein- und Mehrfachstreuprozesse liegen für die pp- und z. T. für die pn-Streuung bei Einschußenergien bis 350 MeV (im Laborsystem) vor. Wir wollen die Betrachtungen auf diesen Energiebereich beschränken, weil bei Energien über 350 MeV unelastische Prozesse (Mesonenproduktion) nicht mehr vernachlässigt werden können. Demgegenüber sind nur wenig Daten über die nn-Wechselwirkung aus Differenzmessungen der p-Streuung an D_2O- und H_2O-Targets bekannt. Die meisten Informationen über die niederenergetische nn-Wechselwirkung erhält man aus Dreiteilchenreaktionen (z. B. D(n, p)2n, D(π^-, γ)2n), bei denen im Endzustand zwei Neutronen auftreten. Die Energie- und Winkelverteilung dieser Neutronen hängt von ihrer Wechselwirkung im Endzustand der Reaktion ab.

Die Parametrisierung der experimentellen Daten zum Zweinukleonensystem und die Ableitung der zugehörigen phänomenologischen NN-Potentiale stellt eine sehr komplizierte Aufgabe dar, die nicht immer eindeutig gelöst werden kann. Man stützt sich deshalb gewöhnlich auf Aussagen und Ansätze über die NN-Wechselwirkung, die aus allgemeinen Symmetriebetrachtungen folgen.

7.3. Phänomenologische Nukleon-Nukleon-Potentiale

7.3.1. Symmetriebetrachtungen und allgemeiner Ansatz

1. Wir gehen von der Überlegung aus, daß die starke Wechselwirkung zwischen zwei Nukleonen allgemeine Symmetriebedingungen erfüllen muß, die aus der Struktur von Raum und Zeit folgen. Das Potential V_{12} ist aus den Operatoren $\boldsymbol{r}_i$, $\boldsymbol{p}_i$ und den Operatoren $\boldsymbol{s}_i$, $\boldsymbol{t}_i$ ($\boldsymbol{s}_i = \boldsymbol{\sigma}_i/2$, $\boldsymbol{t}_i = \boldsymbol{\tau}_i/2$), die inneren Freiheitsgraden des Nukleons entsprechen, so zu konstruieren, daß ein hermitescher, in den (ununterscheidbaren) Nukleonen 1 und 2 symmetrischer und gegen gewisse raum-zeitliche Transformationen invarianter Operatorausdruck vorliegt. Bei diesem Vorgehen sind folgende Transformationen in Betracht zu ziehen: räumliche Translationen, räumliche Drehungen, räumliche und zeitliche Spiegelungen (Parität, Zeitumkehr) und Galilei-Transformationen.

Eine Invarianz des Potentials gegenüber räumlichen Translationen um einen konstanten Vektor $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{r}_i \to \boldsymbol{r}_i + \boldsymbol{a}$, verlangt eine Ortsabhängigkeit der Form $\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{r}$. Fordert man Invarianz bei beliebigen räumlichen Drehungen, dann kann V_{12} nur vom Abstand r abhängen. Andere Vektoroperatoren dürfen nur in skalaren Bildungen (z. B. $(\boldsymbol{\sigma}_1\boldsymbol{\sigma}_2)$, $(\boldsymbol{\sigma}_i\boldsymbol{r})$) eingehen. Die Invarianz gegen Zeitumkehr und die Erhaltung der Parität erlauben lediglich Produkte $(\boldsymbol{\sigma}_1\boldsymbol{r})(\boldsymbol{\sigma}_2\boldsymbol{r})$, da die Faktoren wegen $\boldsymbol{\sigma} \to -\boldsymbol{\sigma}$ (bei Zeitumkehr) und $\boldsymbol{r} \to -\boldsymbol{r}$ (bei räumlicher Spiegelung) einzeln nicht invariant sind. Eine ladungsunabhängige Wechselwirkung enthält die Isospinoperatoren $\boldsymbol{\tau}_1$, $\boldsymbol{\tau}_2$ nur als Skalarprodukt $\boldsymbol{\tau}_1\boldsymbol{\tau}_2$. Schließlich kann ein bei Galilei-Transformationen invariantes Potential nur vom Relativimpuls $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}_1 - \boldsymbol{p}_2$ abhängen.

Durch derartige Symmetriebetrachtungen läßt sich zeigen, daß der allgemeine Ansatz für ein NN-Potential folgende Form besitzt:

$$\begin{aligned} V_{12} = {} & V_W(r) + V_B(\boldsymbol{\sigma}_1\boldsymbol{\sigma}_2) + V_H(\boldsymbol{\tau}_1\boldsymbol{\tau}_2) + V_M(\boldsymbol{\tau}_1\boldsymbol{\tau}_2)(\boldsymbol{\sigma}_1\boldsymbol{\sigma}_2) \\ & + (V_T(r) + W_T(r)(\boldsymbol{\tau}_1\boldsymbol{\tau}_2))\, S_{12} \\ & + (V_{LS}(r) + W_{LS}(r)(\boldsymbol{\tau}_1\boldsymbol{\tau}_2))(\boldsymbol{LS})\,. \end{aligned} \tag{7.20}$$

2. Das erste Glied $V_W(r)$ in (7.20) ist eine reine Zentralkraft, die als Wigner-Kraft bezeichnet wird. Die in der ersten Zeile von Gl. (7.20) folgenden Terme repräsentieren Zentralkräfte mit Austauschcharakter für Spin (Bartlett-Kraft), Isospin (Heisenberg-Kraft) und Ort (Majorana-Kraft).

Wir betrachten die Rolle der Austauschkräfte am Beispiel der Bartlett-Kraft. Der Operator $(\boldsymbol{\sigma}_1\boldsymbol{\sigma}_2)$ besitzt bei Anwendung auf die Spinfunktion χ_{SM_S} (Gl. (7.5)) nach $2(\boldsymbol{s}_1\boldsymbol{s}_2) = \boldsymbol{S}^2 - (\boldsymbol{s}_1^2 + \boldsymbol{s}_2^2)$, $\boldsymbol{s}_i = \frac{\hbar}{2}\boldsymbol{\sigma}_i$ die Eigenwerte

$$\boldsymbol{\sigma}_1\boldsymbol{\sigma}_2 = \begin{matrix} -3 \\ \\ +1 \end{matrix} \quad \text{für} \quad \begin{matrix} S = 0\,, \\ \\ S = 1\,. \end{matrix} \tag{7.21}$$

Setzt man $V_B(r) > 0$, dann ergibt die Potentialkomponente $V_B(r)\,(\boldsymbol{\sigma}_1\boldsymbol{\sigma}_2)$ ein anziehendes Potential $-3V_B(r)$ in Singulett- und ein abstoßendes Potential $+1\,V_B(r)$ in Triplettzuständen,

$$\begin{aligned} V_{12} &= V_W(r) - 3V_B(r) & & S = 0\,, \\ & & \text{für} & \\ V_{12} &= V_W(r) + V_B(r) & & S = 1\,. \end{aligned} \tag{7.22}$$

Auf diese Weise hängen Vorzeichen und Stärke der Zentralkraft von den Symmetrieeigenschaften der Spinzustände ab, in denen sie wirken. Eine Kraft, die bei Parallelstellung der Spins anziehend ist, wirkt in schwächerem Maße abstoßend, wenn die Spins antiparallel zueinander orientiert sind. In diesem Sinne sagt man, daß die Kernkräfte zustandsabhängig sind. Die Bezeichnung „Austauschkräfte“ wird besonders deutlich, wenn man den Operator $(\boldsymbol{\sigma}_1\boldsymbol{\sigma}_2)$ durch den in Gl. (7.6) verwendeten Operator P_{12}^S ersetzt, der bei Anwendung auf eine Spinfunktion $\chi(s_1, s_2)$ die Spinvariablen austauscht. Nach Gl. (7.21) läßt sich der Austauschoperator P_{12}^S explizit angeben,

$$P_{12}^s = \frac{1}{2}(1 + \boldsymbol{\sigma}_1\boldsymbol{\sigma}_2)\,, \tag{7.23}$$

wie man z. B. für den Singulettzustand leicht nachprüft:

$$P_{12}^s\chi_{00} = \frac{1}{2}(1 + \boldsymbol{\sigma}_1\boldsymbol{\sigma}_2)\,\chi_{00} = \frac{1}{2}(1 - 3)\,\chi_{00} = -1 \cdot \chi_{00}\,. \tag{7.24}$$

Man könnte daher im Potentialansatz (7.19) den Austauschoperator P_{12}^S direkt einführen:

$$V_B(r)\,(\boldsymbol{\sigma}_1\boldsymbol{\sigma}_2) \rightarrow -V_B(r) + 2V_B(r)\,P_{12}^s\,. \tag{7.25}$$

Analoge Betrachtungen gelten für den Orts- und Isospinaustausch.

3. Der Ansatz (7.20) enthält zwei nichtzentrale Kräfte, die ebenfalls Austauschcharakter besitzen: die (statische) Tensorkraft S_{12} und die (geschwindigkeitsabhängige) Zweiteilchenspinbahnkopplung $\boldsymbol{LS}$. Vorzeichen und Stärke der Spinbahnkopplung hängen von der relativen Orientierung von Gesamtspin $\boldsymbol{S}$ und Bahndrehimpuls $\boldsymbol{L}$ der Relativbewegung ab. Sowohl die Tensorkraft als auch die Spinbahnkopplung wirken nicht in Singulettzuständen ($S = 0$). Die Spinbahnkopplung verschwindet außerdem in S-Zuständen ($L = 0$).

4. Die obigen Symmetriebetrachtungen liefern keine Angaben über Form und Parameter der Radialabhängigkeiten $V(r)$ und $W(r)$. Diese Größen können nur aus einer Mesonentheorie deduktiv abgeleitet oder durch einen Vergleich der experimentellen Daten mit Rechnungen, die verschiedene Ansätze verwenden, ermittelt werden. Wir betrachten zunächst, wie durch eine phänomenologische Analyse von Streuexperimenten die Wirkung einzelner Komponenten des Ansatzes (7.20) nachgewiesen und ihre Parameter angegeben werden können. Wir beachten

dabei, daß mit wachsender Einschußenergie die Zahl der Partialwellen, die in den Wechselwirkungsbereich der Kernkräfte eindringen, anwächst. Quantitative Abschätzungen zeigen, daß der minimale Stoßparameter für Teilchen mit dem Drehimpuls $L = 1$ bei $E_k = 30$ MeV etwa 2,5 fm beträgt. Bei $E_k = 350$ MeV liegt der minimale Stoßparameter der P-Welle bei 0,7 fm, der der H-Welle ($L = 5$) bei 2,7 fm. Diese Angaben zeigen, daß die niederenergetische NN-Streuung bis $E_k \approx 20$ MeV vollständig durch die S-Welle bestimmt wird; Teilchen mit höherem Drehimpuls bleiben infolge der Zentrifugalbarriere außerhalb des Bereichs der Kernkräfte. Andererseits genügt es, bei Energien bis zur Schwelle für Mesonenproduktion die Analyse auf Partialwellen $L \leqq 5$ zu beschränken.

7.3.2. Parametrisierung der niederenergetischen Nukleon-Nukleon-Streuung

1. Besonders einfache Verhältnisse liegen in der niederenergetischen NN-Wechselwirkung vor, da die Streuung isotrop verläuft und der totale Streuquerschnitt nach Anhang B 5. unabhängig von der Potentialform durch nur zwei Parameter, Streulänge $a(0)$ und effektive Reichweite r_0, parametrisiert werden kann. Wir betrachten zunächst die np-Streuung im Energiebereich 0 bis 10 MeV, die den ersten Nachweis für die Spinabhängigkeit der NN-Wechselwirkung lieferte.

Bei unpolarisiertem Teilchenstrahl und unpolarisiertem Target werden in der np-Streuung Zustände mit paralleler ($2S + 1 = 3$) und antiparalleler ($2S + 1 = 1$) Spineinstellung mit dem statischen Gewicht $\frac{1}{4}$ bzw. $\frac{3}{4}$ realisiert. Folglich ist der Gesamtquerschnitt der np-Streuung oberhalb thermischer Energien eine inkohärente Überlagerung von Triplett- und Singulettquerschnitt σ_T, σ_S nach

$$\sigma = \frac{1}{4}\sigma_S + \frac{3}{4}\sigma_T\,. \tag{7.26}$$

Aus Abb. 7.5 ist ersichtlich, daß der totale Wirkungsquerschnitt der np-Streuung im Grenzfall $E_k \to 0$ etwa 20 barn beträgt. Mit wachsender Einschußenergie fällt σ bis auf etwa 1 barn bei $E_k \approx 10$ MeV ab. Bei $E_k \approx 20$ MeV wird ein noch geringerer Wirkungsquerschnitt von etwa 490 mb gemessen, wovon etwa 9 mb Partialwellen mit $L \geqq 1$ zuzuschreiben sind.

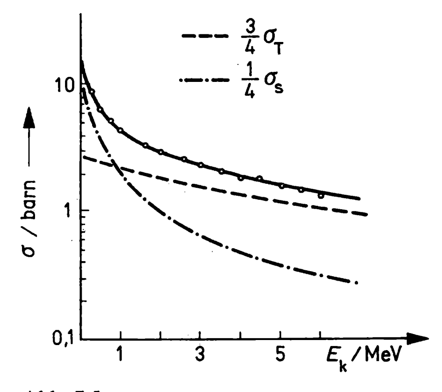


Abb. 7.5
Totaler Wirkungsquerschnitt σ der np-Streuung in Abhängigkeit von der Einschußenergie E_k

Nach (B. 160) und (7.26) läßt sich die Energieabhängigkeit von σ durch effektive Reichweite und Streulänge im Triplettzustand ($a_t(0)$, r_{0t}) und im Singulettzustand ($a_s(0)$, r_{0s}) ausdrücken:

$$\sigma = 4\pi \left[\frac{\frac{3}{4}}{k^2 + \left(\frac{1}{a_t(0)} - \frac{1}{2} k^2 r_{0t}\right)^2} + \frac{\frac{1}{4}}{k^2 + \left(\frac{1}{a_s(0)} - \frac{1}{2} k^2 r_{0s}\right)^2} \right]. \tag{7.27}$$

Eine Analyse der niederenergetischen np-Daten führt auf folgende Parameterwerte:

$$\begin{aligned} \text{np:}\quad a_s(0) &= (-23{,}748 \pm 0{,}010)\ \text{fm}\,, \quad & a_t(0) &= (5{,}424 \pm 0{,}004)\ \text{fm}\,, \\ r_{0s} &= (2{,}75 \pm 0{,}05)\ \text{fm}\,, & r_{0t} &= (1{,}759 \pm 0{,}005)\ \text{fm}\,. \end{aligned} \tag{7.28}$$

Das positive Vorzeichen der Triplettstreulänge der np-Streuung weist auf den Grundzustand des Deuterons bei —2,22 MeV hin. Die wesentlich größere negative Streulänge im Singulettzustand bedeutet, daß ein gebundener S=0-Zustand „gerade" nicht mehr möglich ist. Er wird in der np-Streuung als Resonanzzustand bei 90 keV experimentell nachgewiesen. Für den Grenzfall $E_k \to 0$ erklärt dieser Umstand auch den großen Wirkungsquerschnitt im Singulettzustand: mit den Parameterwerten (7.28) folgt für $k \approx 0$ aus Gl. (7.27) $\sigma_T = 4\pi a_t^2(0) \approx 3{,}7$ barn, $\sigma_S = 4\pi a_s^2(0) \approx 70{,}9$ barn. Setzt man für V_{12} ein Yukawa-Potential an, $V(r) = -V_0\, e^{-r/b}/(r/b)$, dann lassen sich die Werte (7.28) durch die Parameterwahl $V_{0t} = 41{,}5$ MeV, $b_t = 1{,}58$ fm, $V_{0s} = 59{,}7$ MeV, $b_s = 1{,}05$ fm reproduzieren. Die gleichen effektiven Reichweiten und Streulängen erhält man für ein Kastenpotential mit den Tiefen- und Reichweiteparametern $V_{0t} = -38{,}5$ MeV, $R_{0t} = 1{,}95$ fm, $V_{0s} = 15{,}1$ MeV, $R_{0s} = 2{,}5$ fm.

2. Die experimentellen Werte für die Streulänge und die effektive Reichweite in der pp- und nn-Streuung sind:

$$\begin{aligned} \text{pp:}\quad a_s(0) &= (-7{,}8098 \pm 0{,}0023)\ \text{fm}\,, \quad & r_{0s} &= (2{,}767 \pm 0{,}010)\ \text{fm}\,, \\ \text{nn:}\quad a_s(0) &= (-16{,}73 \pm 0{,}47)\ \text{fm}\,, & r_{0s} &= (2{,}85 \pm 0{,}60)\ \text{fm}\,. \end{aligned} \tag{7.29}$$

Die unterschiedlichen Streulängen der pp- und nn-Streuung können als Einfluß der Coulomb-Kraft ausreichend erklärt werden. Eine entsprechende Korrektur der Parameter für die pp-Streuung führt auf folgende abgeleitete Werte für die nn-Streuung: $a_s(0) \approx 17{,}9$ fm, $r_{0s} \approx 2{,}82$ fm. Aus diesen Ergebnissen läßt sich schließen, daß die Kernkräfte weitgehend ladungssymmetrisch sind: $V(\text{p—p}) = V(\text{n—n})$ (vgl. S. 244).

Der Unterschied in den Streulängen $a_s(0)$ für die np- und die nn-Wechselwirkung kann durch ein kompliziertes Zusammenspiel elektromagnetischer und mesonischer Effekte (z. B. Wechselwirkung der magnetischen Momente, elektromagnetische Massendifferenz von n und p bzw. $\pi^\pm$ und π^0) bedingt sein. Führt man entsprechende Korrekturen ein, dann scheint es möglich, die niederenergetische Nukleon-Nukleon-Streuung bis auf Abweichungen von der Größenordnung einiger Prozent auf der Grundlage der Hypothese von der Ladungsunabhängigkeit zu erklären: $V(\text{n—n}) = V(\text{p—p}) = V(\text{n—p})$ in den Kanälen $S = 0$, L gerade oder $S = 1$, L ungerade.

Die Analyse der niederenergetischen NN-Streuung liefert also die quantitative Bestätigung der in Abschnitt 6.6.1. eingeführten Ladungssymmetrie der starken Wechselwirkung.

7.3.3. Phasenanalyse der hochenergetischen Nukleon-Nukleon-Streuung

1. Die niederenergetische NN-Streuung liefert nur einen Teil der Kernkräfte. Um weitere Informationen zu erhalten, muß man Streuexperimente bei höheren Energien heranziehen. Die experimentellen Ergebnisse der hochenergetischen NN-Streuung können wie folgt charakterisiert werden:

np-Streuung: Der totale Wirkungsquerschnitt fällt mit anwachsender Energie bis $E_k \approx 200$ MeV etwa $\sim 1/E_k$ ab. Er erreicht im Energiebereich 200 bis 350 MeV einen Wert von ≈ 30 mb.

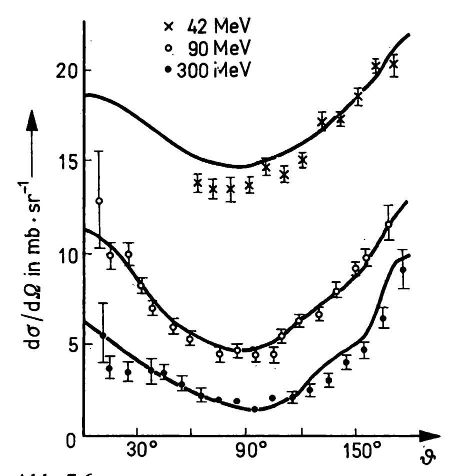


Abb. 7.6
Differentieller Wirkungsquerschnitt der np-Streuung bei verschiedenen Einschußenergien E_k. Die Kurven wurden mit dem Hamada-Johnston-Potential (7.30) berechnet

Der differentielle Wirkungsquerschnitt ist in einem weiten Energiebereich annähernd symmetrisch um 90° bei etwa gleich hohem Maximum in Vorwärts- und Rückwärtsrichtung (siehe Abb. 7.6).

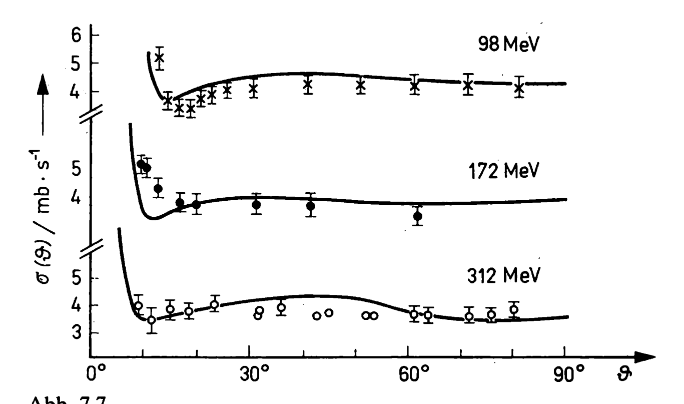


Abb. 7.7
Differentieller Wirkungsquerschnitt der pp-Streuung bei verschiedenen Einschußenergien E_k. Die Kurven wurden mit dem Hamada-Johnston-Potential berechnet

pp-Streuung: Der totale Wirkungsquerschnitt fällt von etwa 70 mb bei 40 MeV bis auf etwa 20 mb bei 140 MeV ab. Er bleibt dann konstant bis ≈350 MeV. Der differentielle Wirkungsquerschnitt weist bei niedrigen Energien und kleinen Streuwinkeln Interferenzeffekte zwischen Coulomb- und Kernstreuung auf. Im Energiebereich zwischen 100 MeV und 350 MeV mißt man einen nahezu isotropen Verlauf bei 3,6 mb/s (siehe Abb. 7.7). — Die gemessene Polarisation der gestreuten Protonen ist positiv. Sie verschwindet aus Symmetriegründen bei Streuwinkeln von $\vartheta = 0°, 90°$. Das Maximum des Polarisationsgrades liegt bei Streuwinkeln um 45°. Der Polarisationsgrad wächst mit der Einschußenergie bis zu ≈40% bei $E_k \approx 300$ MeV (siehe Abb. 7.8).

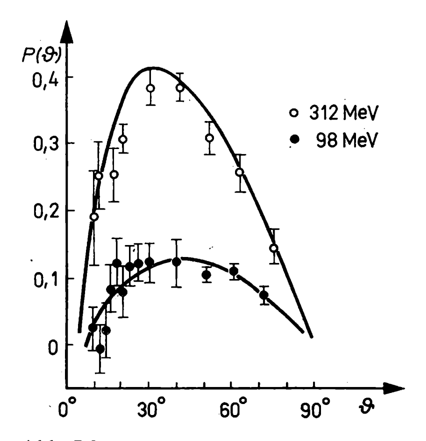


Abb. 7.8
Polarisation P in der pp-Streuung bei verschiedenen Einschußenergien E_k. Die Kurven wurden mit dem Hamada-Johnston-Potential (7.30) berechnet

nn-Streuung: Die Wirkungsquerschnitte ergeben sich aus Differenzmessungen $\sigma_{nn} = \sigma_{nd} - \sigma_{np}$. Der totale und der differentielle Wirkungsquerschnitt entsprechen den auf Coulomb-Effekte korrigierten Werten der pp-Streuung.

2. Einige Eigenschaften der Kernkräfte können aus diesen Daten unmittelbar abgelesen werden. Die annähernde Übereinstimmung von nn- und pp-Streuung spricht dafür, daß Ladungssymmetrie und Ladungsunabhängigkeit der Kernkräfte auch bei hohen Energien erfüllt sind. Aus der Symmetrie der Winkelverteilung der np-Streuung um 90° läßt sich schließen, daß dem direkten Prozeß ein Ortsaustauschprozeß überlagert ist, der den Anstieg des differentiellen Wirkungsquerschnitts unter Rückwärtswinkeln liefert.

Eine genauere Analyse der hochenergetischen NN-Streuung geht von einer Parametrisierung des differentiellen Wirkungsquerschnitts durch Streuphasen $\delta_{LSJ}(E_k)$ aus, die im Anhang B.4 eingeführt werden. Man variiert die Streuphase, bis eine optimale Anpassung an die Meßwerte (differentieller Wirkungsquerschnitt, Polarisation usw.) erreicht ist. Eine solche Streuphasenanalyse wird vor allem infolge der Kopplung von Partialwellen mit verschiedenem L-Wert durch nichtzentrale Kräfte kompliziert, so daß die extrahierten Streuphasensätze i. allg. nicht eindeutig sind. Die Abb. 7.9 zeigt einige Ergebnisse von Streuphasenanalysen, die wir nun diskutieren wollen.

Die Verhältnisse werden besonders einfach für Spinsingulettzustände, da nur Zentralkräfte wirken. Die Streuphasen sind für Ortszustände mit gerader Parität (S, D) positiv, für Ortszustände mit ungerader Parität (P) negativ. Die Nukleonen spüren also in Zuständen mit geradem L ein anziehendes, in Zuständen mit ungeradem L ein abstoßendes Zentralpotential. Das Vorzeichen der Zentralkraft hängt damit von der Parität der Relativbewegung ab; die Kraft besitzt Ortsaustauschcharakter. — Auffällig ist auch die Änderung der $^1S_0$-Phase bei $E_k \approx 250$ MeV. Aus diesem Verlauf der Streuphase kann man schließen, daß das bei kleinen Energien anziehende Potential mit anwachsender Energie durch eine abstoßende Kraft kompensiert wird, die für $E_k \approx 250$ MeV im Wechselwirkungsprozeß sogar dominiert. Diese starke Abstoßung wird im Ansatz für die Radialabhängigkeit $V(r)$ meistens durch ein unendlich hohes, positives Potential („hard core") bei $r_c \lesssim 0{,}6$ fm erfaßt. Eine solche Singularität des Potentials hat zur Folge, daß sich die Nukleonen nicht bis auf Abstände annähern können, die kleiner als der Hard-core-Radius r_c sind. Auf diese Weise trägt das Hard-core neben dem Austausch-

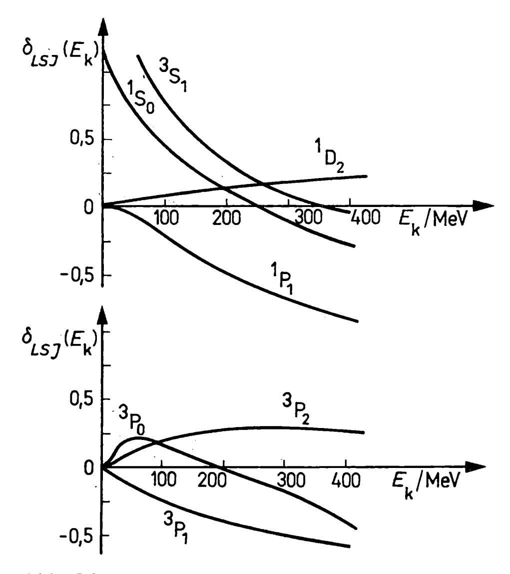


Abb. 7.9
Verlauf der Streuphasen δ_{LSJ} für verschiedene Partialwellen $^{2S+1}L_J$ in Abhängigkeit von der Einschußenergie E_k

charakter der Zentralkräfte und der langreichweitigen Tensorkraft in ^{3}S-Zuständen entscheidend zu den in Abschnitt 6.3.2. erläuterten Sättigungseigenschaften der Kerne bei.

Die große Streuphase in $^3S_1$-Zuständen entspricht einer starken Anziehung in Triplettzuständen, die eine Bindung des Deuterons ermöglicht.

Die Phase der P-Welle in Spintriplettzuständen hängt vom Gesamtspin $J = 0, 1, 2$ ab. Die Aufspaltung der $^3P_0$, $^3P_1$, $^3P_2$-Phasen kommt durch nichtzentrale Kräfte zustande. Aus dem Charakter der Aufspaltung folgt, daß weder eine reine Tensorkraft noch eine reine Spinbahnkopplung den Verlauf der Streuphasen mit $S = 1$, $L = 0$ quantitativ erklären kann. Aus den Polarisationsdaten folgt jedoch, daß die Tensorkraft bereits bei $E_k \approx 10$ MeV Bedeutung erlangt. Dieser Umstand weist darauf hin, daß die Spinbahnkopplung eine wesentlich kürzere Reichweite besitzt als die Tensorkraft.

7.3.4. Realistische Nukleon-Nukleon-Potentiale

Wenn der Verlauf der Streuphasen δ durch eine Streuphasenanalyse bekannt ist, dann kann man versuchen, die zugehörigen Potentiale V_{12} anzugeben. Auf diese Weise gewonnene Potentiale bezeichnet man als realistische Nukleon-Nukleon-Potentiale, da sie entsprechend ihrer Konstruktion die bekannten experimentellen Daten über das Zweinukleonensystem gut reproduzieren. Realistische NN-Potentiale enthalten im allgemeinen etwa 40 bis 50 Parameter, die die Reichweite und die Stärke der verschiedenen Komponenten des Ansatzes (7.20) bei verschiedenen Energien festlegen.

Als Beispiel für ein realistisches NN-Potential wird häufig das im Jahre 1962 publizierte Hamada-Johnston-Potential angegeben, das komplizierte Ansätze für die Radialfunktionen $V(r)$, $W(r)$ und insgesamt 28 Parameter (siehe Tab. 7.2) verwendet. Als Besonderheit tritt im

Tabelle 7.2
Parameter des Hamada-Johnston-Potentials (7.30)

Parameter	Singulett gerade	Triplett gerade	Singulett ungerade	Triplett ungerade
a_c	8,7	6,0	−8,0	9,07
b_c	10,6	−1,0	12,0	3,48
a_T		−0,5		−1,29
b_T		0,2		0,55
G_{LS}		0,0743		0,1961
b_{LS}		−0,1		−7,12
G_{LL}	−0,00089	0,00267	−0,00267	−0,000891
a_{LL}	0,2	1,8	2,0	−7,26
b_{LL}	−0,2	−0,4	6,0	6,92

Hamada-Johnston-Potential außer der Spinbahnwechselwirkung und der Tensorkraft noch ein in $\boldsymbol{LS}$ quadratischer Operator auf. Alle Radialfunktionen weisen ein Hard-core auf.

$$\left.\begin{aligned}
x \leqq 0{,}343:\ & V(r) = +\infty\,, \\
x > 0{,}343:\ & V(r) = V_c(r) + V_T(r)\,S_{12} + V_{LS}(r)\,(\boldsymbol{LS}) + V_{LL}(r)\,L_{12}\,, \\
& L_{12} = [\delta_{LJ} + (\boldsymbol{\sigma}_1\boldsymbol{\sigma}_2)]\,\boldsymbol{L}^2 - (\boldsymbol{LS})^2\,, \\
& V_c(r) = 0{,}08\cdot\frac{m_\pi c^2}{3}\,(\boldsymbol{\tau}_1\boldsymbol{\tau}_2)\,(\boldsymbol{\sigma}_1\boldsymbol{\sigma}_2)\,Y(x)\,[1 + a_c Y(x) + b_c Y^2(x)]\,, \\
& V_T(r) = 0{,}08\,\frac{m_\pi c^2}{3}\,(\boldsymbol{\tau}_1\boldsymbol{\tau}_2)\,Z(x)\,[1 + a_T Y(x) + b_T Y^2(x)]\,, \\
& V_{LS}(r) = m_\pi c^2 G_{LS} Y^2(x)\,[1 + b_{LS} Y(x)]\,, \\
& V_{LL}(r) = m_\pi c^2 G_{LL} x^{-2} Z(x)\,[1 + a_{LL} Y(x) + b_{LL} Y^2(x)]\,, \\
& x = \frac{m_\pi c}{\hbar}\,r\,, \quad Y(x) = \frac{e^{-x}}{x}\,, \quad Z(x) = \left(1 + \frac{3}{x} + \frac{3}{x^2}\right) Y(x)\,.
\end{aligned}\right\} \quad (7.30)$$

Ein ähnliches Potential ist das Reid-Potential, das für $r \gtrsim 1$ fm mit dem Hamada-Johnston-Potential annähernd übereinstimmt. Der wesentliche Unterschied zwischen beiden Potentialen besteht darin, daß im Reid-Potential bei kleinen Abständen anstelle des Hard-core ein abstoßendes, aber endliches Yukawa-Potential eingesetzt wird (soft core). Für das Reid-Potential hat die Wellenfunktion eines Nukleonenpaares also im Core-Bereich einen von null verschiedenen Wert.

7.4. Mesonentheorie der Kernkräfte

7.4.1. Virtueller Austausch von Mesonen

1. Im Jahre 1935 schlug H. YUKAWA auf der Grundlage der Quantenfeldtheorie vor, die starke Wechselwirkung zwischen Nukleonen als virtuellen Austausch von Teilchen mit endlicher Ruhemasse zu interpretieren. Später wurden diese in Analogie zur elektromagnetischen Wechselwirkung zwischen geladenen Teilchen (Austausch von Photonen) hypothetisch einge-

führten Feldquanten mit den π-Mesonen identifiziert. Einen solchen Austauschmechanismus können wir uns in folgender Weise vorstellen: Ein ruhendes Nukleon emittiert ein virtuelles Meson der Masse m und ändert dabei seinen Impulszustand. Die Mindestenergie, die notwendig ist, um diesen Zwischenzustand zu erzeugen, beträgt $\Delta E = mc^2$. Nach der Unschärferelation für Energie und Zeit läßt sich eine derartige Verletzung des Energiesatzes für ein Zeitintervall $\Delta t \approx \hbar/\Delta E$ aufrechterhalten. In der Zeit Δt legt das Meson maximal eine Entfernung von

$$R = c\,\Delta t \approx \hbar/mc \tag{7.31}$$

zurück. Trifft das Meson dabei auf ein anderes Nukleon, dann kann es von diesem absorbiert werden. Dabei ändert sich auch der Impuls des zweiten Nukleons, so daß wir von einer Kraftwirkung zwischen den beiden Nukleonen sprechen können. Nach Gl. (7.31) wird die Reichweite R der Kraft durch die Masse des ausgetauschten Mesons bestimmt. Diese Abschätzung liefert für das π-Meson ($m_\pi c^2 \approx 140$ MeV) den Wert $R \approx 1{,}4$ fm. Der π-Mesonenaustausch dominiert also in peripheren Stößen zwischen zwei Nukleonen, während die Emission oder Absorption schwerer Mesonen oder von mehreren π-Mesonen ($m = nm_\pi$, $n > 1$) die starke NN-Wechselwirkung bei kleineren Abständen zwischen den Nukleonen charakterisiert.

2. Der Prozeß des Pionenaustausches zwischen zwei Nukleonen wird durch die in Abb. 7.10 angegebenen Feynman-Graphen dargestellt. Im Anfangszustand liegen zwei Nukleonen mit den Impulsen $\boldsymbol{p}_1$, $\boldsymbol{p}_2$ vor. Bei dem Wechselwirkungsprozeß, der dem Graphen a entspricht, emittiert ein Nukleon zum Zeitpunkt t_1 ein π-Meson mit dem Impuls $\boldsymbol{k}$. Nach der Emission des Pions ist der Impuls des Nukleons folglich $\boldsymbol{p}_1 - \boldsymbol{k}$. Zu einem späteren Zeitpunkt t_2 wird das Meson vom zweiten Nukleon absorbiert, das dabei in den Impulszustand $\boldsymbol{p}_2 + \boldsymbol{k}$ übergeht. Der Graph b beschreibt den Fall, daß Nukleon 1 und 2 ihre Rolle bei der Emission und Absorption des Pions vertauschen.

3. Beim Austausch eines Pions zwischen zwei Nukleonen kann auch eine zwischenzeitliche Streuung an einem dritten Nukleon erfolgen. Ein solcher Prozeß führt auf Dreikörperkräfte. Wechselwirkungen dieses Typs sollten sich in den Eigenschaften des Dreinukleonen-

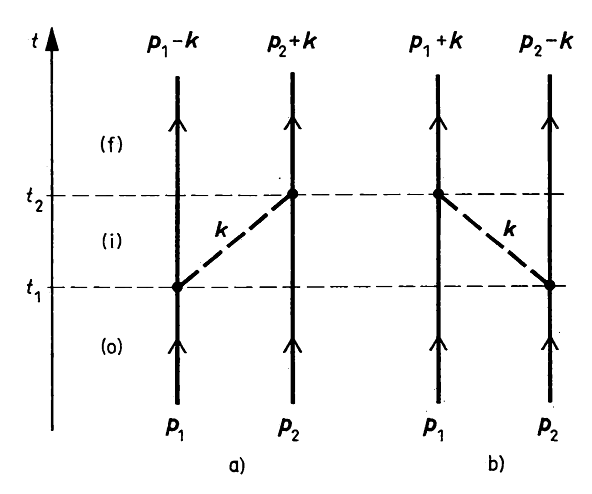


Abb. 7.10
Feynmann-Diagramme für den Ein-Pion-Austausch zwischen zwei Nukleonen

systems (^{3}t, He) manifestieren. Bisherige Analysen des entsprechenden experimentellen Materials lieferten aber keinen eindeutigen Nachweis, daß in Systemen aus mehreren Nukleonen die Einführung von Dreikörperkräften unumgänglich wird.

7.4.2. Ein-Pion-Austauschpotential

1. Wir betrachten zunächst das Wechselwirkungspotential, das sich in nichtrelativistischer Näherung ergibt, wenn zwei Protonen (Masse M) ein skalares, neutrales Meson der Masse m austauschen. Um dieses Potential zu berechnen, führt man in die Lagrange-Dichte L für das System einen Term δL ein, der das Nukleonenfeld ψ und das Mesonenfeld φ miteinander koppelt. Das Kopplungsglied δL hat die Form (natürliche Einheiten, $\hbar = c = 1$)

$$\delta L = -\delta H = g\psi^+\varphi\psi\,. \tag{7.32}$$

Die Felder wechselwirken miteinander, indem ein Nukleon (ψ) sowie ein Meson (φ) vernichtet und ein Nukleon in einem anderen Zustand (ψ^+) erzeugt werden. Den Faktor g, der die Stärke der Kopplung festlegt, bezeichnet man als Kopplungskonstante.

Der Austauschvorgang, den wir nach Abb. 7.10 beschreiben wollen, ist ein Zweistufenprozeß, der in der Emission des Mesons durch das Proton 1 und der nachfolgenden Absorption durch das Proton 2 besteht. In niedrigster Ordnung läßt sich der Einfluß der Nukleon-Meson-Kopplung (7.32) auf die Energie des Systems in Störungstheorie zweiter Ordnung abschätzen. Für die Wechselwirkungsenergie gilt

$$V = \frac{\langle f\,|\delta H|\,m\rangle\,\langle m\,|\delta H|\,i\rangle}{E_i - E_m}\,. \tag{7.33}$$

Der Anfangszustand $|i\rangle$ besteht aus zwei Protonen mit den Impulsen $\boldsymbol{p}_1$, $\boldsymbol{p}_2$, woraus die Energie $E_i = \boldsymbol{p}_1^2/2M + \boldsymbol{p}_2^2/2M$ folgt. Im Zwischenzustand $|m\rangle$, der zum Zeitpunkt t_1 durch die Nukleon-Meson-Kopplung erzeugt worden ist, liegen zwei Protonen mit den Impulsen $\boldsymbol{p}_1 - \boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{p}_2$ und ein Meson mit dem Impuls $\boldsymbol{k}$ sowie der Energie $\omega_k = (m^2 + k^2)^{1/2}$ vor, $E_m = \omega_k + (\boldsymbol{p}_1 - \boldsymbol{k})^2/2M + \boldsymbol{p}_2^2/2M$. Nach der Absorption des Mesons durch das zweite Proton wird zum Zeitpunkt t_2 ($t_2 > t_1$) der Endzustand mit den Protonenimpulsen $\boldsymbol{p}_1 - \boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{p}_2 + \boldsymbol{k}$ erreicht. Die Auswertung des Matrixelements in Gl. (7.38) liefert die Wechselwirkungsenergie in Impulsdarstellung

$$V(k) = g^2\,\frac{2\pi}{\omega_k}\left(\frac{\boldsymbol{p}_1^2}{2M} - \omega_k - (\boldsymbol{p}_1 - \boldsymbol{k})^2/2M\right)^{-1}. \tag{7.34}$$

In der Näherung $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2 \ll k, m < M$ reduziert sich der Ausdruck auf

$$V(k) = -g^2\,\frac{4\pi}{\omega_k^2} = -g^2\,\frac{4\pi}{m^2 + k^2}\,, \tag{7.35}$$

wobei ein zusätzlicher Faktor 2 eingeführt wurde, um den Graphen (b) in Abb. 7.10 zu berücksichtigen. Nach einer Fouriertransformation erhält man in Ortsdarstellung ein anziehendes Yukawa-Potential,

$$V(r) = \frac{-g^2}{(2\pi)^3}\int \mathrm{d}\boldsymbol{k}\,\frac{4\pi}{m^2 + k^2}\,\mathrm{e}^{i\boldsymbol{k}\boldsymbol{r}} = -g^2\,\frac{\mathrm{e}^{-mr}}{r}\,, \tag{7.36}$$

oder in gewöhnlichen Einheiten

$$V(r) = -V_0\,\mathrm{e}^{-\mu r}/(\mu r)\,, \qquad \mu = \frac{mc}{\hbar}\,, \qquad V_0 = g^2mc^2\,. \tag{7.37}$$

Die Reichweite dieses NN-Potentials hängt von der Masse des ausgetauschten Mesons ab, während die Kopplungskonstante die Potentialstärke bestimmt.

2. Eine genauere Behandlung des Ein-Pion-Austausches muß berücksichtigen, daß das Pion in drei Ladungszuständen existiert. Aus der (reellen) skalaren Feldfunktion φ wird dann ein (komplexer) dreikomponentiger Vektor $\boldsymbol{\Phi}$ im Isospinraum des Pions. Außerdem ist zu beachten, daß das Pion kein skalares, sondern ein pseudoskalares Teilchen ist. Um einen skalaren Kopplungsterm δL zu erhalten, kombiniert man den Impulsoperator für das Pion mit dem Spinoperator für das Nukleon, $\delta L \sim \psi^+ \left(\boldsymbol{\sigma} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}\right) (\boldsymbol{\tau\Phi})\, \psi$. Erweitert man die Theorie in dieser Weise, dann ergibt sich ein Potential, das aus einer Zentralkraft mit Ortsaustauschcharakter und einer Tensorkraft besteht. Dieses NN-Potential wird als Ein-Pion-Austauschpotential (OPEP) bezeichnet:

$$V_{\text{OPEP}} = \frac{1}{3}\, m_\pi c^2 \left(\frac{f^2}{\hbar c}\right) (\boldsymbol{\tau}_1 \boldsymbol{\tau}_2) \left[(\boldsymbol{\sigma}_1 \boldsymbol{\sigma}_2) + S_{12} g(r)\right] \frac{e^{-\mu r}}{\mu r},$$

$$g(r) = 1 + 3(\mu r)^{-1} + 3(\mu r)^{-2}, \qquad \mu = m_\pi c/\hbar, \qquad \frac{f^2}{\hbar c} = 0{,}081\,. \tag{7.38}$$

Ein Vergleich des mesonentheoretischen Ein-Pion-Austauschpotentials mit dem phänomenologischen Hamada-Johnston-Potential (Abb. 7.11) zeigt eine befriedigende Übereinstimmung für den langreichweitigen Anteil ($r \gtrsim 2$ fm) der Wechselwirkung. Das Potential V_{OPEP} ist deshalb geeignet, Mehrdeutigkeiten in der phänomenologischen Phasenanalyse einzuschränken.

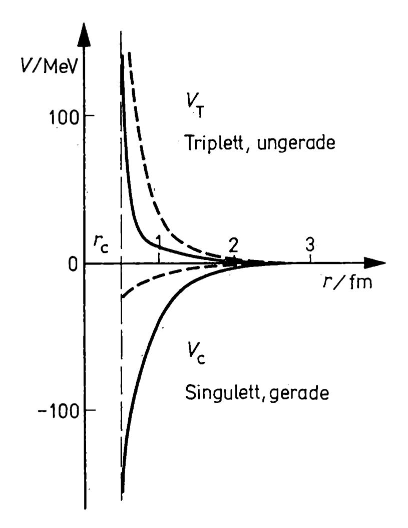


Abb. 7.11
Vergleich von Hamada-Johnston-Potential (———) und Ein-Pion-Austauschpotential (– – –)

Die deutliche Abweichung des Ein-Pion-Austauschpotentials vom Hamada-Johnston-Potential für kleine Abstände der beiden Nukleonen weist darauf hin, daß eine vollständige Beschreibung der starken NN-Wechselwirkung nur möglich ist, wenn man auch den Austausch von mehreren Pionen betrachtet.

7.4.3. Boson-Austauschpotentiale

1. Zwei Nukleonen, die sich in geringem Abstand voneinander befinden, können miteinander wechselwirken, indem sie zwei (oder mehr) Pionen austauschen. Bei einem solchen Prozeß besteht die Möglichkeit, daß es zu einer starken Wechselwirkung zwischen den Pionen selbst kommt. Dabei können korrelierte Zustände der Mehr-Pionen-Systeme gebildet werden, die in Elementarteilchenstößen als Resonanzen mit bestimmten Energien, Drehimpulsen und Breiten (Lebensdauern) in Erscheinung treten. Von den Prozessen, die beim Mehr-Pionenaustausch ablaufen, betrachten wir nur solche, die einen charakteristischen Beitrag zum NN-Potential liefern.

2π-Kanal: Die erlaubten Zustände des 2π-Systems können nach dem Gesamtisospin T, den relativen Drehimpuls J und die Parität P klassifiziert werden: $T = 0$: $J^P = 0^+, 2^+, \ldots$; $T = 1$: $J^P = 1^-, 2^-, \ldots$. Im S-Zustand liegt eine starke Wechselwirkung vor, die jedoch keine Resonanz aufweist, so daß der Austausch der beiden Pionen unkorreliert, ohne Bildung eines langlebigen Gesamtzustandes erfolgt. Man erwartet, daß der Hauptbeitrag zum NN-Potential von zwei Prozessen herrührt — einem nahezu gleichzeitigen Austausch zweier Pionen (Abb. 7.12a, b) und der virtuellen Anregung des Isobars Δ(1232), $T = 3/2$, $J^P = 3/2^+$ (Abb. 7.12c). Als erster angeregter Zustand des Protons tritt die Δ-Resonanz in der π^+-p-Streuung bei einer Energie von $E_{\pi+} = 195$ MeV auf, was einer Gesamtenergie des (πN)-Systems von 1236 MeV entspricht. Die Breite der Resonanz beträgt ≈115 MeV. Alle Graphen der Abb. 7.12 führen auf ein spin- und isospinunabhängiges Potential, so daß der unkorrelierte 2π-Austausch näherungsweise auch durch den Austausch eines fiktiven skalaren Mesons, des σ-Mesons, mit einer Masse von 400—500 MeV simuliert werden kann.

Bei der Reaktion $\pi^- + p \to \pi^+ + \pi^- + n$ tritt eine starke Resonanz im $(\pi^+\pi^-)$-System mit einer Energie von ≈770 MeV und einer Breite von 154 MeV auf, die man als isovektorielles ϱ-Meson mit den Quantenzahlen $T = 1$, $J^P = 1^-$ berücksichtigt. Die Massen der neutralen und geladenen ϱ-Mesonen unterscheiden sich nur um ≈0,3 MeV.

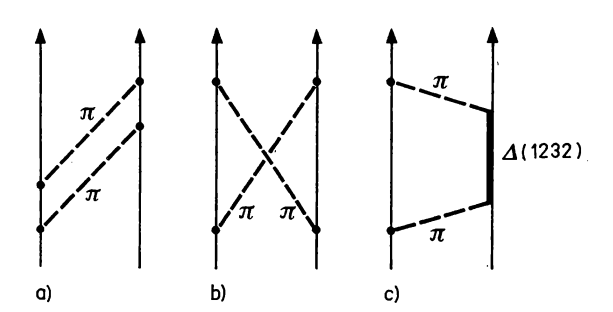


Abb. 7.12
Feynmann-Diagramme für den Zwei-Pionenaustausch. Virtuelle Anregung des Δ(1232)-Isobars

3π-Kanal: Im 3π-System sind nahezu alle J^P-Zustände erlaubt. Die Reaktion $p + \bar{p} \to \pi^+ + \pi^+ + \pi^0 + \pi^- + \pi^-$ zeigt im $(\pi^+\pi^0\pi^-)$-System eine Resonanz bei 783 MeV mit einer Breite von ≈10 MeV. Dieser Zustand entspricht dem (isoskalaren) ω-Meson mit den Quantenzahlen $T = 0$, $J^P = 1$. Verschiedentlich wird bei den Potentialberechnungen auch das (isoskalare) η-Meson mitgenommen, das im $(\pi^+\pi^0\pi^-)$-System als sehr scharfe Resonanz bei 549 MeV in Erscheinung tritt.

2. Auf dieser Grundlage kann man eine weitere Klasse von mesonentheoretischen Potentialen ableiten, die eine bessere Beschreibung der NN-Wechselwirkung bei mittleren Abständen (0,6 fm ≲ r ≲ 1,4 fm) liefern als das Ein-Pion-Austauschpotential. Diese Potentiale werden als Ein-Boson-Austauschpotentiale, V_{OBEP}, bezeichnet, weil die berücksichtigten Mesonen ganzzahligen Spin besitzen. Wie V_{OPEP} sind auch die OBE-Potentiale unter der Voraussetzung gewonnen, daß Störungstheorie zweiter Ordnung zur Abschätzung der Wechselwirkungsenergie ausreichend ist. Als die wichtigsten Parameter der Theorie gehen die Meson-Nukleon-Kopplungskonstanten ein, die aus Experimenten nur ungenau bekannt sind.

Tabelle 7.3
Eigenschaften der bei Berechnung von NN-Potentialen berücksichtigten Mesonen ($\hbar = c = 1, g = (2M_N/m)f$)

Meson	Masse m/MeV	T; J^P	Breite Γ/MeV	$g^2/4\pi$
$\pi^{\pm}$	140	1; 0^-	—	14,26
π^0	135	1; 0^-	—	
η	549	0; 0^-	$8{,}8 \cdot 10^{-4}$	4,27
ϱ	770	1; 1^-	154	0,25[a]) 10,92[b])
ω	783	0; 1^-	10	13,96[a]) $\approx$0[b])

a) Vektorkopplung; b) Tensorkopplung

Eine Übersicht über die Eigenschaften und Kopplungskonstanten der Mesonen, die man zur Berechnung von Ein-Boson-Austauschpotentialen mitnimmt, ist in Tabelle 7.3 enthalten. Nach (7.31) tragen diese Mesonen bei verschiedenen Abständen unterschiedlich zur NN-Wechselwirkung bei (siehe Abb. 7.13). Das σ-Meson ist im wesentlichen für das anziehende Potential bei mittleren Abständen verantwortlich. Die Spinbahnkopplung und die starke Abstoßung bei kleinen Abständen sind vor allem durch den Austausch von Vektormesonen ϱ, ω bedingt. In diesem Zusammenhang verweisen wir darauf, daß sich neue Aspekte für das Verständnis der NN-Wechselwirkung bei geringen Abständen zunehmend aus der Entwicklung der Quantenchromodynamik ergeben.

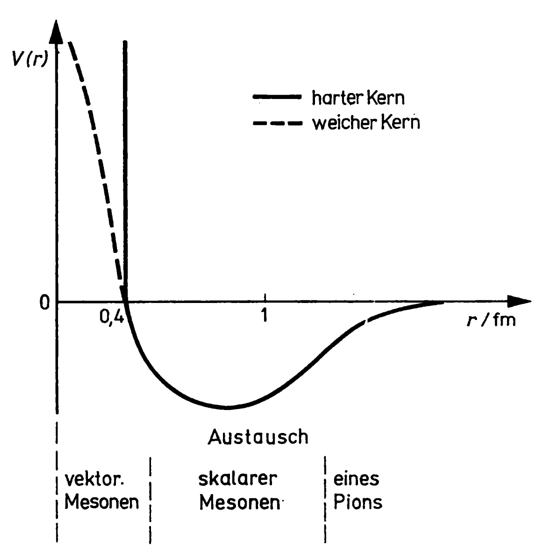


Abb. 7.13
Schematische Darstellung der NN-Wechselwirkung

3. Isobare Nukleonenzustände wie die Δ-Resonanz können auch in den gebundenen Zuständen der Wenig-Nukleonen-Systeme vorliegen. Einige Rechnungen weisen darauf hin, daß z. B. die magnetischen Momente der Kerne mit $A = 2$ und 3 nur durch die Berücksichtigung von isobaren Zuständen erklärt werden können. Nach diesen Untersuchungen sollte das Deuteron zu $\approx 1{,}5\,\%$ der Zeit nicht als np-, sondern als ΔΔ-System vorliegen. Die Lebensdauer von isobaren Zuständen in Kernen beträgt etwa 10^{-23} s.

Literaturhinweise zu Kapitel 7

Ben 64, Bla 52, Bet 71, Boh 69/75, Bri 71, Bro 76, Dav 58, Eis 70/72, Fri 82, Her 60, Hor 75, Mar 71, Pos 71, Pre 62, Roy 67, Šir 72, Schü 80, Sha 63, Wil 63

8. Kernstrukturmodelle

8.1. Übersicht über Kernmodelle

1. In jedem Gebiet der Physik ist man bestrebt, die experimentell gefundenen Erscheinungen und ihre Ursachen durch eine einheitliche Theorie zu beschreiben. Das gilt auch für die Kernphysik. Eine allgemeine Kerntheorie sollte ausgehend von den Kernkräften die Struktur, die Umwandlungen und alle Eigenschaften sämtlicher Nuklide in ihren Grund- und Anregungszuständen zu berechnen gestatten. Diese allgemeine Kerntheorie gibt es aber nicht. Die wichtigste Ursache dafür sind vor allem die beiden folgenden Umstände:

a) Das komplexe System Atomkern wird hauptsächlich von drei Wechselwirkungsarten zwischen den Nukleonen beherrscht, von der starken, elektromagnetischen und schwachen Wechselwirkung. Geht man vereinfachend von der Annahme aus, daß die meisten Eigenschaften der Atomkerne, besonders die der stabilen von der starken Wechselwirkung bedingt sind, dann steht man vor dem in Kapitel 7 deutlich gewordenen Problem, daß deren Eigenschaften nicht hinreichend genau bekannt sind. So gibt es für die Wechselwirkung zwischen zwei Nukleonen verschiedene Ansätze. Hinzu kommt die Möglichkeit des Vorhandenseins von Drei- oder Mehrkörperkräften. Die Einbeziehung der beiden anderen Wechselwirkungsarten bringt weitere Komplikationen.

b) Die Kerne, deren Nukleonenzahl im Maximalfalle bis zu ca. 300 betragen kann, stellen ein kompliziertes Mehr- bis Vielkörperproblem dar. Aus der klassischen Mechanik ist bekannt, daß sich nicht einmal das Dreikörperproblem für die viel einfachere Gravitationswechselwirkung allgemein lösen läßt. Viel schwieriger ist diese Aufgabe für die wesentlich komplizierteren Wechselwirkungen des Kernbereichs. Auch mit dem Vielkörperproblem der Atomhüllenphysik ist diese Aufgabe kaum zu vergleichen. Dort gibt es ein positiv geladenes Zentrum, in dessen elektrischem Feld sich die Elektronen bewegen. Die Wechselwirkung zwischen den Elektronen kann vernachlässigt werden. Ganz anders ist die Situation im Kern, in dem es kein solches Zentrum gibt.

Für die kernphysikalische Forschung ergaben sich daraus eine Reihe von Konsequenzen. Zwei davon seien hier genannt. Erstens darf man sich nicht auf das Studium der Nukleon-Nukleon-Wechselwirkung allein, wie sie bei der Streuung freier Nukleonen untersucht wird beschränken. Der Atomkern zeichnet sich durch Eigenschaften aus, die nicht nur aus der Zweinukleonenwechselwirkung folgen. Die Zahl der Nukleonen im komplexen Atomkern gibt eine neue Qualität vor, die durch zusätzliche Wechselwirkungen verursacht wird. Zweitens wurde man gezwungen, zunächst begrenzte Erscheinungsgebiete mit Hilfe von Modellen zu beschreiben. Dabei unterscheidet man zwei grundsätzliche Arten, die Kernstrukturmodelle und die Modelle der Kernumwandlungen. Letztere werden auch Umwandlungsmechanismen genannt, da es die Modelle der Mechanismen der Kernzerfälle und der Kernreaktionen sind. In diesem Kapitel werden nur Kernstrukturmodelle betrachtet.

2. Die Zahl der entwickelten Kernmodelle ist sehr groß. Mit der Zeit veränderte sich jedoch ihr Charakter. Anfangs entstanden phänomenologische Modelle, bei denen man von Analogien zu anderen Gebieten der Physik ausging. Dabei konnten die Voraussetzungen, die zur Beschreibung eines speziellen

Erscheinungskreises gemacht wurden durchaus im Widerspruch zu den Voraussetzungen stehen, die zur Interpretation eines zweiten Sachverhalts erforderlich waren. Später berücksichtigte man im Rahmen dieser Modelle die Erkenntnisse der Quantenmechanik und -statistik und kam so durch Anpassung an die empirischen Daten zu den halbmikroskopischen Modellen. Das nächste Ziel waren die mikroskopischen Kernmodelle, die sich als Näherungen der Schrödinger-Gleichung des Kern-Vielteilchensystems ergeben. In den Abbn. 8.1 und 8.2 ist ein Überblick über die Kernstrukturmodelle gegeben.

3. Eins der ersten Kernmodelle war das Tröpfchenmodell. Hier ging man davon aus, daß die Nukleonen im Kern ähnlich wie die Moleküle in einem Flüssigkeitstropfen sehr intensiv miteinander wechselwirken. Alle Kernmodelle in denen diese Annahme gemacht wird nennt man Modelle stark miteinander wechselwirkender Teilchen. Mit modernen Varianten des Tröpfchenmodells wird noch heute rege gearbeitet, weil man mit ihnen die Ruhenergie der Kerne und damit die verschiedensten Bindungsenergien recht genau berechnen kann.

Auch mit dem Fermi-Gasmodell kann man die Bindungsenergie der Kerne und darüber hinaus die Zustandsdichte berechnen. Die Modellgrundlage ist hier ein vollständig entartetes Fermi-Nukleonengas. Die Wechselwirkung zwischen den Nukleonen wird im einfachsten Falle vollständig vernachlässigt. Es handelt sich also um ein Modell unabhängiger Teilchen. Die Betrachtung des Tröpfchens als hydrodynamisches Gebilde brachte eine wesentliche Weiterentwicklung des Tröpfchenmodells. So gelang es, viele experimentell gefundene äquidistante Kernzustände als Oberflächenschwingungen, Vibrationen der Kernoberfläche zu beschreiben. In Analogie zum Molekül- entstand das Kernvibrationsmodell.

Eine andere große Gruppe von Zuständen, bei denen die Energie proportional ist zum Produkt $I(I + 1)$ konnte in Anlehnung an das Rotormodell der Molekülphysik im Rahmen des Kernrotationsmodells verstanden werden. Im Unterschied zu den Vibrationsbanden treten die Rotationsbanden nicht in sphärisch symmetrischen, sondern nur in deformierten Kernen auf. Das stimmt mit der Tatsache überein, daß quantenmechanisch betrachtet nur sphärisch asymmetrische Gebilde rotieren können, während Vibrationen auch quantenmechanisch betrachtet in beiden Symmetrien möglich sind. Auf diese Weise und gleichzeitig durch die Entdeckung sehr großer Quadrupolmomente wurde die Existenz statisch deformierter Kerne nachgewiesen. Über das Trägheitsmoment wurde das Rotationsmodell mit dem hydrodynamischen Modell, d. h. mit der Bewegung der Tröpfchenflüssigkeit gekoppelt.

Die bisher aufgeführten Modelle zeichnen sich unter anderem dadurch aus, daß sie Kerneigenschaften zu beschreiben gestatten, die durch die kollektive Wirkung vieler oder aller Nukleonen erzeugt werden. Beim Fermi-Gasmodell ist das auch der Fall, aber hier geht man in der quantenmechanischen Betrachtung von den Wellenfunktionen wechselwirkungsfreier Nukleonen aus, also von Einzelteilcheneigenschaften. Man unterscheidet ganz allgemein in Abhängigkeit davon, ob der Ausgangspunkt des Kernmodells Teilchen- oder Kollektiveigenschaften sind, Teilchen- und Kollektivmodelle.

Ein typisches Teilchenmodell ist zur Beschreibung der Spins und der magnetischen Dipolmomente der Kerne im Grundzustand ganz am Anfang der Kernmodellentwicklung unter dem Namen Schmidtsches Einteilchenmodell bekannt geworden. Es gestattet z. B. die Erklärung des halbzahligen Spins bei den uA-Kernen und die des Spins Null, bzw. des ganzzahligen bei den gg- und uu-Kernen. Der halbzahlige Spin entspricht dem Spin des ungepaarten Nukleons, das sich außerhalb des gg-Rumpfes befindet. Man nennt dieses unpaarige Nukleon auch „Leuchtnukleon“. Im gg-Kern und gg-Rumpf koppeln die gleichartigen Nukleonen paarweise zum Spin Null. Diese paarweise Kopplung konnte später als allgemeine Eigenschaft aller Fermionen verstanden werden. Bei den Elektronen führt sie z. B. zur Supraleitung.

4. Die nächsten Schritte der Entwicklung der Kernmodelle bestanden darin, in den phänomenologischen Modellen die Erkenntnisse der Quantenmechanik und -statistik zu berücksichtigen. Typische Beispiele sind die bereits erwähnte quantenmechanische Betrachtung der Rotationen und der Vibrationen des Kerns. Ein qualitativ neuer Schritt, der von den phänomenologischen Modellen wegführte, war die Betrachtung des Kerns als endliches quantenmechanisches Vielteilchen-System. Zwischen den Teilchen i und j soll eine starke, energie- und zustandsabhängige Wechselwirkung V_{ij} vorliegen. Relativistische Effekte können zunächst vernachlässigt werden, da die mittlere Nukleonengeschwindigkeit v im Kern nicht nahe genug an die Lichtgeschwindigkeit c herankommt. Die stationären Zustände des Kerns werden dann durch die Wellenfunktionen $\Psi_n(1, \ldots A)$ beschrieben, die Lösungen der Schrödinger-Gleichung sind:

$$\left(\sum_{i=1}^{A} T_i + \sum_{i<j=1}^{A} V_{ij}\right) \Psi_n(1, \ldots A) = E_n \Psi_n(1, \ldots A) . \tag{8.1}$$

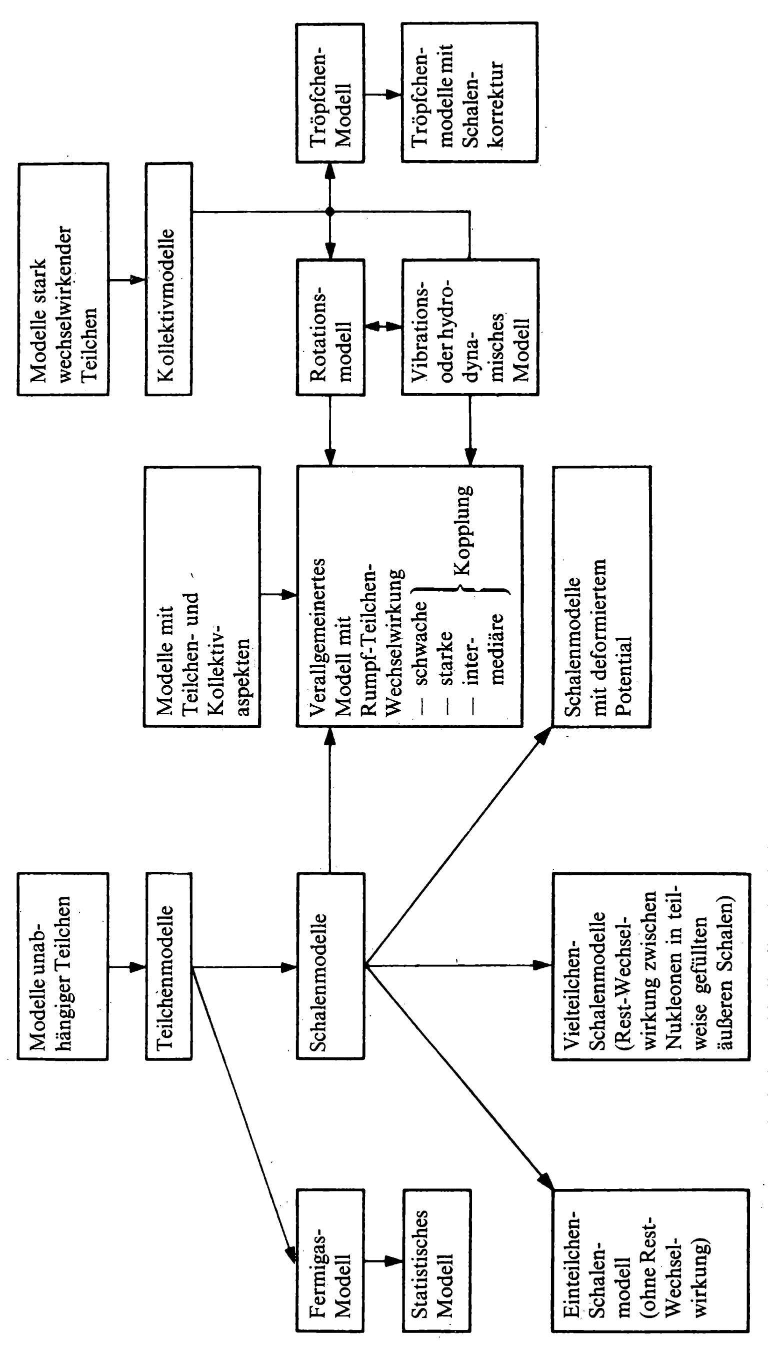


Abb. 8.1 Phänomenologische und halbmikroskopische Kernmodelle

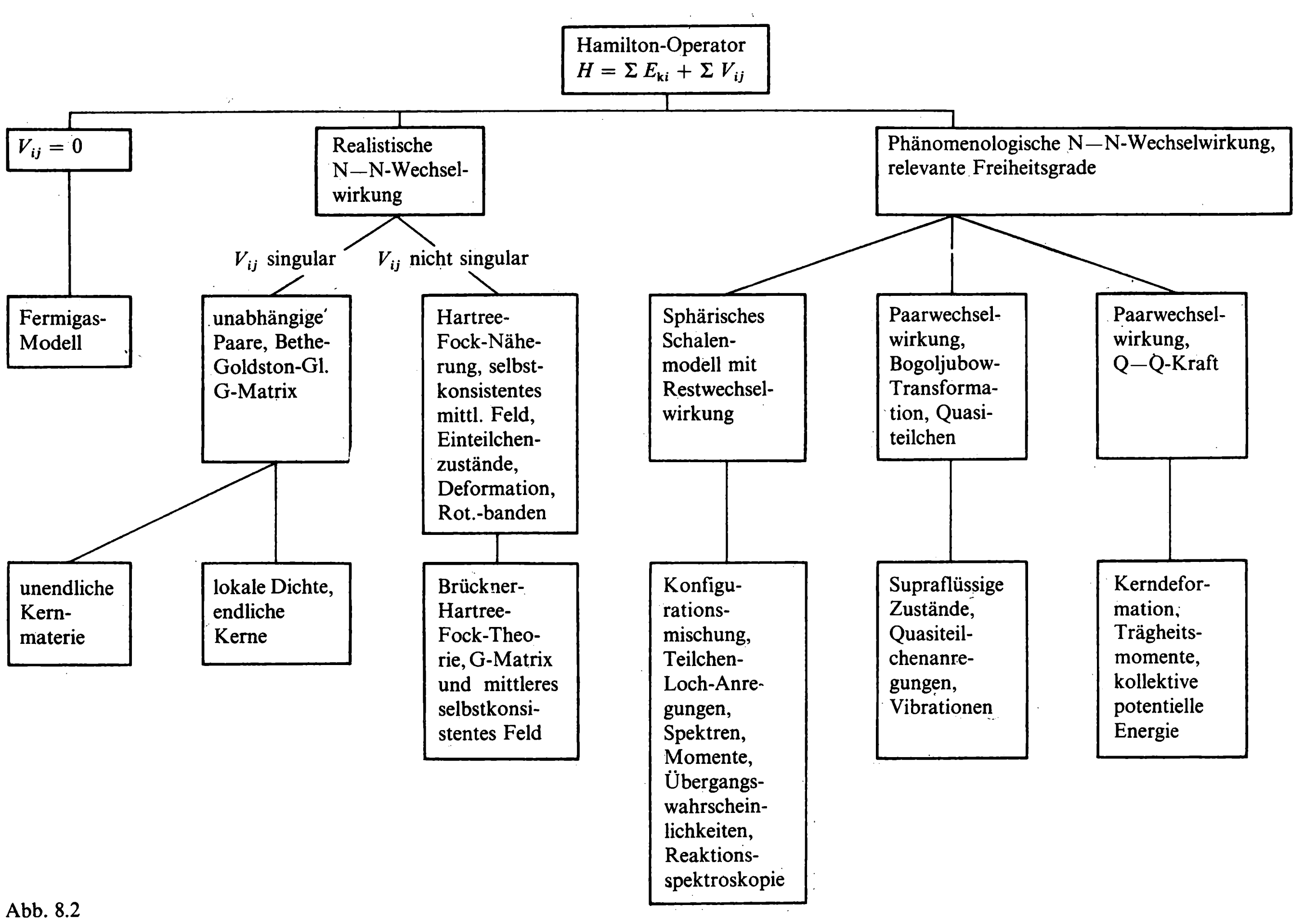


Abb. 8.2
Halbmikroskopische und mikroskopische Kernmodelle

Die Eigenwerte liefern das Energiespektrum der Anregungszustände. Mit Hilfe der Wellenfunktionen $\Psi_n(1, \ldots A)$, die von allen Freiheitsgraden, wie Ortsvektor $\boldsymbol{r}$, Spin $\boldsymbol{s}$, Isospin $\boldsymbol{t}$, also von den Koordinaten r_i, s_i und t_i der A Nukleonen abhängen, können Erwartungswerte beliebiger physikalischer Operatoren, wie z. B. elektrische und magnetische Momente oder elektromagnetische Übergangswahrscheinlichkeiten berechnet werden. Auf diese Weise ist es möglich, spektroskopische Kerneigenschaften auf der Grundlage der Wechselwirkungen zwischen den Nukleonen herzuleiten. Das quantenmechanische Vielteilchensystem ist jedoch, wie bereits erwähnt wurde, nicht exakt lösbar. An die Aufgabe, die Kernwellenfunktionen anzugeben, kann man auf verschiedene Weise herangehen.

5. Eine der erfolgreichsten ersten Lösungen von (8.1) war das Einteilchen-Schalenmodell. Hier wird angenommen, die Nukleonen bewegen sich in einem von ihnen selbst geschaffenen mittleren Kernkraftfelde. Die Restwechselwirkungen zwischen den Nukleonen werden vernachlässigt. Mit diesem Einteilchenmodell, in dessen Rahmen die Bewegung eines Nukleons im mittleren Felde betrachtet wird, konnten die magnetischen Zahlen sowie die Spins und Paritäten der Grund- und einiger Anregungszustände der sphärischen Kerne erklärt werden. Durch die Annahme nichtsphärischer Kerne konnte das Modell auch auf deformierte Kerne ausgedehnt werden. In weiterführenden Varianten werden nicht nur ein, sondern mehrere Teilchen im mittleren Potential betrachtet. Außerdem berücksichtigt man phänomenologisch angesetzte Einteilchenpotentiale und Restwechselwirkungen und bestimmt die auftretenden Parameter durch Anpassung an spektroskopische Daten.

6. Viele Eigenschaften der deformierten Kerne lassen sich im Grundzustand und bei Anregungsenergien kleiner als etwa 2 MeV mit Hilfe des verallgemeinerten Modells erklären. Dabei handelt es sich um eine Kombination des Ein- oder Mehrteilchen-Schalenmodells mit dem hydrodynamischen Tröpfchenmodell, also um ein Modell, in dem Teilchen- und Kollektivaspekte der Nukleonenbewegung berücksichtigt werden. Auf diese Weise können die Freiheitsgrade eines oder mehrerer an einen Rumpf mehr oder weniger fest gebundener äußerer Nukleonen beschrieben werden sowie die Rotations- und Vibrations-, also kollektiven Freiheitsgrade des Rumpfes. Das verallgemeinerte Modell gehört stärker zum Schalen-, als zum hydrodynamischen Modell. Zwar nehmen an der kollektiven Bewegung des Rumpfes fast alle Nukleonen teil, doch spielen die äußeren Nukleonen durch ihre Wechselwirkung mit dem Rumpf eine wichtige Rolle. Diese Wechselwirkung bestimmt, ob statische oder dynamische Deformationen zustande kommen. Die Voraussetzungen des von A. Bohr und B. Mottelson entwickelten Modells sind rotationselliptische Kernform und Separierbarkeit von kollektiver Rumpf- und Einzelteilchenbewegung außerhalb des Rumpfes.

Eine strengere Theorie muß konsequenter vom nuklearen Vielteilchenproblem mit (8.1) ausgehen. Dabei kommt es darauf an, die Freiheitsgrade zu erkennen, die einen wesentlichen Beitrag zu den betrachteten Anregungsmoden liefern. Die Kopplung dieser Freiheitsgrade liefert einen Zugang zur Beschreibung komplizierterer Bewegungszustände im Kern. Dieses Vorgehen hat besondere Bedeutung, wenn kollektive Erscheinungen, die aus der korrelierten Bewegung vieler Nukleonen resultieren, in die Betrachtungen einbezogen werden müssen. Auf diesem Wege kommt man zu stark vereinfachten aber handhabbaren Modellkräften. Dabei bleibt die Konzeption mittleres Potential und Restwechselwirkung erhalten. Die bekanntesten Restwechselwirkungen sind die Paar- und die Quadrupol-Quadrupol-Wechselwirkung. In der Paar-Wechselwirkung faßt man die kurzreichweitigen Komponenten der Nukleon-Nukleon-Wechselwirkung zusammen, in der Q-Q-Wechselwirkung die langreichweitigen, die nicht ins mittlere Potential eingehen. So wird mit Hilfe der Theorie der Paarkorrelationen vom Supraleitungstyp das Suprafluiditätsmodell des Kerns mit unabhängigen Quasiteilchen entwickelt. Diesem sowie den Modellen mit Q-Q-Kraft ist gemeinsam, daß viele experimentelle Fakten auch oberhalb von 2 MeV mikroskopisch verstanden werden können. Dazu gehören z. B. die unterschiedlichsten Deformationen in ein und demselben Kern als Funktion von der Anregungsenergie.

7. Ein anderer, bereits in Punkt 1 erwähnter Standpunkt geht von dem Grundsatz aus, die Dynamik der Nukleonenbewegung im Kern über die Nukleon-Nukleon-Wechselwirkung zu verstehen, wie sie bei der Streuung zwischen zwei Nukleonen betrachtet wird. Die phänomenologischen Ansätze für das N-N-Potential, die sich aus der Phasenanalyse der N-N-Streuung ergeben, sind aber nicht nur kompliziert, weil sie mehrere Terme mit zahlreichen Parametern enthalten, sondern sie sind, wie in 7.3.3. ausgeführt wurde, infolge der starken Nukleonenabstoßung bei kleinen Abständen (hard core) auch singulär. Deshalb versucht man die Schrödinger-Gleichung (8.1) mit realistischen Potentialen für Zweiteilchenkräfte unter stark vereinfachten Bedingungen zu lösen. Eine der einfachsten Versionen ist die Konzeption der

Kernmaterie. Sie bewährt sich bei der Berechnung der Bindungsenergie pro Nukleon und der Nukleonendichte, führt jedoch bei der Anwendung auf endliche Kerne zu Schwierigkeiten.

Ein wesentliches Ergebnis dieser Theorie der Kernmaterie besteht darin, daß sie ein qualitatives Verständnis dafür liefert, wie sich im Kern ein mittleres Potential ausbilden kann, so daß sich die eigentlich stark miteinander wechselwirkenden Nukleonen nahezu unabhängig voneinander bewegen. Mit nichtsingulären effektiven Wechselwirkungen gelingt es, das mittlere Feld für endliche Kerne in Hartree-Fock-Näherung zu berechnen. Dabei zeigt sich, daß der Einfluß der abstoßenden kurzreichweitigen Kräfteanteile in den Streuphasen der N-N-Streuung dem Einfluß der anziehenden Kräfteanteile entgegengerichtet ist.

Ein zweiter Mechanismus, der die starke Wechselwirkung zwischen den Nukleonen wesentlich einengt und im Rahmen der Theorie der Kernmaterie verstanden wird, ist die Gültigkeit des Pauli-Prinzips bei der Nukleonenstreuung. Unterhalb der Fermi-Energie sind alle Zustände besetzt, so daß Impuls- und Energieänderungen in diesem Bereich nicht möglich sind. Die Streuung der Nukleonen muß daher in Endzustände oberhalb der Fermi-Energie erfolgen. Das ist für alle Modelle unabhängiger Teilchen ein wesentliches Merkmal.

8. Ein weiterer Weg, zu Lösungen der Schrödiger-Gleichung (8.1) zu kommen, ist die Näherungsmethode von Hartree und Fock. Dabei handelt es sich um ein Variationsverfahren, bei dem eine Summe von Zweinukleonen-Wechselwirkungen V_{ij} durch eine Summe von Einteilchenpotentialen V_i ersetzt wird. Mit diesem Verfahren ist es gelungen, vor allem in leichten und magischen Kernen das mittlere Feld, Bindungs- und Einteilchenenergien zu berechnen. Die Anwendung der Methode auf nichtmagische Kerne trifft auf große Schwierigkeiten. Ein allgemeiner Nachteil der Methode besteht darin, daß die Suche nach dem Energieminimum in der Variationsaufgabe auf Wellenfunktionsklassen beschränkt bleiben muß, die Paar- und andere kompliziertere Korrelationen zwischen den Nukleonen ausschließen. Mit der Weiterentwicklung, dem Hartree-Fock-Bogoljubov-Variationsprinzip ist es möglich, neben den Wellenfunktionen einzelner Nukleonen auch die von Nukleonenpaaren einzubeziehen. In Anbetracht der Kompliziertheit der Hartree-Fock- und Hartree-Fock-Bogoljubov-Rechnungen wurde von V. M. Strutinskij eine Methode entwickelt, mit der man die Energie der Kerne berechnen kann, ohne daß dabei die Hartree-Fock-Gleichung gelöst werden muß.

8.2. Fermigas-Modell

1. In 6.3.2. wurde gezeigt, daß die näherungsweise Unabhängigkeit der spezifischen Kernbindungsenergie E_B/A und der Kerndichte von der Zahl der Nukleonen A eine Folge des Sättigungscharakters der Kernkräfte ist. Analoge Eigenschaften sind von den idealen Gasen und den Elektronen in Flüssigkeiten und Festkörpern bekannt. Dort werden sie mit Hilfe des Fermi-Gasmodells erklärt. Eine wichtige Voraussetzung für die Anwendbarkeit dieses Modells ist die unabhängige Bewegung der betrachteten Teilchen. In 8.1., Punkt 7, wurde bereits besprochen, daß diese Voraussetzung auch bei den Nukleonen im Kern erfüllt ist. Man kann die Bedingung der Unabhängigkeit auch über das Kräftegleichgewicht zwischen den Nukleonen im Kern verstehen. Aus der Stabilität des Kerns folgt der Anziehungscharakter der Kräfte zwischen den Nukleonen. Die Abstoßungsanteile der Kräfte zwischen ihnen sorgen dafür, daß es nicht zu einem Kollaps kommt. Der sich einstellende mittlere Abstand zwischen den Nukleonen beträgt etwa 1,8 fm, ist also sehr gering. Geht man von der Gasvorstellung aus, dann ist die Ausfüllung des Kernvolumens V_K mit dem gesamten Nukleonenvolumen AV_N von Interesse. Da die Nukleonen bis zum Radius des Nukleonenkerns r_c leicht einander durchdringen können, ergibt sich ein Volumenverhältnis von

$$\frac{A \cdot V_N}{V_K} \approx \frac{r_c^3}{r_0^3} \approx \frac{(0{,}40)^3}{(1{,}3)^3} \approx 0{,}03\,. \tag{8.2}$$

Das Kernvolumen ist in diesem Sinne nur zu 3 % mit Nukleonenkernen ausgefüllt. Man kann somit durchaus näherungsweise von einem Nukleonengas sprechen.

2. Mit Hilfe des Fermigas-Modells ist es möglich, die Gesamtenergie eines Systems von Nukleonen über die Schrödinger-Gleichung mit dem Hamilton-Operator

$$H = \sum_i \left[-\left(\frac{\hbar^2}{2m}\right) \Delta_i \right] + \sum_{i<j} V_{ij} \tag{8.3}$$

zu berechnen. Die Potentiale zwischen den Nukleonen i und j werden wegen der unabhängigen Bewegung vernachlässigt:

$$V_{ij} = 0\,. \tag{8.4}$$

Die Gesamtenergie berechnet man dann mit der Wellenfunktion des Grundzustandes Φ_0 über

$$E_0 = \langle \Phi_0' \, |H| \, \Phi_0 \rangle\,. \tag{8.5}$$

Da die Wechselwirkung zwischen den Nukleonen vernachlässigt wird, kann Φ_0 als Produkt der Wellenfunktion der einzelnen Nukleonen im Zustand α_i angesetzt werden. Dieses muß, da es sich um ein System aus Fermionen handelt, antisymmetrisch sein:

$$\Phi_0 = A \prod_{i=1}^{A} \varphi_{\alpha_i}(\boldsymbol{r}_i)\,. \tag{8.6}$$

Dabei ist A ein Antisymmetrierungsoperator. Die Wellenfunktionen der Nukleonen können als ebene Wellen angenähert werden, da das Kernvolumen genügend groß ist. Dieser Weg soll aber hier nicht weiter verfolgt werden. Vielmehr soll das Fermi-Gasmodell hier dazu benutzt werden, die Tiefe des Potentialtopfes, in dem sich die Nukleonen bewegen, zu berechnen.

3. Beim Fermigas-Modell geht man davon aus, daß im Grundzustand alle Nukleonenzustände unterhalb eines Zustandes mit einer Maximalenergie $E_{\mathrm{k,\,max}}$ und einem maximalen Nukleonenimpuls p_{max} besetzt sind, da er einem Energieminimum entspricht. Oberhalb dieser Grenzenergie $E_{\mathrm{F}} = E_{\mathrm{k\;max}}$, die auch Fermi-Energie genannt wird, geht die Besetzungswahrscheinlichkeit W der Nukleonen (wie in Abb. 8.3 gezeigt wird) auf den Wert 0 zurück. Diese Besetzungswahrscheinlichkeit ergibt sich im Rahmen der nur für Fermionen gültigen Fermistatistik zu

$$W = [\mathrm{e}^{(E-E_{\mathrm{F}})/kT} + a]^{-1}\,, \tag{8.7}$$

wobei $a = 1$. Bei der Temperatur $T = 0$ ist für alle Zustände unterhalb $E_{\mathrm{F}} W = 1$. Angeregte Zustände E für $T > 0$ bedeuten eine Umverteilung der Nukleonen aus Zuständen mit $E_{\mathrm{k}} < E_{\mathrm{F}}$ in Zustände mit $E_{\mathrm{k}} > E_{\mathrm{F}}$. Wenn die Bedingung $kT \approx E_{\mathrm{F}}$ erfüllt ist, geht die Fermi-Statistik in die klassische Boltzmann-Statistik mit a = 0 über.

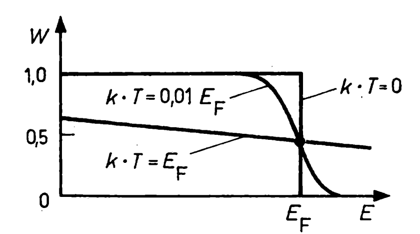


Abb. 8.3
Besetzungswahrscheinlichkeit bei Fermi-Statistik

Die Zahl der möglichen Teilchenzustände kann man ausgehend von einer Phasenraumbetrachtung berechnen: Für die kleinste Zelle des Phasenraumes gilt

$$\mathrm{d}V_{\mathrm{K}}\,\mathrm{d}V_{\mathrm{p}} \approx h^3 \,. \tag{8.8}$$

Für ein Teilchen in $\mathrm{d}V_{\mathrm{K}}$ mit einem Impuls im Intervall $(p, p + \mathrm{d}p)$ ist $\mathrm{d}V_{\mathrm{p}}$ durch eine Kugelschale mit

$$\mathrm{d}V_{\mathrm{p}} = 4\pi p^2\,\mathrm{d}p \tag{8.9}$$

gegeben. Das Phasenraumvolumen ergibt sich damit zu

$$\mathrm{d}V_{\mathrm{K}}\,\mathrm{d}V_{\mathrm{p}} = 4\pi p^2\,\mathrm{d}p V_{\mathrm{K}} \approx h^3 \,. \tag{8.10}$$

Setzt man eine Elementarzelle des Phasenraumes mit einem Volumen h^3 einem Zustand gleich, dann berechnet sich die Zahl der Zustände $\mathrm{d}n$ zu

$$\mathrm{d}n = \frac{\mathrm{d}V}{h^3} = \frac{4\pi p^2\,\mathrm{d}p V_{\mathrm{K}}}{h^3} = \frac{p^2\,\mathrm{d}p V_{\mathrm{K}}}{2\pi^2\hbar^3} \,. \tag{8.11}$$

Im Falle der Nukleonen, deren Spin s und Isospin t jeweils 1/2 betragen, kann jeder dieser Zustände höchstens mit vier Nukleonen besetzt werden, die sich aber in einem der vier Werte der Projektionen von s und t unterscheiden müssen.

4. Wir stellen nun den Zusammenhang zwischen der Fermi-Energie und der Zahl der Nukleonen, d. h. Neutronen und Protonen her. Dabei ist es vorteilhaft, von einem Ausdruck auszugehen, in dem diese Zahl vom Impuls abhängt:

$$N = \int_0^{p_{\mathrm{F}}(n)} \frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}p}\,\mathrm{d}p \,, \qquad Z = \int_0^{p_{\mathrm{F}}(p)} \frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}p}\,\mathrm{d}p \,. \tag{8.12}$$

Durch Einsetzen von (8.11) und Durchführung der Integration erhält man

$$N = \frac{p_{\mathrm{F}}^3(n)\,V_{\mathrm{K}}}{3\pi^2\hbar^3} \,, \qquad Z = \frac{p_{\mathrm{F}}^3(p)\,V_{\mathrm{K}}}{3\pi^2\hbar^3} \,. \tag{8.13}$$

Daraus wird der Impuls bei der Fermi-Energie p_{F} mit $V_{\mathrm{K}} = 4\pi A r_0^3/3$ und unter Berücksichtigung von $E_{\mathrm{F}} = p_{\mathrm{F}}^2/2m$ auch E_{F} berechnet:

$$p_{\mathrm{F}}(n) = \sqrt[3]{\frac{9\pi}{4}}\,\frac{\hbar}{r_0}\,\sqrt[3]{\frac{N}{A}} \,, \qquad p_{\mathrm{F}}(p) = \sqrt[3]{\frac{9\pi}{4}}\,\frac{\hbar}{r_0}\,\sqrt[3]{\frac{Z}{A}} \,, \tag{8.14}$$

$$E_{\mathrm{F}}(n) = \left(\frac{9\pi}{4}\right)^{2/3} \frac{\hbar^2}{2mr_0^2} \left(\frac{N}{A}\right)^{2/3} , \qquad E_{\mathrm{F}}(p) = \left(\frac{9\pi}{4}\right)^{2/3} \frac{\hbar^2}{2mr_0^2} \left(\frac{Z}{A}\right)^{2/3} . \tag{8.15}$$

Setzt man für $m \approx m_{\mathrm{n}} \approx m_{\mathrm{p}}$ und für $r_0 = 1{,}4$ fm ein, dann erhält man für die maximale Nukleonenenergie im Kern

$$E_{\mathrm{F}}(n) = 38{,}6 \left(\frac{N}{A}\right)^{2/3} \mathrm{MeV} \,, \qquad E_{\mathrm{F}}(p) = 38{,}6 \left(\frac{Z}{A}\right)^{2/3} \mathrm{MeV} \,. \tag{8.16}$$

In leichten Kernen mit $N/A = Z/A = 1/2$ hat E_{F} den Wert 24 MeV. In den schweren Kernen ist $Z/A \approx 0{,}455$ und $N/A \approx 0{,}555$, so daß sich dort $E_{\mathrm{p}}(\mathrm{n}) \approx 26$ MeV und $E_{\mathrm{F}}(\mathrm{p}) \approx 23$ MeV ergeben.

Die Tiefe des Potentialtopfes läßt sich als Summe aus Fermi- und Separationsenergie der Nukleonen berechnen, wie es die Abb. 8.4 zeigt. Es ist

$$V_0(\mathrm{n}) = E_{\mathrm{F}}(\mathrm{n}) + E_{\mathrm{S}}(\mathrm{n}) \,; \qquad V_0(\mathrm{p}) = E_{\mathrm{F}}(\mathrm{p}) + E_{\mathrm{S}}(\mathrm{p}) \,. \tag{8.17}$$

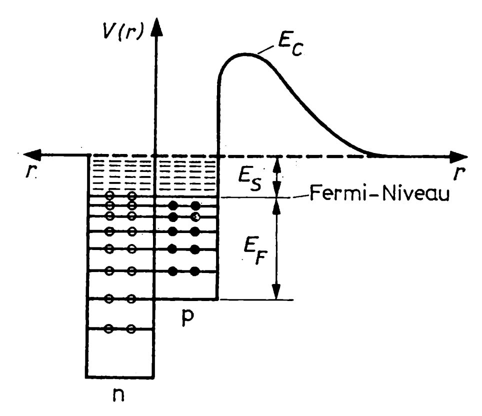


Abb. 8.4
Potentialverlauf und Fermigas-Zustände für Protonen (p) und Neutronen (n)

Für eine Separationsenergie von 8 MeV erhält man

$$V_0(\mathrm{n}) = 34\ \mathrm{MeV}\,; \qquad V_0(\mathrm{p}) = 31\ \mathrm{MeV}\,. \tag{8.18}$$

Die Tiefe des Potentialtopfes der Neutronen ist größer, als die für Protonen. Anders ausgedrückt bedeutet das eine geringere Bindung der Protonen als es für die Neutronen der Fall ist.

5. Die Existenz einer maximalen kinetischen Energie der Nukleonen E_F im Kern läßt sich experimentell nachweisen. Zur Erzeugung eines Proton-Antiproton-Paares in der Reaktion $\mathrm{p} + \mathrm{p} \to \mathrm{p} + \mathrm{p} + \mathrm{p} + \bar{\mathrm{p}}$ kann man gemäß (3.21), d. h. für den Fall ruhender Targetprotonen eine Schwellwertenergie von 5,6 GeV ausrechnen. Tatsächlich setzt die Reaktion jedoch bereits bei 4,4 GeV ein. Der Unterschied läßt sich über die relativistische Geschwindigkeitsaddition erklären. Dabei muß angenommen werden, daß die Energie der Protonen in den Targetkernen in Übereinstimmung mit (8.16) etwa bei 20 MeV liegt.

6. Die meisten Kerne zeichnen sich durch einen Neutronendefizit oder -überschuß aus. Gemäß (6.182) steht er mit der z-Komponente des Isospins in dem Zusammenhang

$$N - Z = -2T_z\,. \tag{8.19}$$

Der Neutronenüberschuß macht sich bei den mittelschweren und schweren Kernen aus Stabilitätsgründen erforderlich. Es ist daher interessant, wie groß der Beitrag des Neutronenüberschusses zur Gesamtbindungsenergie ist. Die Gesamtbindungsenergie wird zwar mit dem Tröpfchenmodell berechnet, aber dieser Term muß modellfremd eingeführt werden. Die Gesamtenergie für eine Nukleonensorte kann man über die Beziehung

$$E_0(N') = \int_0^{E_\mathrm{F}} E\,\frac{\mathrm{d}N'}{\mathrm{d}E}\,\mathrm{d}E = \int_0^{E_\mathrm{F}} E\,\frac{\mathrm{d}N'}{\mathrm{d}p}\cdot\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}E}\cdot\mathrm{d}E \tag{8.20}$$

berechnen, d. h. durch Integration über alle Energien und Zustände mit $E \leqq E_\mathrm{F}$, die mit Teilchen N' besetzt sind. Da $p = \sqrt{2mE_\mathrm{k}}$ und $\mathrm{d}p/\mathrm{d}E = \sqrt{2m/2E_\mathrm{k}}$ ergibt sich mit (8.15)

$$E_0(N') = \frac{3}{10}\left(\frac{9\pi}{4}\right)^{2/3}\frac{\hbar^2}{mr_0^2}\,\frac{(N')^{5/3}}{A^{2/3}} = C\,\frac{(N')^{5/3}}{A^{2/3}} = \frac{3}{5}\,N'E_\mathrm{F}\,. \tag{8.21}$$

Für einen Kern mit Z Protonen und N Neutronen ergibt sich

$$E_0(Z,N) = C\,\frac{N^{5/3} + Z^{5/3}}{A^{2/3}}\,. \tag{8.22}$$

Im Falle $N = Z$ tragen beide Nukleonenarten gleichermaßen zur Gesamtenergie bei, d. h., es ist

$$E_0(Z = N) = \frac{2C}{A^{2/3}} \left(\frac{A}{2}\right)^{5/3} = 2C(2)^{-5/3} \cdot A\,. \tag{8.23}$$

Für Kerne mit $N \neq Z$ ergibt sich dazu die Differenz

$$\Delta E_0(Z, N) = \frac{C}{A^{2/3}} \left[Z^{5/3} + N^{5/3} - 2\left(\frac{A}{2}\right)^{5/3}\right], \tag{8.24}$$

die unter Berücksichtigung von (8.19) in den Ausdruck

$$\Delta E_0(Z, N) = \frac{C}{A^{2/3}} \left(\frac{A}{2}\right)^{5/3} \left[\left(1 - \frac{4T_z}{A}\right)^{5/3} + \left(1 + \frac{4T_z}{A}\right)^{5/3} - 2\right] \tag{8.25}$$

übergeführt werden kann. Wenn $A \gg T_z$ ist, kann man (8.25) in eine Reihe nach Potenzen von $(1 - x)^{5/3}$ und $(1 + x)^{5/3}$ mit $x = 4T_z/A$ entwickeln. Wegen

$$(1 \pm x)^{5/3} = 1 \pm \frac{5}{3}x + \frac{10}{18}x^2 \pm \frac{10}{162}x^3 + \cdots \tag{8.26}$$

bekommt man bei Vernachlässigung des zu x^3 proportionalen Beitrages

$$\Delta E_0(Z, N) = \frac{20C}{2^{2/3}} \frac{T_z^2}{A}\,. \tag{8.27}$$

Der Unterschied der Gesamtenergie von Kernen mit $N = Z$ zu Kernen mit $N \neq Z$ ist eine quadratische Funktion des Neutronendefizits oder -überschusses.

7. Bisher haben wir das Fermigas-Modell zur Beschreibung des Grundzustandes benutzt. Bei Anregungsenergien von mehr als 5 MeV, wie sie z. B. in Compoundkernreaktionen auftreten, ist die Zahl der Zustände in den mittelschweren und schweren Kernen sehr groß, so daß die Abstände zwischen ihnen sehr kleine Werte annehmen. Die Quantencharakteristika jedes einzelnen Zustandes sind dann nicht mehr zu ermitteln. Daher wird stattdessen die Zustandsdichte bezogen auf Energieeinheitsintervalle eingeführt. Die Abhängigkeit der Zustandsdichte von der Energie wird mit Hilfe des statistischen oder thermodynamischen Modells beschrieben. Dazu werden die Kernanregungen als Erhitzung eines Fermi-Gases aufgefaßt. Die Kernanregungen sind dann eine Funktion der Kerntemperatur. Der Vorschlag, den Compoundkern als Fermi-Gas zu betrachten wurde unabhängig voneinander 1936 von J. I. Frenkel, H. Bethe sowie L. D. Landau gemacht. Frenkel führte als erster den Begriff der Kerntemperatur ein. Eine Vorstellung über die Größe der hier auftretenden Temperaturen erhält man über die Gleichsetzung von thermischer und Kernanregungsenergie. Mit der Boltzmann-Konstante $k = 0{,}861 \cdot 10^{-10}$ MeV/K erhält man, daß einem MeV $1{,}16 \cdot 10^{10}$ K entsprechen.

Für ein Fermi-Gas mit n Teilchen wurde im Rahmen der statistischen Thermodynamik die Abhängigkeit

$$E(T) = E_0 + \frac{3\pi^2}{20} \frac{n^2}{E_0} (kT)^2 + \cdots \tag{8.28}$$

für die Energie des Gases bei der Temperatur T und der Grundzustandsenergie E_0 bei $T = 0$ abgeleitet. Die Vernachlässigung von Termen mit höheren Potenzen bedeutet, daß eine Beschränkung auf niedrige Temperaturen erfolgen soll, für die $kT \ll E_0$ ist.

Da zwischen E_0 und E_F die Beziehung (8.21) besteht, findet man für die Anregungsenergie

$$E^* = E(T) - E_0 = \frac{3\pi^2}{20} \frac{n^2}{E_0} (kT)^2 = a(kT)^2 \tag{8.29}$$

mit

$$a = \frac{3\pi^2 n^2}{20E_0} = \frac{\pi^2}{4} \frac{n}{E_F}\,. \tag{8.30}$$

Für ein Nukleonengas mit zwei verschiedenen Teilchenarten n muß man zwei verschiedene a einführen. Mit E_F gemäß (8.16) ergibt sich

$$a_n/\text{MeV} = 0{,}103\,A\,; \quad a_p/\text{MeV} = 0{,}147A\,. \tag{8.31}$$

Setzt man kT in MeV ein, dann erhält man schließlich für die Anregungsenergie

$$E^*/\text{MeV} = (a_n + a_p)\,(kT)^2 \approx 0{,}25A(kT)^2\,. \tag{8.32}$$

In Tabelle 8.1 sind die Kerntemperaturen als kT in MeV für Kerne mit verschiedenen E- und A-Werten angegeben. Man sieht, daß in allen praktischen Fällen die niederenergetische Näherung (8.28) gerechtfertigt ist. Das wird auch durch die folgende Überlegung deutlich: Wenn ein Kern mit etwa 240 Nukleonen ein Neutron absorbiert, dann ist $E^* \approx 6$ MeV, $kT \approx 0{,}5$ MeV und $T \approx 6 \cdot 10^9$ K. Ordnet man wie beim Oszillator jedem kT einen Freiheitsgrad zu, dann können 6 MeV/0,5 MeV = 12 Freiheitsgrade angeregt werden. Insgesamt hat der Kern ohne die Translation des MMP und ohne Rotation $3A - 6$ Freiheitsgrade, d. h. etwa 720. Da nur 12 angeregt werden, bleiben mehr als 700 eingefroren. Also handelt es sich tatsächlich um eine niedrige Temperatur.

Tabelle 8.1
Kerntemperaturen für Kerne mit verschiedenem A als Funktion von der Anregungsenergie E^*

E^*/MeV	A 40	120	240
2	0,45	0,26	0,18
10	1,00	0,58	0,41
20	1,41	0,82	0,58

Nach L. D. LANDAU kann man die Zustandsdichte mit Hilfe der Entropie des Fermi-Gases berechnen. Den Zusammenhang zwischen der Entropie S und der Zustandsdichte $\varrho = \mathrm{d}n/\mathrm{d}E$ liefert die Boltzmann-Gleichung:

$$S = k \ln \frac{\varrho(E^*)}{\varrho(E_0)}\,. \tag{8.33}$$

Andererseits kann man die Entropie über

$$S = \int_0^T \frac{\mathrm{d}E^*}{T} \tag{8.34}$$

ermitteln. Über (8.32) ergibt sich $\mathrm{d}E^*$ zu

$$\mathrm{d}E^* = ak^2T\,\mathrm{d}T\,. \tag{8.35}$$

Einsetzen liefert

$$S = 2ak^2 \int_0^T \mathrm{d}T = 2ak^2T = 2k\sqrt{aE^*}\,. \tag{8.36}$$

Mit (8.33) erhält man

$$\varrho(E^*) = \varrho(E_0)\,\mathrm{e}^{S/k} = \varrho(E_0)\,\mathrm{e}^{2\sqrt{aE^*}}\,. \tag{8.37}$$

Da die Zustandsdichte außer von der Temperatur oder Anregungsenergie nur noch von a abhängt, nennt man a den Zustandsdichteparameter. Die exponentielle Zunahme der Zustands-

dichte mit der Anregungsenergie ist in voller Übereinstimmung mit dem experimentellen Befund. Für den mittleren Abstand D zwischen den Zuständen folgt aus (8.37) und $D = 1/\varrho$

$$D(E^*)/D(E_0) = e^{-2\sqrt{aE^*}} . \tag{8.38}$$

Für $A = 100$ und $E^* = 8$ MeV wird ϱ (8 MeV)/$\varrho(E_0) \approx 3 \cdot 10^8$. Nimmt man für die Nähe des Grundzustandes $D \approx 100$ keV an, dann ergibt sich für D (8 MeV) etwa $3 \cdot 10^{-4}$ eV. Verglichen mit den experimentellen Werten ist dieses Ergebnis etwa um einen Faktor 10 bis 100 zu klein. Eine bessere Übereinstimmung kann man aber von dieser einfachen Theorie kaum erwarten.

8.3. Schalenmodelle

8.3.1. Schalenmodell der Atomhülle

1. Das Schalenmodell der Atomkerne wurde in Anlehnung an das der Atomhülle entwickelt. Es ist daher zweckmäßig, die wichtigsten Aspekte des Schalenmodells der Atomhülle hier wiederholend darzulegen. Bei den Elektronenzahlen 2, 10, 18, 36, 54 und 86, d. h. bei den Edelgasen, zeichnen sich die Atome durch besondere Eigenschaften aus. Eine dieser Besonderheiten ist die jeweils größte Ionisationsenergie der Edelgase im Vergleich zu den Nachbarelementen. Eine zweite, aus Abb. 6.1 erkennbare Besonderheit besteht darin, daß die Atome der Elemente, die eine um 1 größere Ordnungszahl haben als die Edelgase, ein relatives Maximum des Atomvolumens haben.

2. Beim Schalenmodell der Hülle geht man davon aus, daß sich die Elektronen im Zentralfeld des Z-fach positiv geladenen Kerns mit dem Coulomb- und Zentrifugalpotential

$$U(r) = -\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r} + \frac{\hbar^2}{2m}\frac{l(l+1)}{r^2} \tag{8.39}$$

bewegen. Die Wechselwirkung zwischen den Elektronen wird vernachlässigt. Der Hamilton-Operator (8.3) vereinfacht sich dadurch gemäß Bedingung (8.4). Die ersten beiden wichtigsten Aufgaben, die im Rahmen dieses Modells gelöst werden konnten, war die Berechnung der Energie der Elektronenzustände und die Angabe der Zahl der Elektronen, die auf den Zuständen untergebracht werden können. Die Lösung der Schrödiger-Gleichung (8.1) liefert die Energie-Eigenwerte

$$E_{n'l} = -\frac{mZ^2e^4}{2\hbar^2(4\pi\varepsilon_0)^2}\frac{1}{n'^2}, \tag{8.40}$$

wobei sich die Hauptquantenzahl n' aus der Radial- (n_r) und Nebenquantenzahl l gemäß

$$n' = n_r + l + 1 \tag{8.41a}$$

zusammensetzt. Alle drei Quantenzahlen sind ganzzahlig und durchlaufen die Wertefolgen

$$n' = 1, 2 \ldots; \quad n_r = 0, 1, \ldots; \quad l = 0, 1, \ldots (n' - 1). \tag{8.41b}$$

Aus (8.40) erkennt man, daß hinsichtlich n_r und l Entartung vorliegt. Sie wird allerdings aufgehoben, wenn realistischere Potentiale benutzt werden, die z. B. die Abschirmung der Kernladung durch die inneren Elektronen berücksichtigen oder wenn äußere Felder zugelassen werden. Im Falle äußerer magnetischer Felder mit der Induktion B, ergibt sich

$$E_{n,l,m_l,m_s} = E_{n'l} + E_{m_l} + E_{m_s} = E_{n'l} + \mu_B m_l B + 2\mu_B m_s B . \tag{8.42}$$

Die Projektionen m_l und m_s der Quantenzahlen l und s durchlaufen die Wertefolge

$$m_l = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm l; \quad m_s = \pm 1/2 . \tag{8.43}$$

Es gibt $(2l + 1)$ Einstellungen m_l und $(2s + 1)$ Einstellungen m_s. Auf einen Zustand $n'l$ passen somit

$$g_{l,s} = 2(2l + 1) \tag{8.44a}$$

Elektronen und auf einen Zustand mit n'

$$g_{n'} = 2 \sum_{l=0}^{n'-1} (2l + 1) = 2n'^2 . \tag{8.44b}$$

Tabelle 8.2
Besetzung der Energiezustände in der Elektronenhülle der Atome

Schale	Zustand n', l	$g_l = 2(2l + 1)$	$\Sigma\, g_l$	Element
K	1s	$2 = 2$	2	He
L	2s, 2p	$2 + 6 = 8$	10	Ne
M	3s, 3p	$2 + 6 = 8$	18	Ar
N	4s, 3d, 4p	$2 + 10 + 6 = 18$	36	Kr
O	5s, 4d, 5p	$2 + 10 + 6 = 18$	54	Xe
P	6s, 5d, 4f, 6p	$2 + 10 + 14 + 6 = 32$	86	Rn
Q	7s, 6d, 5f, 7p	$2 + 10 + 14 + 6 = 32$	118	118

Die Einordnung der Elemente zum periodischen System erfolgt durch sukzessiven Einbau der Elektronen in die Zustände unter Berücksichtigung des Pauli-Prinzips. In Tabelle 8.2 sind die Zustände $(n'l)$ und ihre Besetzungen angegeben. Bis $Z = 18$ stimmen die mit (8.44b) erhaltenen Zustandsabschlüsse mit den Ordnungszahlen der Edelgase überein. Zu höheren Z-Werten hin ergeben sich die Edelgase nicht mehr als volle Besetzung eines Zustandes n' mit $2n'^2$ Elektronen. Vielmehr entsprechen die Ordnungszahlen der Edelgase durchweg voll besetzten p-Zuständen von 2p bis 6p. Nach einer näherungsweisen empirischen Regel erfolgt der Einbau der Elektronen nach zunehmender Summe $n' + l$, wobei Zustände mit dem gleichen Wert von $n' + l$ mit steigendem n' aufgefüllt werden. Die Reihenfolge innerhalb einer Periode, z. B. der sechsten, also von ${}_{55}Cs$ bis ${}_{86}Rn$ lautet 6s($n' + 0 = 6$), 4f($n' + 3 = 7$), 5d($n' + 2 = 7$) und 6p($n' + 1 = 7$). Allerdings spaltet der 5d-Zustand noch einmal auf, so daß die 4f-Zustände dazwischen liegen. Die Begründung für diese Reihenfolge des Einbaus hängt mit der Abschirmung der Kernladung zusammen. Diese bewirkt, daß kein reines Coulomb-Potential mehr vorliegt, so daß es zur Aufhebung der Entartung kommt. Die Zustände 4s, 3p, 2d z. B., die in Übereinstimmung mit (8.40) gleiche Energie haben, zeichnen sich nun durch unterschiedliche Energie aus. Der energetisch niedrigste Zustand ist der mit dem kleinsten l-Wert, wie es die Abb. 8.5. zeigt. Die Abschirmung wächst mit dem Abstand vom Kern. Ihre Berücksichtigung durch einen zusätzlichen Term $-ce^2/r^2$ in (8.39) führt anstelle der Quantenzahl n' auf eine nun nicht mehr ganzzahlige Größe

$$n'' = n' + \sigma , \tag{8.45a}$$

wobei

$$\sigma = -c \frac{me^2}{\hbar^2(l + {}^1/_2)} \tag{8.45b}$$

ist. In (9.40) ist n' durch n'' zu ersetzen, so daß $E_{n'l}$ zu $E_{n''l}$ wird. Diese Funktion liefert die richtige Zustandsreihenfolge der Abb. 8.5.

1d
n=3 2p
3s

Abb. 8.5
Aufhebung der Entartung für Zustände mit $n = 3$ im Schalenmodell der Atomhülle

3. Der Inhalt des Begriffs der Schale hat sich mit der Entwicklung der Schalenmodelle verändert. Ursprünglich verstand man darunter einen energetischen Zustand der Elektronen für gegebene Hauptquantenzahl n'. Einer Hauptquantenzahl $n' = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ entsprach die Schale, also Periode K, L, M, N, O, P, Q. Die Aufhebung der Entartung, z. B. hinsichtlich l führt auf Unterzustände, in denen alle Elektronen mit festen n' und l untergebracht werden können. Man nennt sie Unterschalen. Beim tatsächlichen Einbau der Elektronen in die Schalen und Unterschalen zum periodischen System werden infolge der Energieabhängigkeit von den vier Quantenzahlen Unterschalen mit verschiedenen n' zu Unterschalengruppen vereint. Diese Unterschalenkombination wird Schale genannt, wie es in Tabelle 8.2 ausgewiesen ist. Die so definierten Schalen unterscheiden sich deutlich voneinander durch ihr Energieintervall. Man sieht das am Ionisationspotential, auch an den Atomvolumina von Abb. 6.1; direkt ist es in Abb. 8.6 gezeigt.

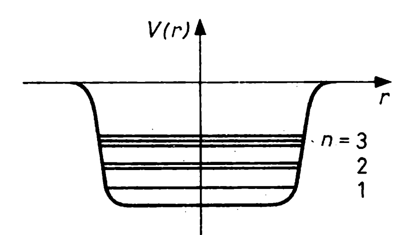


Abb. 8.6
Lage der Energiezustände im Woods-Saxon-Potential

8.3.2. Schaleneffekte bei den Atomkernen

Auch bei den Atomkernen gibt es eine große Zahl experimenteller Fakten, die auf eine Schalenstruktur hinweisen. Allgemein ausgedrückt kommt das wie bei den Atomen darin zum Ausdruck, daß sich die Energiezustände der Nukleonen deutlich gruppieren. Bei bestimmten Nukleonenzahlen haben im Gefolge dessen verschiedene experimentell bestimmbare Größen Maxima und Minima, die immer wieder bei den gleichen Zahlen $Z = 2, 8, 20, 28, 50, 82$ und $N = 2, 8, 20, 28, 50, 82, 126$ liegen. Man spricht von magischen Nukleonenzahlen. Aus der Fülle des Materials betrachten wir nur einige wenige Beispiele.

In Abb. 8.7 ist die Neutronenbindungsenergie $E_B^{(n)}$ einer Reihe von Kernen in der Nähe der magischen Zahl $N = 82$ dargestellt. Man sieht, daß sich $E_B^{(n)}$ ähnlich wie die Ionisationsenergie der Edelgase sprunghaft ändert. Für Protonen ergibt sich das gleiche Bild. Auch hier gilt, daß Kerne mit einem Nukleon über der magischen Nukleonenzahl besonders instabil, Kerne

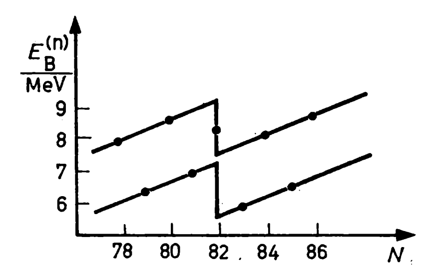


Abb. 8.7
Neutronenbindungsenergie in Abhängigkeit von der Neutronenzahl N in der Umgebung von $N = 82$

mit einer magischen Nukleonenzahl jedoch auffällig stabil sind. Aus Tabelle 6.3 kann man erkennen, daß das 21. und das 29. Neutron relativ lose gebunden sind. Die große Stabilität der Kerne mit magischen Nukleonenzahlen wird auch durch die Anzahl der stabilen Nuklide belegt, die es für magische Nukleonenzahlen gibt. Die Abb. 8.8 macht das für magische Neutronenzahlen deutlich.

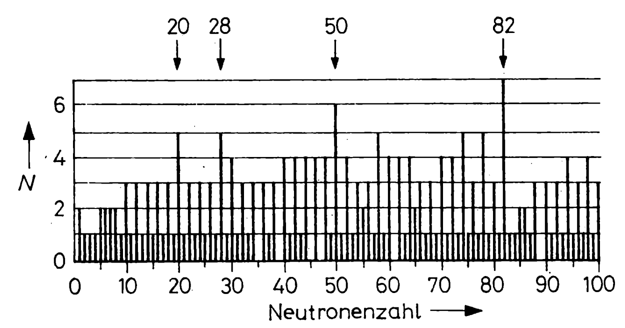


Abb. 8.8
Anzahl der stabilen Nuklide als Funktion der Neutronenzahl N

Ein anderes Beispiel sind die Anregungsenergien der Atomkerne. Sie sind bei den magischen Nukleonenzahlen besonders groß. An Hand von Abb. 8.9 kann man das für die Abhängigkeit der Energie des ersten Anregungszustandes der geradzahligen Bleiisotope verfolgen. Für den doppelt magischen Kern ^{208}Pb liegt diese Energie um 2 MeV höher als bei den Nachbarkernen und der Zustand hat nicht die Charakteristika 2^+, sonderh 3^-. In 6.7.3. wurde bereits bei der Diskussion der Meßergebnisse für die Quadrupolmomente darauf hingewiesen, daß bei Kernen mit magischen Nukleonenzahlen die Werte entweder sehr klein sind oder gleich Null. Daraus wurde die Schlußfolgerung gezogen, daß magische Kerne sphärisch symmetrisch sind.

Schließlich soll darauf hingewiesen werden, daß sich die Endkerne der radioaktiven Zerfallsreihen durch magische Nukleonenzahlen auszeichnen. Es sind dies $^{206}_{82}\mathrm{Pb}_{124}$, $^{207}_{82}\mathrm{Pb}_{125}$, $^{208}_{82}\mathrm{Pb}_{126}$ und $^{209}_{83}\mathrm{Bi}_{126}$.

In Analogie zu den Verhältnissen in der Elektronenhülle spricht man auch in der Kernphysik vom Schalenaufbau des Kerns. Die Kerne mit magischen Nukleonenzahlen zeichnen sich wie die Edelgase durch abgeschlossene Schalen aus, d. h. durch volle Besetzung der Zustände. In diesem Zusammenhang ist in Anlehnung an das „Leuchtelektron“ der Atomhülle der Begriff des „Leuchtnukleons“ gebräuchlich. So hat der Kern $^{17}_{8}\mathrm{O}_9$ z. B. ein Leuchtneutron. Es befindet sich außerhalb des doppelt magischen Rumpfes mit 8 Protonen und 8 Neutronen.

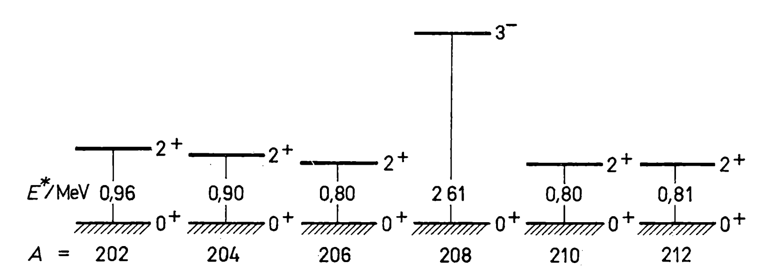


Abb. 8.9
Energie des ersten 2^+-Anregungszustandes einiger gg-Isotope von Blei

8.3.3. Einteilchen-Schalenmodell des Atomkerns

1. Bei der Formulierung eines Schalenmodells der Atomkerne stieß man auf eine Schwierigkeit, die bei der Elektronenhülle nicht besteht. Die Nukleonen bewegen sich nicht in einem Zentralfeld, das vom Zentrum des Kerns ausgeht. Der Ausweg besteht in einem unter der Bezeichnung Hartree-Fock-Methode bekannt gewordenen Verfahren der Quantenmechanik. Auf die Kerne übertragen wird angenommen, daß die stark miteinander wechselwirkenden Nukleonen ein mittleres Feld der Kernkräfte, d. h. der starken Wechselwirkung schaffen, in dem sie sich unabhängig voneinander bewegen. Alle von dieser Grundannahme ausgehenden Ansätze liefern Modelle unabhängiger Teilchen. Die Aufgabe der Theorie ist es, die Energien der Nukleonenzustände, die Quanten- und Besetzungszahlen der Zustände zu ermitteln und die magischen Zahlen als Abschlußbesetzung deutlich voneinander abgegrenzter Zustandsgruppen, den Schalen, anzugeben.

2. Die Lösung erfolgt über die Schrödiger-Gleichung (8.1). Der Hamilton-Operator (8.3) wird dadurch vereinfacht, daß die Summe über die Potentiale der Wechselwirkung zwischen den Nukleonen V_{ij} durch eine Summe über abstandsabhängige Potentiale $V(\boldsymbol{r}_i)$ der Nukleonen ersetzt wird. Zur Herauslösung des abstandsabhängigen mittleren Potentials der Nukleonen wird der Hamilton-Operator umgeschrieben:

$$H = \sum_i [T_i + V(\boldsymbol{r}_i)] + \left[\sum_{i,j} V(\boldsymbol{r}_{ij}) - \sum_i V(\boldsymbol{r}_i)\right]. \tag{8.46}$$

Darin bedeuten

$$\sum_i T_i = \sum_i \left(-\frac{\hbar^2}{2m_N} \Delta_i\right), \tag{8.47}$$

$$\sum_{i,j} V(\boldsymbol{r}_{ij}) = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j}\sum V(\boldsymbol{r}_{ij}), \tag{8.48}$$

$$\sum_i = \sum_{i=1}^{A}. \tag{8.49}$$

In dem hier betrachteten einfachsten Falle des Schalenmodells wird angenommen, daß die Restwechselwirkung

$$V_R = \sum_{i,j} V(\boldsymbol{r}_{ij}) - \sum_i V(\boldsymbol{r}_i) \tag{8.50}$$

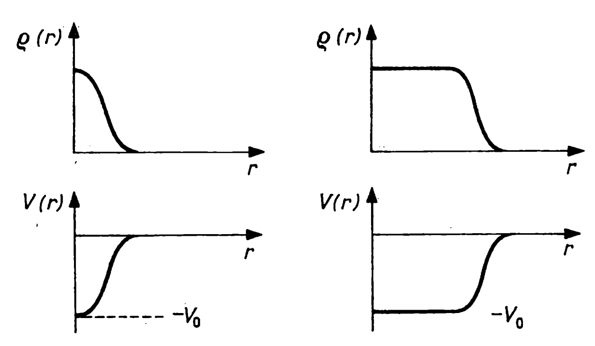


Abb. 8.10
Dichteverteilung und mittleres Kernpotential für leichte Kerne a) und schwere b)

vernachlässigt werden kann. In genaueren Schalenmodellen wird (8.50) durch zusätzliche Annahmen berücksichtigt. Wir werden auch die Coulombwechselwirkung, die im Vergleich zur starken Wechselwirkung tatsächlich gering ist, vernachlässigen.

Die Lösung wird für ein Potential $V(\boldsymbol{r}_i)$ gesucht, das einem Zentralfeld entspricht, in dem sich jedes beliebig herausgegriffene Nukleon unabhängig von den anderen bewegt. Die Form dieses Potentials wird in Analogie zur Dichteverteilung im Kern angesetzt. Die Abb. 8.10 zeigt im linken Teil die Verhältnisse bei leichten, im rechten bei schweren Kernen. Ein recht brauchbares Potential dieser Art ist von Woods und Saxon angegeben worden:

$$V_{\mathrm{WS}}(\boldsymbol{r}) = -\frac{V_0}{1 + \mathrm{e}^{(r-R)/a}} . \tag{8.51}$$

Es ist in Abb. 8.11 im Vergleich zum Potential des harmonischen Oszillators V_{H} und zum Kastenpotential V_{K} dargestellt. Allerdings können die Lösungen der Schrödinger-Gleichung mit dem Woods-Saxon-Potential nicht in geschlossener Form angegeben werden. Der Anschaulichkeit wegen beschränken wir uns daher auf die Darstellung des Lösungsweges mit dem Potential des harmonischen Oszillators, das für leichte Kerne

$$V_{\mathrm{H}}(\boldsymbol{r}) = \frac{m_N}{2} (\omega_0 \boldsymbol{r})^2 \tag{8.52}$$

beschrieben wird.

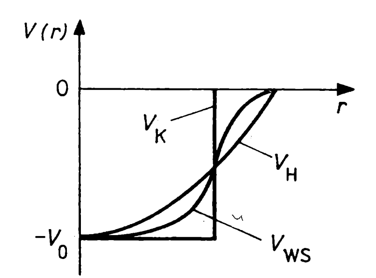


Abb. 8.11
Vergleich zwischen Kastenpotential V_{K}, Potential des sphärisch-harmonischen Oszillators V_{H} und dem Woods-Saxon-Potential V_{WS}

Für die einfachste Näherung mit verschwindender Restwechselwirkung zwischen den Nukleonen ergibt sich

$$H_0 \Psi_0 = E_0 \Psi_0 , \tag{8.53}$$

$$H_0 = \sum_i H_{0i} = \sum_i \left[-\frac{\hbar^2}{2m_N} \Delta_i + V(\boldsymbol{r}_i) \right] . \tag{8.54}$$

Da sich jedes Nukleon unabhängig von den anderen bewegt, kann man mit einer Wellenfunktion φ_i für jedes Nukleon (8.53) in die Form

$$H_{0i}\varphi_i = \left[-\frac{\hbar^2}{2m_N} \Delta_i + V(\boldsymbol{r}_i) \right] \varphi_i = E_{0i}\varphi_i \tag{8.55}$$

bringen, so daß sich die Gesamtenergie aus

$$E_0 = \sum_i E_{0i} \tag{8.56}$$

ergibt. Wegen der Zentralsymmetrie des Potentials kann die Schrödinger-Gleichung in Kugelkoordinaten aufgeschrieben und die Wellenfunktion in Radial-, Winkel-, Spin- und Isospinanteil separiert werden:

$$\varphi_i = R(r_i)\, Y_{l_i}^{m_i}(\vartheta, \varphi)\, \chi_i(i)\, \eta_i(i)\,. \tag{8.57}$$

Dabei sind die $Y_{l_i}^{m_i}(\vartheta, \varphi)$ Kugelfunktionen, die nur von den Winkeln abhängen. Mit

$$R_i(r_i) = u_i(r_i)/r_i \tag{8.58}$$

ergibt sich die Radialgleichung des Zentralfeldproblems zu

$$\left\{\frac{d^2}{dr_i^2} + \frac{2m_N}{\hbar^2}\left[E_{0i} - V(r_i) - \frac{l_i(l_i+1)}{2m_N r_i^2}\right]\right\} u_i(r_i) = 0\,. \tag{8.59}$$

Für den dreidimensionalen harmonischen Oszillator mit ($\omega_x = \omega_y = \omega_z = \omega_0$) erhält man als Lösung von (8.59) die Energie-Eigenwerte

$$E_{0i} = E_{nl} = \hbar\mathring{\omega}_0\left(n_1 + \frac{1}{2} + n_2 + \frac{1}{2} + n_3 + \frac{1}{2}\right) \tag{8.60 a}$$

$$= \hbar\mathring{\omega}_0\left(2n + l + \frac{3}{2}\right) \tag{8.60 b}$$

$$= \hbar\mathring{\omega}_0\left(N + \frac{3}{2}\right). \tag{8.60 c}$$

Dabei gilt

$$N = 2(n-1) + l\,, \tag{8.61 a}$$

$$N = 0, 1, 2, \ldots; \quad n = 1, 2, \ldots; \quad l = 0, 1, 2, \ldots \tag{8.61 b}$$

Die Lösungen können mit drei Quantenzahlen beschrieben werden. Man nennt N die Haupt- oder Oszillatorquantenzahl. Die Gruppe der Zustände mit einem N heißt Oszillatorschale N. Die Zustandsfolge ist äquidistant. Mit n ist die Radialquantenzahl bezeichnet. Sie gibt die Zahl der Nullstellen der Radialwellenfunktion $n\,(r_i)$ an. Wie üblich ist l die Bahndrehimpulsquantenzahl. Gemäß (8.61) ist die Oszillatorschale für Zustände mit verschiedenem $n - 1$ und l entartet. In Modellen mit anderen Potentialen kann die Entartung aufgehoben werden. In Abb. 8.12 ist links das Zustandsschema für den isotropen harmonischen Oszillator dargestellt, daneben für das Kastenpotential mit unendlich hohen Wänden. Zur Kennzeichnung der Zustände schreibt man in der Kernphysik im Unterschied zur Hüllenphysik vor das Bahndrehimpulssymbol die Radialquantenzahl n. Allgemein ist ein Zustand somit durch n, l gekennzeichnet. Im speziellen Falle mit $n = 3$ und $l = 1$ schreibt man $3p$. Damit numeriert n für gegebenes l, d. h. die Zustände (n, l), bei der niedrigsten Energie beginnend der Reihe nach durch. In Abb. 8.12 ist das dargestellt. Im betrachteten Beispiel ($3p$) handelt es sich um den dritten Zustand mit $l = 1$.

3. Als Kriterium für die Brauchbarkeit des Ergebnisses zählt unter anderem die richtige Antwort auf die Frage nach dem Schalenabschluß bei den magischen Zahlen. Insgesamt lassen sich bei Entartung auf jeder Schale N für jeden l-Wert $(2l + 1)$ Nukleonen unterbringen. Da die Nukleonen den Spin 1/2 haben, also zwei Einstellungsmöglichkeiten m_s sind es

$$N_N = Z_N = 2\sum_l (2l + 1) = (N + 1)\,(N + 2)\,. \tag{8.62}$$

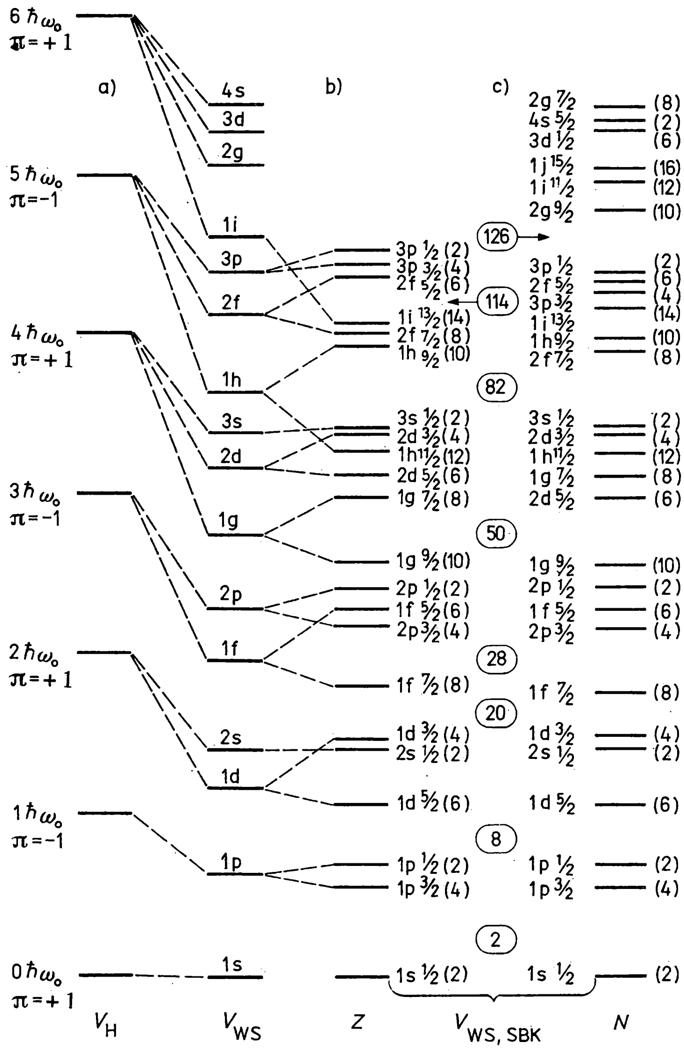


Abb. 8.12
Zustandsschema im Schalenmodell
a) für isotropes harmonisches Oszillatorpotential V_H
b) für Woods-Saxon-Potential V_{WS}
c) mit Spin-Bahn-Kopplung und Coulomb-Korrektur $V_{WS, SB, C}$

Wenn die Entartung hinsichtlich N aufgehoben ist, dann ist die Besetzungszahl eines Zustandes mit n

$$\nu_l = 2(2l + 1) \tag{8.63}$$

und

$$N_N = Z_N = \sum_l \nu_l . \tag{8.64}$$

Die magischen Zahlen ergeben sich durch Summation über alle Oszillatorschalen von $N = 0$ bis $N = N_0$ zu

$$N_m = Z_m = \sum_{N=0}^{N_0} N_N = \sum_{N=0}^{N_0} Z_N = \frac{1}{3}(N_0 + 1)(N_0 + 2)(N_0 + 3). \tag{8.65}$$

Zur Überprüfung der Übereinstimmung von Modellaussage und experimentellem Befund füllt man wie bei den Elektronenzuständen die Nukleonen nacheinander in das berechnete Zustandsschema ein, wobei das Pauli-Prinzip zu berücksichtigen ist. In Tabelle 8.3 sind für den Fall des harmonischen Oszillators und für $N = 0$ bis 6 die Energieverhältniszahlen $E_n/\hbar\mathring{\omega}_0$ eingetragen, die möglichen Zustände (nl), die Besetzungszahlen $N_N = Z_N$ sowie die Schalenabschlüsse $N_m = Z_m$. Man erkennt, daß nur die drei ersten magischen Zahlen reproduziert werden. Die darauf folgenden experimentell gesicherten magischen Zahlen liefern das Modell nicht. Das bedeutet jedoch nicht, daß das Modell völlig ungeeignet ist. Eine ähnliche Situation liegt bei den Elektronen der Hülle auch vor. Untersuchungen haben gezeigt, daß im Ansatz für V die Spin-Bahn-Kopplung unberücksichtigt geblieben war.

Tabelle 8.3
Besetzung der Energiezustände im Einteilchen-Schalenmodell des Atomkerns mit Oszillatorpotential

N	$E_N/\hbar\mathring{\omega}_0$	Zustand n, l	$\nu_l = 2(2l + 1)$	N_n, Z_n	N_m, Z_m
0	3/2	1s	2	2	2
1	5/2	1p	6	6	8
2	7/2	2s, 1d	2 + 10	12	20
3	9/2	2p, 1f	6 + 14	20	40
4	11/2	3s, 2d, 1g	2 + 10 + 18	30	70
5	13/2	3p, 2f, 1h	2 + 14 + 22	42	112
6	15/2	4s, 3d, 2g, 1i	2 + 10 + 18 + 26	56	168

Für die weiteren Betrachtungen ist die Größe der Oszillatorfrequenz $\mathring{\omega}_0$ beim mittleren Kernradius $R = r_0 \sqrt[3]{A}$, der sich aus (6.23) und (6.30) über $\langle r^2 \rangle$ ergibt, von Wichtigkeit. Sie läßt sich für einen Kern mit $Z = N = N_0 = A/2$ im Grundzustand berechnen, wenn man davon ausgeht, daß für das Oszillatorpotential (8.52) die mittlere kinetische Energie gleich der mittleren potentialen Energie ist:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{Z} E_{0i} + \sum_{i=1}^{N} E_{0i} = 2\sum_{i=1}^{A/2} E_{0i} &= A m_N \mathring{\omega}_0^2 \langle r^2 \rangle \\ &= 2\sum_{N=0}^{N_0} (N+1)(N+2)\left(N + \frac{3}{2}\right)\hbar\mathring{\omega}_0 \approx \frac{1}{2}(N_0 + 2)^4\,\hbar\mathring{\omega}_0\,.\end{aligned} \tag{8.66}$$

Außerdem ist

$$A = 2\sum_{N=0}^{N_0} (N+1)(N+2) \approx \frac{2}{3}(N_0 + 2)^3, \tag{8.67}$$

so daß sich aus (8.66) durch Einsetzen von N_0 ergibt

$$\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^{4/3} A^{4/3}\hbar\mathring{\omega}_0 = A m_N \mathring{\omega}_0^2\,\frac{3}{2}\,R^2, \tag{8.68}$$

also

$$\hbar\mathring{\omega}_0 = 41 A^{-1/3}\ \mathrm{MeV}. \tag{8.69}$$

4. Die richtigen Schalenabschlüsse wurden 1949 unabhängig voneinander einerseits von Maria Goeppert-Mayer und andererseits von O. Haxel, J. H. D. Jensen und H. S. Suess gefunden. Im Schalenmodell der Atomhülle ist eine auf der Grundlage der elektromagnetischen Wechselwirkung zustande kommende Spin-Bahn-Kopplung des Elektrons berücksichtigt. Dort entsteht sie infolge der relativistischen Bewegung des magnetischen Dipols „Elektron" im Falle der elektrischen Ladung. Sie führt zur Feinstruktur der Elektronenzustände. Eine solche Spin-Bahn-Kopplung wurde nun 1949 für die starke Wechselwirkung der Nukleonen gemäß

$$\boldsymbol{j} = \boldsymbol{l} + \boldsymbol{s}\,; \qquad j_+ = l + 1/2\,; \qquad j_- = l - 1/2 \tag{8.70}$$

eingeführt. In Analogie zum Elektron wurde für das mittlere Potential der Ansatz

$$V(\boldsymbol{r}_i) = V_0(\boldsymbol{r}) + V_{ls}(\boldsymbol{r}_i)\,(\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{s}) \tag{8.71}$$

gemacht. Der Betrag des Produkts der beiden Vektoren kann über den Erwartungswert in den Eigenzuständen von j berechnet werden:

$$\langle \boldsymbol{ls}\rangle = \frac{1}{2}[\langle \boldsymbol{j}^2\rangle - \langle \boldsymbol{l}^2\rangle - \langle \boldsymbol{s}^2\rangle] = \frac{1}{2}[j(j+1) - l(l+1) - s(s+1)]\,. \tag{8.72}$$

Für j_+ und j_- erhält man $l/2$ und $-(l+1)/2$. Damit folgt aus (8.71)

$$V(\boldsymbol{r}_i) = V_0(\boldsymbol{r}_i)\begin{cases} +V_{ls}/2 & \text{für } j_+\,, \\ -V_{ls}(l+1)/2 & \text{für } j_-\,. \end{cases} \tag{8.73}$$

Damit sich die richtigen Energien ergeben, müssen $V_0 < 0$ und $V_{ls} < 0$ sein. So bekommt ein Zustand mit j_- energetisch höher zu liegen, ein Zustand mit j_+ niedriger. Ein Zustand np oder nd spaltet auf zu

$$n\mathrm{p} \begin{cases} n\mathrm{p}_{1/2} \\ n\mathrm{p}_{3/2} \end{cases}, \qquad n\mathrm{d} \begin{cases} n\mathrm{d}_{3/2} \\ n\mathrm{d}_{5/2} \end{cases}. \tag{8.74}$$

Der Energieunterschied zwischen zwei Zuständen beträgt

$$\Delta E = V_{ls}(2l + 1)\,. \tag{8.75a}$$

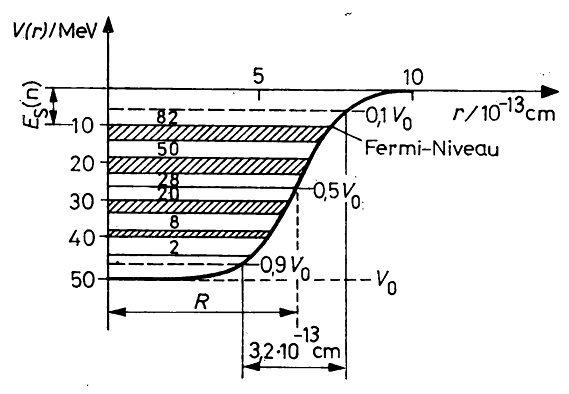


Abb. 8.13
Neutronenzustände eines Kerns mit $N = 82$ im Woods-Saxon-Potential mit Spin-Bahn-Kopplung für $V_0 = 51$ MeV, $R = 6{,}2 \cdot 10^{-13}$ cm und $a = 0{,}73 \cdot 10^{-13}$ cm

Aus den experimentell bestimmten Energieunterschieden zwischen den Komponenten eines Spin-Bahn-Dubletts mit $j = l \pm 1/2$ wurde ein empirischer Wert

$$\Delta E = -20(\boldsymbol{l} \cdot \boldsymbol{s})\, A^{-2/3}\ \mathrm{MeV} \tag{8.75b}$$

ermittelt. Hierbei handelt es sich um eine Näherung, die bei schweren Kernen gut, bei leichten weniger gut gilt.

Im Vergleich zur Atomhülle hat die durch die Spin-Bahn-Kopplung verursachte Aufspaltung nicht nur das umgekehrte Vorzeichen. Sie nimmt Werte an, die in der Größenordnung der Zustandsenergie selbst liegen. Aber gerade damit ergeben sich die richtigen Schalenabschlüsse. Die neuen Verhältnisse sind in den Abbn. 8.12c und 8.13 dargestellt. Aus Tabelle 8.4 können die Besetzungen für das Neutronensystem abgelesen werden.

Tabelle 8.4.
Besetzung der Energiezustände im Einteilchen-Schalenmodell des Atomkerns mit Woods-Saxon-Potential und Spin-Bahn-Kopplung für das Neutronensystem

N	$n-1$	l	n, l	j	v	$\Sigma\, v$	N_m
0	0	0	1s	1/2	2	2	2
1	0	1	1p	3/2	4		
				1/2	2	6	8
2	0	2	1d	5/2	6		
				3/2	4		
	1	0	2s	1/2	2	12	20
3	0	3	1f	7/2	8		
				5/2	6		
	1	1	2p	3/2	4		
				1/2	2		
4	0	4	1g	9/2	10	30	50
4	0	4	1g	7/2	8		
	1	2	2d	5/2	6		
				3/2	4		
	2	0	3s	1/2	2		
5	0	5	1h	11/2	12	32	82
5	0	5	1h	9/2	10		
	1	3	2f	7/2	8		
				5/2	6		
	2	1	3p	3/2	4		
				1/2	2		
6	0	6	1i	13/2	14	44	126

Wie im Falle ohne Spin-Bahn-Kopplung gilt wieder (8.61a, b). Da es sich um Fermionen handelt, können die Zustände nur so besetzt werden, daß die Nukleonen einer Sorte nicht in allen vier Quantenzahlen n, l, j und m_j übereinstimmen. Wenn keine Richtung ausgezeichnet ist, haben bei festem j alle $(2j + 1)$ Nukleonen die gleiche Energie. Auf der j-Schale können also

$$v_j = 2j + 1 \tag{8.76}$$

Nukleonen untergebracht werden. Für die magischen Zahlen gilt dann in Übereinstimmung mit (8.65)

$$N_{\mathrm{m}} = Z_{\mathrm{m}} = \Sigma\, v_j\,. \tag{8.77}$$

Bis $Z = N = 20$ ergibt sich der richtige Schalenabschluß wie beim Modell ohne Spin-Bahn-Kopplung, d. h. ohne Besonderheiten. Für $Z = N = 28$ kommt dadurch ein Schalenabschluß zustande, daß der Abstand zwischen dem $f_{7/2}$- und dem $f_{5/2}$-Zustand infolge der Spin-Bahn-Kopplung sehr groß ist. Dabei gehören jedoch die Nukleonen der drei Zustände $f_{7/2}$, $f_{5/2}$ und $p_{1/2}$ zu $N = 3$.

Zum Schalenabschluß bei $Z = N = 50$ führt eine Besonderheit, die auch für die höheren Abschlüsse in einem Modell mit starker Spin-Bahn-Kopplung charakteristisch ist. Durch die große Spin-Bahn-Aufspaltung des ($N = 4$, $l = 4$)-Zustandes entsteht zwischen dem $g_{9/2}$- und dem $d_{5/2}$-Zustand ein so großer Energieunterschied, daß die Unterschalen mit $p_{3/2}$, $f_{7/2}$, $p_{1/2}$ und $g_{9/2}$ zu einer Schale zusammengefaßt werden müssen. Der Abschluß der Schale kommt also durch eine Unterschale mit $N = 4$, einem „Eindringling" von oben zustande. Analoges gilt für die nächste Schale, die hauptsächlich durch Zustände mit $N = 5$ gebildet wird, aber auch durch die Unterschale $1i_{13/2}$ mit $N = 6$.

In diesem Zusammenhang soll noch einmal auf den Begriff der Schale aufmerksam gemacht werden. In Punkt 3 von 8.3.1. wurde bereits auf den im Vergleich zu früher geänderten Inhalt verwiesen. Eine Schale ist die Gesamtheit von Zuständen oder Unterschalen zwischen zwei magischen Zahlen. Die Bindung des Begriffs der Schale an die Hauptquantenzahl N mußte fallen gelassen werden.

5. Aus Abb. 8.12c ist zu ersehen, daß sich das Zustandsschema für Protonen von dem für Neutronen oberhalb der magischen Zahl 50 zu unterscheiden beginnt. Das ist eine Folge der Coulomb-Wechselwirkung zwischen den Nukleonen. Mit steigender Zustandsenergie nimmt die Tendenz zu, daß Protonen mit dem gleichen Drehimpuls wie Neutronen energetisch tiefer eingebaut werden. Typische Beispiele sind die Zustände $2d_{5/2}$ und $1g_{7/2}$ sowie $2f_{7/2}$ und $1h_{9/2}$. Darüber hinaus ergeben sich auch unterschiedliche Schalenabschlüsse: Für Neutronen bei 126, für Protonen wahrscheinlich bereits bei 114. Da es noch nicht gelungen ist, Kerne oberhalb $Z = 109$ zu synthetisieren, geschweige denn zu untersuchen, ist die Frage noch offen, ob es wirklich bei $Z = 114$ eine magische Protonenzahl gibt oder nicht.

6. Eine der wichtigsten Annahmen, die zum Erfolg des Schalenmodells notwendig war, ist die Existenz der Spin-Bahn-Kopplung des Nukleons. Daher ist ihr direkter Nachweis in vielen Experimenten erbracht worden. Sehr geeignet dazu sind Doppelstreu-Experimente zum Nachweis einer Links-Rechts-Asymmetrie oder Polarisation. In Meßanordnungen, wie sie Abb. 6.38 und 7.4 zeigt, wurden bei den unterschiedlichsten Energien der Wechselwirkungspartner Kern-Kern-, Nukleonen-Kern- und Nukleon-Nukleon-Doppelstreuungen untersucht. Die gefundene Polarisation entspricht einer Spin-Bahn-Kopplung von gleichem Vorzeichen und gleicher Stärke, wie sie für das Schalenmodell erforderlich ist.

8.3.4. Aussagen des Einteilchen-Schalenmodells

1. Der erste große Erfolg, der mit dem Einteilchen-Schalenmodell erzielt werden konnte, war die Erklärung der magischen Zahlen durch die volle Besetzung energetisch hinreichend deutlich voneinander getrennter Zustandsgruppen. Dazu wird jedes Nukleon in einem mittleren Potential betrachtet, das von allen Nukleonen erzeugt wird und in dem es einen Einteilchen-Zustand besetzt. Die Restwechselwirkungen zwischen den Nukleonen werden vernachlässigt, so daß das Potential zentralsymmetrisch angesetzt werden kann. Infolge der Zentralsymmetrie

kann man nicht erwarten, daß dieses Modell auf deformierte Kerne angewendet werden kann. Es gilt nur für die sphärischen Kerne in der Nähe der magischen Zahlen.

2. In 6.4.3. wurde als eines der wichtigsten Ergebnisse der experimentellen Spinbestimmungen und der Messungen der magnetischen Momente der Kerngrundzustände die Tatsache herausgestellt, daß bei allen gg-Kernen Spin und magnetisches Moment verschwinden, daß alle uA-Kerne halbzahligen Spin und kleine magnetische Momente haben und daß sich alle uu-Kerne durch ganzzahligen und vom Betrag her ebenfalls kleinen Spin und durch kleine Werte des magnetischen Moments auszeichnen. Darauf gründet sich die Erkenntnis, daß Spin und magnetisches Moment der Kerne hauptsächlich durch die gegenseitige Kompensation der Spins und magnetischen Momente der sich zu Paaren anordnenden gleichartigen Nukleonen und durch die unpaarigen Nukleonen bestimmt werden. T. SCHMIDT untersuchte 1937 in Analogie zum Vektormodell des Atoms ein Kernmodell mit Rumpf und Leuchtnukleon für uA-Kerne. Dem gg-Rumpf ordnete er den Spin Null und ein verschwindendes magnetisches Moment zu. Der Spin und das magnetische Moment des uA-Kerns wurde aus dem Spin und dem magnetischen Moment des unpaarigen Nukleons allein hergeleitet.

Die Berechnung des magnetischen Dipolmoments kann wegen (6.91) und (6.124) von dem Ansatz

$$\boldsymbol{\mu}_{\mathrm{N}}^* = \boldsymbol{\mu}_{\mathrm{N}}\mu_{\mathrm{K}} = \mu_{\mathrm{N}}\mu_{\mathrm{K}}\frac{\boldsymbol{I}}{|\boldsymbol{I}|} = \mu_{\mathrm{K}} g_{\mathrm{N}}\boldsymbol{I} = \mu_{\mathrm{K}}(g_l \boldsymbol{l} + g_s \boldsymbol{s}) \tag{8.78}$$

ausgehen. In Übereinstimmung mit der Definition des magnetischen Dipolmoments in 6.4.1., Punkt 1, ergibt sich jetzt

$$\mu_{\mathrm{N}} \equiv \langle \boldsymbol{\mu}_{\mathrm{N}} \rangle_j = \left\langle \frac{\boldsymbol{\mu}_{\mathrm{N}}\boldsymbol{j}}{|\boldsymbol{j}|}\,\frac{j_z}{|\boldsymbol{j}|} \right\rangle \tag{8.79}$$

In der Abb. 6.26 sind die Vektorverhältnisse dargestellt. Wie in 6.4.1. beschrieben, kommt es bei Vorhandensein eines Magnetfeldes anstelle von μ_N zu μ_{eff}. Mit

$$\langle j_z \rangle = \mathrm{j}\,; \qquad \langle j^2 \rangle = j(j+1) \tag{8.80}$$

ergibt sich

$$\mu_{\mathrm{N}} = \frac{1}{j+1}\langle \boldsymbol{\mu}_{\mathrm{N}}^* \boldsymbol{j} \rangle\; m = j = \boldsymbol{I}\,. \tag{8.81}$$

Setzt man $\boldsymbol{\mu}_{\mathrm{N}}^*$ gemäß (8.78) ein und nutzt man die Beziehungen

$$2\boldsymbol{lj} = \boldsymbol{j}^2 + \boldsymbol{l}^2 - \boldsymbol{s}^2\,; \qquad 2\boldsymbol{sj} = \boldsymbol{j}^2 - \boldsymbol{l}^2 + \boldsymbol{s}^2 \tag{8.82}$$

sowie

$$\boldsymbol{l}^2 = l(l+1)\,; \qquad \boldsymbol{s}^2 = s(s+1)\,, \tag{8.83}$$

dann findet man

$$\text{für } j_+ : \mu_{\mathrm{N}} = \left[\left(j - \frac{1}{2}\right) g_l + \frac{1}{2}\, g_s\right]\mu_{\mathrm{K}}\,, \tag{8.84a}$$

$$\text{für } j_- : \mu_{\mathrm{N}} = \left[\left(1 + \frac{1}{2(j+1)}\right) g_l \cdot j - \frac{g_s j}{2(j+1)}\right]\mu_{\mathrm{K}}\,. \tag{8.84b}$$

Zu übersichtlicheren Ausdrücken kommt man durch Einsetzen der Zahlenwerte für g_l und g_s aus Tabelle 6.5. Im Falle von Kernen mit unpaarigem Proton erhält man

$$\text{für } j_+: \quad \mu_N = (j + 2{,}293)\,\mu_K\,, \tag{8.85a}$$

$$\text{für } j_-: \quad \mu_N = \frac{j^2 - 1{,}293j}{j+1}\,\mu_K\,, \tag{8.85b}$$

im Falle von Kernen mit unpaarigem Neutron folgt

$$\text{für } j_+: \quad \mu_N = -1{,}913\mu_K\,, \tag{8.86a}$$

$$\text{für } j_-: \quad \mu_N = \frac{1{,}913}{1+j}\mu_K\,. \tag{8.86b}$$

Die graphische Darstellung der Gleichungen (8.85, 86) nennt man Schmidtsche Linien. Sie sind in Abb. 8.14 gezeigt. Wenn das Modell richtig ist, dann müssen alle experimentellen Werte auf diesen Linien liegen. Offensichtlich ist das nicht der Fall. Mit wenigen Ausnahmen liegen sie aber zwischen ihnen. Genauer gesagt gruppieren sie sich in zwei Bänder für Kerne mit ungepaartem Proton unterhalb der Linie für j_+ und oberhalb für j_-, für Kerne mit ungepaartem Neutron unterhalb von $j = l - 1/2$ und oberhalb von $j = l + 1/2$. Damit das besser gesehen werden kann, sind die Schmidtschen Linien für den Fall des Diracschen Protons und Neutrons mit $\mu_p = 1$ und $\mu_n = 0$ mit eingezeichnet. Der Vergleich zeigt, daß die Einteilchen-Schalenmodell-Voraussage zwar die experimentellen Werte nicht ganz richtig bechreibt, sie jedoch im wesentlichen in den richtigen Grenzen einengt. Dadurch war es oft möglich, auf Grund eines experimentell bestimmten Dipolmomentwertes den Spin richtig zu bestimmen. Die genauen Werte können nur berechnet werden, wenn nicht nur Einteilchenkonfigurationen Berücksichtigung finden. Das Ergebnis einer Näherungsrechnung ist ein Korrekturterm zu (8.84), der für j_- und j_+ die Form

$$\mu'_N \approx \frac{1}{4}\frac{2j+1}{2j+2}\mu_K \tag{8.87}$$

hat.

3. Im Rahmen der Voraussetzungen des Einteilchen-Schalenmodells kann man auch die Quadrupolmomente berechnen, die sich im Falle der uA-Kerne für Einteilchen- oder Einlochzustände ergeben. Übereinstimmung zwischen experimentellen und berechneten Werten gibt es für ein Nukleon über eine magische Zahl hinaus oder eines darunter. Die Rechnung geht von (6.204) aus. Ein einzelnes Proton verursacht für $m = I$ den Beitrag

$$Q = -\frac{2j-1}{2j+1}\,\langle r^2\rangle\,. \tag{8.88a}$$

Daraus ergibt sich für einen Kern mit abgeschlossener Schale und einem Valenzproton

$$Q_{ug} = -\frac{3}{5}\frac{2I-1}{2I+2}R^2\,. \tag{8.88b}$$

Für einen Kern, in dem ein Proton zur abgeschlossenen Schale fehlt, muß das umgekehrte Vorzeichen genommen werden. Auch für den Fall, daß ein Neutron mehr oder weniger im Kern enthalten ist, als der magischen Zahl entspricht, kann man einen Schätzwert angeben. Ein einzelnes Neutron kann zwar infolge seiner Ladungslosigkeit nicht unmittelbar ein elektrisches Quadrupolmoment erzeugen; es steht aber außer Zweifel, daß es eine Bewegung aller Nukleonen relativ zum Massenmittelpunkt erzeugen kann. Tatsächlich findet man bei solchen Kernen ein

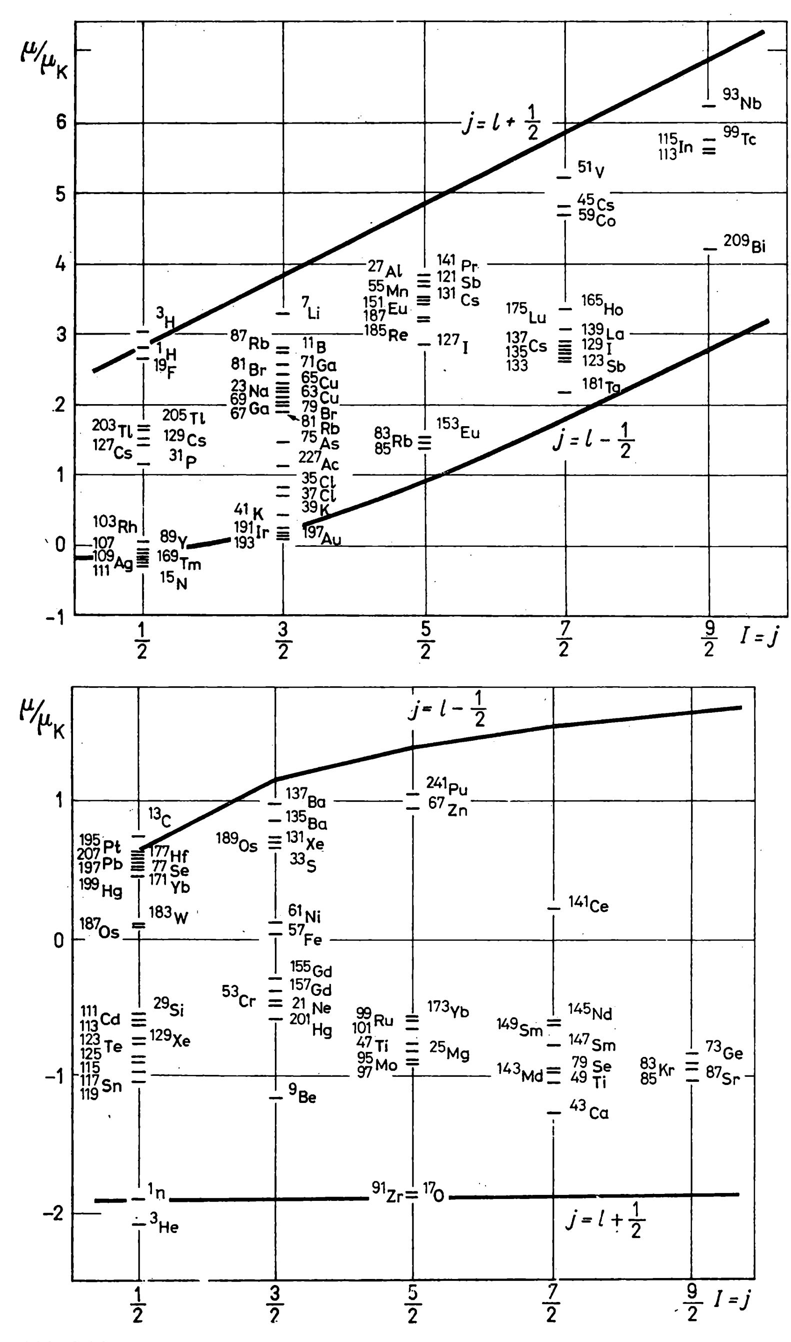


Abb. 8.14
Schmidtsche Linien und magnetische Dipolmomente
a) für uZ-Kerne, b) für uN-Kerne

statisches Quadrupolmoment, allerdings um einen Faktor Z/A^2 kleiner als bei den Kernen mit ungerader Protonenzahl. In Übereinstimmung damit setzt man

$$Q_{gu} = \frac{Z}{A^2} Q_{ug} . \tag{8.88c}$$

Für ein Neutronenloch muß wieder das Vorzeichen umgekehrt werden. Es gibt Beispiele, in denen diese Übereinstimmung vorhanden ist. In vielen Fällen fehlt sie jedoch. Die Abweichungen der mit solch einfachen Rechnungen erhaltenen Werte von den experimentellen betragen bis zu einen Faktor 10 und mehr. Nur in der Nähe der magischen Zahlen gibt es näherungsweise Übereinstimmung. So wird z. B. experimentell bestätigt, daß die Kerne ^{17}O ($d_{5/2}$), ^{62}Cu ($p_{3/2}$), ^{121}Sb ($d_{5/2}$), ^{123}Sb ($g_{7/2}$), ^{209}Bi ($h_{9/2}$) und andere ein negatives Quadrupolmoment haben, während sich die Kerne ^{11}B ($p_{3/2}$), ^{35}S ($d_{3/2}$), ^{113}In ($g_{9/2}$) und andere durch positive Werte auszeichnen. Bei größeren Nukleonenzahlen in der äußeren Schale hängt das Quadrupolmoment stark von den Energiezuständen der äußeren Nukleonen ab.

4. Auch der Kernspin ist ein geeigneter Prüfstein für die Aussagen des Einteilchen-Schalenmodells. Geht man davon aus, daß infolge der Restwechselwirkung immer zwei Nukleonen einer Art zum Drehimpuls 0 koppeln, dann müssen gg-Kerne im Grundzustand durch $I = 0$ gekennzeichnet sein. Genau das wird in Übereinstimmung mit 6.4.3.3 ausnahmslos beobachtet. Im Rahmen des Schmidtschen Einteilchenmodells wird der Kernspin vom ungepaarten Nukleon bestimmt. Im Einteilchen-Schalenmodell ist der Spin des Kerns gleich dem j-Wert des Zustandes, den das Nukleon besetzt. Als Beispiel sei der Kern $^{17}_{8}O_9$ genannt. Das ungepaarte Neutron befindet sich auf der 1 $d_{5/2}$-Schale. Der experimentelle Wert beträgt auch 5/2. Kerne mit einem Nukleon weniger, als einer abgeschlossenen Schale entspricht, sollten sich durch einen Spin auszeichnen, der durch die Quantenzahlen des Lochs bestimmt wird. Ein Beispiel ist der Kern $^{15}_{8}O_7$. Er hat den Spin 1/2, was einem Loch in der 1 $p_{1/2}$-Schale entspricht.

Da in dem betrachteten Modell mit verschwindender Restwechselwirkung alle Nukleonen einer Unterschale die gleiche Energie haben, ist es im allgemeinen nicht möglich, mit diesem Modell den Grundzustandsspin von Kernen vorauszusagen, bei denen sich mehr als zwei Nukleonen in einer Unterschale befinden, bzw. fehlen. Die Nukleonen solcher Unterschalen können zu den verschiedensten Spins koppeln, ausgenommen die durch das Pauliprinzip verbotenen. So können z. B. in der $f_{7/2}$-Schale zwei Nukleonen zu $I = 0, 2, 4, 6$ koppeln, nicht aber zu 1, 3, 5, 7. Auf die Aufhebung der Entartung durch die Restwechselwirkung kommen wir in 8.6.3. zu sprechen. Die Auswirkung der wichtigsten Zwei-Nukleonen-Restwechselwirkungen auf den Kernspin lassen sich in einigen empirischen Kopplungsregeln für den Grundzustand erfassen:

a) Der Grundzustand von gg-Kernen hat infolge der paarweise antiparallelen Einstellung der Spins einer Nukleonensorte immer den Wert $I = 0$.

b) In den uA-Kernen koppeln die Nukleonen der Außenrumpf-Unterschale zum Spin $I = j$, in seltenen Fällen dreier Nukleonen oder Löcher zu $I = j - 1$. Beispiele sind ^{21}Ne mit $I = 3/2^+$ anstelle von $5/2^+$, ^{47}Ti mit $5/2^-$ anstelle von $7/2^-$ und ^{79}Se mit $7/2^+$ anstelle von $9/2^+$.

c) Bei den uu-Kernen sind zwei Fälle zu unterscheiden, die durch die Nordheim-Zahl

$$N = j_p - l_p + j_n - l_n \tag{8.89}$$

und die Nordheim-Regeln erfaßt werden. Da die beiden Differenzen immer $+1/2$ oder $-1/2$ ergeben, kann N nur die Werte 0 oder ± 1 annehmen. Im Falle entgegengesetzten Vorzeichens sind j_p und j_n antiparallel eingestellt, die Spins s_p und s_n jedoch parallel. Das entspricht dem Spin-Triplett-Zustand, wie er vom Deuteron her bekannt ist. In diesem Falle gilt die starke Nordheim-Regel mit

$$N = 0 ; \qquad I = |j_n - j_p| . \tag{8.90a}$$

Im Spin-Singlett-Zustand des Zweinukleonensystems müssen j_p und j_n gleiches Vorzeichen haben, denn nur dann sind s_n und s_p antiparallel eingestellt. Es gilt dann die schwache Nordheim-Regel mit

$$N = \pm 1\,; \qquad I = j_n + j_p \quad \text{oder} \quad |j_n - j_p|\,. \tag{8.90b}$$

In genaueren Betrachtungen ist zu berücksichtigen, ob Teilchen-Teilchen- oder Teilchen-Loch-Zustände miteinander koppeln. Diese Regeln ermöglichen die richtige Ermittlung vieler Grundzustandspins sphärisch-symmetrischer Kerne.

5. In Übereinstimmung mit 6.5.2 ist die Parität der Nukleonen in den Zuständen des Schalenmodells durch die Bahndrehimpulsquantenzahl l festgelegt. Daher haben alle Nukleonen einer Unterschale gleiche Parität. Für $l = 0, 1, 2, \ldots$ ist $P = +1, -1, +1, \ldots$ Wegen (8.61) haben darüber hinaus alle Zustände mit gleichem Wert N ebenfalls gleiche Parität. Auf diese Weise zeichnen sich die Grundzustände der uA-Kerne durch positive oder negative Parität aus, je nachdem, ob sich das ungepaarte Nukleon auf einem s-, d-, g- usw. oder p-, f-, h- usw. Zustand befindet.

Die Prüfung der Richtigkeit der durch das Einteilchen-Schalenmodell vorausgesagten Paritäten ist insbesondere durch experimentell ermittelte Übergangswahrscheinlichkeiten von Kernzerfällen und Wirkungsquerschnitten von Kernreaktionen möglich. Diese sind nicht nur Funktion der Spins, sondern auch der Paritäten der Anfangs- und Endzustände. Auf diese Abhängigkeiten kommen wir bei der Behandlung des Kernzerfalls und der Kernreaktionen zu sprechen.

6. Das Einteilchen-Schalenmodell eignet sich auch zur Interpretation von Anregungszuständen der Kerne in der Nähe der magischen Zahlen. Dabei geht man davon aus, daß bei der Anregung die Nukleonen des Rumpfes auf ihren Zuständen verbleiben, während das ungepaarte Nukleon auf höhere Einteilchen-Schalenmodell-Zustände (Einteilchenzustände) gehoben wird. In Abb. 8.15 sind zwei Beispiele dargestellt. Im Falle des $^{209}_{82}Pb_{127}$ gibt es ein Leuchtneutron, im Falle des $^{207}_{82}Pb_{125}$ fehlt ein Neutron zum doppelt magischen Kern. Im ersten Falle können die Anregungen als Einteilchenzustände, im zweiten als Einlochzustände interpretiert werden. Es treten aber auch modellfremde Zustände auf. Im Falle des ^{209}Pb ist das der Zustand bei 2,15 MeV, im Falle des ^{207}Pb der bei 2,71 MeV. Die Ursache solcher modellfremder Zustände wird vom Einteilchen-Schalenmodell nicht erfaßt. So kann z. B. die Paarenergie kleiner sein, als die Energie eines Einteilchenzustandes. In diesem Falle gibt es eine relativ große Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein Paar aufgebrochen und eins der Nukleonen auf einen höheren Zustand gehoben wird. Es gibt auch die Möglichkeit, daß ein ganzes Paar auf einen höheren

a) $^{207}_{82}Pb_{125}$

E^*/MeV	I^π	$n_r\ l_j$
2,71	$9/2^+$	
2,34	$7/2^-$	$2\ f^{-1}_{7/2}$
1,63	$13/2^+$	$1\ i^{-1}_{13/2}$
0,89	$3/2^-$	$3\ p^{-1}_{3/2}$
0,57	$5/2^-$	$2\ f^{-1}_{5/2}$
0	$1/2^-$	$3\ p^{-1}_{1/2}$

b) $^{209}_{82}Pb_{127}$

E^*/MeV	I^π	$n_r\ l_j$
2,54	$3/2^+$	$3\ d_{3/2}$
2,49	$7/2^+$	$2\ g_{7/2}$
2,15	$1/2^-$	
2,03	$1/2^+$	$4\ s_{1/2}$
1,57	$5/2^+$	$3\ d_{5/2}$
1,42	$15/2^-$	$1\ j_{15/2}$
0,78	$11/2^+$	$1\ i_{11/2}$
0	$9/2^+$	$2\ g_{9/2}$

Abb. 8.15
Zustandsschemata von a) ^{207}Pb und b) ^{209}Pb und Vergleich mit Einteilchen-Schalenmodell-Zuständen

Zustand gehoben wird. Auch solche Zweiteilchenzustände werden nicht vom Einteilchen-Schalenmodell beschrieben.

7. Ein anderer Erfolg des Einteilchen-Schalenmodells ist die Erklärung der sogenannten Isomerieinseln. Sie sind in Abb. 8.16 dargestellt. Zwischen den Nukleonenzahlen 39 und 49, 65 und 81 sowie 101 und 125 treten gehäuft langlebige angeregte Kernzustände, Isomere auf. Die Ursache für die Langlebigkeit ist ein besonders großer Spinunterschied zwischen Anfangs- und Endzustand der Abregung. In 9.6.3.2., Punkt 3, wird gezeigt, daß in diesen Fällen die Übergangswahrscheinlichkeit sehr klein ist. In Übereinstimmung mit dem Einteilchen-Schalenmodell gibt es Fälle, in denen der erste Anregungszustand eines uA-Kerns dicht über dem Grundzustand zu liegen kommt und gleichzeitig ein großer j-, d. h. l-Unterschied vorhanden ist. Aus Abb. 8.12c sieht man mehrere Möglichkeiten. Tatsächlich liegen die Isomerieinseln mit Z und N zwischen 39 und 49 dort, wo die 2 $p_{1/2}$- und 1 $g_{9/2}$-Schalen besetzt werden, zwischen 65 und 81, wo die 3 $s_{1/2}$- und 2 $d_{3/2}$-Schalen dicht über der 1 $h_{11/2}$-Schale liegen sowie 101 und 125, wo die 2 $f_{5/2}$-, 3 $p_{3/2}$- und 3 $p_{1/2}$-Schalen über der 1 $i_{13/2}$-Schale liegen.

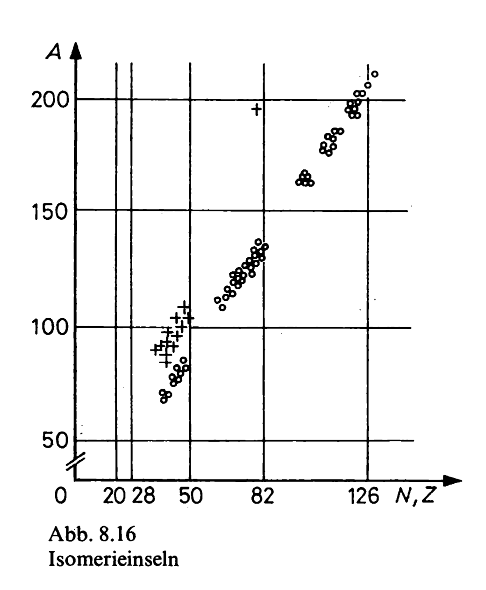


Abb. 8.16
Isomerieinseln

8.3.5. Schalenmodell mit axialsymmetrisch-elliptischem Potential

1. Das Einteilchen-Schalenmodell eignet sich nur für sphärisch-symmetrische Kerne, da ein sphärisch-symmetrisches Potential in Ansatz gekommen ist. Die Existenz der großen Quadrupolmomente in den Gebieten zwischen den magischen Zahlen deutet, wie bereits in 6.8.2. besprochen, auf Kerndeformationen hin. Ohne zunächst auf die Ursache der Kerndeformationen einzugehen, sollen hier die Zustände der Nukleonen in einem axialsymmetrisch-elliptischen Potential berechnet werden. Dabei geht man davon aus, daß die betrachteten Kerne rotationselliptische Form haben. Für praktische Rechnungen verwendet man heute ein entsprechend deformiertes Woods-Saxon-Potential. Da die Lösungen der Schrödinger-Gleichungen mit diesem Potential jedoch nicht in geschlossener Form angegeben werden können, gehen wir der Anschaulichkeit

halber von dem bereits 1955 von S. G. NILSSON benutzten elliptisch deformierten Oszillatorpotential aus:

$$V(r) = \frac{m}{2}[\omega_{xy}^2(x^2 + y^2) + \omega_z^2 z^2]; \quad \omega_{xy} = \omega_\perp . \tag{8.91}$$

Man sieht, daß die z-Achse zur Symmetrieachse des Rotationsellipsoids gemacht worden ist, so daß $\omega_{xy} = \omega_\perp$ gesetzt werden kann. Den Term der starken Spin-Bahn-Wechselwirkung hat NILSSON durch ein Interpolationsglied erweitert, was zu einer Angleichung des Oszillator- an das Woods-Saxon-Potential führt. Der Hamilton-Operator dieses sogenannten Nilsson-Modells lautet

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V_N(r) = H_0 + C(l \cdot s) + Dl^2 \tag{8.92}$$

mit

$$V_N(r) = \frac{m}{2}[\omega_\perp^2(x^2 + y^2) + \omega_z^2 z^2] + C(l \cdot s) + Dl^2 , \tag{8.93}$$

$$V_{ls}(r) = \text{const} = C < 0 ; \qquad D = \text{const} < 0 . \tag{8.94}$$

Der Deformationsparameter δ wurde ausgehend von der großen und kleinen Achse c, bzw. a des Rotationsellipsoids sowie von seinem mittleren Radius R definiert zu

$$\delta = \frac{c - a}{R_0}; \qquad R_0 = \frac{a + c}{2}. \tag{8.95}$$

Manchmal wird auch

$$\varepsilon = \delta\left(1 + \frac{1}{2}\delta\right) \tag{8.96}$$

verwendet. Aus der Bedingung der Inkompressibilität der Kernmaterie folgt mit dem Radius R_K einer Kugel gleichen Rauminhalts

$$\frac{4\pi}{3}R_K^3 = \frac{4\pi}{3}a^2 c \tag{8.97}$$

für die Frequenzen

$$\omega_\perp^2\omega_z = \text{const} ; \qquad \omega_\perp^2 = \omega_0^2\left(1 + \frac{2}{3}\delta\right); \qquad \omega_z^2 = \omega_0^2\left(1 - \frac{4}{3}\delta\right); \tag{8.98 a}$$

$$\omega_0(\delta) = \mathring{\omega}_0\left(1 - \frac{4}{3}\delta - \frac{16}{27}\delta^3\right)^{-1/6} . \tag{8.98 b}$$

Dabei ist $\mathring{\omega}_0$ der Wert von ω_0 bei $\delta = 0$, d. h. der Wert von (8.69).

2. Die Lösung der Schrödinger-Gleichung mit dem Nilsson-Potential (8.93) liefert die Zustandsenergien der Nukleonen als Funktion vom Deformationsparameter δ. Die Konstanten D und C werden so gewählt, daß für den kugelsymmetrischen Fall mit $\delta = 0$ die experimentell bestimmten Einteilchenzustände erhalten werden. Typische Werte für die fast nicht von der Deformation abhängenden Parameter sind unter Berücksichtigung von (8.69)

$$C = -0{,}1\hbar\mathring{\omega}_0 ; \qquad D = -0{,}02\hbar\mathring{\omega}_0 . \tag{8.99}$$

Die Bewegung der Nukleonen kann bei Zugrundelegung des Nilsson-Potentials in unabhängige Oszillatoren längs der Kernsymmetrieachse z' und senkrecht zu ihr separiert werden. Die Eigenwerte der Energie ergeben sich dann zu

$$E(n_z, n_\perp) = \hbar\omega_z(n_z + 1/2) + \hbar\omega_\perp(n_\perp + 1) \tag{8.100}$$

mit

$$n_\perp = n_x + n_y \tag{8.101}$$

als Zahl der Oszillatorquanten senkrecht zu z' und mit

$$N = n_z + n_\perp \tag{8.102}$$

als Gesamtzahl der Oszillatorquanten.

Zur graphischen Darstellung wählt man das Nilsson-Diagram. In Abb. 8.17 sind die untersten Zustände bis zur magischen Zahl 28 eingezeichnet. Für $\delta = 0$ ergeben sich die über C und D eingegangenen experimentellen Einteilchen-Zustände. Links davon ist für $\delta < 0$ der Verlauf der Zustandsenergie bei linsenförmiger Deformation zu entnehmen, rechts davon für $\delta > 0$ der für zigarrenförmige Deformation. Abb. 8.18 zeigt die Zustände oberhalb Z, $N = 82$. Die Coulomb-

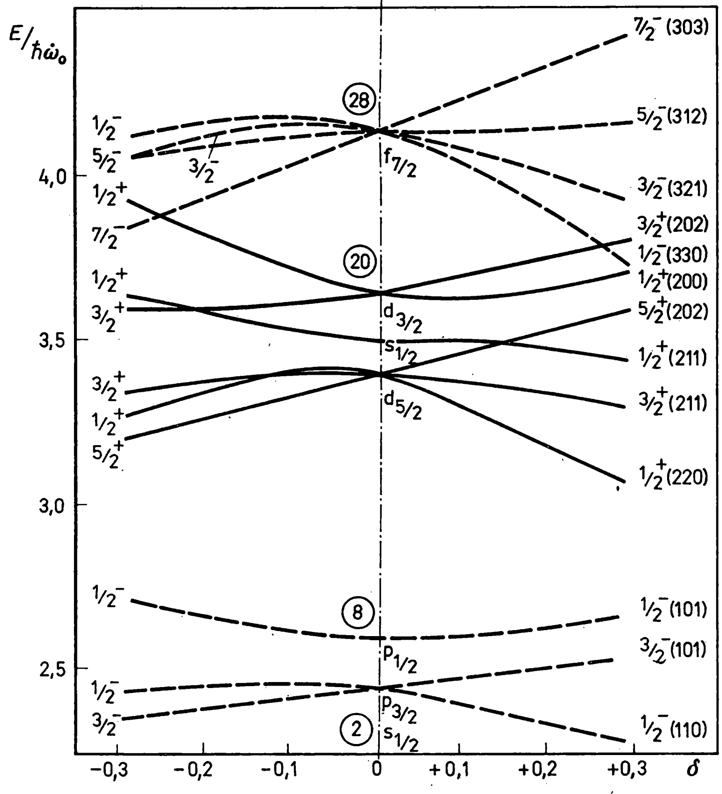


Abb. 8.17
Einteilchenzustände im Schalenmodell mit Nilsson-Potential bis $Z_m = N_m = 28$

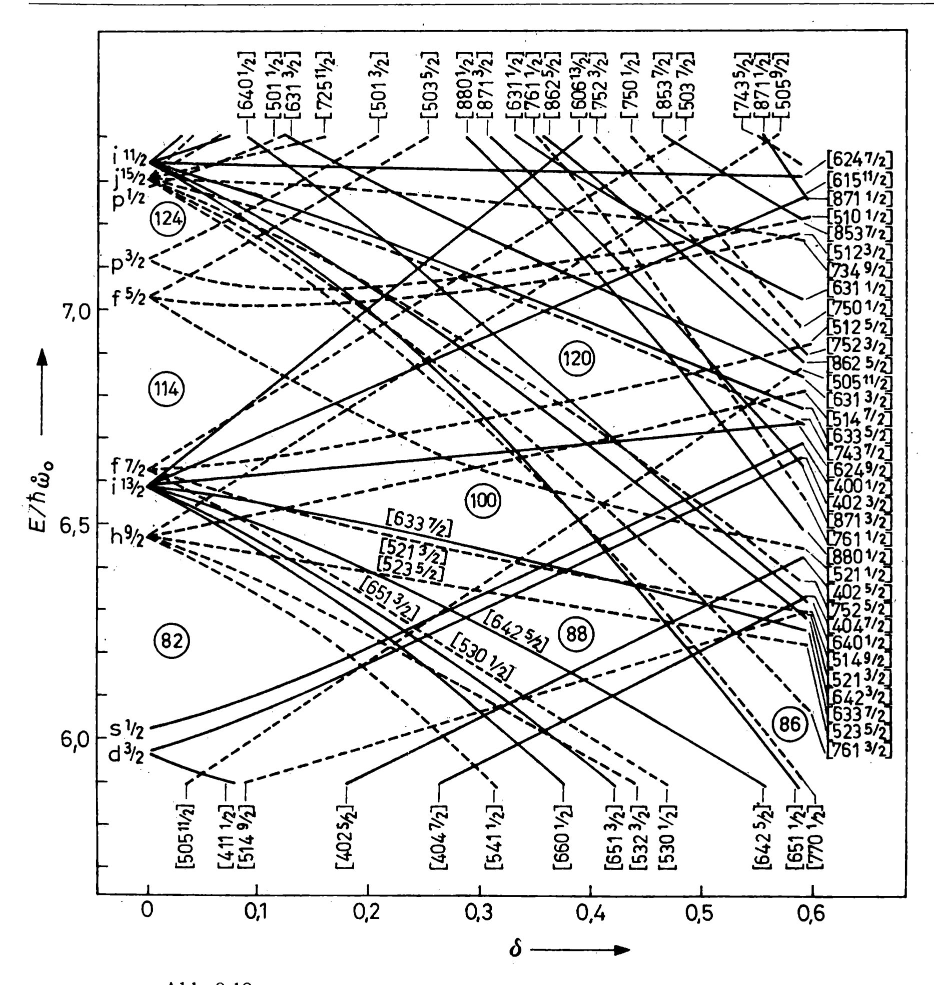


Abb. 8.18
a) Protonenzustände im Schalenmodell mit Nilsson-Potential oberhalb $Z = N = 82$

Wechselwirkung im Protonensystem führt hier zu unterschiedlichen Verhältnissen für Protonen und Neutronen. Im Unterschied zum Einteilchen-Schalenmodell, in dem die Zustände durch die drei Quantenzahlen n, l, j und die aus l über (6.149) folgende Paritätsquantenzahl π gekennzeichnet werden, sind hier weitere vier Quantenzahlen erforderlich. Sie wurden an jeder Zustandsenergiekurve in der Form

$$\Omega^{\pi}[N, n_z, \Lambda] \tag{8.103}$$

angegeben. Die Parität und die Projektion Ω des Nukleonengesamtdrehimpulses $\boldsymbol{j}$ auf die Symmetrieachse z' folgen direkt aus der P-Invarianz und der Axialsymmetrie des Kernpotentials, als Erhaltungsgrößen der Einteilchenbewegung. Das Vorhandensein der Symmetrieachse z' im

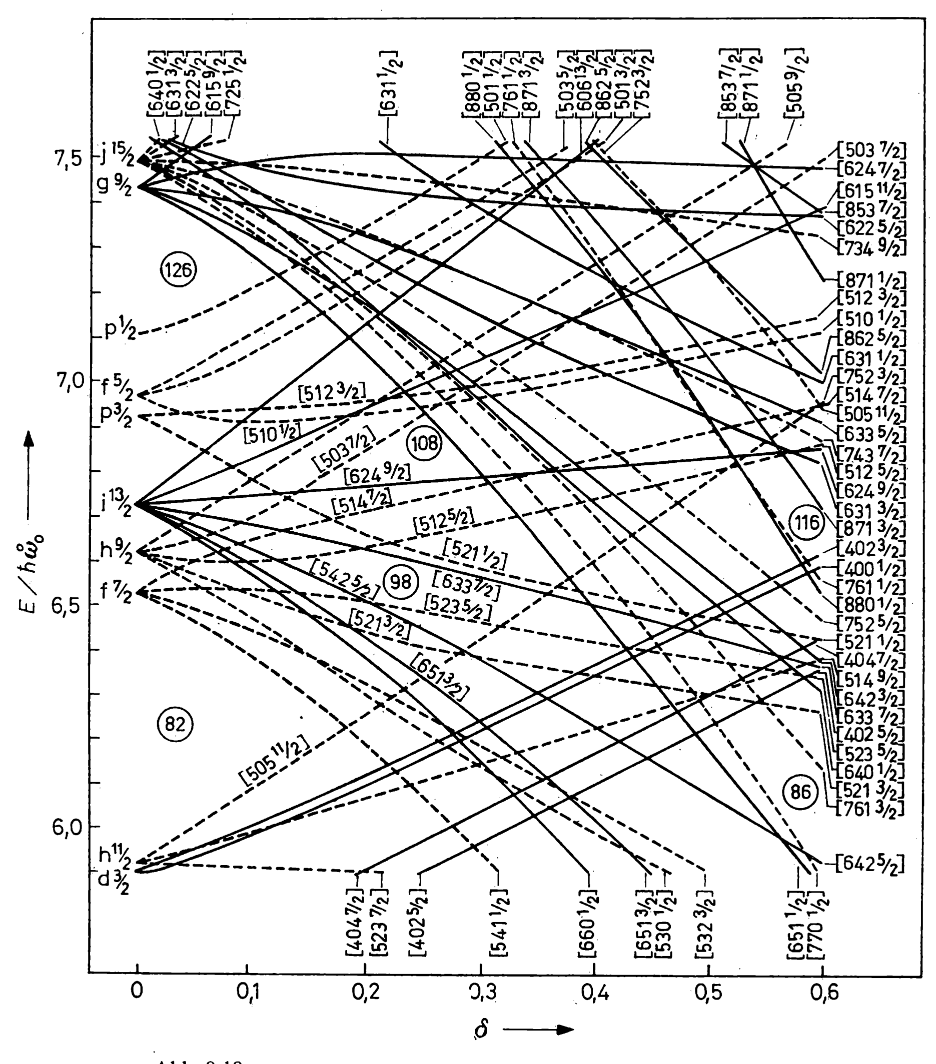


Abb. 8.18
b) Neutronenzustände im Schalenmodell mit Nilsson-Potential oberhalb $Z = N = 82$

Kern führt zur Aufhebung der Entartung der Zustände mit festem j hinsichtlich m. Der Zustand (n_r, l, j) mit $(2j + 1)$ Nukleonenplätzen spaltet in $(2j + 1)/2$ Zustände mit den Projektionen

$$\Omega = \pm j, \pm(j-1), \pm(j-2), \ldots \pm \frac{1}{2} \tag{8.104}$$

auf. Nur die Entartung hinsichtlich $\pm\Omega$ bleibt erhalten. Auf jedem Zustand können maximal zwei Nukleonen untergebracht werden. Da diese infolge der Restwechselwirkung antiparallel eingebaut werden, ist der Spin der gg-Kerne $\boldsymbol{I} = 0$. Bei den uA-Kernen ist der Spin mit Ω identisch. In Abb. 8.19 sind die Drehimpulsverhältnisse für einen gg-Kern mit vier $(j = 5/2)$-

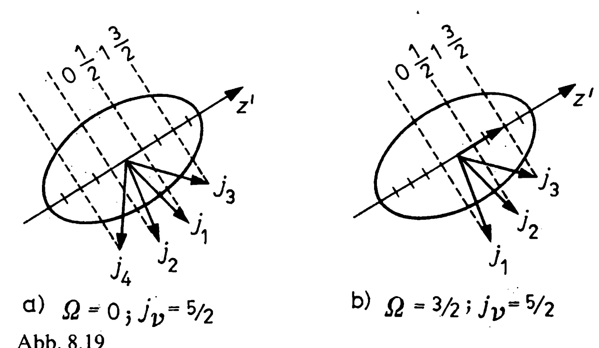


Abb. 8.19
Einstellung der äußeren Nukleonen im Felde des statisch deformierten Kerns

Nukleonen sowie für einen uA-Kern mit fünf ($j = 5/2$)-Nukleonen dargestellt. Dabei rotieren die $\boldsymbol{j}$-Vektoren um die z'-Achse. Da der Term $D \cdot \boldsymbol{l}^2$ in (8.92, 93) die Entartung hinsichtlich $\boldsymbol{l}$ aufhebt, können die gemäß (8.89) entarteten Zustände mit festem $n_\perp$ über die Projektion des Bahndrehimpulses $\boldsymbol{l}$ auf z', d. h. mit Hilfe von Λ klassifiziert werden. Es ist

$$\Lambda = \pm n_\perp, \pm(n_\perp - 2), \dots, \pm 1 \quad \text{oder} \quad 0\,. \tag{8.105}$$

Der Term $C \cdot \boldsymbol{l} \cdot \boldsymbol{s}$ in (8.92, 93) hebt die Entartung hinsichtlich der Spin-Bahn-Kopplung auf. Dadurch werden Zustände mit unterschiedlichen Werten der Projektion

$$\Omega = \Lambda + \Sigma \tag{8.106}$$

mit Σ als Projektion des Nukleonenspins auf z' energetisch aufgespalten. Abb. 8.20 zeigt die Projektionen der Nukleonendrehimpulse.

Die neueingeführten Quantenzahlen n_z, $n_\perp$, Λ, Σ sind nur näherungsweise Erhaltungsgrößen. Streng gelten sie erst bei sehr großen Deformationen. Man spricht daher auch von asymptotischen Quantenzahlen.

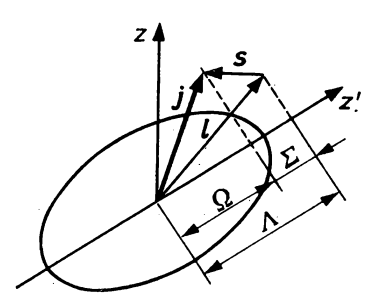


Abb. 8.20
Drehimpulsprojektionen des Nukleons im Felde des statisch deformierten Kerns

3. Das Nilsson-Diagramm ermöglicht die Bestimmung einer großen Zahl von Grundzustandsspins im Bereich der deformierten Kerne. In einigen Fällen konnte vom gemessenen Quadrupolmoment ausgegangen werden. Meist sind lediglich die Zahl der Nukleonen und die etwaige Energie des in Frage kommenden Nukleons bekannt. In der Nähe der Überschneidungsstellen liegen die Kurven verschiedener Quantenzahlensätze dicht beieinander. Daher ist die Zuordnung nicht immer eindeutig vornehmbar. Allerdings stimmen die gemessenen Spins meist mit den vom Diagramm vorausgesagten Werten überein. Diese Aussagen gelten nicht nur für die Grund- sondern in gleichem Maße für die Anregungszustände. Die praktischen Zuordnungsschwierigkeiten hängen meist mit der Fülle der in deformierten Kernen auftretenden kollektiven Zustände zusammen und mit der nicht ausreichenden Genauigkeit der experimentellen Daten.

8.3.6. Schalen in Gebieten mit deformierten Kernen

Bis in die 60er Jahre nahm man an, daß der Begriff der Schale, den wir in Punkt 3 von 8.3.1. und Punkt 4 von 8.3.3. präzisiert haben nur für sphärische Kerne Sinn hat. Von B. T. GEILIKMAN konnte 1960 gezeigt werden, daß für Kerne mit dem Potential eines axialsymmetrisch deformierten harmonischen Oszillators, d. h. für deformierte Kerne deutlich voneinander abgegrenzte Energieintervalle mit erhöhter Zustandsdichte, also Schalen, auftreten, wenn das Verhältnis der Achsen $n_\perp$ und n_z oder von $\omega_\perp$ und ω_z kleine ganzzahlige Werte annimmt. Führt man unter Berücksichtigung von (8.100) die mittlere Frequenz

$$\bar{\omega} = \frac{1}{3}(\omega_x + \omega_y + \omega_z) = \frac{1}{3}(2\omega_\perp + \omega_z) \tag{8.107}$$

ein sowie in Analogie zu (8.95) den Deformationsparameter

$$\delta = \frac{\omega_\perp - \omega_z}{\bar{\omega}} = 3\,\frac{\omega_\perp - \omega_z}{2\omega_\perp + \omega_z}, \tag{8.108}$$

dann kann man die Energieeigenwerte in der Form

$$E(n_\perp, n_z) = \hbar\bar{\omega}\left[N + \frac{3}{2} - \frac{1}{3}\,\delta(2n_z - n_\perp)\right] \tag{8.109}$$

darstellen. In erster Näherung ist $\bar{\omega} = \bar{\omega}_0$. Die Entartung ist auf den Nukleonenspin und die zur Kernsymmetrieachse senkrechte Bewegung zurückzuführen. Sie beträgt $(2n_\perp + 1)$. Das Verhältnis von $n_\perp : n_z$, bzw. von $\omega_\perp : \omega_z$ wird durch ganze Zahlen im Nenner und Zähler charakterisiert und ist für sphärische Kerne 1:1, während es für zigarren- und linsenförmige Deformation >1:1 bzw. <1:1 ist.

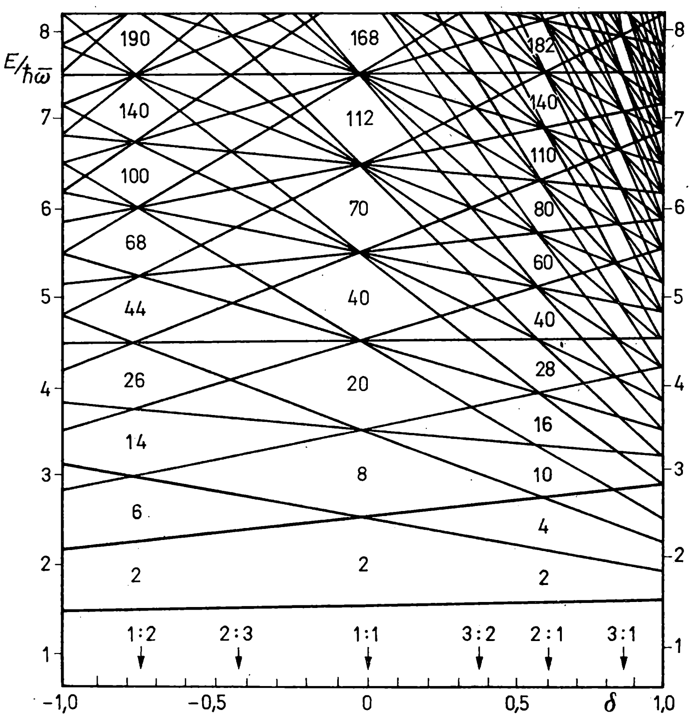


Abb. 8.21
Einteilchenzustände für das Potential des axialsymmetrischen harmonischen Oszillators

In Abb. 8.21 sind die Zustände eingezeichnet, die sich für das Potential des axialsymmetrischen harmonischen Oszillators ergeben. Für sphärisches Potential gelten die in Tabelle 8.3. bereits angegebenen Zahlen. Die Schalenbedingung ist hier am deutlichsten. Im Falle der linsenförmigen Deformation treten bei $n_\perp : n_z = 1:2$ deutliche Schalen auf, im Falle der zigarrenförmigen Deformation bei 2:1.

Wie beim einfachen Schalenmodell, so gestattet auch hier der Ansatz mit dem Potential des harmonischen Oszillators nur ein qualitatives Verständnis. Für praktische Rechnungen verwendet man wieder das Potential von Woods und Saxon. Die Schaleneffekte sind dann allerdings nicht mehr so deutlich ausgeprägt. Wir kommen darauf in 8.4.2. zurück.

8.4. Kollektivmodelle

8.4.1. Tröpfchenmodell

1. Unter Berücksichtigung der Flüssigkeitseigenschaften der Kernmaterie, d. h. der Tatsache, daß die Kerndichte und die spezifische Kernbindungsenergie näherungsweise unabhängig sind von A, wurde 1935 von C. F. von Weizsäcker der Versuch unternommen, den Kern als Flüssigkeitströpfchen zu beschreiben und im Rahmen dieser Modellvorstellung seine Ruhsowie Bindungsenergie zu berechnen. Später wurde dieses Modell von H. Bethe und E. Fermi präzisiert. Die Bemühungen um die Verringerung der Fehler der berechneten Daten halten bis auf den heutigen Tag an, was mit der großen Bedeutung der möglichst genauen Kenntnis dieser beiden Größen aber auch der Eignung des Modells für diesen speziellen Zweck zusammenhängt. Die Gesamtenergie des Kerns ist der Eigenwert des Hamilton-Operators, den es in den unterschiedlichsten Aufgabenstellungen als Funktion der verschiedensten Parameter zu untersuchen gilt. Ein wichtiges Beispiel dieser Art ist die Gesamtenergie des Kerns in Abhängigkeit von der Kernform im Rahmen der Kernmodelle. Weitere wichtige Beispiele sind die Voraussage der Zerfalls- und Reaktionsenergien, die mit Hilfe der Gesamtenergie berechnet werden können, wie in 6.3. gezeigt wurde.

2. Beim Tröpfchenmodell geht man davon aus, daß die Gesamtbindungsenergie des als Tröpfchen einer inkompressiblen Flüssigkeit betrachteten Kerns als Summe verschiedener Beiträge berechnet werden kann:

$$E_B = \sum_{i=1}^{n} E_i \,. \tag{8.110}$$

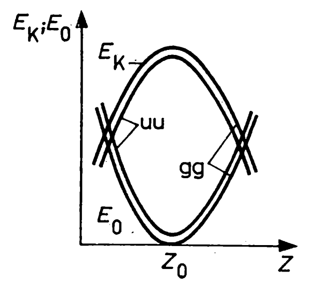


Abb. 8.22
Isobarenschnitte durch die Energieoberfläche für gerades A

In Analogie zur Flüssigkeit läßt sich eine Volumen- oder Kondensationsenergie einführen, denn es ist, wie man aus Tabelle 6.2 sieht, $E_B \sim A$. Das kann über

$$E_1 = E_V = a'V = a' \frac{4}{3} \pi r_0 \cdot A = aA \tag{8.111}$$

erfaßt werden. Die Proportionalität von E_B zu A ist aber nur eine grobe Näherung. Tatsächlich hängt E_B auch vom Verhältnis N/Z ab, d. h. vom Neutronenüberschuß $2T_z = N - Z$. Unabhängig vom Vorzeichen nimmt E_B parabelförmig von einem Maximalwert für die stabilsten Kerne, die für kleine A bei $Z = N$, für große bei $N > Z$, d. h. bei $T_z > 0$ liegen, steil ab. Die Abb. 8.22 zeigt entsprechende Isobarenschnitte durch die Energieoberfläche. Wegen der Asymmetrie, die sich relativ zu Kernen mit $Z = N$ ergibt, nennt man den zu berücksichtigenden Term auch Asymmetrieenergie. Die Abhängigkeit $E_B(T_z)$ ist offensichtlich durch eine symmetrische Funktion zu beschreiben. Sie wird durch einen Term E_2, der im Rahmen des Fermi-Gasmodells abgeleitet wurde (8.27) berücksichtigt:

$$E_2 = b' \frac{T_z^2}{A} = b \frac{(N - Z)^2}{A}; \qquad b < 0. \tag{8.112}$$

Der Proportionalitätsfaktor b muß negativ sein, da alle $(N - Z)$-Werte abseits des Maximums zu einer Verminderung von E_B führen. Die Asymmetrieenergie kann im Rahmen des Tröpfchenmodells nicht unmittelbar verstanden werden. Sie ist modellfremd und entsteht infolge der Isospinabhängigkeit der Kernkräfte, also einer mikroskopischen Materieeigenschaft. Die Abstoßung der Protonen durch die Coulomb-Kraft wirkt ebenfalls in Richtung einer Verminderung von E_B. Das wird durch einen Coulomb-Energieterm berücksichtigt. Da jedes Proton im Kern mit jedem anderen Kernproton über die Coulomb-Kraft wechselwirkt, ist die Wechselwirkungsenergie proportional zu $Z(Z - 1)$ und für $Z \gg 1$ in guter Näherung proportional zu Z^2. Wegen der $1/r$-Abhängigkeit des Coulomb-Potentials kann man schreiben:

$$E_3 = E_C = c' \frac{Z^2}{R} = C \frac{Z^2}{\sqrt[3]{A}}; \qquad c < 0. \tag{8.113}$$

Auf der Grundlage der Vorstellung über eine Oberflächenspannung σ des Tröpfchens muß ein Oberflächenenergieterm eingeführt werden. So wie beim Tröpfchen Moleküle an der Oberfläche weniger fest gebunden sind, so sollten es auch die Nukleonen an der Kernoberfläche sein. Dieser Term ist proportional zur Oberflächenspannung:

$$E_4 = E_0 = 4\pi R^2 \sigma = dA^{2/3}; \qquad d < 0. \tag{8.114}$$

Zur Beschreibung der dreifachen Aufspaltung der Energieoberfläche der Kerne, die bereits in 6.3.4. besprochen wurde, ist von E. Fermi die Paarenergie eingeführt worden. In Abb. 8.22 kommt diese Aufspaltung durch die zwei Kurven für gg- und uu-Kerne zum Ausdruck. Die Kurve für uA-Kerne liegt im benachbarten Isobarenschnitt, aber gewissermaßen zwischen diesen beiden. Bei den leichtesten Kernen ist die Aufspaltung besonders deutlich. Abb. 6.12 zeigt, daß E_B/A bei den leichtesten Kernen große Änderungen zwischen gg- und uu-Kernen erfährt. Im Rahmen des Tröpfchenmodells läßt sich diese Tatsache nicht einleuchtend erklären. Das empirische Korrekturglied lautet

$$E_5 = E_\Delta = \begin{cases} +\Delta & \text{für gg-Kerne}, \\ 0 & \text{für uA-Kerne}, \\ -\Delta & \text{für uu-Kerne}, \end{cases} \tag{8.115a}$$

$$\Delta = eA^{-3/4}. \tag{8.115b}$$

Die Zusammenfassung der einzelnen Beiträge liefert

$$E_B = aA + b\,\frac{(N-Z)^2}{A} + c\,\frac{Z^2}{\sqrt[3]{A}} + dA^{2/3} + \Delta > 0\,. \tag{8.116}$$

Die Konstanten werden über die experimentell ermittelten Kernruhenergien bestimmt, die mit E_B in dem Zusammenhang

$$E_B = [Zm_p + Nm_n - m_k(A, Z)]\,c^2 > 0 \tag{8.117}$$

stehen. Man spricht daher von einer halb- oder semiempirischen Formel. Typische Werte für die Koeffizienten in MeV sind

$$\begin{aligned} a &= 14{,}0\,; \quad b = -19{,}3\,; \quad c = -0{,}584 \\ d &= -13{,}0\,; \quad e = 33{,}5\,. \end{aligned} \tag{8.118}$$

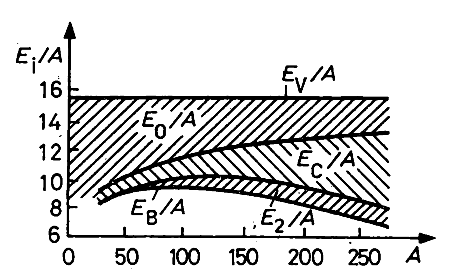


Abb. 8.23
Anteil der Beiträge E_i/A an der Gesamtbindungsenergie E_B/A für uA-Kerne in Übereinstimmung mit der Bethe-Weizsäcker-Formel (8.116)

Eine graphische Darstellung der einzelnen Beiträge ergibt das in Abb. 8.23 dargestellte Bild. Man sieht, daß das Maximum von E_B/A bei $A \approx 60$ hauptsächlich durch das Verhältnis des Oberflächen- zum Coulombanteil gebildet wird. Die Gleichung (8.116) beschreibt auch den Verlauf des Betastabilitätsbandes recht gut. Er ergibt sich aus der Bestimmung des Minimums der Energieoberfläche der Gesamtheit aller Nuklide, indem man (8.116) differenziert und gleich Null setzt zu

$$Z_0 = A/(1{,}98 + 0{,}015A^{2/3})\,. \tag{8.119}$$

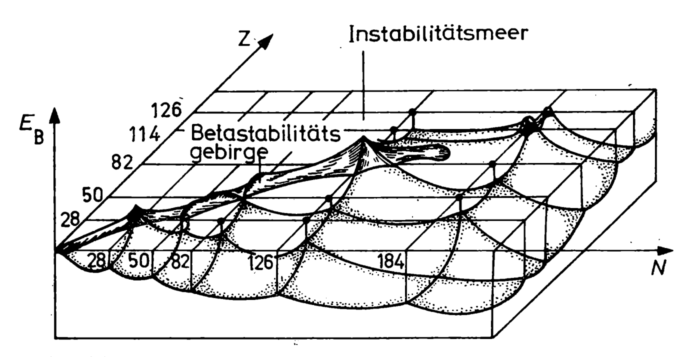


Abb. 8.24
Bindungsenergie E_B über dem Z-N-Diagramm, oft als Stabilitätsgebirge im Instabilitätsmeer bezeichnet

3. Im Verlaufe der Zeit ist eine große Zahl semiempirischer Formeln zur Berechnung von $E_0(Z, N, A)$ und $E_B(Z, N, A)$ entwickelt worden, wobei versucht wurde, die Genauigkeit durch Berücksichtigung von mehr Einflußgrößen, die wie E_2 und E_5 modellfremde Terme darstellen, zu erhöhen. Die historisch gesehen älteste Variante, die Bethe-Weizsäcker-Formel ist in allen immanenter Bestandteil. Die neueren Formeln sind komplizierter, enthalten meist mehr Parameter und die Rechnungen sind zeitaufwendiger. Auf der Grundlage einiger sind umfangreiche Tabellen berechnet und veröffentlicht worden. Die einen geben nur auf und in der unmittelbaren Nähe des Betastabilitätsbandes relativ genaue Ergebnisse mit typischen Abweichungen von etwa 100 keV von den experimentellen Werten. Die anderen eignen sich auch abseits vom Betastabilitätsband, wobei die Genauigkeit mit der Entfernung abnimmt. Das Hauptproblem ist ganz offensichtlich die richtige Berücksichtigung der Schaleneffekte. Die Abb. 8.24 zeigt eine Darstellung der Kernbindungsenergie E über dem Z-, N-Diagramm, wie sie mit Hilfe einer modernen Version unter Berücksichtigung der Schaleneinflüsse erhalten wurde. Die Bindungsenergie der stabilen Kerne ragt über ein Nullniveau, die Oberfläche des „Instabilitätsmeeres", hinaus. Dieses ist so festgelegt, daß alle radioaktiven Kerne unterhalb zu liegen kommen. Die Stabilitätsinsel bei $Z = 114{,}126$ und $N = 184$ ergibt sich auf Grund von Extrapolationen. Auch mit Hilfe einer modernen Version des Schalenmodells bekommt man dort eine magische Zahl, wie aus Abb. 8.12 zu sehen ist. Die experimentelle Bestätigung der Stabilitätsinseln steht allerdings noch aus.

8.4.2. Tröpfchenmodell mit Schalenkorrektur

Das einfache Tröpfchenmodell zeichnet sich neben der unzureichenden Genauigkeit der Ergebnisse besonders abseits vom Stabilitätsband auch durch einige andere Mängel aus. So schließt es z. B. die Berechnung der Energie von Anregungszuständen aus. Das ist aber gerade eine sehr wichtige Anforderung, insbesondere auch im Zusammenhang mit dem Verständnis der Kernspaltung und der Berechnung der Spaltbarriere als Funktion von Z und N. Da die Dynamik des Spaltprozesses durch die dabei auftretenden großen Deformationen stark beeinflußt wird, ist auch die Abhängigkeit der Spaltbarriere von der Deformation von Interesse. Bei der Lösung dieser Aufgabe entstand durch die Arbeiten von V. M. Strutinskij eine neue Methode der Berechnung der Gesamtenergie der Kerne.

Strutinskij gab zunächst der semiempirischen Formel eine neue theoretische Fundierung. Es konnte gezeigt werden, daß die Aufgabe der Bestimmung der Gleichgewichtsverteilung der Nukleonendichte im quasiklassischen statistischen Modell der Kernmaterie unter der Bedingung einer geringen Kompressibilität auf die Bestimmung einer effektiven Gleichgewichtsform der Kernoberfläche zurückgeführt werden kann. In dieser Näherung kann man die Kernruhenergie mit der Bethe-Weizsäcker-Formel berechnen und die Schalenkorrektur als Folge der Krümmung der Kernoberfläche. Damit ergibt sich die Kernruhenergie aus zwei Anteilen. Der erste, der sogenannte Hauptterm ist eine glatte Funktion von Z und N, die Abweichungen davon, also die Korrekturen, stehen eng mit der Schalenstruktur im Zusammenhang und werden daher Schalenkorrekturen genannt. Beide Terme haben auch im Rahmen der Strutinskij-Methode eine mikroskopische Deutung erfahren. Demzufolge wird der erste Term von den Eigenschaften des mittleren Kernpotentials bestimmt. Der zweite Term, der die Schaleneffekte enthält, ist hauptsächlich mit einer relativ kleinen Zahl schwach gebundener Nukleonen korreliert, deren Energien in der Nähe der Fermi-Grenze liegen. Da die Gesamtenergie die Summe aller Einteilchenenergien ist, bereitet ihre Aufteilung in einen glatten Anteil E_N und die Schalenstrukturenergie E_{Sch} keine prinzipiellen Schwierigkeiten.

Schaleneffekte entstehen durch große Nukleonenzustandsdichten in der Nähe der Fermi-Energie. Im einfachen Schalenmodell mit dem Potential des sphärisch-symmetrischen Oszillators treten diese hohen Dichten bei sphärischer Kernform auf. Im Nilsson-Modell mit axialsymmetrisch elliptischem Potential wird die Entartung aufgehoben, und die Zustände spalten auf. Ein Teil strebt zu höheren Energien, ein anderer zu niedrigeren. An Hand der Abbn. 8.17, 18 kann man sich davon überzeugen. Bei bestimmten Deformationen treten allerdings wieder Gebiete mit großer bzw. kleiner Zustandsdichte auf, wie man auch aus Abb. 8.21 erkennen kann. Gerade mit diesen Zustandsdichteänderungen hängt der zweite Term zusammen. Wenn die Zustandsdichte in der Nähe der Fermi-Energie größer ist, als ein mittlerer Wert, dann ist der Kern stabiler und umgekehrt. Zur Abschätzung des Einflusses der Zustandsdichte wird die Zustandsdichteänderung $\delta g(N$, Form) eingeführt, die von der Nukleonenzahl N und der Form, im einfachsten Falle von δ abhängt. Sie ergibt sich als Differenz der Zustandsdichte $g_{Sch}(N, \delta)$ im Nilsson-Modell

bei der Fermi-Energie E_F, gemittelt über ein Energieintervall γ von 2 bis 3 MeV und einer Zustandsdichte $\bar{g}(N, \delta)$, die durch Mittelung über ein größeres Intervall $\bar{\gamma}$ von etwa 10 MeV erhalten wird, das ungefähr dem Schalenabstand entspricht

$$\delta g = g_{\text{Sch}}(N, \delta) - \bar{g}(N, \delta), \tag{8.120}$$

$$g(N, \delta) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\gamma} \sum_{\nu} \exp - (E - E_\nu)^2/\gamma^2, \tag{8.121}$$

$$\gamma = \lambda A^{-2/3} \approx (2 \div 3)\ \text{MeV}; \qquad \bar{\gamma} = \bar{E}_F A^{-1/3} \approx (1 \div 10)\ \text{MeV}. \tag{8.122}$$

Die Fermi-Energie und $\bar{E}_F$ entsprechen den Fällen der realen und der gleichmäßigen Zustandsdichteverteilung im Kern. Der Schalenkorrekturterm ergibt sich somit zu

$$\delta E_{\text{Sch}} = \sum_{E_\nu < E_F} 2E_\nu(N, \delta)\, n_\nu - 2 \int_0^{\bar{E}_F} E\bar{g}(E)\, \mathrm{d}E, \tag{8.123}$$

wobei die Summierung über alle Zustände n_ν im Mittelungsintervall erfolgt. Bei der Berechnung der Gesamtenergie wird noch die Paarenergie E_p mit berücksichtigt. Als Differenz von E_p und $\bar{E}_p$ für den realen und den Kern mit gleichmäßiger Zustandsdichteverteilung ergibt sich δE_p. Die Gesamtenergie des Kerns beträgt

$$E_0 = E_{N_0} + \sum_{p,n} (\delta E_{\text{Sch}} + \delta E_p). \tag{8.124}$$

Die Summierung erfolgt über alle Neutronen- und Protonenenergien. Die Schalenkorrekturen sind für die in Frage kommenden Z-N-Bereiche mit Hilfe von Rechenmaschinen von den verschiedensten Autoren berechnet worden. Ihre Darstellung erfolgt oft in der Form topographischer Karten, auf denen Punkte gleichen Wertes durch Linien miteinander verbunden sind. Man findet Darstellungen von $\delta E_{\text{Sch}} + \delta E_p$ allein, aber auch von E_0. In Abb. 8.25 ist eine topographische Karte der Schalenkorrektur für das Neutronensystem gezeigt. Aus dem Maßstab sieht man, daß zwischen den Bergrücken und Talsohlen Energie-

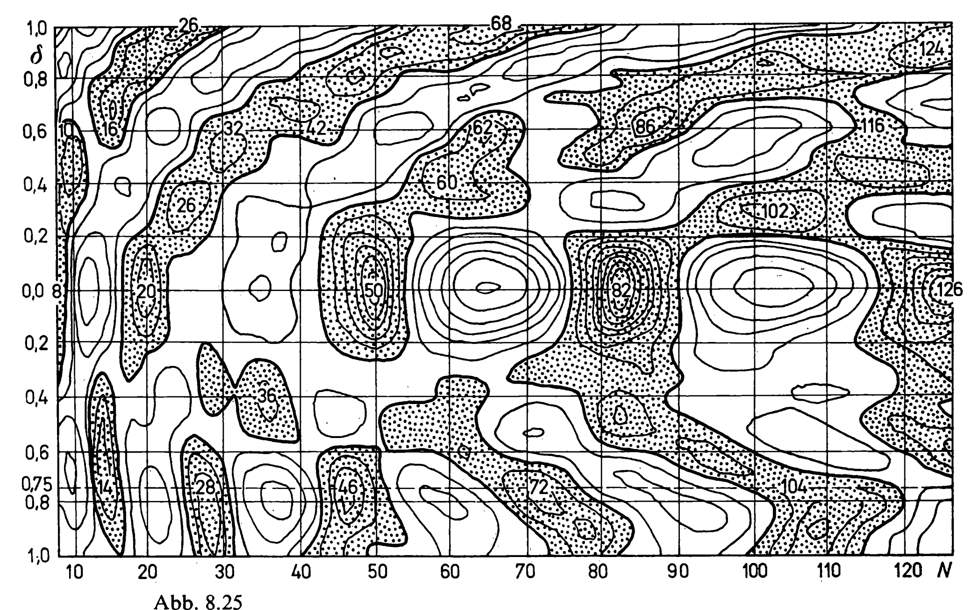


Abb. 8.25
Topographische Karte der Schalenkorrektur für das Neutronensystem auf der Grundlage eines Nilsson-Potentials, berechnet mit Hilfe der Strutinskij-Methode. Der Unterschied zwischen benachbarten Linien für $\delta E_{\text{sch}} - \delta E_p$ beträgt 1 MeV

unterschiede von bis zu 10 MeV auftreten. Aus dieser Sicht wird verständlich, warum bei bestimmten Nukleonenzahlen statische Deformationen zu stabilen Kernformen führen. Auch die Erscheinung der Formisomerie findet mit diesen Karten ihre Erklärung. Wir kommen darauf bei der Besprechung des Kernzerfalls und der Kernspaltung in 10.8.3., Punkt 3, zurück.

8.4.3. Rotationsmodell

1. Das Auftreten großer Quadrupolmomente war das erste Anzeichen für die statische Deformation von Atomkernen. Solche Kerne können bei Zuführung von Energie in Rotation versetzt werden. Von den Molekülen war dieser Effekt bereits bekannt. In 6.8.2. wurde auf dieser Grundlage ein einfaches Modell entwickelt, mit dessen Hilfe die Energieunterschiede zwischen den Gliedern der Rotationsbanden berechnet werden können. Die Anregung der Rotationszustände erfolgt auf unterschiedliche Weise, und zwar sowohl beim Kernzerfall, als auch in Kernreaktionen. Wir betrachten hier ihre Anregung in einem besonderen Falle der Kernreaktionen, der Coulomb-Anregung. Darunter versteht man eine unelastische Streuung zwischen zwei Kernen über ihre elektromagnetischen Felder, wenn sich die Partner aneinander vorbei bewegen, ohne sich direkt zu berühren. Die letzte Bedingung ist wichtig, da der Effekt dann in reiner Form beobachtet werden kann. Sie ist erfüllt, wenn die Energie der Streupartner nicht zur Überwindung des Coulomb-Walles ausreicht. Die Teilchen bewegen sich dann auf den durch die Rutherford-Streuung vorgeschriebenen Bahnen, und die Kernkraft kann nicht stören.

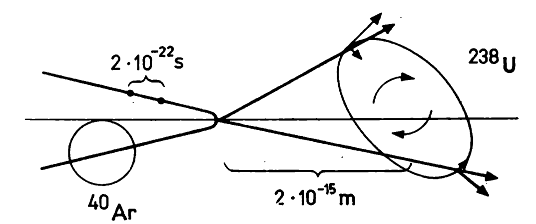


Abb. 8.26
Kraftvektoren bei Coulomb-Anregung eines deformierten Kerns

Der Mechanismus des Effekts kann an Hand von Abb. 8.26 verstanden werden. Durch die Deformation des Targetkerns ist die Größe der Coulomb-Kraft an gegenüberliegenden Punkten verschieden, so daß ein Kräftepaar und damit ein Drehmoment entsteht. Dieses ist proportional zur Ladung der Stoßpartner und auch zum Quadrupolmoment, d. h. zur Deformation des Targetkerns. Da die Abgabe der Rotationsenergie hauptsächlich durch Emission von Gammastrahlung erfolgt, ordnet man in einer typischen Meßanordnung in der Nähe des Targets einen Ge(Li)-Detektor an, um die Übergänge zwischen den Gliedern der Rotationsbanden beobachten zu können. Eine Bande experimentell gefundener Rotationszustände zeigt die Abb. 8.27a für den Grundzustand von ^{238}U.

2. Die prinzipielle Möglichkeit des Auftretens von Rotationszuständen in deformierten Kernen sowie die zulässigen Rotationsachsen erkennt man auf der Grundlage einer einfachen quantenmechanischen Betrachtung. Wie beim Nilsson-Modell geht man dabei am besten von der Form eines Rotationsellipsoids aus. Der Einfachheit halber wird zunächst angenommen, daß die betrachteten Kerne spinlos sind. Ganz im Unterschied zu den sphärischen spinlosen Kernen läßt sich für deformierte Kerne die Orientierung im Raum angeben. Man benötigt dazu drei Winkel. Der Ursprung eines körperfesten rechtwinkligen Koordinatensystems mit den Achsen x', y', z', die auch mit den Indizes 1, 2, 3 gekennzeichnet werden können, wird

E_I:	exp.	(8.130)	(8.131)
14^+	1417	1565	1415
12^+	1078	1162	1080
10^+	777	820	778
8^+	518,7	537	518,8
6^+	307,6	313	306,9
4^+	148,2	149	147,6
2^+	44,7		44,6
0^+	0		
	$A = 7{,}45$ keV	$B = 0$	$B = -3{,}4 \cdot 10^{-3}$

$^{238}_{92}U$

Abb. 8.27
Rotationszustandsbande des Grundzustandes von ^{238}U: a) experimentell bestimmte Energien, b) und c) Energiewerte berechnet mit Hilfe von (8.130), bzw. (8.131)

so in den Kernmittelpunkt gelegt, daß die z'-Achse mit der Symmetrieachse zusammenfällt. Die Winkel zur Beschreibung der Rotation um die jeweilige Achse bezeichnen wir mit φ_v, wobei v die Zahlen 1 bis 3 annehmen kann. Für den Drehimpulsoperator $L(\varphi_v) = -i\hbar\, \partial/\partial\varphi_v$ der Rotation um die Achse v mit dem Winkel φ_v gilt die Unbestimmtheitsrelation in der Form

$$\Delta\varphi_v \cdot \Delta L(\varphi_v) \geqq \hbar\,. \tag{8.125}$$

Daraus folgt, daß um die Symmetrieachse z' mit $v = 3$ keine Rotation möglich ist. Wegen der Axialsymmetrie hängt die Wellenfunktion Ψ nicht von φ_3 ab, d. h. es ist $\partial\Psi/\partial\varphi_3 = 0$ und damit ist auch $\Delta L(\varphi_3) = 0$. Um z' läßt sich keine Winkeländerung $\Delta\varphi_3$ definieren. Anders verhält es sich mit der Rotation um die zur Symmetrieachse senkrecht stehenden Achsen x' und y'. Hier ist $\partial\Psi/\partial\varphi \neq 0$, und es lassen sich somit Winkeländerungen $\Delta\varphi_1$ und $\Delta\varphi_2$ angeben. Rotationen können also nur senkrecht zur Symmetrieachse z' mit $L(\varphi_1)$ und $L(\varphi_2)$ auftreten. In Abb. 8.28

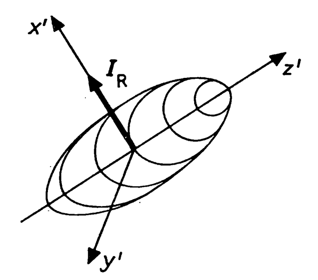


Abb. 8.28
Rotationsdrehimpuls eines axialsymmetrisch deformierten Kerns mit dem Eigendrehimpuls $\boldsymbol{I} = 0$

ist dieser Sachverhalt veranschaulicht. Mit $\boldsymbol{I}_R$ ist der Vektor der kollektiven Bewegung des Kerns bezeichnet. Da wir später noch den Drehimpuls der einzelnen Teilchen betrachten werden, nennen wir $\boldsymbol{I}_R$ den Drehimpuls des Kernrumpfes.

3. Die Berechnung der Energien, Drehimpulse und Paritäten der einzelnen Zustände der Rotationsbanden erfolgt über den Hamilton-Operator und die Schrödinger-Gleichung mit dem bereits eingeführten körperfesten Koordinatensystem. In Analogie zur Beschreibung der Rotation des klassischen starren Körpers ergibt sich dann der einfache Ausdruck

$$H_{rot} = \sum_{\nu=1}^{3} \frac{\boldsymbol{I}_{R\nu}^2}{2J_\nu} \tag{8.126}$$

für den Hamilton-Operator, wobei mit J_ν das Trägheitsmoment bezüglich der Achse ν bezeichnet ist. Der quantenmechanische Erwartungswert der Komponente J_3 hinsichtlich der z'-Achse hat den Wert 0. Das führt zu unendlich hohen Anregungsenergien für Rotationen um die z'-Achse, d. h., sie sind von vornherein auszuschließen. Das ist noch einmal eine Begründung dafür, daß $\boldsymbol{I}_R$ senkrecht auf z' steht.

Die Schrödinger-Gleichung lautet

$$\frac{\boldsymbol{I}_R^2}{2J} \Psi = E_{rot} \Psi . \tag{8.127}$$

Für den in Abb. 8.28 dargestellten Fall mit $\boldsymbol{I} = 0$, d. h., für alle gg-Kerne im Grundzustand folgt daraus wegen $\boldsymbol{I}_R^2 = \boldsymbol{I}^2$ mit dem Eigenwert $I(I+1)\,\hbar^2$ die Eigenwertgleichung

$$I_R^2 D_{Mo}^I(\Theta_\nu) = I(I+1)\,\hbar^2 D(\Theta_\nu) . \tag{8.128}$$

Die Funktion $D_{Mo}^I(\Theta_\nu)$ ist die Wellenfunktion des starren Rotators (A.40) mit $k = 0$. Sie hängt von den drei Eulerschen Winkeln Θ_ν ab sowie von den Rotationsquantenzahlen I und M. In den hier betrachteten Spezialfall der gg-Kerne ist D_M^I proportional zur Kugelfunktion Y_I^M.

Durch eine Paritätsbetrachtung erkennt man, daß die möglichen I-Werte wesentlich eingeschränkt sind. Gemäß (6.149) ergibt sich die Parität zu $\pi = (-1)^I$. Die Wellenfunktion spinloser Kerne ist hinsichtlich der Spiegelung in der x'-y'-Ebene invariant. Da die Kugelfunktionen Y_I^M für ungerades I ungerade Parität haben, ändert sich bei Spiegelung in dieser Ebene das Vorzeichen. Solche Lösungen können hier nicht Eigenfunktionen sein und müssen ausgeschlossen werden. Also sind nur geradzahlige I-Werte mit positiver Parität

$$I^\pi = 0^+, 2^+, 4^+, \ldots \tag{8.129}$$

zugelassen. Die Eigenwerte der Rotationsenergie folgen aus (8.128) zu

$$E_I = A \cdot I(I+1)\,; \qquad A = \hbar^2/2J . \tag{8.130}$$

Die mit dieser Formel berechneten Energien der Rotationszustände stimmen mit den experimentell gefundenen Werten in der Tendenz überein, sind jedoch etwa zu groß. Die Ursache dafür ist eine geringfügige Abhängigkeit des Trägheitsmoments J von I infolge einer Kernverformung durch die auftretenden Zentrifugalkräfte. Man berücksichtigt diese Zentrifugalstreckung sowie andere kleinere Effekte zunächst durch ein phänomenologisches Korrekturglied:

$$E_I = A \cdot I(I+1) + B \cdot I^2(I+1)^2\,; \qquad B < 0 . \tag{8.131}$$

Das in A enthaltene J ist nun als Konstante einsetzbar. In Abb. 8.27 werden die Ergebnisse mit $B = 0$ und $B = -3{,}4 \cdot 10^{-3}$ mit den experimentellen Werten verglichen.

4. Wir lassen nun die Beschränkung auf Kerne mit $I = 0$ fallen, fragen jedoch zunächst nicht nach der Ursache des von 0 verschiedenen Spins. Darauf kommen wir erst in 8.5.2. zurück. Das Kopplungsschema ist in Abb. 8.29 gezeigt. Die mit K bezeichnete Projektion I auf die

z'-Achse ist eine Erhaltungsgröße und damit Quantenzahl. Das folgt aus der Form des Hamilton-Operators, der proportional ist zu $\boldsymbol{I}^2$. Für das Quadrat des Rotationsdrehimpulses erhält man unter Berücksichtigung des Erwartungswertes von $\boldsymbol{I}^2$ den Ausdruck

$$\boldsymbol{I}_{\mathrm{R}}^2 = [I(I+1) - K^2]\,\hbar^2 \,. \tag{8.132}$$

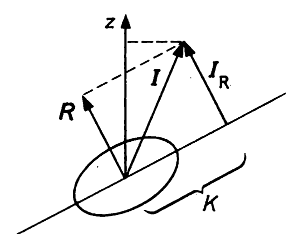


Abb. 8.29
Drehimpulskopplung bei der Rotation eines deformierten Kerns mit Eigendrehimpuls $\boldsymbol{I} \neq 0$

Da andererseits

$$\boldsymbol{I}_{\mathrm{R}}^2 = J^2\omega^2 \tag{8.133}$$

und

$$E_{\mathrm{rot}} = \frac{1}{2} J\omega^2 \tag{8.134}$$

läßt sich durch Elimination von ω^2 E_{rot} ermitteln:

$$E_{\mathrm{rot}} = A[I(I+1) - K^2] \,. \tag{8.135}$$

Da K die gequantelte Projektion von $\boldsymbol{I}$ auf z' ist, kann $|\boldsymbol{I}| \geqq K$ sein und die Wertefolge

$$I = K, K+1, K+2, \ldots \tag{8.136a}$$

durchlaufen. Der niedrigste Energiezustand, d. h. der Grundzustand der Bande, ist durch

$$I = K \tag{8.136b}$$

gekennzeichnet. K kann ganz- oder halbzahlig sein.

Die Rotationsbanden weisen für die beiden Fälle $K = 0$ und $K \neq 0$ wesentliche Unterschiede auf. Im ersten Fall sind die Spins der Bandenglieder gerade Zahlen. Das Verhältnis der Energien berechnet man wegen (8.130) für den Fall, daß die Energie des ersten Anregungszustandes E_2 bekannt ist zu

$$E_I = \frac{1}{6} I^2(I+1)\,E_2 \,. \tag{8.137a}$$

Ganz anders ergeben sich die Spins für $K \neq 0$ aus (8.129) mit dem Verhältnis der Energien aus (8.135). Für die Energie des zweiten zu der des ersten Gliedes der Bande folgt

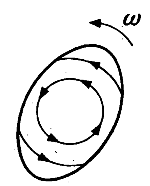
$$\frac{\Delta E(K+2, K)}{\Delta E(K+1, K)} = 2 + \frac{1}{K+1} \tag{8.137b}$$

Aus dieser Gleichung läßt sich K bestimmen. Ein weiterer Sonderfall wird in 8.5.2. besprochen.

5. Die Energie des Rotationszustandes hängt, wenn man vom Kernspin absieht, nur von einem integralen Kernparameter ab, vom Trägheitsmoment. Es läßt sich daher leicht aus den experimentell gefundenen Werten der Energien der Rotationsbanden und wie wir in 8.4.4. sehen werden auch aus den Energien der Vibrationsbanden berechnet. Die experimentellen sind mit den berechneten Werten verglichen worden, die auf der Grundlage von Modellvorstellungen über die Verteilung und die Konsistenz der Kernmaterie erhalten wurden. In allen Fällen liegen die experimentellen Werte zwischen zwei Grenzwerten, für zwei Grenzmodellvorstellungen. Sie sind in Abb. 8.30 dargestellt. Der erste Grenzfall ist der starre Körper mit dem Trägheitsmoment (6.225). Im zweiten Grenzfall wird angenommen, die Kernmaterie sei eine Flüssigkeit, deren Elemente bei der Kernrotation in einem kerneigenen Koordinatensystem wirbelfrei und auf geschlossenen Bahnen in einer der Kernrotation entgegengesetzten Richtung umlaufen. Wenn die Abweichung vom sphärischen Kern mit ΔR charakterisiert werden kann, dann ergibt sich gemäß (6.225) und (8.89) ein Trägheitsmoment von

$$J = J_0 \delta^2 , \qquad (8.138\text{a})$$

d. h. ein viel kleinerer Wert. Auf die Deutung dieses Sachverhalts kommen wir in 8.4.4., Punkt 6 zu sprechen.



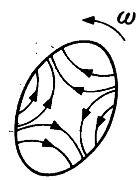


Abb. 8.30
Rotationsbewegung des deformierten Kerns: a) als starrer Körper, b) wellenförmig oder mit einem der Rotation entgegengesetzt gerichteten inneren Fluß

Eine Möglichkeit der direkten experimentellen Bestimmung des Trägheitsmoments basiert auf seiner Abhängigkeit von der Steigung $\mathrm{d}E/\mathrm{d}I$, die für große Werte von I die einfache Form

$$J = \hbar^2 I \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}E} \qquad (8.138\text{b})$$

annimmt. Dieser Zusammenhang folgt über (8.130) wegen $\omega = \mathrm{d}E/\mathrm{d}I \approx (\mathrm{d}E/\mathrm{d}I)\,\hbar^{-1}$ und über (8.133) wegen $J = I/\omega \approx \hbar I/\omega$. Der Gradient erfährt bei den hier betrachteten großen I-Werten starke Änderungen. Bei der Besprechung des Backbending-Effekts in 8.6.6. kommen wir darauf zurück.

8.4.4. Vibrationsmodell

1. Außer den beiden bisher betrachteten grundsätzlich verschiedenen Arten der Kernanregung, der Teilchen- oder inneren Anregung und der Rotationsanregung, gibt es noch eine dritte, die Vibrationsanregung. Ausgangspunkt für ihre Betrachtung ist die Dynamik des Flüssigkeitstropfens. Man spricht daher manchmal auch vom hydrodynamischen Modell.

Die Vibration eines Tropfens kann auf zwei prinzipiell verschiedene Arten erfolgen. Sie sind in Abb. 8.31 schematisch dargestellt. Der Tropfen kann sich rhythmisch ausdehnen und zusammenziehen, so daß Dichteschwankungen entstehen, sogenannte Kompressions- oder Monopolschwingungen. Die zweite Bezeichnung rührt daher, daß der Drehimpuls bei dieser Art der

Schwingung offensichtlich gleich Null ist. Da die Kernflüssigkeit in erster Näherung inkompressibel ist, müßte die Anregungsenergie für diese Art der Schwingung sehr groß sein.

Ein Tropfen mit einer inkompressiblen Flüssigkeit kann aber auch Schwingungen der Oberfläche ausführen, bei denen keine Dichteänderungen auftreten, wenn nur das Kernvolumen dabei konstant bleibt. Diese Vibrationen der Kernoberfläche, man nennt sie auch dynamische Kerndeformationen, werden nun gerade in den unterschiedlichsten Modifikationen gefunden. Es versteht sich, daß die Kernoberflächenschwingungen gequantelt auftreten. Im einfachsten Falle geht man bei ihrer Behandlung von der Kugelform aus. Im allgemeinen müssen jedoch auch Rotationsellipsoide sowie dreiaxial deformierte Kerne zugelassen werden. Bestimmte, bei den Schwingungen auftretende Formen können auch zur Beschreibung statischer Deformationen herangezogen werden.

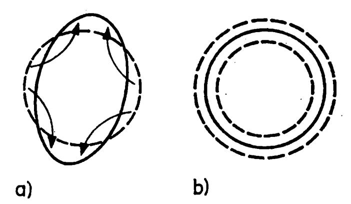


Abb. 8.31
Kernform bei a) Oberflächenschwingungen, b) Kompressionsschwingungen

2. Die Oberfläche eines schwingenden Tropfens kann klassisch betrachtet durch den Radius als Funktion des polaren und azimutalen Winkels ϑ und φ, die in die Kugelfunktionen Y_λ^μ eingehen, beschrieben werden:

$$R(\vartheta, \varphi) = R_0 \left[1 + \sum_\lambda \sum_\mu a_{\lambda\mu} Y_\lambda^\mu(\vartheta, \varphi)\right]. \tag{8.139}$$

R_0 ist der mittlere Radius, die Koeffizienten $a_{\lambda\mu}$ werden Deformationsparameter genannt. Sie geben die Amplituden der einzelnen Glieder der Reihenentwicklung, d. h. die einzelnen Schwingungsformen an. Für $\lambda = 2$, 3 und 4 sind diese Formen in Abb. 8.32 dargestellt. Im Falle der harmonischen Schwingungen müssen die Amplituden klein sein. Die Zahl λ wird Multipolarität genannt. Sie gibt, wie man aus der Abb. 8.32 erkennt, die Zahl der Schwingungen auf der Oberfläche an. Zu jedem λ gibt es $2\lambda + 1$ Projektionen auf eine physikalisch ausgezeichnete Achse, d. h., μ nimmt die Werte $-\lambda$ bis $+\lambda$ an. Wenn die $a_{\lambda\mu}$ konstant sind, beschreibt (8.139) statische Deformationen. Sind sie zeitabhängig, dann werden dynamische Deformationen beschrieben. Damit $R(\vartheta, \varphi)$ reell ist, müssen die $a_{\lambda\mu}$ die Bedingung

$$a_{\lambda\mu}^* = (-1)^\mu \, a_{\lambda, -\mu} \tag{8.140}$$

erfüllen.

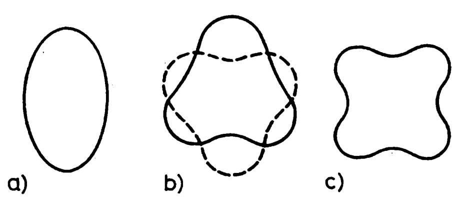


Abb. 8.32
Kernoberfläche bei a) Quadrupol-, b) Oktupol- und c) Hexadekapoldeformation

Das erste Ziel der zunächst klassischen Rechnung ist es, einen Ausdruck für die Schwingungsenergie zu finden. Dazu nimmt man neben der Inkompressibilität auch Reibungslosigkeit und Wirbelfreiheit der Tröpfchenflüssigkeit an. Man findet für einen Kern mit der Ladung z

$$E_{\text{vib}} = \frac{1}{2} \sum_{\lambda,\mu} (B_\lambda \, |\dot{a}_{\lambda\mu}|^2 + C_\lambda \, |a_{\lambda\mu}|^2) = E_{\text{k}} + V\,, \tag{8.141 a}$$

mit

$$E_{\text{k}} = \frac{1}{2} \sum_{\lambda\mu} (B_\lambda \, |\dot{a}_{\lambda\mu}|^2)\,; \qquad V = \frac{1}{2} \sum_{\lambda\mu} C_\lambda \, |a_{\lambda\mu}|^2\,, \tag{8.141 b, c}$$

und den Koeffizienten

$$B_\lambda = \frac{1}{\lambda} \frac{3Am_{\text{N}}}{4\pi} R^2 = \frac{\varrho R^5}{\lambda} \tag{8.142}$$

und

$$C_\lambda = (\lambda - 1)(\lambda + 2)\,\sigma R^2 - \frac{3}{2\pi} \frac{\lambda - 1}{2\lambda + 1} \frac{Z^2 e^2}{R}\,. \tag{8.143}$$

Gemäß (6.30) ist $R = r_0 A^{1/3}$, und für die Oberflächenspannung kann

$$\sigma = \frac{15{,}4}{4\pi R^2} \text{ MeV/cm}^2 \tag{8.144}$$

eingesetzt werden.

Die Summanden in (8.141) haben die Gestalt der Energie linearer harmonischer Oszillatoren mit den Koordinaten $a_{\lambda\mu}(t)$ und den Geschwindigkeiten $\dot{a}_{\lambda\mu}(t)$. Die Bewegungsgleichung lautet daher

$$\ddot{a}_{\lambda\mu}(t) + \frac{C_\lambda}{B_\lambda} a_{\lambda\mu} = 0\,. \tag{8.145}$$

Die B_λ treten an die Stelle der Massen, die C_λ an die der rücktreibenden Kraft. Daraus folgt die Schwingungsfrequenz zu

$$\omega_\lambda = \sqrt{\frac{C_\lambda}{B_\lambda}} = \sqrt{\frac{\sigma}{\varrho R^3} \lambda(\lambda - 1)(\lambda + 2)}\,. \tag{8.146}$$

Für $\lambda = 0$ und $\lambda = 1$ treten keine Schwingungen auf. Diese Zahlen entsprechen einer isotropen Ausdehnung oder Kontraktion, d. h. einer Monopolschwingung sowie einer Verschiebung des Kernzentrums. Wir betrachten nur Lösungen mit $\lambda \geqq 2$.

3. Bei der quantenmechanischen Behandlung eines Systems unabhängiger linearer harmonischer Oszillatoren in der Form der einzelnen Oberflächenschwingungen $\lambda\mu$ ergeben sich die Eigenwerte der Energie aus der Lösung der Schrödinger-Gleichung. Für den Hamilton-Operator kann man schreiben

$$H(\pi_{\lambda\mu} a_{\lambda\mu}) = E_{\text{vib}} = \frac{1}{2} \sum_{\lambda\mu} \left(\frac{1}{B_\lambda} |\pi_{\lambda\mu}|^2 + C_\lambda \, |a_{\lambda\mu}|^2 \right), \tag{8.147}$$

wobei mit $\pi_{\lambda\mu}$ der kanonische Impuls

$$\pi_{\lambda\mu} = \frac{\partial E_{\text{k}}}{\partial \dot{a}_{\lambda\mu}} = B_\lambda \dot{a}^*_{\lambda\mu} = (-1)^\mu \, \pi^*_{\lambda,-\mu} \tag{8.148}$$

bezeichnet ist. Die gequantelten Energien der Vibrationszustände ergeben sich damit zu

$$E_{\text{vib}} = \sum_{\lambda\mu} \hbar\omega_\lambda \left(n_{\lambda\mu} + \frac{1}{2}\right) = \sum_\lambda \hbar\omega_\lambda \left(n_\lambda + \frac{2\lambda + 1}{2}\right) \tag{8.149 a}$$

mit

$$n_{\lambda\mu} = 0, 1, 2, \ldots \qquad n_\lambda = \sum_\mu n_{\lambda\mu} = 0, 1, 2, \ldots \tag{8.149 b}$$

Da $2\lambda + 1$ Werte durchlaufen werden können, sind die Zustände mit festem λ insgesamt $(2\lambda + 1)$-fach entartet.

Die Energie- und Drehimpulsdifferenzen zwischen benachbarten Vibrationszuständen werden von den Schwingungsquanten, den Phononen, getragen. Phononen vom Typ $\lambda\mu$ haben die Energie

$$E_\lambda = \hbar\omega_\lambda \tag{8.150}$$

und den ganzzahligen Drehimpuls

$$\boldsymbol{I} = \hbar\lambda \tag{8.151 a}$$

sind also Bosonen. Ihre Projektion auf eine physikalisch ausgezeichnete Achse beträgt

$$I_z = \mu\,. \tag{8.151 b}$$

Die Parität der Phononen berechnet man gemäß (6.149) zu

$$P_\lambda = (-1)^\lambda\,. \tag{8.152}$$

4. Bei den Quadrupolschwingungen mit $\lambda = 2$ kann μ die Werte $-2, -1, 0, 1, 2$ annehmen. Für die Zustandsenergien ergibt sich damit aus (8.149)

$$E_{2i} = \hbar\omega_2 \sum_0^i \left(n_2 + \frac{5}{2}\right) = E_{20} + \hbar\omega_2 \sum n_{2i} \tag{8.153 a}$$

mit

$$n_{2i} = 0, 1, 2, 3, \ldots \tag{8.153 b}$$

Die Quadrupolzustände bilden energetisch betrachtet eine äquidistante Folge. Den Energieunterschied $\hbar\omega_2$ trägt das Quadrupolphonon mit $\boldsymbol{I} = 2\hbar$ und $P = +1$. In Abb. 8.33a ist das Zustandsschema eines gg-Kerns dargestellt. Dieser hat bekanntlich im Grundzustand $I^\pi = 0^+$. Der erste Quadrupolzustand entsteht durch ein Quadrupolphonon, hat also $I^\pi = 2^+$. Der zweite Quadrupolzustand hat zwei Phononen, die zu den Spins 0, 2 und 4 koppeln können. Die Werte 1 und 3 sind ausgeschlossen, weil die Wellenfunktion zweier identischer Bosonen hinsichtlich Vertauschung symmetrisch sein muß. Durch Zulassung nicht harmonischer Schwingungen kann die Entartung aufgehoben werden, weil eine Wechselwirkung zwischen den Phononen auftritt. Diesen Sachverhalt zeigt die Abb. 8.33b. In Abb. 8.33c sind die für ^{114}Cd experimentell beobachteten Zustände zum Vergleich eingezeichnet. In den Zustandsspektren der Kerne werden auch Oktupolanregungen mit $\lambda = 3$ beobachtet. Ein erster Zustand liegt bei $\hbar\omega_3$ mit $I^\pi = 3^-$, weitere vier bei $2\hbar\omega_3$ mit $I^\pi = 0^+, 2^+, 4^+, 6^+$. Es gibt auch Zustände mit einem Quadrupol- und einem Oktupolphonon. Darauf gehen wir hier aber nicht ein.

Eine interessante Schlußfolgerung kan man aus (8.143) hinsichtlich der Kernstabilität gegen Spaltung ziehen. Die experimentelle Bestätigung ist ein Prüfstein für die Leistungsfähigkeit des Modells. Der Parameter C_λ besteht aus zwei Anteilen mit entgegengesetztem Vorzeichen, die der Oberflächen- und Coulomb-Energie entsprechen. Offensichtlich muß aus Stabilitätsgründen

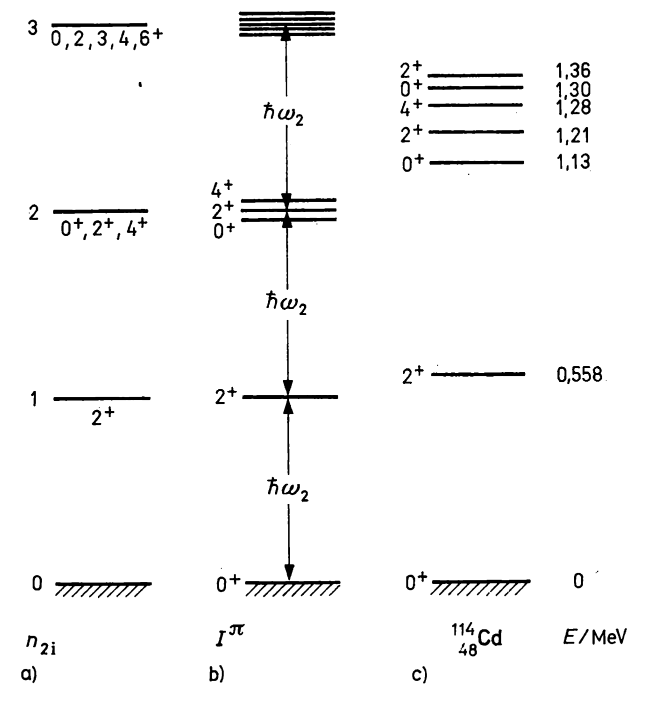


Abb. 8.33
Vibrationszustände eines sphärischen Kerns bei Quadrupolschwingungen
a) bei Entartung
b) bei Aufhebung der Entartung durch Zulassung nichtharmonischer Schwingungen
c) experimentelle Werte von $^{114}_{48}$Cd

$C_\lambda > 0$ sein, da nur in diesem Falle $\omega_\lambda > 0$ ist und das Minimum der potentiellen Energie endlichen Werten von a_λ entspricht. Daraus folgt die Ungleichung

$$\frac{2\pi\sigma r_0}{3e^2}(2\lambda + 1)(\lambda + 2) = \left(\frac{Z^2}{A}\right)_{\mathrm{krit}} > \frac{Z^2}{A} \tag{8.154}$$

als Konkurrenzbedingung zwischen Oberflächen- und Coulomb-Energie. Man nennt Z^2/A den Spaltparameter. Bei $(Z^2/A)_{\mathrm{krit}}$, wird für $C_\lambda = 0$ auch $a_\lambda = 0$, der Kern also instabil gegen Spaltung. Für $\lambda = 2$ liegen die Werte für die in Frage kommenden Nuklide zwischen 47 und 50. Je näher bei einem Kern der Spaltparameter an den kritischen Wert heran kommt, desto leichter läßt er sich spalten. Für $^{238}_{92}$U und $^{252}_{92}$Cf beträgt Z^2/A 36,0 und 38,1. Bei der Behandlung der Kernspaltung in 10.8.2. wird gezeigt, daß die Voraussage des Modells im wesentlichen richtig ist.

5. Ein Modell, das die kollektiven Anregungen in statisch deformierten Kernen beschreiben soll, muß offensichtlich sowohl Vibrations-, als auch Rotationsfreiheitsgrade erfassen. Der Ursprung des körpereigenen Koordinatensystems legt man wieder so in den Kernmittelpunkt, daß die z'-Achse mit der Symmetrieachse des zunächst axialsymmetrisch deformiert angenommenen Kerns zusammenfällt. Im unter Punkt 4 betrachteten Falle der Quadrupolschwingungen

bestimmen von den 5 Koeffizienten $a_{2\mu}$ drei die Orientierung im Raum, während zwei die Form festlegen. Man drückt sie nach A. BOHR mit zwei Parametern β und γ aus:

$$a_{20} = \beta \cos\gamma; \qquad a_{22} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\beta \sin\gamma\,. \tag{8.155}$$

Die Kernoberfläche wird damit durch

$$R = R_0\left(1 + \beta\cos\gamma Y_{20} + \frac{1}{\sqrt{2}}\,\beta\sin\gamma Y_{22}\right) \tag{8.156}$$

beschrieben. Dabei ist

$$Y_{20} = \sqrt{\frac{5}{16\pi}}\,(3\cos^2\vartheta - 1); \qquad Y_{22} = \sqrt{\frac{5}{16\pi}}\,\sin^2\vartheta\, e^{2i\varphi} \tag{8.157}$$

Man nennt β den Deformationsparameter (vgl. 6.226). Er verändert die Länge des Rotationsellipsoids entlang der Symmetrieachse z', ohne die Axialsymmetrie zu stören. D. h., der Querschnitt in der x'-y'-Ebene bleibt dabei kreisrund. In Abb. 8.34 ist dieser Sachverhalt dargestellt.

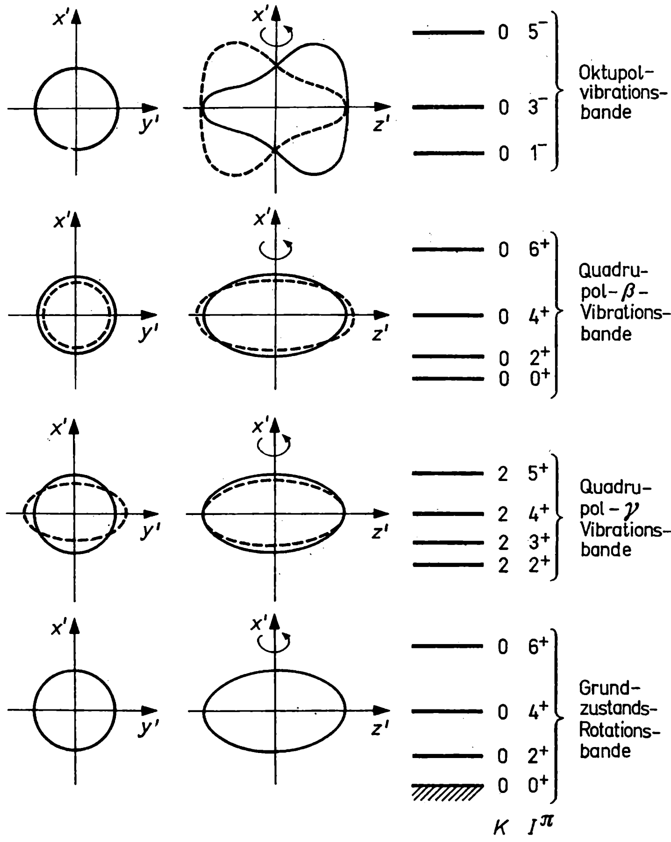


Abb. 8.34
Kollektive Anregungen in deformierten Kernen

Für den in (8.95) eingeführten Deformationsparameter δ findet man durch Halbachsenbestimmung in (8.156) die Zusammenhänge

$$c = R_0\left[1 + \beta\sqrt{\frac{5}{4\pi}}\right]; \qquad a = R_0\left[1 - \frac{\beta}{2}\sqrt{\frac{5}{4\pi}}\right] \tag{8.158}$$

und in erster Näherung

$$\beta \approx \frac{4}{3}\sqrt{\frac{\pi}{5}}\,\delta \approx 1{,}057\,\delta\,. \tag{8.159}$$

Die Abweichung des Kerns von der Axialsymmetrie wird mit dem Form- oder Asymmetrieparameter γ beschrieben. Für $\gamma = 0$ liegt Kreisquerschnitt in der x'-y'-Ebene vor, für $\gamma \neq 0$ Ellipsenquerschnitt. Auf die Länge des Ellipsoids hat γ keinen Einfluß, sie wird von β allein bestimmt.

Die Vorteile der Nutzung dieser beiden Parameter werden offensichtlich, wenn man die drei Hauptachsen mit ihnen darstellt. Setzt man für x', y' und z' die Indizes $k = 1, 2$, und 3, dann erhält man

$$R_1 = R(\vartheta' = 90°, \varphi' = 0°) = R_0(1 + \Delta R_1) \tag{8.160a}$$

$$R_2 = R(\vartheta' = 90°, \varphi' = 90°) = R_0(1 + \Delta R_2) \tag{8.160b}$$

$$R_3 = R(\vartheta' = 0°) = R_0(1 + \Delta R_3) \tag{8.160c}$$

mit

$$\Delta R_k = \sqrt{\frac{5}{4\pi}}\,R_0\beta\cos\left(\gamma - \frac{2}{5}k\pi\right). \tag{8.161}$$

Für $\gamma = 0, 2\pi/3, 4\pi/3, \ldots$ ergibt sich $\Delta R_1 = \Delta R_2$ und $\Delta R_3 = \Delta R_{z',\max}$, d. h. die Halbachsen $a = b < c$ entsprechen der Zigarrenform. Wenn $\gamma = \pi/3, \pi, 5\pi/3, \ldots$, dann ergibt sich Linsenform mit $a = b > c$. Liegt kein ganzzahliges Vielfaches von $\pi/3$ vor, dann hat der Kern drei unterschiedliche orthogonale Halbachsen, d. h., es gibt keine Axialsymmetrie mehr.

Mit (8.160, 161) können im allgemeinsten Falle also auch Zustände beschrieben werden, in denen die Kerne statisch nichtaxial deformiert sind. Modelle dieser nichtaxialen Kerne wurden von A. S. Dawydow und Mitarbeitern entwickelt. Die Rotation kann hier um alle drei Achsen erfolgen, so daß der Vektor $\boldsymbol{I}_R$ nicht mehr senkrecht auf der z'-Achse zu stehen braucht. Eindeutige Beweise für die Existenz solcher Zustände liegen jedoch nicht vor. Die betreffenden Zustandseigenschaften können auch im Rahmen von Modellen mit Axialsymmetrie beschrieben werden. Andererseits können Kerne, die im Grundzustand axialsymmetrisch deformiert sind, aber in γ-Vibrationszuständen angeregt werden, dynamisch ihre Axialsymmetrie verlieren. Der Vektor $\boldsymbol{I}_R$ beschreibt dann die kollektive Oberflächenschwingung, so daß er auch hier nicht mehr senkrecht auf z' zu stehen braucht. Ein geeignetes Drehimpuls-Koppelschema zeigt die Abb. 8.35. Hier ist der Fall dargestellt, daß im Grundzustand ein axialsymmetrisch deformierter Rumpf vorliegt, in dessen Feld sich einige äußere Nukleonen bewegen. Die Drehimpulse dieser Teilchenbewegung $\boldsymbol{I}_T$ und der kollektiven Rumpfbewegung $\boldsymbol{I}_R$ setzen sich in jedem Moment zum Gesamtdrehimpuls $\boldsymbol{I}$ zusammen. Eine Folge der nicht notwendig senkrechten Orientierung von $\boldsymbol{I}_R$ auf z' im Falle der Nichtaxialität besteht darin, daß sich die Projektionen von $\boldsymbol{I}_T$ und $\boldsymbol{I}_R$ auf die z'-Achse unterscheiden, so daß gilt

$$K = \Omega + \nu\,. \tag{8.162}$$

Für die β-Quadrupolschwingungen ist $\nu = 0$, für die γ-Quadrupolschwingungen ist $\nu = \pm 2$. Die Quadrupolschwingungen mit $\nu = \pm 1$ entsprechen der einfachen Rotation. Bei den Oktupolschwingungen kann ν die Werte $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3$, annehmen.

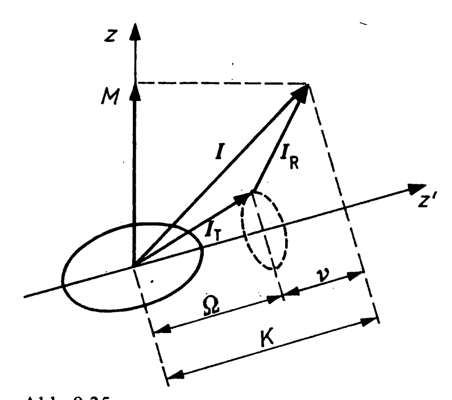


Abb. 8.35
Drehimpulskopplung zwischen äußerer Teilchen- und kollektiver Rumpfbewegung für nichtaxial deformierte Kerne

Reine β-Vibrationen sind durch konstanten Wert von γ und durch Schwingungen von β um einen festen Wert β_0 gekennzeichnet, wobei $\beta \ll \beta_0$ sein soll. Im einfachsten Falle eines gg-Kerns mit $\gamma = 0$ können die Schwingungen kein Drehmoment in der Richtung von z' haben. Sie erzeugen Zustände mit $K = 0$ und da die Axialsymmetrie erhalten bleibt, ist die Parität positiv. Die Glieder der zugehörigen Bande zeichnen sich somit durch $K = 0, I^\pi = 0^+, 2^+, 4^+, \ldots$ aus. Im Unterschied dazu werden reine γ-Schwingungen nicht von a_{20}, sondern von a_{22} bestimmt. Bei ihnen ist β konstant, während der Formparameter γ um den Wert 0 schwingt. Die Abweichungen von der Axialsymmetrie sollen aber klein sein, so daß K noch in guter Näherung eine Erhaltungsgröße ist. Aus der Reihenentwicklung (8.156) sieht man, daß der dritte Term mit $Y_{22} = Y_2^{\pm 2}$ zur Wirkung kommt. Daher erzeugen diese Schwingungen ein Drehmoment entlang z' von zwei Einheiten. Qualitativ veranschaulicht das die Abb. 8.36. Da gleichzeitig $J_3 = 0$ bleibt, ist die z'-Komponente der Rotationsbewegung gleich 0, also schließlich $K = 2$. Zu dieser Bande gehören Glieder mit $I^\pi = 2^+, 3^+, 4^+, 5^+, \ldots$

6. Wir berechnen nun die Zustandsenergie als Summe aller kollektiven Anteile eines deformierten Kerns. Die kinetische Energie des Tropfens besteht nun aus drei Anteilen:

$$E_{\text{kin}} = E_{\text{rot}} + E_{\text{vib}}^{(\beta)} + E_{\text{vib}}^{(\gamma)} \,. \tag{8.163}$$

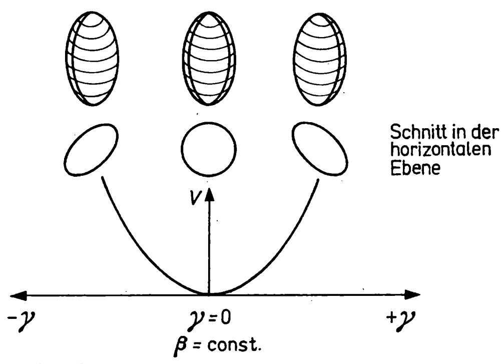


Abb. 8.36
Schematische Darstellung der γ-Deformationen deformierter Kerne

Andererseits ergibt sich E_{kin} gemäß (8.141 b) und unter Berücksichtigung von (8.155) zunächst ohne Aufteilung von E_{vib}

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} \sum_{\varkappa=1}^{3} J_\varkappa \omega_\varkappa^2 + \frac{1}{2} B_2(\dot{\beta}^2 + \beta^2 \dot{\gamma}^2) \tag{8.164}$$

Wir betrachten zuerst den Anteil der Rotationsenergie allein. Hier geben die $\omega_\varkappa$ die Winkelgeschwindigkeit der Hauptachsen relativ zu den Raumachsen an, und

$$J_\varkappa = 4B_2\beta^2 \sin^2\left(\gamma - \varkappa \frac{2\pi}{3}\right) \tag{8.165}$$

ist das zugehörige Trägheitsmoment. Im Falle der Axialsymmetrie sind $\gamma = 0$ und $J_3 = 0$, so daß dann

$$J_1 = J_2 = J = 3B_2\beta^2 \tag{8.166}$$

wird. Die Rotationsenergie lautet damit

$$E_{\text{rot}} = \frac{\hbar^2}{6B_2\beta}[I(I+1) - K^2]\,. \tag{8.167}$$

Berechnet man B_2 über das hydrodynamische Modell mit wirbel- und reibungsfreier Flüssigkeit, wie es in Punkt 5 von 8.4.3. erläutert wurde, dann erhält man unter Berücksichtigung von (8.165) das gleiche Ergebnis, wie in (8.138). Folglich nimmt nur ein kleiner Teil der Kernmasse an der Drehbewegung teil, oder es gibt Anteile der Rotationsbewegung im Kerninnern, die ω entgegengerichtet sind, wie es in Abb. 8.30b gezeigt ist. Das berechtigt auch zu der Annahme, daß der Kern von einer Oberflächenwelle umlaufen wird, die einen relativ kleinen Teil der Nukleonen erfaßt. Dieser Schluß steht in Übereinstimmung mit der Vorstellung, daß die Nukleonen wie die Moleküle eines Flüssigkeitströpfchens Schwingungen vollführen, sich also nicht auf Kreisbahnen um das Kernzentrum bewegen. Im Ergebnis liegt das tatsächliche Trägheitsmoment zwischen den beiden, mit den genannten Grenzmodellvorstellungen berechneten Werten. Eine andere Ursache für die Änderung des Trägheitsmoments, die Paarkorrelationen, werden in 8.6.4. besprochen.

Bei der Berechnung der zwei Anteile der kinetischen Energie für β- und γ-Vibrationen geht man ebenfalls von kleinen Auslenkungen um β_0 und $\gamma = 0$ aus, d. h. von

$$a_{20} = \beta_0 + \varphi \approx \beta\,; \quad a_{22} = 0 + \eta \approx \frac{\beta_0\gamma}{\sqrt{2}} \tag{8.168}$$

so daß man V und E_{kin} in der Nähe von β_0 und $\gamma = 0$ durch eine Reihenentwicklung annähern kann:

$$V_0 = \frac{1}{2} C_\beta(\beta - \beta_0)^2 + \frac{1}{2} C_\gamma\gamma^2 = \frac{1}{2} C_a\varphi^2 + C_b\eta^2\,, \tag{8.169}$$

$$E_{\text{k}} = \frac{1}{2} B_\beta\dot{\beta}^2 + \frac{1}{2} B_\gamma\dot{\gamma}^2 = \frac{1}{2} B_a\dot{\varphi}^2 + B_b\dot{\eta}^2\,. \tag{8.170}$$

Mit

$$C_\beta = C_a\,; \quad C_\gamma = C_b\beta_0^2\,; \quad B_\beta = B_a\,; \quad B_\gamma = B_b\beta_0^2 \tag{8.171}$$

folgt

$$\omega_\beta = \sqrt{\frac{C_\beta}{B_\beta}} = \sqrt{\frac{C_a}{B_a}}\,; \quad \omega_\gamma = \sqrt{\frac{C_\gamma}{B_\gamma}} = \sqrt{\frac{C_b}{B_b}}\,. \tag{8.172}$$

In guter Näherung kann

$$B_\beta = B_\gamma = B_2 \tag{8.173}$$

gesetzt werden. Damit erhält man über den betreffenden Hamilton-Operator für die β-Vibrationen mit $K^\pi = 0^+$

$$E_{\text{vib}}^{(\beta)} = \hbar\omega_\beta \left(n_\beta + \frac{1}{2}\right) \tag{8.174a}$$

$$n_\beta = 0, 1, 2, 3, \ldots \tag{8.174b}$$

und für die γ-Vibrationen mit $K^\pi = 2^+$

$$E_{\text{vib}}^{(\gamma)} = \hbar\omega_\gamma \left(\frac{1}{2}|K| + 2n_\gamma + 1\right), \tag{8.175a}$$

$$n_\gamma = 0, 1, 2, 3, \ldots . \tag{8.175b}$$

Die kinetische Gesamtenergie eines solchen kollektiven Zustandes kann somit den Betrag

$$E_{\text{kin}}(I, K, n_\beta, n_\gamma) = \frac{\hbar^2}{6B_2\beta}[I(I+1) - K^2] + \left(n_\beta + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_\beta + \left[\frac{1}{2}|K| + 2n_\gamma + 1\right]\hbar\omega_\gamma \tag{8.176}$$

annehmen. Die Berechnung von B_2 und C_2 im Rahmen des einfachen Vibrationsmodells führt auf große Abweichungen von den experimentellen Daten. Richtige Werte dieser Koeffizienten werden im Rahmen mikroskopischer Verfahren erhalten.

7. Einige der kollektiven Anregungsformen axialsymmetrisch deformierter gg-Kerne, wie sie mit dem hier betrachteten Modell beschrieben werden können, sind in Abb. 8.34 schematisch dargestellt, ebenso die dazugehörigen Bandenglieder. Die Abb. 8.37 zeigt als Auszug aus dem experimentell ermittelten Zustandsschema des Nuklids ^{152}Sm mit $\beta \approx 0{,}25$ die entsprechenden Banden. Der Kopfzustand, auf dem die Banden aufbauen, kann unterschiedlicher Natur sein. Der einfachste Fall ist die Rotationsbande des Grundzustandes mit $I = K = 0$ und den Charakteristika $I^\pi = 0^+, 2^+, 4^+, 6^+, \ldots$. Die Energien können mit dem ersten Term in (8.176) berechnet werden. Eine weitere Zustandsfolge mit $K = 0$ und $I^\pi = 0^+, 2^+, 4^+, \ldots$ entspricht der Rotationsbande auf dem β-Vibrationszustand bei 684,8 keV. Diese Energie berechnet man aus dem zweiten Term von (8.176), die der Bandenglieder aus dem ersten. Eine zweite β-Vibrationsbande scheint sich auf dem $K, I^\pi = 0, 0^+$-Zustand bei 1082,8 keV aufzubauen. Eine γ-Vibrationsbande mit $K = 2, I^\pi = 2^+, 3^+, 4^+$ hat ihren Kopfzustand bei 1085,8 keV. Das ist der eigentliche Vibrationszustand, dessen Energie mit dem 3. Term in (8.176) berechnet werden kann. Die Energien der anderen Glieder dieser Bande werden wieder mit dem ersten Term berechnet. Die Drehimpulse entsprechen in Übereinstimmung mit (8.136a) $I = K, K+1, K+2, \ldots$, d. h. 2, 3, 4, ...

8. Bei den deformierten Kernen treten auch Oktupolvibrationen auf; der gg-Kern $^{152}_{62}\text{Sm}_{90}$ ist ein typisches Beispiel dafür. Man erkennt das an Hand von Abb. 8.37. Der Kopfzustand der Bande mit $K = 0$ liegt mit $I^\pi = 1^-$ bei 963,4 keV. Die weiteren Glieder mit $K = 0, I^\pi = 3^-$ und 5^- sind Rotationszustände. Zwei weitere Rotationsbanden bauen auf den Kopf- und gleichzeitig Oktupolvibrationszuständen mit $K = 1, I^\pi = 1^-$, bzw. $K = 2, I^\pi = 2^-$ und $E^* = 1510{,}8$ keV, bzw. 1649,9 keV auf. Wenn man von der Bande der Oktupolvibrationszustände spricht, dann sollten genau genommen nur die tatsächlichen Oktupolzustände gemeint sein, bei denen $K = 1, 2, 3, \ldots$ gilt. Trotzdem findet man oft, daß die sich auf Vibrationskopfzuständen aufbauenden Rotationsbanden ebenfalls Vibrationsbande genannt werden.

0,12⁺ — 2160
0,10⁺ — 2103
0,10⁺ — 1609
0,8⁺ — 1666
0,8⁺ — 1125,6
0,6⁺ — 1311
0,6⁺ — 706,9
0,4⁺ — 1023,0
0,4⁺ — 366,44
0,2⁺ — 810,4
0,0⁺ — 684,8
0,2⁺ — 1292,8
0,0⁺ — 1082,8
2,4⁺ — 1371,6
2,3⁺ — 1233,8
2,2⁺ — 1085,8
0,5⁻ — 1222
0,3⁻ — 1041,1
0,1⁻ — 963,4
1,5⁻ — 1726
1,3⁻ — 1579,4
1,2⁻ — 1529,8
1,1⁻ — 1510,8
2,3⁻ — 1757,0
2,2⁻ — 1649,9
0,2⁺ — 121,78
0,0⁺ — 0
K, I^{π} E/keV

β-Vibrationsbande mit $K = 0$
γ-Vibrationsbande mit $K = 2$
Oktupol-Vibrationsbanden mit $K = 0$ $K = 1$ $K = 2$

$^{152}_{62}Sm_{90}$

Abb. 8.37
Kollektive Anregungszustände des Nuklids $^{152}_{62}Sm$

8.5. Vereinigte Kernmodelle mit Teilchen- und Kollektivaspekten

8.5.1. Rumpf-Teilchen-Wechselwirkung

1. In den bisherigen Betrachtungen wurde die Tatsache der statischen oder dynamischen Deformation als gegeben hingenommen. Die Ursachen der Deformationen lassen sich jedoch leicht erklären. Dazu betrachten wir zunächst den einfachen, in Abb. 8.38 dargestellten Fall mit einem äußeren Nukleon im Felde eines magischen Rumpfes, bzw. mit einem fehlenden Nukleon, also mit einem Loch. Zwischen Rumpf und Nukleon, bzw. Loch kommt es zu einer Wechselwirkung. Im Falle eines Nukleons oder eines Lochs ist sie gering ausgeprägt; man spricht von schwacher

Kopplung.[1]) Solche Kerne neigen leichter zu Vibrationen als magische, die Energien der Vibrationszustände liegen tiefer. In der Abbildung ist auch gezeigt, wie sich die Kernoberfläche im Mittel verändern kann, insbesondere wenn die Zahl der äußeren Teilchen oder der Löcher größer wird. Bei einer bestimmten Zahl erreicht die Stärke der Kopplung so große Werte, daß der entsprechende Kern statisch deformiert wird. In der Tat sind die doppelt magischen Kerne sphärisch-symmetrisch, während sich die weiter weg von ihnen gelegenen Kerne, beginnend bei einer bestimmten Zahl äußerer Teilchen oder Löcher, durch bleibende Deformation auszeichnen.

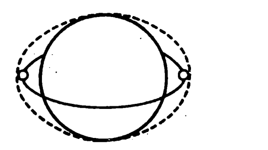
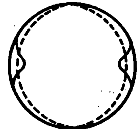



Abb. 8.38
Kerndeformation durch Rumpf-Teilchen und Rumpf-Loch-Wechselwirkung

Der Mechanismus der Rumpf-Teilchen-Wechselwirkung kann über die Drehimpulsverhältnisse verstanden werden. Wenn diese Wechselwirkung in dem dargelegten Sinne einer Kopplung stark ist, dann ist das Potential, in dem sich die äußeren Teilchen bewegen nicht mehr sphärisch-symmetrisch. Es kann vielmehr wie beim Nilsson-Modell rotationselliptische Symmetrie angenommen werden. Der Charakter eines Zentralfeldes ist daher verloren gegangen, so daß die Bahndrehimpulse $\boldsymbol{l}_i$ der äußeren Nukleonen keine exakten Integrale der Bewegung mehr sind und damit auch die dazugehörigen $\boldsymbol{j}_i$ nicht mehr. Da sich aber der Gesamtdrehimpuls $\boldsymbol{I}$ des Kerns ständig aus $\boldsymbol{j}_i$ und $\boldsymbol{I}_\mathrm{R}$, dem Rumpfdrehimpuls, zusammensetzt und $\boldsymbol{I}^2$ und K auch in diesem Falle Erhaltungsgrößen sind, erfolgt zwischen Rumpf und äußeren Teilchen ständig Drehimpuls- und damit auch Energieaustausch. Das Schema der Drehimpulskopplung ist in Abb. 8.35 für nichtaxial und in Abb. 8.39 für axial deformierte Kerne dargestellt. Der Drehimpulsaustausch bedeutet in diesen Bildern, daß sich der Winkel zwischen $\boldsymbol{I}_\mathrm{T}$ und $\boldsymbol{I}$ und damit auch ihre Länge ändern können. In Tabelle 8.5 sind die Drehimpulserhaltungsverhältnisse für die verschiedenen Fälle der Kernform und der Rumpf-Teilchen-Wechselwirkung zusammengestellt.

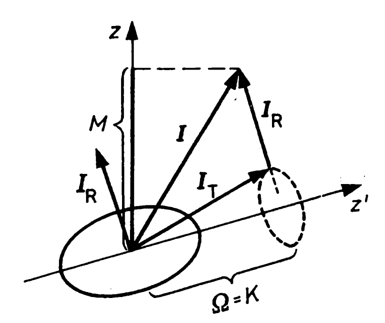


Abb. 8.39
Drehimpulskopplung bei starker Rumpf-Teilchen-Wechselwirkung und axialsymmetrischer Rumpfdeformation

[1]) Diese schwache oder starke Kopplung darf nicht mit der fundamentalen schwachen oder starken Wechselwirkung verwechselt werden.

Tabelle 8.5
Drehimpulserhaltung bei verschiedenen Kernformen und Kopplungsstärken

Rumpfform, bzw. Rumpf-Teilchen-Wechselwirkung	Erhaltungsgrößen des Drehimpulses
Kugelsymmetrie	l_i^2, j_i^2, I^2, $l_{iz}, j_{iz}, I_z = M$
Rotationsellipsoid ohne äußere Teilchen	I^2 $I_{z'} = K,\ I_z = M$
Schwache Rumpf-Teilchen-Wechselwirkung	I_R^2, I_T^2, I^2 $I_{Rz}, I_{Tz}, I_z = M$
Starke Rumpf-Teilchen-Wechselwirkung	I^2 $I_{z'} = K_i\Omega$

2. Auf der Grundlage der Rumpf-Teilchen-Wechselwirkung baut man die vereinheitlichten Kernmodelle auf, indem über den Drehimpuls sowohl Teilchen- als auch Kollektivaspekte Berücksichtigung finden. Die günstigste Form des Hamilton-Operators liegt vor, wenn er für das System Kern = Rumpf + äußere Teilchen aus einzelnen Termen für die verschiedenen Bewegungsformen zusammengesetzt werden kann. Die entsprechenden Wellenfunktionen bilden dann multiplikativ die Gesamtwellenfunktion, d. h., die Bewegung der betrachteten Freiheitsgrade erfolgt unabhängig voneinander, das Problem ist dann separierbar. Im einfachsten Falle setzt man

$$H = H_T + H_{rot} + H_{vib} \tag{8.177}$$

mit

$$\Psi = \Psi_T \cdot \Psi_{rot} \cdot \Psi_{vib} \,. \tag{8.178}$$

Die drei Bewegungsformen sind nur dann unabhängig voneinander, wenn sich die entsprechenden Potentiale nicht gegenseitig beeinflussen oder sich nur so langsam relativ zueinander verändern, daß dies ohne Einfluß bleibt. Die Bewegung erfolgt dann adiabatisch mit

$$\omega_{rot} \ll \omega_{vib} \ll \omega_T \,. \tag{8.179}$$

Man spricht von adiabatischer Näherung. Tatsächlich ist die Umlauffrequenz eines äußeren Nukleons $\omega_T = j/m_N r^2$ viel größer, als die des Rumpfes $\omega_{rot} = I/m_K R^2$. Somit präzediert $\boldsymbol{j}$ schnell um z' und dieses langsam um $\boldsymbol{I}$. Die Teilchenbewegung wird von der Rumpfbewegung also kaum beeinflußt.

3. Die Lösungen der Schrödinger-Gleichung für den Fall der sphärischen Kerne sind in (8.178) enthalten. Da es sich um eine schwache Rumpf-Teilchen-Wechselwirkung mit einem oder einigen wenigen äußeren Teilchen oder Löchern am Rumpf handelt, liegt keine Deformation vor, so daß die Kernrotation vernachlässigt werden kann. Die verbleibenden Anteile des Hamilton-Operators entsprechen dann (8.54) unter Berücksichtigung von (8.73) für die Teilchenbewegung und (8.147) für die Vibrationsbewegung, so daß man für Hamilton-Operator und Wellenfunktion erhält

$$H_{schw} = H_T(\boldsymbol{r}_i) + H_{vib}(a_{\lambda\mu}) \,, \tag{8.180}$$

$$\Psi_{schw} = \Psi_T(\boldsymbol{r}_i) \cdot \Psi_{vib}(a_{\lambda\mu}) \,. \tag{8.181}$$

Die Anregungszustände des Kerns haben in diesem Modell zweierlei Natur. Es sind die Einteilchenzustände des Schalenmodells und die Vibrationszustände des hydrodynamischen Modells. Damit die adiabatische Näherung gilt, müssen die äußeren Teilchen während einer Oberflächenschwingung viele Umläufe vollziehen. Sie bewegen sich praktisch in einem festen Potential. Das bedeutet für die Anregungszustände, daß die Energien der Vibrationszustände klein sind, verglichen mit den Zuständen der Teilchenanregungen.

Das Kopplungsschema der Drehimpulse für den Fall der schwachen Rumpf-Teilchen-Wechselwirkung ist in Abb. 8.40 dargestellt. Es ist immer

$$\boldsymbol{I} = \boldsymbol{I}_{\mathrm{R}} + \boldsymbol{I}_{\mathrm{T}}, \tag{8.182}$$

und $\boldsymbol{I}_{\mathrm{R}}$ und $\boldsymbol{I}_{\mathrm{T}}$ sind jeder für sich in guter Näherung konstant. Gemeinsam rotieren sie um $\boldsymbol{I}$. Da es keine durch Deformation ausgezeichnete z'-Achse gibt, kann es auch keine Projektion K geben, so daß $\boldsymbol{I}_{\mathrm{R}}$ beliebige Ausrichtung haben kann.

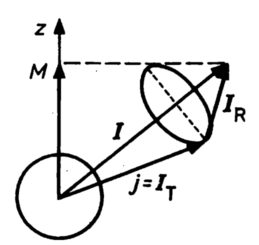


Abb. 8.40
Drehimpulskopplung bei schwacher Rumpf-Teilchen-Wechselwirkung

4. Mit zunehmender äußerer Teilchenzahl oder mit zunehmender Lochzahl stellt sich eine bleibende Kerndeformation ein. Man wurde zuerst durch die dann auftretenden großen Quadrupolmomente darauf aufmerksam. Die Bewegung der äußeren Teilchen erfolgt nun in diesem Falle der starken Rumpf-Teilchen-Wechselwirkung in einem Potential, das in Analogie zur Kernform ausgebildet ist. Meist geht man von einer rotationselliptischen Symmetrie aus. Einfache Verhältnisse liegen hier ebenso wie im Falle der schwachen Rumpf-Teilchen-Wechselwirkung vor, wenn die Teilchenbewegung schnell ist im Vergleich zur kollektiven Bewegung des Rumpfes, d. h., wenn die Bedingung der Adiabatizität (8.179) erfüllt ist. Die Energien der Teilchenanregungen sind dann groß, gemessen an den kollektiven Anregungen.

Das Vorhandensein rotationselliptischer Kernformen macht die Anregung von Rotationsfreiheitsgraden möglich. Der Hamilton-Operator hat daher die Form (8.177), der Ansatz für die

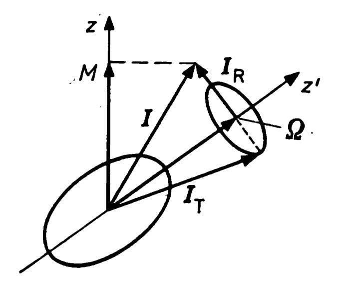


Abb. 8.41
Drehimpulskopplung bei starker Rumpf-Teilchen-Wechselwirkung

Wellenfunktion die von (8.178). Außerdem liegen nun andere Drehimpulsverhältnisse vor, wie man aus Tabelle 8.5 erkennen kann. Im Falle der axialsymmetrischen Deformation sind $\boldsymbol{I}^2$, $\boldsymbol{K}$ und $\boldsymbol{\Omega}$ Integrale der Bewegung. Die Präzessionsbewegung von $\boldsymbol{j}$ oder $\boldsymbol{I}_T$ um z' führt zu einem effektiven $\boldsymbol{I}_{T,\,eff} = \boldsymbol{\Omega}$. Daher setzen sich $\boldsymbol{I}_R$ und $\boldsymbol{\Omega}$ gemäß

$$\boldsymbol{I} = \boldsymbol{I}_R + \boldsymbol{\Omega} \tag{8.183}$$

zusammen. Das Ergebnis ist in Abb. 8.41 dargestellt. Infolge der Herausmittelung der x'- und y'-Komponenten von $\boldsymbol{I}_T$ ist es ein Spezialfall von Abb. 8.39.

8.5.2. Kopplung von Rotations- und Teilchenbewegung

1. Bei den uA- sowie bei den meisten uu-Kernen ist der Spin des Grundzustandes in Übereinstimmung mit der Annahme von Punkt 4 in 8.4.3. von Null verschieden. Die Ursache ist der Drehimpuls der äußeren Teilchen, die sich im Felde des spinlosen Rumpfes bewegen. Im einfachsten Falle geht man wie beim Einteilchen-Schalenmodell von einem äußeren Nukleon aus, das mit dem Drehimpuls $\boldsymbol{j}$ den Grundzustandsspin bestimmt und das nun in diesem Modell um einen axialsymmetrischen Rumpf rotiert. Wie in Abb. 8.39 dargestellt, steht $\boldsymbol{I}_R$ weiterhin senkrecht auf z', so daß die Projektion von $\boldsymbol{I}$ auf z' mit der von $\boldsymbol{j}$ zusammenfällt:

$$j_{z'} = \Omega = K\,. \tag{8.184}$$

Da der Fall der starken Rumpf-Teilchen-Wechselwirkung vorliegt, gilt (8.183).

Eine näherungsweise Auftrennung von kollektiver Rumpf- und äußerer Teilchenbewegung im Potential des Rumpfes kann man ausgehend von

$$\boldsymbol{I}_R = \boldsymbol{I} - \boldsymbol{j} \tag{8.185}$$

erreichen. Der Einfachheit halber wird die Vibrationsbewegung vernachlässigt, indem der entsprechende Anteil des Hamilton-Operators Null gesetzt wird. Es ergibt sich dann

$$H = H_T + H_R + H_C = \frac{\hbar^2}{2J}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{j})^2 = \frac{\hbar^2}{2J}(\boldsymbol{I}^2 + \boldsymbol{j}^2 - 2\boldsymbol{I}\boldsymbol{j})\,. \tag{8.186}$$

Der gemischte Term

$$H_C = -\frac{\hbar}{J}\boldsymbol{I}\boldsymbol{j} \tag{8.187}$$

hat Ähnlichkeit mit dem Anteil, der durch Berücksichtigung der klassischen Corioliskraft entstehen würde. In den meisten Anwendungen kann man ihn vernachlässigen, zumindest für Rotationszustände mit niedrigen Werten des Drehimpulses. Eine prinzipielle Ausnahme von dieser Regel stellen alle Zustände mit $K = 1/2$ dar. Wir besprechen diesen Fall in Punkt 2.

Die adiabatische Näherung (8.179) bedeutet auch, daß man H_C gegen H_T und H_{rot} vernachlässigen kann. Das heißt jedoch nicht, daß kollektive und Teilchenbewegung vollständig voneinander getrennt werden können. Die Kopplung zwischen beiden ist in $H_{rot} \sim \boldsymbol{I}^2$ enthalten. Daher ist in dem Ansatz

$$\Psi \sim \Psi_{rot} \cdot \Psi_T = D^I_{MK}(\Theta_\nu)\,\chi(\boldsymbol{r}') \tag{8.188}$$

die Wellenfunktion $D(\Theta_\nu)$ streng genommen nicht nur Eigenfunktion von H_R, während $\chi(\boldsymbol{r}')$ exakt Eigenfunktion von H_T ist, denn $H_T \sim \boldsymbol{j}^2$. Die Θ_ν sind die Eulerschen Winkel. Sie beschreiben die Orientierung des kernfesten Koordinatensystems im raumfesten. Da der Operator $\boldsymbol{I}$ nicht auf χ wirken kann, ist $D(\Theta_\nu)$ Eigenfunktion von $\boldsymbol{I}^2$, I_z und $I_{z'}$. Und da der Operator $\boldsymbol{j}$

nicht auf $D(\Theta_v)$ wirken kann, ist er gleichzeitig auch Eigenfunktion von I_R^2, I_{Rz} und $I_{Rz'}$. Bei der exakten Durchrechnung ergibt sich die Gesamtwellenfunktion dieses Problems zu

$$\Psi = \sqrt{\frac{2I+1}{8\pi^2}}\, D^I_{MK}(\Theta_v)\, \chi^\tau_\Omega(r'), \tag{8.189}$$

wobei der Wurzelausdruck ein Normierungsfaktor ist und τ für alle Quantenzahlen außer Ω steht, die die Einzelteilchenbewegung charakterisieren. Die Eigenfunktionen mit diesen Wellenfunktionen wurden bereits in (8.135) angegeben.

2. Der Ausdruck (8.187) wird oft Coriolis-Kopplungsterm genannt. Wenn man die Verbindung zur klassischen Mechanik sucht, so stellt man fest, daß dieses Glied mehr Terme enthält, als der Corioliskraft entspricht. Zum Beweis betrachten wir einen axialsymmetrisch deformierten Rotator, der um eine Achse senkrecht zur Symmetrieachse mit der Winkelgeschwindigkeit $\omega(t)$ rotiert und um den seinerseits unter der Wirkung eines Potentials $V(\boldsymbol{r})$ ein Teilchen mit der Masse m und dem Drehimpuls $\boldsymbol{j} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}$ ebenfalls eine Rotationsbewegung vollführt. Im körpereigenen Koordinatensystem lautet der Hamilton-Operator

$$H = \frac{\boldsymbol{p}^2}{2m} + V(\boldsymbol{r}) - \omega(t)\,\boldsymbol{j}, \tag{8.190}$$

so daß

$$\boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{r}} = \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{p}} = \frac{\boldsymbol{p}}{m} - \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r} \tag{8.191}$$

und

$$m\ddot{\boldsymbol{r}} = \dot{\boldsymbol{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{r}} = \boldsymbol{p} \times \boldsymbol{\omega} - \frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{r}}. \tag{8.192}$$

Die gesamte auf das äußere Teilchen in diesem System wirkende Kraft ist demzufolge

$$\boldsymbol{F} = m\ddot{\boldsymbol{r}} = -\frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{r}} - m\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v} + \boldsymbol{p} \times \boldsymbol{\omega} - m\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{r}, \tag{8.193}$$

$$\boldsymbol{F} = -\frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{r}} - 2m\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v} - m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}) - m\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{r}. \tag{8.194}$$

Neben der unmittelbar von $V(\boldsymbol{r})$ her auf das Teilchen wirkenden Kraft treten somit noch drei weitere systembedingte Kräfte auf. Es sind dies die Coriolis-Kraft, die Zentrifugalkraft und eine bei ungleichmäßiger Rotation mit $\dot{\omega} = 0$ existierende Kraft. Alle drei gehen von dem Term $-\dot{\omega}(t) \cdot \boldsymbol{j}$ in (8.190) aus, den man wegen $\boldsymbol{I} \sim \boldsymbol{\omega}$ auch als Funktion von $\boldsymbol{I} \cdot \boldsymbol{j}$ schreiben kann, d. h. in einer Form, wie sie in (8.187) als angeblicher Coriolis-Term auftritt. Selbst wenn $\dot{\omega} = 0$ ist, enthält dieser Term auch die Zentrifugalkraft.

3. Es wurde bereits darauf hingewiesen, daß im Falle $K = 1/2$ besondere Verhältnisse vorliegen. Das hängt damit zusammen, daß die Rotationsbewegung des Rumpfes nur mit der Teilchenbewegung gekoppelt sein kann, wenn der Bahndrehimpuls nicht verschwindet, d. h. es muß $l \neq 0$ sein. Ist jedoch $K = 1/2$, dann ist $l = 0$ und das äußere Teilchen hat nur den Eigendrehimpuls $s = 1/2$. Infolgedessen fehlt die Wechselwirkung zwischen Teilchen- und Oberflächenbewegung oder anders ausgedrückt, sie sind entkoppelt. Der Entkopplungsgrad kann verschieden groß sein. Je schwächer die Kopplung ist, desto weniger darf der Mischterm (8.187) vernachlässigt werden. Im Grenzfalle ist er in der ersten Ordnung der Störungsrechnung zu berücksichtigen. Die Energie berechnet man dann zu

$$E_{\text{rot}} = \frac{\hbar^2}{2J}\left[I(I+1) + a(-1)^{I+\frac{1}{2}}\left(I + \frac{1}{2}\right) - k^2\right]. \tag{8.195}$$

Die Rotationsbande enthält Zustände mit

$$I = 1/2,\, 2 \pm 1/2,\, 4 \pm 1/2, \ldots \tag{8.196}$$

Der Faktor a wird Entkopplungsparameter genannt. Da E_{rot} außer von I auch noch von a abhängt, können sich die Rotationsbanden mit $K = 1/2$ wesentlich von den nicht entkoppelten Banden unterscheiden. Bei den schweren Kernen liegt a im allgemeinen in den Grenzen $-1 \lesssim a \lesssim 1$. Daher kommt es hier nur selten zu einer Änderung der Reihenfolge der Zustände. Bei den leichten Kernen treten aber öfter Werte auf, die der Bedingung $|\pm a| > |\pm 1|$ genügen. Die Energiezustände haben dann die Tendenz zur Paarung und zur Umkehr der Reihenfolge. Es braucht dann nicht immer der Zustand mit $I = K$ der energetisch niedrigste zu sein. Für $a < -1$ geht z. B. der Zustand mit $I = 3/2$ unter den mit $I = 1/2$ und für $a > 1$ der mit $I = 5/2$ unter den mit $I = 3/2$.

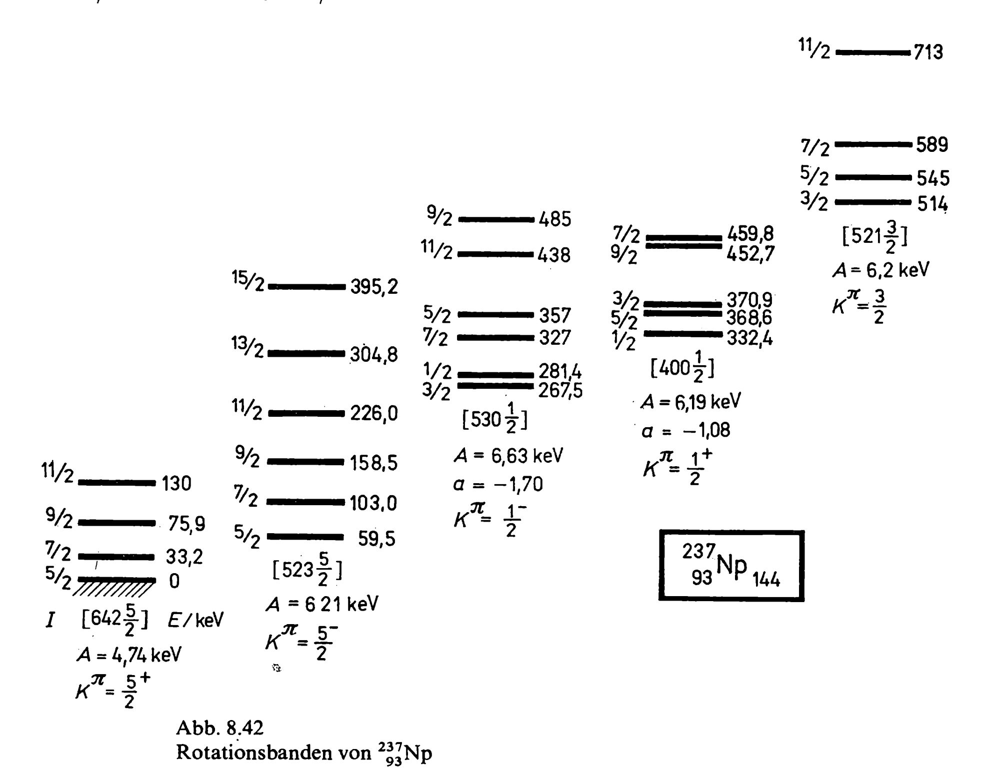


Abb. 8.42
Rotationsbanden von $^{237}_{93}\mathrm{Np}$

In Abb. 8.42 sind Rotationsbanden von $^{237}_{93}\mathrm{Np}$ dargestellt. Die experimentellen E_{rot}-Werte lassen sich mit recht hoher Genauigkeit mit (8.135) und den in der Abbildung angegebenen A- und a-Werten berechnen. Aus dem Nilsson-Schema in Abb. 8.18 entnimmt man für $\delta \approx 0{,}25$, daß die unteren Bandenköpfe den Einteilchenzuständen $5/2^+$ [530] und $5/2^-$ [523] entsprechen. Die darauffolgenden Bandenköpfe haben die Charakteristika $1/2^-$ [530] und $1/2^+$ [400], begründen also die Banden mit $K = 1/2$. Man erkennt deutlich in der Bande mit $a = -1{,}70$ die Umkehr der Reihenfolge von Bandengliedern mit benachbarten I-Werten und in der Bande mit $a = -1{,}08$ eine Tendenz zur Paarung.

4. Das magnetische Dipolmoment der deformierten Kerne im Rotationszustand unterscheidet sich naturgemäß von dem der sphärischen Kerne. Gleichzeitig bietet seine Kenntnis die Möglichkeit, Aussagen über die Kernstruktur zu machen. Bei der Berechnung gehen wir von einem axialsymmetrisch deformierten Kern mit der Symmetrieachse z' aus, deren Richtung durch den Einheitsvektor $\boldsymbol{e}_n$ vorgegeben sei. Aus Abb. 8.39 erkennt man, daß die Projektion von $\boldsymbol{j}$ und $\boldsymbol{I}$ auf z' gemäß (8.184) durch $\Omega = K$ gegeben ist. Um sowohl den Einfluß der äußeren Teilchen, als auch der kollektiven Rumpfrotation zu erfassen, werden die entsprechenden gyromagnetischen Verhältnisse g_Ω und g_R eingeführt. Der Ansatz für das Dipolmoment lautet damit

$$\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}_\mathrm{T} + \boldsymbol{\mu}_\mathrm{R} = g_\Omega \boldsymbol{j} + g_\mathrm{R} \boldsymbol{I}_\mathrm{R} = g_\Omega \Omega \boldsymbol{e}_n + g_\mathrm{R} \boldsymbol{I}_\mathrm{R} \,. \tag{8.197}$$

Dabei ist in Übereinstimmung mit (6.124)

$$g_\Omega \boldsymbol{j} = g_1 \boldsymbol{l} + g_s \boldsymbol{s} \,. \tag{8.198}$$

Drückt man noch mit Hilfe von (8.182) den Drehimpulsoperator der Rotation mit dem des Gesamtdrehimpulses über

$$\boldsymbol{I}_\mathrm{R} = \boldsymbol{I} - \boldsymbol{j} = \boldsymbol{I} - \boldsymbol{e}_n \Omega \tag{8.199}$$

aus, dann ergibt sich

$$\boldsymbol{\mu} = g_\mathrm{R} \boldsymbol{I} + (g_\Omega - g_\mathrm{R})\, \boldsymbol{j} = \left[g_\mathrm{R} + (g_\Omega - g_\mathrm{R}) \frac{(\boldsymbol{e}_n \boldsymbol{I})}{\boldsymbol{I}^2}\, \Omega \right] \boldsymbol{I} \,. \tag{8.200}$$

Da das magnetische Dipolmoment des Kerns gleich dem Erwartungswert von $\boldsymbol{\mu}$ für das Maximum des Mittelwertes der Projektion des Operators $\boldsymbol{\mu}$ auf die physikalisch ausgezeichnete z-Achse ist, erhält man für den Grundzustand mit

$$M = I = K = \Omega \tag{8.201}$$

$$\mu = \langle \mu_z \rangle = (g_\Omega - g_\mathrm{R}) \frac{\Omega^2}{I+1} + g_\mathrm{R} I = (g_\Omega - g_\mathrm{R}) \frac{I^2}{I+1} + g_\mathrm{R} I \,. \tag{8.202}$$

Diese Gleichung gilt nur für $I > 1/2$.

Für den Vergleich mit den Meßergebnissen müssen numerische Werte berechnet werden, wozu Zahlenwerte von g_Ω und g_R notwendig sind. Den g-Faktor der Kollektivbewegung setzt man in Übereinstimmung mit einem gyromagnetischen Verhältnis von

$$\frac{Ze\hbar}{2Am_M c} = \frac{Z}{A} \mu_\mathrm{K} \,, \tag{8.203}$$

d. h. zu

$$g_\mathrm{R} = Z/A \tag{8.204}$$

an. Für Kerne mit mittlerem und großem A kann man von einem Zahlenwert zwischen 0,45 und 0,50 ausgehen. Einen zutreffenderen Wert erhält man für g_R über die experimentelle Bestimmung des magnetischen Dipolmoments eines Rotationsbandenzustandes in einem gg-Kern, wo wegen $\Omega = 0$ aus (8.202) die einfache Beziehung $\mu = g_\mathrm{R} \cdot I$ folgt. Solche Messungen sind mit der Methode der γ-γ-Winkelkorrelationen, die in 9.6.4. besprochen werden, möglich.

Den Wert von g_Ω berechnet man in dem Falle, da j eine Erhaltungsgröße ist, in Übereinstimmung mit (8.198) gemäß

$$g_\Omega = \frac{1}{\Omega} (g_s s + g_1 l) \,, \tag{8.205a}$$

im entgegengesetzten Falle über

$$g_\Omega = \frac{1}{\Omega}(g_s s_z + g_l l_z). \tag{8.205b}$$

Dabei sind s_z und l_z die Projektionen auf die z'-Achse. Man sieht, daß g_Ω unterschiedliche Werte für Neutronen und Protonen als ungepaartes äußeres Nukleon annimmt. Für uZ-Kerne ist

$$g_\Omega = \frac{1}{I}(g_s^{(p)} s + g_l^{(p)} l) = \frac{1}{I}\left[\pm 2{,}79 + \left(I \mp \frac{1}{2}\right)\right] \tag{8.206a}$$

und für uN-Kerne

$$g_\Omega = \frac{1}{I}(g_s^{(n)} s + g_l^{(n)} l) = \pm \frac{1{,}91}{I}. \tag{8.206b}$$

Daraus folgt schließlich

$$\mu_{uZ} = (\pm 2{,}79 + I \mp 1/2 + Z/A)\frac{I}{I+1}, \tag{8.207a}$$

$$\mu_{uN} = (\pm 1{,}91 + Z/A)\frac{I}{I+1}. \tag{8.207b}$$

In Tabelle 8.6 sind die nach diesen Formeln für einige Kerne berechneten Werte den experimentell erhaltenen gegenübergestellt. Weitere experimentelle Werte können aus Tabelle D.3 entnommen werden. Aus dem Vergleich folgt, daß die Berücksichtigung des vom nichtsphärischen Rumpf verursachten Anteils die Übereinstimmung zwischen Theorie und Experiment wesentlich verbessert.

Tabelle 8.6
Gegenüberstellung von experimentellen und berechneten Werten der magnetischen Dipolmomente axialsymmetrisch deformierter Kerne

uZ-Kern	$\mu_{th.}/\mu_K$	$\mu_{exp.}/\mu_K$	uN-Kern	$\mu_{th.}/\mu_K$	$\mu_{exp.}/\mu_K$
$^{27}_{13}Al$	3,77	3,64	$^{25}_{12}Mg$	–0,67	–0,86
$^{121}_{51}Sb$	3,73	3,36	$^{95}_{42}Mo$	–0,81	–0,91
$^{131}_{55}Cs$	3,73	3,48	$^{105}_{46}Pd$	–0,81	–0,60
$^{151}_{59}Pr$	3,73	3,90	$^{111}_{48}Cd$	–0,81	–0,70
$^{187}_{75}Re$	3,71	3,20			

Mit der hier verwendeten Methode zur Berechnung der magnetischen Dipolmomente der deformierten Kerne kann man auch die höheren Glieder der Rotationsbanden mit $K = I$ erfassen. Man geht aus von

$$\boldsymbol{I} = \boldsymbol{K} + \boldsymbol{I}_R \tag{8.208}$$

und

$$\boldsymbol{\mu} = (g_K \boldsymbol{K} + g_R \boldsymbol{I}_R)\,\mu_K. \tag{8.209}$$

Wie bisher setzt man $M = I$ und findet

$$\mu = \frac{1}{I+1}\left[(g_K - g_R)K^2 + g_R I(I+1)\right]\mu_K. \tag{8.210}$$

Im Bandenkopf- oder -grundzustand mit $K = I$ ergibt sich wieder (8.202). Der Faktor g_K kann ähnlich wie g_R experimentell aus der Übergangswahrscheinlichkeit der Multipolstrahlung ermittelt werden (siehe 9.6.3.3.).

5. In 6.8.2. wurde bereits gezeigt, daß deformierte Kerne ein elektrisches Quadrupolmoment haben. Für sphärische Kerne ist $Q = 0$, für zigarren- und linsenförmige Kerne ist $Q > 0$, bzw. < 0. Zwischen dem Quadrupolmoment und dem Deformationsparameter gibt es einen direkten Zusammenhang. Die klassische Rechnung liefert für Kerne mit den Halbachsen $a = b = c$ einen Ausdruck, der leicht mit den Deformationsparametern δ (8.95, 96) und β (6.226) sowie (8.108) ausgedrückt werden kann:

$$Q_0 = \frac{2}{5} Z(c^2 - a^2) = \frac{4}{5} ZR_0\delta \left(1 + \frac{\delta}{2}\right) = \frac{3}{\sqrt{5\pi}} R_0^2 Z\beta \left[1 + \beta \sqrt{\frac{5}{64\pi}}\right]. \tag{8.211}$$

Unter Q_0 versteht man das innere oder wahre Quadrupolmoment des Kerns. Es unterscheidet sich vom gemessenen, wie in 6.8.2. dargelegt wurde, weil I und der Kern um die z-Achse präzedieren, die mit der z'-Achse zusammengelegt wurde. Die Projektion von Q_0 auf z und z' wird als maximaler Mittelwert des Quadrupolmomentoperators Q berechnet:

$$\langle Q \rangle = Q_0 \frac{[3M^2 - I(I+1)]\,[3K^2 - I(I+1)]}{I(I+1)\,(2I-1)\,(2I+3)}. \tag{8.212}$$

Im Falle maximaler Ausrichtung, d. h. für $I = M$ erhält man

$$Q = Q_0 \frac{3K^2 - I(I+1)}{(I+1)\,(2I+3)}. \tag{8.213}$$

Für den Grundzustand der Rotationsbande mit $K = I$ folgt daraus

$$Q = Q_0 \frac{I(2I-1)}{(I+1)\,(2I+3)}, \tag{8.214}$$

d. h. der mit (6.219) bereits angegebene Wert. Man sieht, daß der spinabhängige Projektionsfaktor immer zu einer Verminderung des meßbaren im Vergleich zum inneren Quadrupolmoment führt. Für $I = 1$, 3/2 und 2 beträgt dieser Faktor 1/10, 1/5 und 2/7. Im Spezialfalle $I = 0$ und $I = 1/2$ wird gar kein Quadrupolmoment gemessen, auch wenn $Q_0 \neq 0$ ist. Experimentell kann man Q über die Coulomb-Anregung oder, wenn $I \geqq 1$ ist, über die Hyperfeinstrukturaufspaltung der Atomhülle bestimmen. Das innere Quadrupolmoment Q_0 kann auch aus experimentell bestimmten B(E2)-Werten für Übergänge innerhalb der Rotationsbanden, aus Isotopieverschiebungen, Elektronenstreuexperimenten und Experimenten mit Myoneneinfang ermittelt werden. Wenn Q oder Q_0 bekannt sind, kann man die Deformationsparameter bestimmen. In Tabelle D.3 sind für viele Kerne die experimentellen Q-Werte des Grundzustandes angegeben.

8.6. Quantenmechanische Vielteilchentheorie und Kernstruktur

Eine von der Schrödinger-Gleichung (8.1) für ein quantenmechanisches Vielteilchensystem ausgehende Betrachtung der Kernstruktur wird als mikroskopische Theorie des Kerns bezeichnet. Die verschiedenen Wege zur mikroskopischen Beschreibung des Kerns sind soweit ausgearbeitet, daß sowohl die Kenntnis der Kernkräfte als auch die Näherungsmethoden zur Lösung

des Vielteilchenproblems gegenwärtig ausreichen, zahlreiche nukleare Phänomene einheitlich zu interpretieren und Abhängigkeiten von Massenzahl und Anregungsenergie vorauszuberechnen. Allerdings beanspruchen Untersuchungen, die — von realistischen Nukleon-Nukleon-Potentialen ausgehend — konkrete Kerneigenschaften berechnen, indem die bestimmenden Effekte des mittleren Feldes und der korrelierende Einfluß der Restwechselwirkung hinreichend erfaßt werden, einen bedeutenden numerischen Aufwand. Für die Analyse von Experimenten sind deshalb elementare phänomenologische Kernstrukturmodelle weiterhin ein unentbehrliches Hilfsmittel.

Wir werden im folgenden die wesentlichsten physikalischen Aspekte der mikroskopischen Theorien der Kernstruktur darlegen und einige ihrer Aussagen mit experimentellen Daten vergleichen.

8.6.1. Kernmaterie

1. Als Kernmaterie bezeichnet man ein unendliches Nukleonensystem mit bestimmter Teilchenzahldichte $\varrho(\lim\limits_{A,V\to\infty} \frac{A}{V} = \varrho = \text{const}$, A: Teilchenzahl, V: Volumen) bei der Temperatur $T = 0$, wobei zur Vereinfachung sowohl vom Massenunterschied von Neutron und Proton als auch von der Coulomb-Wechselwirkung zwischen den Protonen abgesehen wird. Ähnlich wie das Fermigas-Modell (Abschnitt 8.2.) stellt die Konzeption der Kernmaterie, die von K. A. Brueckner und H. Bethe eingeführt wurde, ein sehr stark idealisiertes und hypothetisches Kernmodell dar. Es erfaßt lediglich die Situation im Innengebiet schwerer Kerne und erklärt nur wenige globale Kerneigenschaften wie Bindungsenergie pro Nukleon und Nukleonendichte. Im Unterschied zum Fermigas-Modell wird in der Theorie der Kernmaterie aber zugelassen, daß zwischen den Nukleonen eine paarweise Wechselwirkung V_{ij} besteht. Für V_{ij} wählt man ein realistisches Potential, das die experimentellen Daten über die freie Nukleon-Nukleon-Streuung reproduziert (siehe Kapitel 7). Um den Grundzustand eines A-Nukleonensystems aus den experimentell bestimmten, elementaren Wechselwirkungen zwischen zwei Nukleonen abzuleiten, versuchen wir, die Schrödinger-Gleichung

$$\left(\sum_{i=1}^{A} T_i + \sum_{i<j=1}^{A} V_{ij}(x_i, x_j)\right) \Psi(x_1, \dots, x_A) = E\Psi(x_1, \dots, x_A) \tag{8.215}$$

mit geeigneten Näherungen zu lösen. In (8.215) faßt die Koordinate x_k die Orts-, Spin- und Isospinfreiheitsgrade des k-ten Nukleons zusammen: $x_k \equiv (r_k, s_k, t_k)$.

2. Zunächst erinnern wir daran, daß in der Näherung des Fermigas-Modells ($H = \Sigma\, T_i$, $V_{ij} = 0$) der Zustand $\Phi_\alpha(x_1, \dots, x_A)$ des Systems unter Vernachlässigung des Pauli-Prinzips als Produkt von Einteilchenwellenfunktionen $\varphi_{\alpha_i}(x_i)$ angesetzt werden kann (siehe Abschnitt 8.2., Gl. (8.6)),

$$\Phi_\alpha(x_1, \dots, x_A) = \varphi_{\alpha_1}(x_1)\, \varphi_{\alpha_2}(x_2) \dots \varphi_{\alpha_A}(x_A)\,. \tag{8.216}$$

Die Funktionen $\varphi_{\alpha_i}(x_i)$ bestehen aus einer ebenen Welle als Ortsanteil und einer Spin-Isospin-Funktion $\chi_{m_s}\eta_{m_t}$, wobei die Einteilchenenergien ε_{α_i} quadratisch von der Wellenzahl k_{α_i} abhängen

$$(T_i - \varepsilon_{\alpha_i})\, \varphi_{\alpha_i}(x_i) = 0\,,$$

$$\varphi_{\alpha_i}(x_i) = e^{ik_{\alpha_i} r_i}\, \chi_{m_s}\eta_{m_t}\,, \qquad \varepsilon_{\alpha_i} = \frac{\hbar^2}{2m} k_{\alpha_i}^2\,. \tag{8.217}$$

Im Grundzustand sind alle Impulszustände innerhalb der Fermi-Kugel besetzt, $k_{\alpha_i} < k_F$, $k_F = (\frac{3}{2}\pi^2 \varrho)^{1/3}$ Die Gesamtenergie ist die Summe der kinetischen Energie der Teilchen in den besetzten Einteilchenbahnen,

$$E_F = \sum_{i=1}^{A} \varepsilon_{\alpha_i} . \tag{8.218}$$

Wir gehen nun zum vollen Hamiltonoperator $H = \Sigma\, T_i + \Sigma\, V_{ij}$ für das Vielteilchensystem über, beschränken uns aber auf Kernmateriegeometrie. Zunächst betrachten wir eine Lösung in der Näherung, in der jedes Teilchen einen bestimmten, fixierten Zustand besitzt (Näherung unabhängiger Teilchen). Da in einem unendlich ausgedehnten System kein Ort als Koordinatenursprung ausgezeichnet ist, muß bei „eingeschalteter" Wechselwirkung V_{ij} Translationsinvarianz vorliegen. Nun sieht man sofort, daß bei der Transformation $\boldsymbol{r} \to \boldsymbol{r}_i + \boldsymbol{\delta}$ mit dem konstanten Verschiebungsvektor $\boldsymbol{\delta}$, die den Hamilton-Operator invariant läßt, die Produktwellenfunktion (8.216) sich wegen $e^{i\boldsymbol{k}_{\alpha_i}\boldsymbol{r}_i} \to e^{i\boldsymbol{k}_{\alpha_i}\boldsymbol{\delta}}\, e^{i\boldsymbol{k}_{\alpha_i}\boldsymbol{r}_i}$ bis auf eine ortsunabhängige Phase reproduziert,

$$\Phi_\alpha(x_1,\ldots,x_A) \to e^{i\sum_{i=1}^{A}(\boldsymbol{k}_{\alpha_i}\boldsymbol{\delta})}\, \Phi_\alpha(x_1,\ldots,x_A) .$$

Für ein unendliches Nukleonensystem bleibt in der Näherung unabhängiger Teilchen die Form der Wellenfunktion als Produkt von ebenen Wellen auch bei vorliegender Wechselwirkung erhalten, lediglich der Zusammenhang von Teilchenimpuls und Einteilchenenergie sowie die Gesamtenergie des Systems ändern sich gegenüber (8.217) und (8.218). Die Einteilchenfunktionen $\varphi_{\alpha_1}(x_1) = \int dx_2 \ldots dx_A \varphi^*_{\alpha_2}(x_2) \ldots \varphi^*_{\alpha_A}(x_A)\, \Psi(x_1, \ldots, x_A)$ erfüllen nach (8.215) eine Schrödingergleichung mit einem translationsinvarianten Einteilchenpotential

$$T_1\varphi_{\alpha_1}(x_1) + U_{\alpha_1}\varphi_{\alpha_1}(x_1) = \tilde{\varepsilon}_{\alpha_1}\varphi_{\alpha_1}(x_1) , \tag{8.219}$$

$$U_{\alpha_1}\varphi_{\alpha_1}(x_1) = \int dx_2 \ldots dx_A\, \varphi^*_{\alpha_2}(x_2) \ldots \varphi^*_{\alpha_A}(x_A) \left(\sum_{i=2}^{A} V_{i1}\right) \Psi(x_1,\ldots,x_A) . \tag{8.220}$$

Wir betonen, daß die potentielle Energie U_{α_1} keine Funktion der Koordinate $\boldsymbol{r}_i$ ist. In unendlicher Kernmaterie hängt das mittlere Potential, das ein Teilchen i im Zustand α_i mit dem Impuls $\boldsymbol{k}_{\alpha_i}$ spürt, nicht von seinem Ort $\boldsymbol{r}_i$, wohl aber von den Zuständen $\varphi_{\alpha_k}(x_k)$ aller übrigen A-1 Teilchen ab. Durch diese Wechselwirkung des Teilchens i mit den anderen A-1 Teilchen ergibt sich die Einteilchenenergie

$$\tilde{\varepsilon}_{\alpha_i} = \varepsilon_{\alpha_i} + U_{\alpha_i} , \qquad \varepsilon_{\alpha_i} = \frac{\hbar^2}{2m} k^2_{\alpha_i} . \tag{8.221}$$

Für die Gesamtenergie des Systems erhält man bei der in (8.216) angenommenen fixierten Besetzung der Einteilchenzustände $\alpha_1, \ldots, \alpha_A$

$$E_\alpha = E_F + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{A} U_{\alpha_i} . \tag{8.222}$$

Der zweite Term in diesem Ausdruck korrigiert die Energie des Fermigases E_F durch eine Summe über Einteilchenpotentiale, die aus der vorliegenden Besetzung der Einteilchenzustände $\alpha_1, \ldots, \alpha_A$ folgen.

3. Eine gegenüber der Näherung unabhängiger Teilchen verbesserte Beschreibung des Systems ergibt sich, wenn man zuläßt, daß sich infolge von Stößen zwischen den Nukleonen die Besetzung der Einteilchenzustände ändert. Im Zeitablauf treten dann Übergänge zwischen ver-

schiedenen Vielteilchenzuständen $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_A$ und $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_A$ auf. Diese Korrelation der Nukleonenbewegung wird in der Wellenfunktion $\Psi(x_1, \dots, x_A)$ als Überlagerung von Wellenfunktionen (8.216) der unabhängigen Teilchenbewegung erfaßt, wobei die A Nukleonen unterschiedliche Einteilchenzustände besetzen, $\Phi_\alpha(x_1, \dots, x_A)$, $\Phi_\beta(x_1, \dots, x_A)$, ... Geht man davon aus, daß im Zustand Φ_α alle Impulszustände bis zu einem Maximalimpuls besetzt sind, dann können nach dem Pauli-Prinzip in einem Stoß zweier Nukleonen unter dem Einfluß der Wechselwirkung V_{ij} nur Endzustände erreicht werden, in denen die beiden Teilchen unbesetzte Zustände erreichen. Durch diese Blockierung eines Teils des Phasenraums modifiziert das Pauli-Prinzip die Wechselwirkung zweier Nukleonen innerhalb eines Vielnukleonensystems gegenüber dem Fall der freien Nukleon-Nukleon-Streuung, so daß zwischen zwei Nukleonen in Kernmaterie eine effektive, von V_{ij} abweichende Wechselwirkung vorliegt.

In der Theorie der Kernmaterie ist es üblich, die durch die Wechselwirkung V_{ij} in die Wellenfunktion eingeführten Korrelationen zwischen den A Teilchen auf Zweiteilchenkorrelationen zu beschränken. In dieser Näherung gehen in die Vielteilchenfunktion für den Grundzustand nur Komponenten ein, in denen höchstens zwei Teilchen aus der Fermi-Kugel in unbesetzte Zustände angeregt sind. Anstelle von unabhängigen Teilchen in einem mittleren Potential betrachtet man unabhängige Paare, deren Wechselwirkung innerhalb der Kernmaterie vollständig erfaßt wird. Im Unterschied zu (8.222) ergibt sich die Korrektur zur Fermigas-Energie aus einer Summe über Beiträge unabhängiger Paare.

Für die Wellenfunktion $\psi_{\alpha\beta}(x_1, x_2)$, die den Streuzustand eines Paares in Kernmaterie repräsentiert, gilt die Bethe-Goldstone-Gleichung

$$[T_1 + T_2 + Q_{\alpha\beta} V_{12}]\, \psi_{\alpha\beta}(x_1, x_2) = E_{\alpha\beta} \psi_{\alpha\beta}(x_1, x_2)\,. \tag{8.223}$$

Der formal eingeführte Projektionsoperator $Q_{\alpha\beta}$, $Q_{\alpha\beta}^2 = Q_{\alpha\beta}$ projiziert aus $V_{12}\psi_{\alpha\beta}$ alle besetzten Zustände heraus, d. h. das Übergangsmatrixelement $\langle \varphi_{\alpha'}(x_1)\, \varphi_{\beta'}(x_2)\, | Q_{\alpha\beta} V_{12} |\, \psi_{\alpha\beta}(x_1, x_2) \rangle$, $\alpha'\beta' \neq \alpha\beta$ verschwindet, falls die Indizes α', β' besetzte Zustände bezeichnen. Der in Ortsdarstellung nichtlokale Operator

$$\langle \boldsymbol{r}_1' \boldsymbol{r}_2' |\, Q\, | \boldsymbol{r}_1 \boldsymbol{r}_2 \rangle = \sum_{\alpha, \beta < \varepsilon_F} \langle \boldsymbol{r}_1' \boldsymbol{r}_2' \,|\, \alpha\beta \rangle \langle \alpha\beta \,|\, \boldsymbol{r}_1 \boldsymbol{r}_2 \rangle$$

kompliziert die Lösung des Streuproblems. Er tritt auf, weil das Paar nicht frei, sondern innerhalb der Kernmaterie wechselwirkt; mit ihm wird das Pauli-Prinzip erfüllt. Die Lösungen der Bethe-Goldstone-Gleichung müssen einigen Randbedingungen genügen. Für hinreichend große Abstände der beiden Nukleonen ist zu verlangen, daß die Paarfunktion

$$\psi_{\alpha\beta}(x_1, x_2) = \varphi_\alpha(x_1)\, \varphi_\beta(x_2) + \sum_{\lambda\mu} c_{\lambda\mu}^{(\alpha\beta)} \varphi_\lambda(x_1)\, \varphi_\mu(x_2) \tag{8.224}$$

in ein Produkt von zwei Einteilchenfunktionen übergeht:

$$\psi_{\alpha\beta}(x_1, x_2) \to \varphi_\alpha(x_1)\, \varphi_\beta(x_2) \quad \text{für} \quad |\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2| \to \infty\,.$$

In der Entwicklung (8.224) der Paarfunktion $\psi_{\alpha\beta}$ nach ungestörten Zuständen muß die „Streuwelle“ $\Sigma\, c_{\lambda\mu}^{(\alpha\beta)} \varphi_\lambda(x_1)\, \varphi_\mu(x_2)$, die die virtuelle Anregung des Paares in höherliegende unbesetzte Zustände λ, μ beschreibt, also für große Abstände verschwinden. Außerdem hat man an die Paarfunktion die Bedingung

$$\psi_{\alpha\beta}(x_1, x_2) = 0 \quad \text{für} \quad |\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2| < r_c\,, \tag{8.225}$$

zu stellen, da das Potential V_{12} innerhalb des Hard-core-Radius r_c unendlich wird. Diese Forderung verhindert, daß bei der Berechnung eines mittleren Potentials in der Paarnäherung Divergenzen auftreten, da an Punkten, für die die Wechselwirkung singulär wird, die Wellenfunktion verschwindet.

Bei der Lösung der Bethe-Goldstone-Gleichung stellt sich heraus, daß der Einfluß des Hard-cores auf die Paarfunktion für Abstände, die größer als die sogenannte Ausheillänge r_H sind, im wesentlichen verlorengeht. Als Folge des Pauli-Prinzips ergibt sich für diesen Abstand der Übergang der Paarfunktion in Kernmaterie in die freien Wellenfunktionen, ohne daß asymptotisch eine für die freie Nukleon-Nukleon-Streuung charakteristische Streuphase auftritt. Die Ausheillänge r_H beträgt nur etwa 1 fm $\left(r_H \approx \frac{1}{k_F} \approx 2r_c\right)$. Da bei der Gleichgewichtsdichte im Kern der mittlere Abstand d der Nukleonen bei $d \approx 4r_c$ liegt, nimmt das Paar nach dem Stoß wieder den ungestörten Zustand ein, bevor die nächste Wechselwirkung erfolgt. Aus diesen Größenverhältnissen können wir auch schließen, daß nur das jeweils betrachtete Paar das Hard-core spüren wird, während alle übrigen Nukleonen von dieser Wechselwirkung nichts „merken". Für niedrige Teilchenzahldichten ist diese Näherung unabhängiger Paare sicher auch ausreichend: die Situation, daß sich gleichzeitig mehr als zwei Teilchen in einem Abstand innerhalb der Ausheillänge begegnen, tritt nur mit geringer Wahrscheinlichkeit ein. Mehrteilchenkorrelationen sollten erst bei höheren Dichten zunehmend wesentlich werden.

Die Abb. 8.43 zeigt den Verlauf der Radialwellenfunktion u für ein Paar in einem relativen S-Zustand, das innerhalb einer Fermi-Verteilung mit $k_F = 1{,}48\ \text{fm}^{-1}$ über ein Kastenpotential mit Hard-core ($r_c = 0{,}4$ fm) wechselwirkt. Der Relativimpuls ist $k = 0{,}3k_F$. Die Dichte wurde so gewählt, daß der mittlere Nukleonenabstand $d = 1{,}66$ fm beträgt. In der Abbildung wird die Lösung der Bethe-Goldstone-Gleichung mit der wechselwirkungsfreien Lösung u_0 verglichen. Man erkennt, daß die Wellenfunktion des Paares beim Abstand $h \approx 0{,}75d$ bereits annähernd ausgeheilt ist; bei größeren Entfernungen voneinander bewegt sich das Paar als ob es frei wäre.

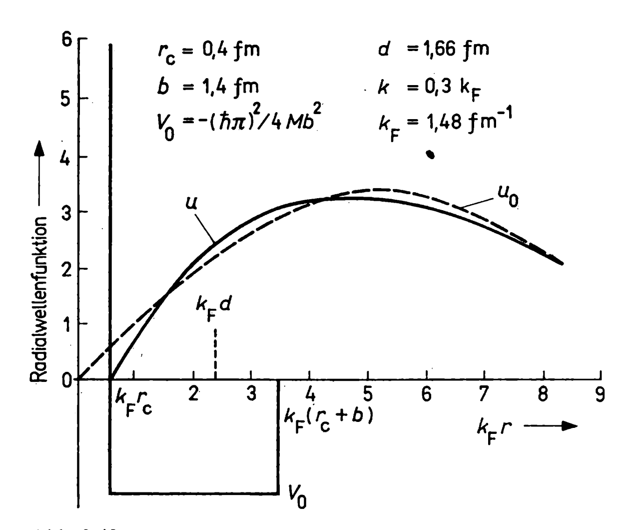


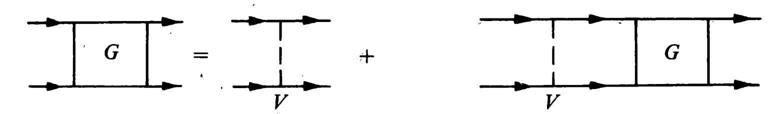
Abb. 8.43
Radialwellenfunktion u eines Nukleonenpaares mit dem Relativimpuls k im s-Zustand, das in einer Fermi-Verteilung mit dem Fermi-Impuls k_F über ein Kastenpotential mit der Breite b mit Hard-core wechselwirkt (d: mittlerer Nukleonenabstand). Die Funktion u_0 ist die wechselwirkungsfreie Lösung. Beide Funktionen u und u_0 sind in Einheiten $k\sqrt{2/R}/k_F$ (R: Schwerpunktkoordinate) angegeben

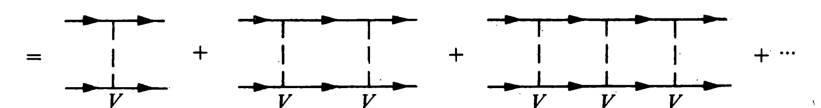
4. Die Berechnung des mittleren Potentials und der totalen Bindungsenergie des A-Teilchensystems erfolgt über die G-Matrix, die gelegentlich auch als K- oder t-Matrix bezeichnet wird. Sie ist durch folgende Integralgleichung ($H_0\varphi_\alpha(x_1)\ \varphi_\beta(x_2) = (\varepsilon_\alpha + \varepsilon_\beta)\ \varphi_\alpha(x_1)\ \varphi_\beta(x_2)$) definiert:

$$G = V - V\frac{Q}{H_0 - W}G$$

$$= V - V\frac{Q}{H_0 - W}V + V\frac{Q}{H_0 - W}V\frac{Q}{H_0 - W}V + \cdots . \qquad (8.226)$$

In graphischer Darstellung (vgl. Anhang C) bedeutet die Beziehung (8.226):





Der Operator G entspricht dem Übergangsoperator für eine Zweiteilchenstreuung in einem Fermisystem unter dem Einfluß der Wechselwirkung V (vgl. (10.134)). In expliziter Matrixschreibweise lautet (8.226)

$$\langle\alpha_2\beta_2|\,G\,|\alpha_1\beta_1\rangle = \langle\alpha_2\beta_2|\,V\,|\alpha_1\beta_1\rangle - \sum_{\alpha',\beta'}\langle\alpha_2\beta_2|\,V\,|\alpha'\beta'\rangle\frac{Q_{\alpha'\beta'}}{\varepsilon_\alpha' + \varepsilon_{\beta'} - W}\langle\alpha'\beta'|\,G\,|\alpha_1\beta_1\rangle. \qquad (8.227)$$

Das Matrixelement der effektiven Wechselwirkung G zwischen dem besetzten Anfangszustand α_1, β_1 des wechselwirkenden Paares mit der „Startenergie" $W = \varepsilon_{\alpha_1} + \varepsilon_{\beta_1}$ und dem Endzustand α_2, β_2 besteht aus dem entsprechenden Matrixelement $\langle\alpha_2\beta_2|\,V\,|\alpha_1\beta_1\rangle$ der freien Wechselwirkung V und einem Korrekturterm, in den alle Zwischenzustände α', β' des Paares eingehen. Nach Gl. (8.226) entspricht die Lösung der Integralgleichung einer Aufsummation bestimmter Glieder der Mehrfachstreuentwicklung (Leitergraphen) bis zu unendlich hoher Ordnung in der Wechselwirkung. Bei allen Streuungen des Paares gilt der Impulssatz

$$\boldsymbol{k}_{\alpha_1} + \boldsymbol{k}_{\beta_1} = \boldsymbol{k}_{\alpha'} + \boldsymbol{k}_{\beta'} = \boldsymbol{k}_{\alpha_2} + \boldsymbol{k}_{\beta_2} .$$

Der Pauli-Operator $Q_{\alpha'\beta'}$ ist 0 oder 1, je nachdem ob α', β' für besetzte ($k_{\alpha'}$, $k_{\beta'} < k_F$) oder unbesetzte Zustände ($k_{\alpha'}$, $k_{\beta'} > k_F$) steht. Die G-Matrix hängt sowohl vom gewählten Zweiteilchenpotential V als auch von der Startenergie W, den Energien der Zwischenzustände und dem Projektionsoperator Q ab. Da in Q der Fermi-Impuls $\boldsymbol{k}_F$ eingeht, wird die effektive Nukleon-Nukleon-Wechselwirkung in Kernmaterie eine Funktion der Dichte ϱ. Der Operator G unterscheidet sich stark von V, wenn V ein Hard-core enthält, da dann nicht nur Zwischenzustände in der Nähe der Fermi-Energie ins Spiel kommen, sondern durch Stöße mit großem Impulstransfer auch hochangeregte Zustände wesentlich werden. Numerische Rechnungen zeigen, daß

sich ein Nukleon in Kernmaterie etwa 14% der Zeit in Zuständen außerhalb der Fermikugel befindet.

Die Matrixelemente von G in ungestörten Zuständen entsprechen nach (8.227) den Matrixelementen von V mit der korrelierten Paarfunktion, $\langle \alpha_2 \beta_2 | G | \alpha_1 \beta_1 \rangle = \langle \alpha_2 \beta_2 | V | \psi_{\alpha_1 \beta_1} \rangle$, so daß sich die potentielle Energie des Nukleonensystems durch die Diagonalelemente der G-Matrix ausdrücken läßt (vgl. auch die Beziehung (10.134)),

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta} \langle \alpha\beta | G | \alpha\beta \rangle = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} U_\alpha , \\ U_\alpha &= \sum_{\beta} \langle \alpha\beta | G | \alpha\beta \rangle . \end{aligned} \tag{8.228}$$

Für die Gesamtenergie E gilt

$$E = \sum_{\alpha} \frac{\hbar^2}{2m} k_\alpha^2 + \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta} \langle \alpha\beta | G | \alpha\beta \rangle . \tag{8.229}$$

5. Bei vorgegebenem Nukleon-Nukleon-Potential V_{ij} liefert die Theorie der Kernmaterie in der Paarnäherung die Bindungsenergie pro Nukleon als Funktion der Dichte ϱ. Die Dichte, bei der diese Kurve ihr Minimum erreicht, kann mit der bekannten Dichte im Innengebiet schwerer Kerne verglichen werden: $\varrho_0 = 0{,}17$ Nukleonen/fm^3, $k_F^{(0)} = 1{,}36\ \mathrm{fm}^{-1}$. Da voraussetzungsgemäß die Coulomb-Energie, die Oberflächen- und Deformationsenergie in Kernmaterie unberücksichtigt bleiben, entspricht der zugehörige Wert für die Bindungsenergie dem Volumenterm der Bethe-Weizsäcker-Formel (siehe Gln. (8.111), (8.118)) $E/A = 15{,}68$ MeV. Den prinzipiellen Verlauf von E/A als Funktion von ϱ kann man Abb. 8.44 entnehmen. Für sehr geringe Dichten überwiegt die kinetische Energie, d. h. E/A ist positiv und steigt mit ϱ an,

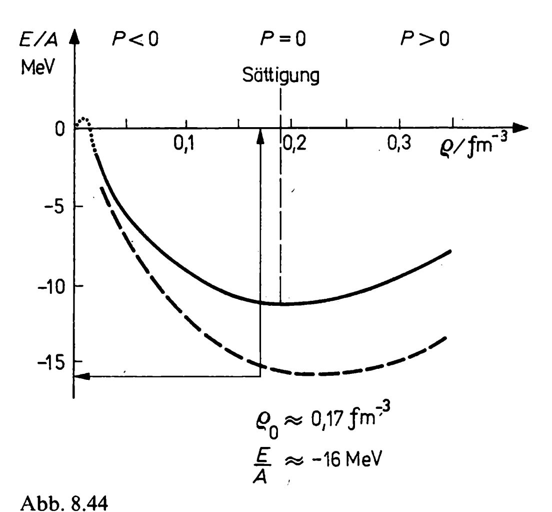


Abb. 8.44
Bindungsenergie pro Nukleon E/A in Kernmaterie in Abhängigkeit von der Teilchenzahldichte ϱ für ein realistisches Nukleon-Nukleon-Potential (Reid-Potential mit weichem core). Die Kurve folgt in guter Näherung der Interpolationsformel $E/A = -15{,}07 k_F^3 + 7{,}85 k_F^4$. Die gestrichelte Kurve ergibt sich, wenn man die Stärke des Nukleon-Nukleon-Potentials willkürlich um $\approx 10\%$ erhöht. Der Punkt $\varrho_0 = 0{,}17\ \mathrm{fm}^{-3}$, $E/A \approx -16$ MeV entspricht den empirischen Werten für normale Kernmaterie. $P = \varrho^2\, \mathrm{d}(E/A)/\mathrm{d}\varrho$: Druck

da die Fermi-Energie wächst. Bei größeren Dichten kommt die anziehende Zweiteilchenwechselwirkung stärker ins Spiel. Es bildet sich ein Zustand mit negativer Gesamtenergie aus, der aber nicht stabil ist, da ein negativer Druck $P = \varrho^2 \, \mathrm{d}(E/A)/\mathrm{d}\varrho$ vorliegt. Eine Sättigung der Dichte, die den vollständigen Kernkollaps verhindert, ergibt sich als Zusammenspiel von Pauli-Prinzip und bestimmten Komponenten der Nukleon-Nukleon-Wechselwirkung, von denen das abstoßende Hard-core, die Tensorkraft, die Austauschkräfte und die abstoßende $^1P_1$-Komponente (siehe den Verlauf der Streuphasen der Nukleon-Nukleon-Streuung als Funktion der Energie in Abb. 7.9) besonders wirksam werden. Das in Kapitel 7 angegebene Hamada-Johnston-Potential liefert als Gleichgewichtswert bei einer Dichte von $k_F = 1{,}38 \text{ fm}^{-1}$ eine Bindungsenergie von $E/A \approx -11$ MeV. Diese zu schwache Bindung ist wahrscheinlich sowohl durch das Hard-core als auch durch die Vernachlässigung höherer Korrelationen bedingt. Realistische Potentiale mit geringer Abstoßung bei kleinen Abständen (weiches core) liefern höhere Werte für die Bindungsenergie (vgl. Abb. 8.44). Berücksichtigt man außerdem 3- und 4-Teilchenkorrelationen, dann liegt der berechnete Wert für E/A bei ≈ -15 MeV, in befriedigender Übereinstimmung mit der empirischen Volumenenergie. Zur Bewertung der Theorie der Kernmaterie kann man auch den Kompressionsmodul K heranziehen, der durch

$$K = k_F^2 \frac{\mathrm{d}(E/A)}{\mathrm{d}(k_F^2)}$$

am Sättigungspunkt definiert ist. Für verschiedene Potentialansätze liegen die berechneten Werte zwischen 100 MeV und 300 MeV. Aus sphärischen Dichteoszillationen mit Monopolcharakter, deren Frequenz von der Kompressibilität des Kerns abhängt, ergibt sich ein empirischer Wert von $K \doteq (210 \pm 30)$ MeV. Verfolgt man die Kurve $E/A(\varrho)$ über den Sättigungspunkt ($P = 0$) hinaus, dann nimmt nach Abb. 8.44 die Bindungsenergie wieder ab, da der Einfluß der abstoßenden Komponenten der Nukleon-Nukleon-Wechselwirkung mit steigender Dichte größer wird. Der Druck wird aber positiv, $P > 0$, so daß weiterhin ein stabiler Zustand der Kernmaterie existiert.

Verbesserte Theorien der Kernmaterie müssen sowohl relativistische Effekte als auch die innere Struktur der Nukleonen (z. B. die Δ-Resonanz, siehe Kap. 7) berücksichtigen.

6. Mit der Theorie der Kernmaterie läßt sich weitgehend verstehen, wie im Kern eine nahezu unabhängige Teilchenbewegung möglich wird, obwohl starke Zweiteilchenwechselwirkungen vorliegen. Mehrere Aspekte sind dabei zu bedenken. Das Pauli-Prinzip verhindert, daß die langreichweitige, anziehende Komponente der Wechselwirkung die Bewegung der Nukleonen im Inneren der Fermikugel korreliert, weil für die Streuung zweier Nukleonen keine freien Endzustände zur Verfügung stehen. Dieser Teil der Wechselwirkung bewirkt nur eine Korrelation der Nukleonenbewegung in unmittelbarer Nähe der Fermioberfläche. Starke Abweichungen von der unabhängigen Teilchenbewegung vermag das Hard-core hervorzurufen, wobei Mehrteilchenkorrelationen wegen der geringen Nukleonendichte vernachlässigt werden können. Es stellt sich aber heraus, daß die Wellenfunktionen zweier Nukleonen in Kernmaterie nur in Abständen, die wesentlich geringer als der mittlere Nukleonenabstand ist, durch das Hard-core beeinflußt wird ($r_H > d$). In einem verdünnten Fermigas bewegen sich die Nukleonen infolge der Wirkung des Pauli-Prinzips trotz starker Zweiteilchen-Wechselwirkungen als voneinander nahezu unabhängige Teilchen:

$$\sum_{i<j=1}^{A} V_{ij} \simeq \sum_{i=1}^{A} U_i \, .$$

7. Die Übertragung der Theorie der Kernmaterie auf endliche Kerne stößt auf erhebliche Schwierigkeiten. Bei endlichen Kernen ist die Nukleonenbewegung auf den Bereich eines sphärischen Potentials endlicher Reichweite beschränkt, so daß mit der Bildung eines mittleren Feldes die Translations-

invarianz des Problems verlorengeht. Die Verletzung der Translationssymmetrie hat die Konsequenz, daß man von einer Darstellung mit ebenen Wellen zu einer Darstellung in Drehimpulseigenzuständen übergehen muß, was den Rechenaufwand erhöht. Außerdem besteht keine gleichmäßige Dichte im gesamten Kernvolumen, da sich im Oberflächenbereich des Kerns ein Dichtegradient ausbildet. Diese Schwierigkeiten lassen sich im Sinne einer lokalen Näherung überwinden, indem man für geeignet gewählte Volumenbereiche in der Oberfläche die G-Matrix bei der entsprechenden lokalen Kernmateriedichte berechnet. Die in lokaler Näherung berechnete Ladungsverteilung in endlichen Kernen stimmt gut mit experimentellen Ergebnissen aus der Elektronenstreuung an Kernen überein (siehe Abb. 8.45).

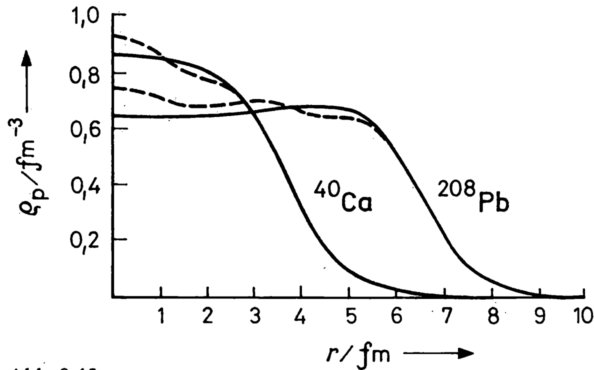


Abb. 8.45
Ladungsverteilung ϱ_p für ^{40}Ca und ^{208}Pb. Die Ergebnisse von Kernmaterierechnungen in lokaler Näherung (– – –) werden mit experimentellen Befunden (———) aus der Elektronenstreuung verglichen

8.6.2. Hartree-Fock-Näherung für endliche Kerne

Das mittlere Potential für ein endliches System aus A Nukleonen, zwischen denen eine Zweiteilchenwechselwirkung V_{ij} besteht, kann in Hartree-Fock (HF)-Näherung berechnet werden. Da diese Standardmethode der Quantenmechanik aus der Theorie der Atomhülle in den Grundzügen bekannt ist, können wir uns hier darauf beschränken, die wesentlichen Verfahrensschritte anzugeben und einige Ergebnisse, die für den Fall des nuklearen Vielteilchensystems erhalten werden, zusammenzustellen.

Als Näherungsansatz für die Wellenfunktion eines Vielteilchensystems, das durch den Hamiltonoperator $H = \Sigma\, T_i + \Sigma\, V_{ij}$ gegeben ist, geht man beim HF-Verfahren von einem normierten, antisymmetrisierten Produkt von Einteilchenzuständen φ_α, $\alpha \equiv (n_\alpha, l_\alpha, j_\alpha, m_\alpha, m_s, m_t)$,

$$\Phi_0(1, \ldots, A) = \frac{1}{\sqrt{A!}} \begin{vmatrix} \varphi_\alpha(1) & \varphi_\alpha(2) & \ldots & \varphi_\alpha(A) \\ \varphi_\beta(1) & \varphi_\beta(2) & \ldots & \varphi_\beta(A) \\ \vdots & & & \vdots \\ \varphi_\gamma(1) & \varphi_\gamma(2) & \ldots & \varphi_\gamma(A) \end{vmatrix} \tag{8.230}$$

aus. Die Slater-Determinante (8.230) beschreibt den Grundzustand des Systems, wenn die A Nukleonen die niedrigsten Zustände in einem gemeinsamen, für alle Nukleonen gleichen Einteilchenpotential besetzten. Im Sinne einer Näherung unabhängiger Teilchen wird die Besetzung der Einteilchenzustände Φ_0 im Zeitablauf der inneren Bewegung fixiert. Unter der Nebenbedingung, daß die Normierung der Einteilchenfunktionen φ_α erhalten bleibt, be-

stimmt man durch die Variation $\varphi_\alpha \to \varphi_\alpha + \delta\varphi_\alpha$ das Minimum des Erwartungswertes der Energie im Zustand Φ_0, $E[\Phi_0] = \langle \Phi_0 | \Sigma\, T_i + \Sigma\, V_{ij} | \Phi_0 \rangle$, $\delta E[\Phi_0] = 0$. Bei diesem Variationsverfahren stellt sich heraus, daß die Funktionen φ, die einen Minimalwert von $E[\Phi_0] \geqq E_0$ liefern, der Schrödinger-Gleichung für das Einteilchenproblem

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial \boldsymbol{r}^2}\varphi_\alpha(\boldsymbol{r}) + U(\boldsymbol{r})\,\varphi_\alpha(\boldsymbol{r}) - \int \mathrm{d}\boldsymbol{r}\, W(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')\,\varphi_\alpha(\boldsymbol{r}') = \varepsilon_\alpha \varphi_\alpha(\boldsymbol{r}) \tag{8.231}$$

genügen müssen (E_0: exakte Grundzustandsenergie). Für dieses Vorgehen ist charakteristisch, daß das mittlere Feld, welches die Bewegung der einzelnen Nukleonen nach (8.231) bestimmt, durch die Nukleonenbahnen selbst erst festgelegt wird:

$$\begin{aligned} U(\boldsymbol{r}) &= \sum_{i=1}^{A} \int \mathrm{d}\boldsymbol{r}'\, \varphi^*_{\mu_i}(\boldsymbol{r}')\, V_{12}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')\, \varphi_{\mu_i}(\boldsymbol{r}') \\ &= \int \mathrm{d}\boldsymbol{r}'\, V_{12}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') \sum_{i=1}^{A} |\varphi_{\mu_i}(\boldsymbol{r}')|^2 = \int \mathrm{d}\boldsymbol{r}'\, V_{12}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')\, \varrho(\boldsymbol{r}')\,, \end{aligned} \tag{8.232}$$

$$\begin{aligned} W(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') &= \sum_{i=1}^{A} \varphi^*_{\mu_i}(\boldsymbol{r})\, V_{12}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')\, \varphi_{\mu_i}(\boldsymbol{r}') \\ &= V_{12}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') \sum_{i=1}^{A} \varphi_{\mu_i}(\boldsymbol{r})\, \varphi_{\mu_i}(\boldsymbol{r}') = V_{12}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')\, \varrho(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')\,. \end{aligned} \tag{8.233}$$

In den Ausdrücken (8.232) und (8.233) läuft die Summation über alle besetzten Zustände. Das HF-Einteilchenpotential besteht nach (8.231) aus zwei Summanden: einem direkten, lokalen Anteil $U(\boldsymbol{r})$ (8.232) und einem nicht-lokalen Austauschpotential $W(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')$ (8.233), das verschwindet, wenn man (das Pauli-Prinzip vernachlässigend) auf eine Antisymmetrisierung der Probefunktion verzichtet (Hartree-Verfahren). Im Unterschied zum Hartree-Potential ist das HF-Potential für die besetzten Zustände gleich, so daß alle Einteilchenfunktionen mit dem gleichen Hamilton-Operator berechnet werden und folglich zueinander orthogonal sind. Diese Eigenschaften der HF-Einteilchenfunktionen ist beim rechnerischen Umgang mit der HF-Lösung von Vorteil. Das HF-Potential hängt nach (8.232), (8.233) von der lokalen und nichtlokalen Einteilchendichte $\varrho(\boldsymbol{r})$ bzw. $\varrho(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')$ ab.

Die Gleichungen (8.231—233) stellen ein nichtlineares Integro-Differentialgleichungssystem dar. Die Nichtlinearität des Problems liegt darin, daß das berechnete mittlere Feld, mit dem die HF-Zustände berechnet werden, von der Einteilchendichte ϱ, also von den Lösungsfunktionen selbst abhängt. Die Lösung erfolgt iterativ. Man startet von einem geeignet gewählten Einteilchenpotential $U^{(0)}$ und berechnet die zugehörigen Einteilchenzustände $\varphi_\alpha^{(0)}$ nach (8.231). Mit diesen Einteilchenwellenfunktionen geht man in (8.232—233) ein und bestimmt ein verbessertes HF-Potential $U^{(1)}$, $W^{(1)}$, das nach (8.231) neue Einteilchenfunktion $\varphi_\alpha^{(1)}$ liefert. Dieses Verfahren wird fortgeführt, bis sich die Größen U, W und φ_α bei aufeinanderfolgenden Schritten nicht mehr ändern. Auf diese Weise erhält man ein selbstkonsistentes, nicht-lokales mittleres Feld, dem ein Nukleon unter dem Einfluß aller übrigen Nukleonen im Kern unterliegt. In diesem HF-Potential gehören als Lösungen der Schrödinger-Gleichung (8.231) die HF-Einteilchenfunktionen φ_α und die zugehörigen HF-Einteilchenenergien ε_α. Es sei angemerkt, daß der HF-Hamilton-Operator natürlich nicht translationsinvariant ist, obwohl der Ausgangshamilton-Operator diese Symmetrien besitzt. Folglich ist auch die Wellenfunktion Φ_0 im allgemeinen kein Eigenzustand des totalen Impulses. Der mit der HF-Näherung gewonnene Vorteil, Vielteilchenkorrelationen näherungsweise durch ein geeignet gewähltes mittleres Feld erfassen zu können, muß durch eine Symmetriebrechung erkauft werden.

Die HF-Näherung für das Vielteilchenproblem besagt, daß das nach (8.231—233) bestimmte selbstkonsistente Potential solche Einteilchenzustände generiert, die die bestmögliche Näherung der Vielteilchenfunktion $\Psi(x_1, x_2)$ durch ein antisymmetrisiertes Produkt von Einteilchenfunktionen in Form der Slater-Determinante (8.230) liefert. Dieses Vorgehen läßt erwarten, daß die Restwechselwirkung $V_R = (\Sigma V_{ij}) - (\Sigma U_i)$ die durch das selbstkonsistente mittlere Feld nicht erfaßt wird, eine geringe Störung darstellt, die eine lediglich schwache Korrelation der Nukleonenbewegung bewirkt. Die Grundzustandsenergie des Kerns in HF-Näherung wird als Erwartungswert von H berechnet, $E_0^{(HF)} = \langle \Phi_0 | H | \Phi_0 \rangle$, der nicht mit der Summe der HF-Einteilchenenergien $\Sigma \varepsilon_{x_i}$ übereinstimmt,

$$E_0^{(HF)} = \sum_{j=1}^{A} \varepsilon_{\alpha_i} - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{A} \{ \langle \varphi_{\alpha_i} \varphi_{\alpha_j} | V_{12} | \varphi_{\alpha_i} \varphi_{\alpha_j} \rangle - \langle \varphi_{\alpha_i} \varphi_{\alpha_j} | V_{12} | \varphi_{\alpha_j} \varphi_{\alpha_i} \rangle \} . \quad (8.234)$$

2. In praktischen Anwendungen der HF-Näherungen auf Atomkerne werden die Einteilchenfunktionen φ_α nach einer vollständigen Basis von Oszillatorwellenfunktionen entwickelt. Dieses Vorgehen ist günstig, da bei geeigneter Wahl des Oszillatorparameters die Oszillatorwellenfunktion und die entsprechende HF-Wellenfunktion stark überlappen. Außerdem hängen die mit Φ_0 berechneten Erwartungswerte physikalischer Operatoren nur schwach von der Anzahl der in der Entwicklung der HF-Einteilchenfunktion berücksichtigten Glieder ab. Der entscheidende Ausgangspunkt einer HF-Rechnung ist aber natürlich die Wahl der Nukleon-Nukleon-Wechselwirkung V_{ij}. Gegenwärtig liegen vor allem für leichte gg-Kerne eine Vielzahl von HF-Untersuchungen vor, die verschiedene phänomenologische oder realistischen Potentiale V_{ij} verwenden. Als besonders erfolgreich haben sich effektive Zweiteilchenpotentiale erwiesen, deren Stärke von der Nukleonendichte selbst abhängt. Häufig wird die phänomenologische Skyrme-Kraft verwendet. Sie enthält neben einem Zweiteilchenpotential auch einen Dreiteilchenterm, der einer dichteabhängigen Zweiteilchenkraft äquivalent ist:

$$V = \sum_{i<j} V_{ij} + \sum_{i<j<k} V_{ijk} , \quad (8.235)$$

$$V_{12} = t_0(1 + x_0 P^s)\, \delta(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2) + \frac{1}{2} t_1[\delta(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2)\, \boldsymbol{k}^2 + \boldsymbol{k}^2 \delta(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2)]$$
$$+ t_2 \boldsymbol{k} \delta(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2)\, \boldsymbol{k} + \mathrm{i} W_0(\boldsymbol{\sigma}_1 + \boldsymbol{\sigma}_2)\, \boldsymbol{k} \times \delta(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2)\, \boldsymbol{k} , \quad (8.236)$$

$$V_{123} = t_3 \delta(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2)\, \delta(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_3) \mathrel{\hat=} V_{12}(\varrho) \sim \delta(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2)\, \varrho \left(\frac{1}{2} (\boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{r}_2) \right) . \quad (8.237)$$

Der erste Summand in V_{12} stellt ein δ-Potential mit Austauschcharakter dar. Der zweite und dritte Summand ist vom Relativimpuls $\boldsymbol{k}$ abhängig; er simuliert eine endliche Reichweite der Wechselwirkung. Schließlich tritt noch eine Zweiteilchenspinbahnkopplung hinzu. Die in den Ansätzen (8.236) und (8.237) vorkommenden 5 Parameter werden durch Anpassung an experimentelle Daten (Bindungsenergie, Radien) bestimmt. Wir geben ein Beispiel (Skyrme III):

$$t_0 = -1128{,}75 \text{ MeV fm}^3 , \quad t_1 = 395{,}0 \text{ MeV fm}^5 ,$$
$$t_2 = -95{,}0 \text{ MeV fm}^5 , \quad t_3 = 14000{,}0 \text{ MeV fm}^6 , \quad (8.238)$$
$$W_0 = 120 \text{ MeV fm}^5 , \quad x_0 = 0{,}45 .$$

Im Unterschied zur Theorie der unendlichen Kernmaterie können die Ergebnisse von HF-Rechnungen für endliche Kerne nicht nur mit empirischen Daten über globale Kerneigen-

schaften wie Bindungsenergie und Dichte im Grundzustand sondern auch mit experimentell ermittelten Charakteristika individueller Kerne verglichen werden. Man zieht dazu experimentelle Ergebnisse über Nukleonenseparationsenergien, Dichteverteilungen bzw. mittlere quadratische Kernradien oder Deformationen heran.

Wir fassen einige charakteristische Ergebnisse von HF-Betrachtungen für endliche Kerne zusammen:

— In HF-Näherung ist es im allgemeinen nicht möglich, die experimentellen Daten über Bindungsenergie, Dichteverteilung, Einteilchenspektrum und Deformation eines Kerns durch Wahl einer effektiven Nukleon-Nukleon-Wechselwirkung gleichzeitig gut zu reproduzieren. Die besten Ergebnisse erreicht man mit dichteabhängigen effektiven Wechselwirkungen.

Tabelle 8.7
Ergebnisse von Hartree-Fock-Rechnungen für einige gg-Kerne der 1p- und der 2s1d-Schale mit realistischem Nukleon-Nukleon-Potential (Yale-Potential)

	^{8}Be	^{12}C	^{20}Ne	^{24}Mg	^{28}Si	^{32}S
E/A(Exp.)	−7,38	−8,21	−8,96	−9,36	−9,71	−9,92
E/A(HF)	−5,51	−7,04	−6,60	−6,93	−7,54	−8,13
$\hbar/M\omega$	2,372	2,372	3,10	3,10	3,10	3,10
$\langle r^2\rangle^{1/2}$	2,16	2,25	2,75	2,85	2,93	2,91
β	0,79	−0,34	0,34	0,32	−0,28	−0,19
γ	0	0	0	180	0	23,50

E/A: Bindungsenergie pro Nukleon (in MeV)
$\hbar/M\omega$: Oszillatorparameter für die Entwicklung der HF-Einteilchenfunktionen (in (fm)^2)
$\langle r^2\rangle^{1/2}$: mittlerer quadratischer Radius (in fm)
β, γ: Deformationsparameter, siehe Gl. (8.142).

— Bei Verwendung realisitischer Potentiale liefert das HF-Verfahren durchgängig eine zu geringe Bindungsenergie der Kerne. Aus Tabelle 8.7 ist ersichtlich, daß bei leichten Kernen der 1p- und der 2s 1d-Schale die Bindungsenergie pro Nukleon bis zu etwa 25% des experimentellen Wertes unterschätzt wird. Der Radiusparameter der berechneten Dichteverteilung liegt im Mittel bei $r_0 \approx 1{,}0$ fm, fällt also gegenüber gemessenen Kernradien etwas zu klein aus. Als Funktion der Radialkoordinate zeigt die Dichteverteilung neben dem Abfall am Kernrand deutliche Fluktuationen im Innengebiet, die sich aus der Schalenstruktur des Kerns ergeben. Dabei kann man HF-Rechnungen im Zentralgebiet sowohl eine Erhöhung als auch eine drastische Verringerung der Dichte auftreten. Als Beispiel hierfür sind in Abb. 8.46 die berechneten Dichteprofile für die sphärischen Kerne ^{208}Pb und ^{16}O angegeben.

— Obwohl die totale HF-Bindungsenergie im allgemeinen nur die Hälfte des experimentellen Wertes ausmacht, stimmen die HF-Einteilchenenergien für die besetzten Zustände mit den aus beobachteten Anregungsspektren entnommenen Einteilchenenergien befriedigend überein. In ^{16}O sind z. B. die 1p-Zustände um lediglich 2 MeV zu stark gebunden, während die

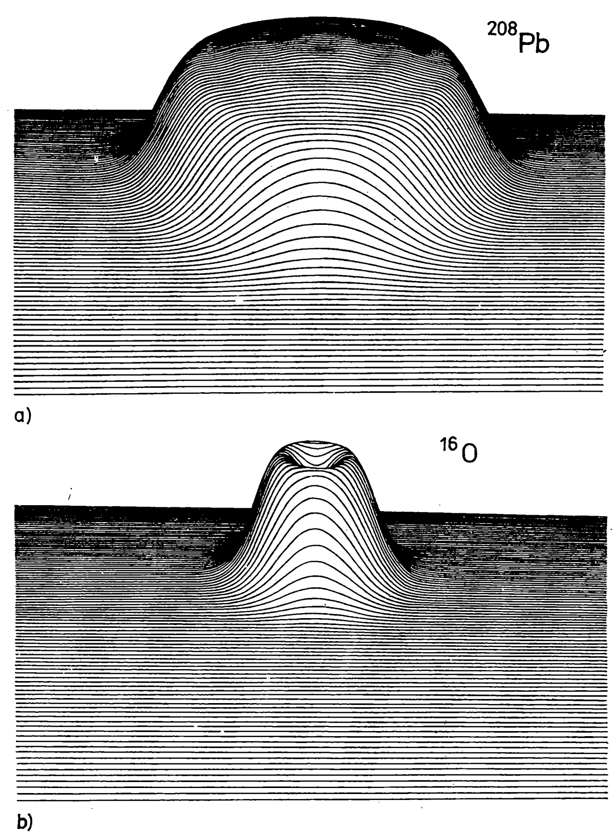


Abb. 8.46
In HF-Näherung mit einer dichteabhängigen effektiven Wechselwirkung (Skyrme-Kraft) berechnete Dichteverteilung für ^{208}Pb (a) und ^{16}O (b)

Spinbahnaufspaltung $2p_{3/2}$—$2p_{1/2}$ sogar recht gut wiedergegeben wird (siehe Tabelle 8.8). Der Energiespalt Δ zwischen besetzten und unbesetzten Einteilchenniveaus wird durch das selbstkonsistente Potential überschätzt. Außerdem kann man feststellen, daß die Übereinstimmung von berechneten und empirischen Einteilchenenergien für die unbesetzten Niveaus schlechter wird.

3. Das HF-Verfahren ist nur dann unmittelbar anwendbar, wenn die Zweiteilchenwechselwirkung V_{ij} kein Hard-core besitzt, da sonst die Integrale in (8.232—233) divergieren würden. Selbst bei nichtsingulären Wechselwirkungen können starke kurzreichweitige Zweiteilchenkorrelationen auftreten, die verhindern, daß die Restwechselwirkung klein wird. Deshalb muß insbesondere bei Nukleon-Nukleon-Potentialen mit Hard-core das HF-Verfahren erweitert werden, indem man analog zur Theorie der Kernmaterie statt der Wechselwirkung V_{ij} eine nach (8.227) berechnete G-Matrix als effektive Wechselwirkung verwendet. Auf diese Weise ist es möglich, die durch Zweiteilchenkorrelationen bedingte Abweichung von der unabhängigen Teilchenbewegung zu berücksichtigen. In dieser Hinsicht läßt sich die Selbstkonsistenz-Prozedur des HF-Verfahrens erweitern. Ausgehend von einem Satz von Einteilchenzuständen und -energien $\varphi_\alpha^{(0)}$, $\varepsilon_\alpha^{(0)}$ wird zunächst eine G-Matrix berechnet, die dann als effektive Wechselwirkung in die HF-Gleichungen für $U^{(1)}$, $W^{(1)}$, $\varphi_\alpha^{(1)}$, $\varepsilon_\alpha^{(1)}$ eingeht. Mit diesen Größen läßt sich eine neue G-Matrix angeben,

Tabelle 8.8
Vergleich der in Hartree-Fock-Näherung mit einem realistischen Nukleon-Nukleon-Potential (Yale-Potential) für ^{16}O berechneten Einteilchenenergien mit experimentell bestimmten Separationsenergien: Δ: Energiespalt zwischen besetzten und unbesetzten Zuständen.

	nlj	ε_{nlj}(HF)/MeV	ε_{nlj}(Exp.)/MeV
unbesetzt	$1d_{3/2}$	6,0	0,9
unbesetzt	$2s_{1/2}$	1,5	− 3,2
unbesetzt	$1d_{5/2}$	− 1,0	− 4,1
		Δ = 16,6 MeV	Δ = 10,5 MeV
besetzt	$1p_{1/2}$	−17,6	−15,6
besetzt	$1p_{3/2}$	−23,3	−21,7
besetzt	$1s_{1/2}$	−52,8	−51,0

die wiederum Ausgangspunkt für einen HF-Zyklus ist. Während bei der HF-Näherung das Zweiteilchenpotential V_{ij} fest bleibt, wird im Brueckner-Hartree-Fock (BHF)-Verfahren neben dem selbstkonsistenten mittleren Potential auch eine selbstkonsistente effektive Wechselwirkung berechnet. Die BHF-Methode liefert höhere Werte für die Bindungsenergien des Kerns als das HF-Verfahren. Wir geben als Beispiel die Ergebnisse für ^{40}Ca an:

$$E(\mathrm{HF}) = -224{,}0\ \mathrm{MeV}\,, \qquad E(\mathrm{BHF}) = -401{,}4\ \mathrm{MeV}\,,$$
$$E(\mathrm{Exp.}) = -410{,}0\ \mathrm{MeV}\,.$$

4. Wie bei der Diskussion der Eigenschaften von Kernmaterie können wir feststellen, daß die Ergebnisse von HF-Rechnungen für endliche Kerne die physikalische Vorstellung von der Existenz eines sphärischen oder deformierten mittleren Potentials, in dem sich die Nukleonen nahezu unabhängig voneinander bewegen, sehr stark unterstützen. Die HF-Theorie wird damit zu einem theoretischen Fundament für das phänomenologische Schalenmodell des Kerns.

8.6.3. Schalenmodell mit Restwechselwirkung

8.6.3.1. Restwechselwirkung und Konfigurationsmischung

1. Das Schalenmodell des Atomkerns geht von dem Hamilton-Operator

$$H = \sum_{i=1}^{A} (T_i + U_i) + \sum_{i<j=1}^{A} v_{ij} \equiv H_0 + V_{\mathrm{R}} \tag{8.239}$$

aus, der bereits in Abschnitt 8.3.3. eingeführt wurde. Das anziehende Potential U, das von den Koordinaten nur eines Teilchens abhängt, besteht aus einem sphärischen Zentralpotential $U_0(r_i)$ und einem Spinbahnkopplungsterm $U_{ls}(r)\,(\boldsymbol{ls})$ (siehe Gl. (8.71)). Von der Restwechselwirkung (siehe Abschnitt 8.3.3.)

$$V_{\mathrm{R}} \equiv \left(\sum_{i<j=1}^{A} V_{ij}\right) - \left(\sum_{i=1}^{A} U_i\right) = \sum_{i<j=1}^{A} v_{ij} \tag{8.240}$$

wird angenommen, daß sie als Summe über skalare Funktionen v_{ij} der Variablen zweier Teilchen i, j dargestellt werden kann. Sie stellt eine schwache Störung der unabhängigen Teilchenbewegung im mittleren Potential U dar.

Für das Potential $U_i = U_0(r_i) + U_{ls}(r_i)\,(\boldsymbol{l}_i\boldsymbol{s}_i)$ ist der Gesamtdrehimpuls $\boldsymbol{j}_i = \boldsymbol{l}_i + \boldsymbol{s}_i$ eines Teilchens eine Erhaltungsgröße, $[U_i, \boldsymbol{j}_i^2] = [U_i, j_{iz}] = 0$. Die Restwechselwirkung v_{ik} erhält den Gesamtdrehimpuls $\boldsymbol{j}_i + \boldsymbol{j}_k$ eines wechselwirkenden Paares, $[v_{ik}, (\boldsymbol{j}_i + \boldsymbol{j}_k)^2] = [v_{ik}, j_{iz} + j_{kz}] = 0$. Der Hamilton-Operator (8.239) hat den Gesamtdrehimpuls $\boldsymbol{I}$ des Systems, der sich aus den Drehimpulsen der einzelnen Nukleonen zusammensetzt, als Erhaltungsgröße, $\boldsymbol{I} = \sum_{i=1}^{A} \boldsymbol{j}_i$, $I_z = \sum_{i=1}^{A} j_{iz}$, $[H, \boldsymbol{I}^2] = [H, I_z] = 0$. Aus den weiteren Symmetrien der starken Wechselwirkung (siehe Kapitel 7) folgt, daß auch die Quantenzahlen T, M_T $\left(\boldsymbol{T} = \sum_{i=1}^{A} \boldsymbol{t}_i,\ T_z = \sum_{i=1}^{A} t_{iz}\right)$ und die Parität π herangezogen werden können, um die Lösungen der Schrödinger-Gleichung mit dem Hamilton-Operator (8.239) zu klassifizieren. Das Pauli-Prinzip verlangt außerdem, daß die Vielteilchenwellenfunktion $\Psi_{IT\pi}^{MM_T}(x_1, \dots, x_A)$ antisymmetrisch gegenüber der Vertauschung aller Koordinaten zweier beliebiger Teilchen sein muß:

$$\Psi_{IT\pi}^{MM_T}(x_1, \dots, x_i, \dots, x_k, \dots, x_A) = -\Psi_{IT\pi}^{MM_T}(x_1, \dots, x_k, \dots, x_i, \dots, x_A)\,. \tag{8.241}$$

2. Für U und v macht man phänomenologische Ansätze. Da der radiale Formfaktor von U_0 der Massenverteilung im Kern folgen sollte, wählt man oft eine Woods-Saxon-Verteilung (8.51) mit geeigneten geometrischen Parametern r_0 (Reichweite) und a (Oberflächendicke). Die auf ein Nukleon wirkende Kraft ist sehr gering im Kerninnern und anziehend im Oberflächenbereich, d. h.

$$\left.\frac{\partial U}{\partial r}\right|_{r=0} \approx 0 \quad \text{bzw.} \quad \left.\frac{\partial U}{\partial r}\right|_{r \lesssim R_0} > 0\,.$$

Die Tiefe des sphärischen Potentials wird so bestimmt, daß experimentell bekannte Einteilchenenergien möglichst gut reproduziert werden. Die Spinbahnkopplung ist ein Oberflächeneffekt. Als Formfaktor kann man deshalb die Ableitung eines Woods-Saxon-Potentials, die ein Maximum am Kernrand besitzt, einsetzen. Vorzeichen und Stärke der Spinbahnkopplung werden so gewählt, daß das Einteilchenniveau $j = l + 1/2$ stärker als das Niveau $j = l - 1/2$ gebunden ist und außerdem die beobachtete Energieaufspaltung der Niveaus $j = l \pm 1/2$ beschrieben wird. Die mittleren Potentiale für Neutronen und Protonen unterscheiden sich durch die Coulomb- und Symmetrieenergie.

3. Wir geben zunächst die Lösung der Schrödinger-Gleichung für das Einteilchenproblem

$$[T + U_0(r) + U_{ls}(r)\,(\boldsymbol{ls})]\,\varphi(\boldsymbol{r}) = \varepsilon\varphi(\boldsymbol{r}) \tag{8.242}$$

an (siehe auch Abschnitt 8.3.3.). Nach (8.57) machen wir den Ansatz

$$\varphi_{nljm}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{r}\, u_{nlj}(r)\, \Phi_{lj}^{m}(\vartheta, \varphi, s)\, \eta_{m_t}(t)\,, \tag{8.243}$$

$$\Phi_{lj}^{m}(\vartheta, \varphi, s) = \sum_{m_l, m_s} \left(l m_l \tfrac{1}{2} m_s \mid jm\right) Y_l^{m_l}(\vartheta, \varphi)\, \chi_{m_s}(s)\,. \tag{8.244}$$

Die Einteilchenzustände in einem Woods-Saxon-Potential werden durch die Quantenzahlen n, l, j, m unterschieden. Dabei bedeutet l den Betrag des Bahndrehimpulses, womit gleichzeitig die Parität des Zustandes, $\pi = (-1)^l$ bestimmt ist. Der Gesamtdrehimpuls $\boldsymbol{j}$ ist hinsichtlich Betrag und Richtung durch j und m festgelegt. Die Knotenzahl der Radialfunktion wird mit n

bezeichnet, wobei man üblicherweise die Nullstelle im Unendlichen (nicht aber bei $r = 0$) mitzählt: $1s_{1/2}$, $1p_{3/2}$, $2s_{1/2}$, ... Die Radialwellenfunktion u genügt als Lösung der radialen Schrödinger-Gleichung (8.59) den Randbedingungen $u(0) = 0$ und $u(r) \to 0$ für $r \to \infty$. Radialwellenfunktionen zu gleichem l, j, aber verschiedenem n, sind zueinander orthogonal,

$$\int_0^\infty \mathrm{d}r \; u_{nlj}(r) \; u_{n'lj}(r) = \delta_{nn'} \,. \tag{8.245}$$

Der Verlauf der Radialwellenfunktionen wird durch das effektive Potential, das sich aus dem mittleren Potential U und dem Zentrifugalpotential zusammensetzt, bestimmt (siehe Abb. 8.47). In Abb. 8.48 und 8.49 sind die numerisch berechneten Radialwellenfunktionen für einige Einteilchenzustände im Kern der Massenzahl $A = 30$ angegeben. Man bemerkt, daß die Aufenthaltswahrscheinlichkeit des Teilchens außerhalb des Kernradius selbst für das am stärksten gebundene $1s_{1/2}$-Niveau beträchtliche Werte erreicht. Die 1d-Niveaus an der Fermi-Grenze liefern ein Maximum der Aufenthaltswahrscheinlichkeit am Kernrand. Die Spinbahnkopplung beeinflußt im wesentlichen lediglich den asymptotischen Verlauf der Radialfunktion mit gleichem n, l.

Die Spin-Winkel-Funktion $\Phi_{lj}^m(\vartheta, \varphi, s)$ ist von der speziellen Wahl der Parameter des zentralsymmetrischen Potentials unabhängig. Vom Isospinfreiheitsgrad, der in der Isospinfunktion $\eta_{m_t}(t)$ enthalten ist, sehen wir in den folgenden Betrachtungen meistens ab.

Die (von m unabhängigen) Einteilchenenergien ε werden durch die Quantenzahlen n, l, j charakterisiert, so daß die Einteilchenzustände (8.243) also $2(2j + 1)$-fach entartet sind. Bei gleicher Potentialtiefe wird der Potentialtopf, der das mittlere Potential im Kern repräsentiert, nach $R = r_0 A^{1/3}$ mit wachsender Massenzahl A breiter, so daß mehr und mehr Einteilchenzustände aus dem Kontinuum in das Potential „hineingezogen" und gebunden werden. Diese

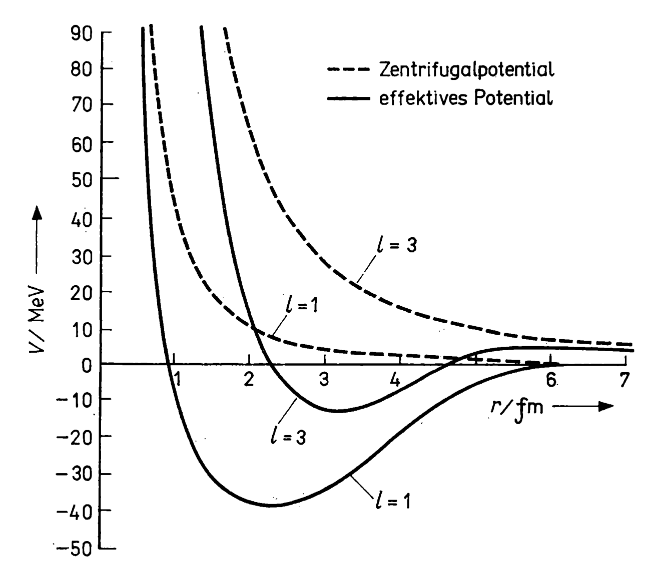


Abb. 8.47
Zentrifugalpotential und effektives Potential (= Woods-Saxon-Potential + Zentrifugalpotential) für verschiedene Wertes des Bahndrehimpulses l, Massenzahl $A = 30$. Potentialparameter: $U_0 = 50$ MeV, $r_0 = 1{,}25$ fm, $a = 0{,}65$ fm, $V_{ls} = 0$

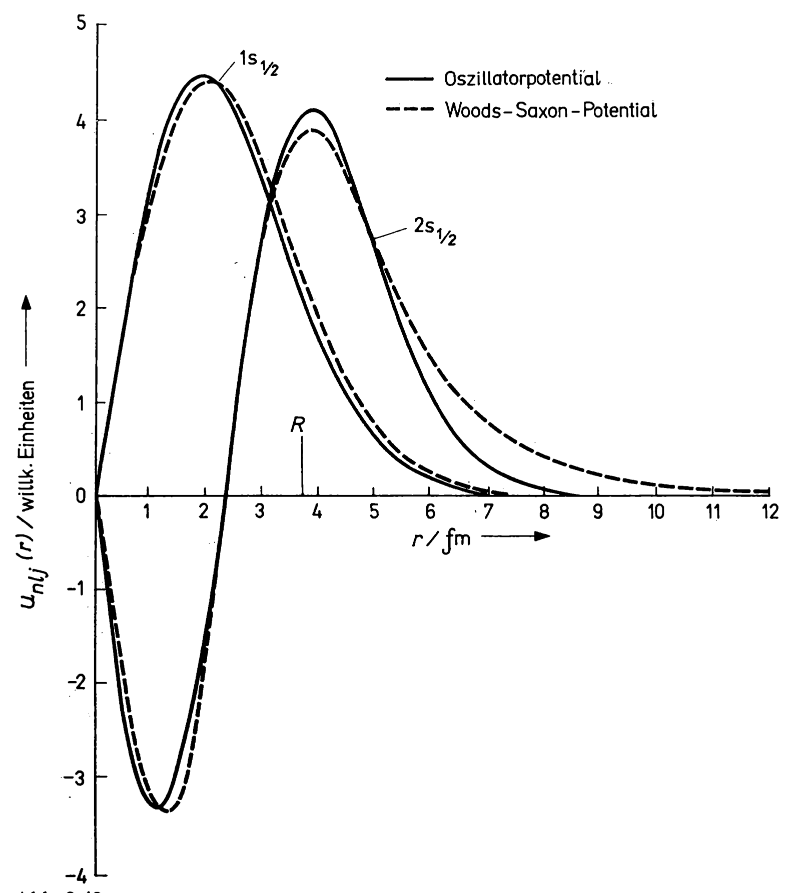


Abb. 8.48
Radialwellenfunktionen u_{nlj} der Einteilchenzustände $1s_{1/2}$ und $2s_{1/2}$ im Woods-Saxon-Potential (Parameter wie in Abb. 8.47) und im Oszillatorpotential ($\hbar\omega = 41 \cdot A^{-1/3}$ MeV) für einen Kern mit der Massenzahl $A = 30$

Tendenz wird in Abb. 8.50 illustriert. Wie bereits im Abschnitt 8.3 erläutert sind die Einteilchenzustände energetisch in Schalen gruppiert , z.B.:

$$1s_{1/2}\,, \quad \pi = +1$$
$$1p_{3/2},\ 1p_{1/2}, \quad \pi = -1,$$
$$2s_{1/2},\ 1d_{5/2},\ 1d_{3/2}, \quad \pi = +1,$$
$$1f_{7/2}\,, \quad \pi = -1\,.$$

4. Eine Vielteilchenfunktion, die Eigenfunktion zum Hamilton-Operator H_0 ist, läßt sich aufbauen, indem wir unter Beachtung des Pauli-Prinzips die Einteilchenzustände mit der vorgegebenen Anzahl von A Nukleonen besetzen. Eine bestimmte Verteilung der A Nukleonen auf die verfügbaren Einteilchenzustände $n_1 l_1 j_1, \ldots, n_f, l_f, j_f$ bezeichnen wir als Konfiguration α

$$\alpha \equiv (n_1 l_1 j_1)^{N_1^{(\alpha)}} (n_2 l_2 j_2)^{N_2^{(\alpha)}} \ldots (n_f l_f j_f)^{N_f^{(\alpha)}}\,,$$
$$N_i^{(\alpha)} \leqq 2(2j_i + 1)\,, \qquad \sum_{i=1}^{f} N_i^{(\alpha)} = A\,. \tag{8.246}$$

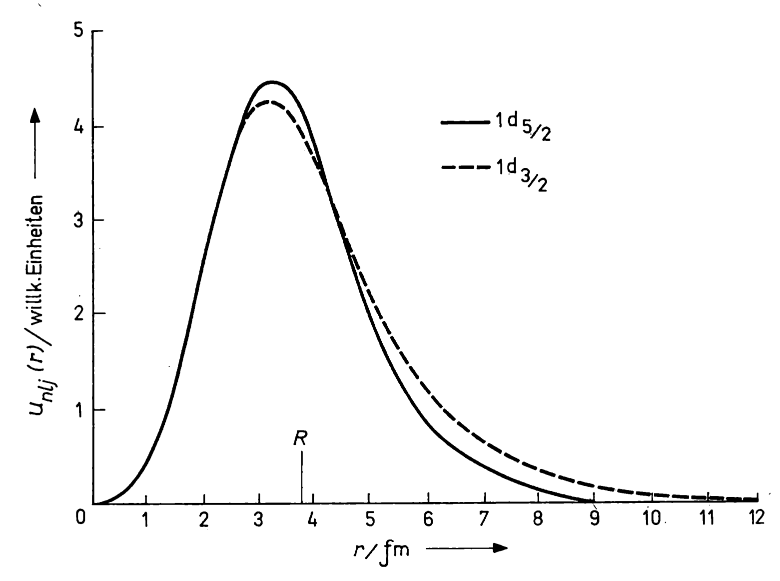


Abb. 8.49
Einfluß der Spinbahnkopplung auf den Verlauf der Radialwellenfunktion (Parameter des Zentralpotentials wie in Abb. 8.47, Spinbahnkopplung: $U_{ls} = 5$ MeV, $r_{ls} = 1{,}25$ fm, $a_{ls} = 0{,}65$ fm) für einen Kern der Massenzahl $A = 30$

Die Besetzung $(n_i l_i j_i)^{N_i}$ nennt man eine Gruppe äquivalenter Teilchen. Der Eigenwert von H_0 in der Konfiguration (8.246) ist die Summe der Einteilchenenergien,

$$E_0^{(\alpha)} = \sum_{i=1}^{f} N_i^{(\alpha)} \varepsilon_{n_i l_i j_i} \,. \tag{8.247}$$

Die Parität der Wellenfunktion einer Gruppe äquivalenter Teilchen ist $\pi = (-1)^{\sum_{i=1}^{N_i} l_i}$, d. h., eine gerade (ungerade) Anzahl von Teilchen in einem Einteilchenniveau negativer Parität ergibt die Parität $\pi = +1(-1)$. Die Gesamtparität der Konfiguration (8.246) ist $\pi = \pi_1 \cdot \pi_2 \ldots \pi_f$. Ein Kern mit einem Teilchen in der Schale l, j oberhalb einer abgeschlossenen Schale besitzt Spin und Parität $I = j$, $\pi = (-1)^l$ (siehe auch Einteilchenmodell, Abschnitt 8.3.3.). Die Konfiguration $(nlj)^{2j}$, bei der ein Nukleon zum vollständig besetzten Einteilchenzustand fehlt, bezeichnet man als Lochkonfiguration $(nlj)^{-1}$.

Wir geben einige Beispiele für Mehrteilchenkonfigurationen an:

${}^{12}_{6}C_6$	Neutronen	$(1s_{1/2})^2$	$(1p_{3/2})^4$		
	Protonen	$(1s_{1/2})^2$	$(1p_{3/2})^4$;		
${}^{25}_{12}Mg_{13}$	Neutronen	$(1s_{1/2})^2$	$(1p_{3/2})^4$	$(1p_{1/2})^2$	$(1d_{5/2})^5$
	Protonen	$(1s_{1/2})^2$	$(1p_{3/2})^4$	$(1p_{1/2})^2$	$(1d_{5/2})^4$;
${}^{15}_{8}O_7$	Neutronen	$(1s_{1/2})^2$	$(1p_{3/2})^4$	$(1p_{1/2})^{-1}$	
	Protonen	$(1s_{1/2})^2$	$(1p_{3/2})^4$	$(1p_{1/2})^2$.	

5. Die Eigenfunktionen von H sind gleichzeitig Eigenfunktionen des Gesamtdrehimpulses. Deshalb ist es günstig, die Gesamtdrehimpulse der Nukleonen in den Konfigurationen (8.246) zu einem Gesamtspin zu koppeln, indem man zunächst die Drehimpulse in den äquivalenten

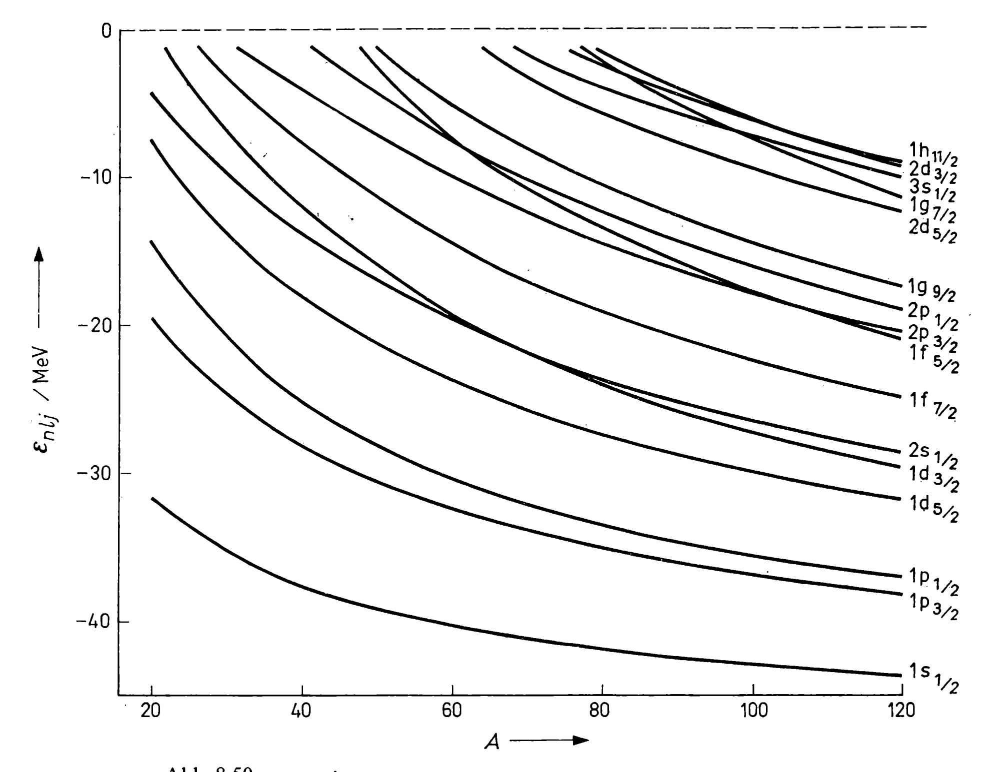


Abb. 8.50
Abhängigkeit der Bindungsenergie ε_{nlj} von der Massenzahl A. Potentialparameter wie in Abb. 8.47 und 8.49

Teilchengruppen addiert zu $\boldsymbol{I}_i$ und anschließend den Gesamtdrehimpuls $\boldsymbol{I} = \boldsymbol{I}_1 + \boldsymbol{I}_2 + \cdots + \boldsymbol{I}_f$ bildet. Dieses Vorgehen ergibt den Zustand

$$\begin{aligned} \Phi_\alpha^{IM\pi}(x_1, \ldots, x_A) &= \mathscr{A} | \{(n_1 l_1 j_1)^{N_1^{(\alpha)}} I_1, \ldots, (n_f l_f j_f)^{N_f^{(\alpha)}} I_f\} IM\rangle , \\ \langle \Phi_{\alpha'}^{I'M'\pi} | \Phi_\alpha^{IM\pi} \rangle &= \delta_{\alpha\alpha'} \delta_{II'} \delta_{MM'} , \end{aligned} \tag{8.248}$$

wobei $\mathscr{A}$ einen Antisymmetrisierungsoperator bedeutet. Die Reihenfolge der Drehimpulskopplung in (8.248) ist willkürlich. Funktionen $\Phi_\alpha^{IM\pi}$, die sich lediglich durch die Art und Weise der Drehimpulskopplung unterscheiden, können ineinander transformiert werden. In einer Konfiguration α besteht eine Entartung hinsichtlich I und M: Funktionen zu verschiedenen Werten des Gesamtdrehimpulses I und seiner Projektion M sind entartet. Die Entartung wird durch die Restwechselwirkung aufgehoben.

Um im Schalenmodell die Wellenfunktionen $\Psi_{I\pi\nu}^M(x_1, \ldots, x_A)$ der stationären Zustände eines Kerns zu finden, die die Schrödinger-Gleichung

$$\left(\sum_{i=1}^{A} (T_i + U_i) + \sum_{i<j=1}^{A} v_{ij}(x_i, x_j) \right) \Psi_{I\pi\nu}^M(x_1, \ldots, x_A) = E_{I\pi\nu} \Psi_{I\pi\nu}^M(x_1, \ldots, x_A) \tag{8.249}$$

erfüllen, bauen wir eine vollständige Basis von Funktionen auf, indem wir für alle Konfigurationen α die Zustände $\Phi_\alpha^{IM\pi}$ nach Gl. (8.248) konstruieren. Nach diesem Satz von Funktionen (Konfigurationsraum) entwickeln wir die gesuchte Eigenfunktion $\Psi_{I\pi\nu}^M$:

$$\Psi_{I\pi\nu}^M(x_1, \ldots, x_A) = \sum_\alpha c_\nu^{(\alpha)} \Phi_\alpha^{IM\pi}(x_1, \ldots, x_A)\,. \tag{8.250}$$

Die Normierung von $\Psi_{I\pi\nu}^M$ verlangt $\sum_\alpha |c_\nu^{(\alpha)}|^2 = 1$, so daß die Entwicklungskoeffizienten in (8.250) als Wahrscheinlichkeitsamplituden dafür interpretiert werden können, im Zustand $\Psi_{I\pi\nu}^M$ die Konfiguration α realisiert zu finden.

Wenn wir die Betrachtung auf Zustände mit relativ geringer Anregungsenergie beschränken, dann können wir die (unendliche) Summe in (8.250) auf wenige Konfigurationen begrenzen, die sich nicht zu stark von der Grundzustandskonfiguration unterscheiden. Hierin liegt die Näherung, die das Schalenmodell einführt, damit eine praktikable Lösung der Schrödinger-Gleichung (8.249) möglich wird. Um in diesem Unterraum eingeschränkter Dimension die Wellenfunktion Ψ und die Energieeigenwerte E anzugeben, wird die Energiematrix

$$\langle \Phi_{\alpha'}^{IM\pi} |\, H \,| \Phi_\alpha^{IM\pi} \rangle = E_0^{(\alpha)} \delta_{\alpha\alpha'} + \langle \Phi_{\alpha'}^{IM\pi} |\, \sum v_{ij} \,| \Phi_\alpha^{IM\pi} \rangle \tag{8.251}$$

durch die Basistransformation $\{\Phi_\alpha\} \to \{\Psi_\nu\}$ diagonalisiert. Die berechneten Eigenwerte $E_{I\pi\nu}$ können mit gemessenen Anregungsspektren verglichen werden. Die Entwicklungskoeffizienten $c_\nu^{(\alpha)}$ bestimmen die Kernwellenfunktionen, die man anhand von Übergangswahrscheinlichkeiten oder Reaktionsdaten testen kann.

Die Konfigurationsmischung (8.250) ist eine Folge der Restwechselwirkung $\Sigma\, v_{ij}$, die die Nichtdiagonalelemente der Energiematrix (8.251) von Null verschieden macht.

6. Wir fassen die wesentlichen Schritte zur praktischen Berechnung der stationären Zustände eines Kerns im Schalenmodell noch einmal zusammen:

— Einteilung des Kerns in einen inerten Rumpf aus abgeschlossenen Schalen und eine Gruppe aktiver Nukleonen, die an der Anregung beteiligt sind. Für den Kern ^{18}O kann man z. B. den Kern ^{12}C mit abgeschlossener $1p_{3/2}$-Unterschale oder den doppelt magischen Kern ^{16}O als Rumpf einführen:

$$^{18}\mathrm{O} \equiv {}^{12}\mathrm{C} + (2\mathrm{p}, 4\mathrm{n}) \quad \text{bzw.} \quad {}^{18}\mathrm{O} \equiv {}^{16}\mathrm{O} + 2\mathrm{n}\,.$$

Auf diese Weise wird die Zahl der im Modell explizit berücksichtigten Freiheitsgrade des Kerns drastisch reduziert.

— Wahl des mittleren Potentials und Berechnung der Einteilchenzustände. Die Verwendung eines harmonischen Oszillatorpotentials (mit $\hbar\omega = 41 \cdot A^{-1/3}$ MeV bzw. $b = (\hbar/m\omega)^{1/2} = 1{,}01\, A^{1/6}$ fm, siehe Gl. (8.69)) hat den Vorteil, daß die Einteilchenwellenfunktionen analytisch bekannt sind, wodurch die Berechnung der Matrixelemente der Restwechselwirkung erleichtert wird. Ein Woods-Saxon-Potential liefert realistischere Einteilchenenergien und -wellenfunktionen (siehe den Vergleich von Oszillator- und Woods-Saxon-Wellenfunktion in Abb. 8.48), man ist aber auf numerische Verfahren zur Lösung der radialen Schrödinger-Gleichung angewiesen. Ein bewährter Parametersatz für das Einteilchenpotential ist:

$$\begin{aligned} U^{(0)} &= \left(-51 + 33\,\frac{N-Z}{A}\right) \text{MeV}\,, \\ U_{ls}^{(0)} &= \left(22 - 14\,\frac{N-Z}{A}\right) \text{MeV}\,, \\ r_0 &= 1{,}27\ \text{fm}\,, \qquad a = 0{,}67\ \text{fm}\,. \end{aligned} \tag{8.252}$$

— Aufbau des Konfigurationsraums. Man beschränkt sich auf einen begrenzten Satz von Einteilchenzuständen oberhalb des Rumpfes aus abgeschlossenen Schalen, etwa auf Zustände, die zu einer Oszillatorschale gehören. Diese Zustände werden in verschiedener Weise mit den aktiven Nukleonen besetzt. Für jede Besetzung koppelt man die Drehimpulse der einzelnen Teilchen zum Gesamtspin I, M und antisymmetrisiert. Die Zahl der möglichen Konfigurationen wächst mit der Teilchenzahl und mit der Anzahl der berücksichtigten Einteilchenzustände.

— Wahl der Restwechselwirkung. Für die Restwechselwirkung v_{ij} macht man meistens einen phänomenologischen Ansatz (siehe Kapitel 7, Gl. (7.20) und (7.30)), ohne die eigentlich zu fordernde Konsistenz mit dem mittleren Potential zu beachten. Verwendet werden abstandsabhängige Gauß- oder Yukawa-Potentiale $v_{ij}(|\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j|)$ mit Austauschcharakter,

$$v_{ij} = (W + BP^s + MP^r + HP^rP^s)\, v_{ij}(|\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j|)\,. \tag{8.253}$$

Die Parameter dieser Kraft legt man so fest, daß ein ausgewählter Satz spektroskopischer Daten (Anregungsenergien) möglichst gut reproduziert wird. Einige besonders bei leichten Kernen gebräuchliche Standardparametersätze sind: $W = 0{,}5$, $M = 0{,}5$, $B = M = 0$ (Serber-Kraft) oder $W = -0{,}13$, $M = 0{,}93$, $B = 0{,}46$, $H = 0{,}26$ (Rosenfeld-Kraft).

Wir weisen darauf hin, daß v_{ij} streng genommen eine effektive Wechselwirkung darstellt, die an den speziellen Kern und an die spezielle Begrenzung des Konfigurationsraumes geknüpft ist. Erweitert man z. B. den Konfigurationsraum durch Vergrößerung der Einteilchenbasis, dann sollten sich auch die Parameter der effektiven Restwechselwirkung ändern.

— Aufstellung der Energiematrix. Die Diagonalglieder von (8.251) enthalten Summen über Einteilchenenergien als Hauptbeitrag. Man entnimmt ihre Werte gewöhnlich nicht der Lösung der Schrödinger-Gleichung für das Einteilchenproblem (8.242), sondern den experimentellen Daten über die Spektren ungerader Kerne. Diese Einteilchenenergien sind dann zwar nicht konsistent mit den verwendeten Einteilchenfunktionen, dafür erhält man aber bei den berechneten Spektren bessere Übereinstimmung mit dem Experiment. Die Hauptschwierigkeit bei der Aufstellung der Energiematrix liegt in der Berechnung der Matrixelemente der Restwechselwirkung, die man auf Zweiteilchenmatrixelemente zurückführen kann, denn der Ansatz der Restwechselwirkung in Form einer Summe von Zweiteilchenwechselwirkungen bedingt, daß nur solche Konfigurationen miteinander koppeln, die sich im Zustand höchstens zweier Teilchen unterscheiden.

— Diagonalisierung der Energiematrix. Die Energieeigenwerte $E_{I\pi\nu}$ sind unabhängig von der Orientierung M des Gesamtdrehimpulses.

Wir demonstrieren dieses Vorgehen am Beispiel der Berechnung des Anregungsspektrums von ^{18}O.

8.6.3.2. Zweiteilchenkonfigurationen

1. Der Kern ^{18}O besteht aus einem ^{16}O-Rumpf und zwei Neutronen in den gebundenen Einteilchenzuständen $2s_{1/2}$ und $1d_{5/2}$ der 2s1d-Schale. Das $1d_{3/2}$-Niveau liegt bereits im Kontinuum. Die möglichen Zweiteilchenkonfigurationen sind $(2s_{1/2})^2$, $(1d_{5/2})^2$, $(2s_{1/2}\, 1d_{5/2})$ (siehe Abb. 8.51). Die Kopplung der Drehimpulse $\boldsymbol{j}_1 + \boldsymbol{j}_2 = \boldsymbol{I}$ ergibt für die ersten beiden Gruppen äquivalenter Teilchen die möglichen Spinwerte $I = 0{,}1$ bzw. $I = 0, 1, 2, 3, 4, 5$. Die beiden Teilchen in nicht-äquivalenten Bahnen können ihre Drehimpulse zu $I = 2, 3$ koppeln. Bei der vorgenommenen Begrenzung der Einteilchenbasis liefert das Schalenmodell nur Zustände positiver Parität.

2. Die Antisymmetrisierung einer Zweiteilchenfunktion

$$\Phi^{IM\pi}(x_1, x_2) = \sum_{m_1 m_2} (j_1 m_1 j_2 m_2 \mid IM)\, \Psi_{n_1 l_1 j_1 m_1}(x_1)\, \Psi_{n_2 l_2 j_2 m_2}(x_2) \equiv |(n_1 l_1 j_1)\,(n_2 l_2 j_2)\, IM\rangle \tag{8.254}$$

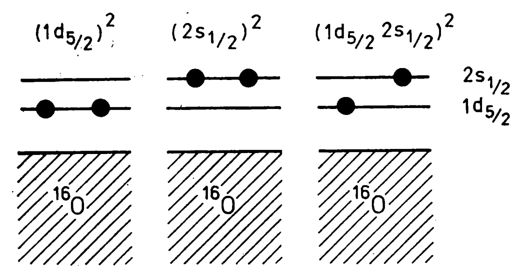


Abb. 8.51
Schalenmodell für ^{18}O. Zweiteilchenkonfigurationen über dem ^{16}O-Rumpf

erfolgt durch Anwendung des Antisymmetrisierungsoperators $\mathcal{A} = N(1 - P_{12})$, wobei der Operator P_{12} alle Koordinaten der beiden Teilchen 1 und 2 austauscht und N so bestimmt wird, daß die antisymmetrisierte Funktion normiert ist. Für die Konfiguration $(j)^2$ $(j_1 = j_2 = j)$ gilt dann

$$\begin{aligned}\Phi^{IM\pi}(x_1, x_2) &= N \sum_{m,m'} (jmjm' \mid IM)\,[\varphi_{nljm}(x_1)\,\varphi_{nljm'}(x_2) - \varphi_{nljm}(x_2)\,\varphi_{nljm'}(x_1)] \\ &= N \sum_{m,m'} [(jmjm' \mid IM) - (jm'jm \mid IM)]\,\varphi_{nljm}(x_1)\,\varphi_{nljm'}(x_2)\,. \end{aligned} \tag{8.255}$$

Wir verwenden die Symmetriebeziehung (A.30) aus Anhang A für die Clebsch-Gordan-Koeffizienten und erhalten

$$\Phi^{IM\pi}(x_1, x_2) = N[1 - (-1)^{2j-I}] \sum_{m,m'} (jmjm' \mid IM)\,\varphi_{nljm}(x_1)\,\varphi_{nljm'}(x_2)\,. \tag{8.256}$$

Wegen $2j - I =$ ungerade (gerade) für I gerade (ungerade) verschwindet die antisymmetrisierte Zweiteilchenfunktion in der Konfiguration $(j)^2$ für alle ungeraden Werte des Gesamtdrehimpulses I. Die vektorgekoppelten Funktionen zu geradem I sind hingegen automatisch auch antisymmetrisch und wegen $\langle\Phi/\Phi\rangle = N^2 \cdot 4$, $N = {}^1/_2$ auch normiert. Damit ergeben sich folgende, durch das Pauli-Prinzip erlaubte Zustände:

$$(2s_{1/2})^2\colon\ I = 0\,; \qquad (1d_{5/2})^2\colon\ I = 0, 2, 4\,; \qquad (1d_{5/2}\,2s_{1/2})\colon\ I = 2, 3\,.$$

3. Die gesamte Energiematrix zerfällt in zwei Untermatrizen vom Rang 1 ($I = 3, 4$) und zwei Untermatrizen vom Rang 2 ($I = 0, 2$):

$$\begin{matrix} & I=0 & I=2 & I=3 & I=4 \end{matrix}$$
$$\langle H\rangle = \begin{pmatrix} * & * & 0 & 0 & 0 & 0\\ * & * & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & * & * & 0 & 0\\ 0 & 0 & * & * & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & * & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * \end{pmatrix}.$$

Im ersten Fall liefert das Schalenmodell lediglich eine Energiekorrektur

$$\begin{aligned} E_{3^+} &= \varepsilon_{2s_{1/2}} + \varepsilon_{1d_{5/2}} + \langle(2s_{1/2}1d_{5/2})\,3\,|v_{12}|\,(2s_{1/2}\,1d_{5/2})\,3\rangle\,,\\ E_{4^+} &= 2\varepsilon_{1d_{5/2}} + \langle(1d_{5/2})^2\,4\,|v_{12}|\,(1d_{5/2})^2\,4\rangle\,. \end{aligned}$$

Im zweiten Fall ist z. B. für $I = 2$ die symmetrische Matrix

$$\begin{pmatrix} 2\varepsilon_{1d_{5/2}} + \langle(1d_{5/2})^2\,2|\,v_{12}\,|(1d_{5/2})^2\,2\rangle & \langle(1d_{5/2})^2\,2|\,v_{12}\,|(2s_{1/2}\,1d_{5/2})\,2\rangle \\ & \varepsilon_{1d_{5/2}} + \varepsilon_{2s_{1/2}} + \langle(2s_{1/2}\,1d_{5/2})\,2|\,v_{12}\,|(2s_{1/2}\,1d_{5/2})\,2\rangle \end{pmatrix}$$

zu diagonalisieren. Man erhält also zwei Energieniveaus $E_{I\pi\nu}$, $\nu = 1, 2$. Die zugehörige Wellenfunktion wird in dieser Näherung eine Mischung aus zwei Konfigurationen,

$$\begin{aligned} \Psi_{0^+\nu}(x_1, x_2) &= c_\nu^{(1)}\,|(1d_{5/2})^2\,0\rangle + c_\nu^{(2)}\,|(2s_{1/2})^2\,0\rangle\,,\\ \Psi_{2^+\nu}(x_1, x_2) &= c_\nu^{(1)}\,|(1d_{5/2})^2\,2\rangle + c_\nu^{(2)}\,|(2s_{1/2}\,1d_{5/2})\,2\rangle\,. \end{aligned}$$

4. Die in der Energiematrix auftretenden Einteilchenenergien $\varepsilon_{1d_{5/2}}$, $\varepsilon_{2s_{1/2}}$ entnehmen wir dem Experiment. Die Bindungsenergie des Neutrons im ^{17}O-Kern wird mit der Position des $1d_{5/2}$-Zustandes identifiziert. Aus der Einteilchen-Strippingreaktion ^{16}O(d, p) ^{17}O zum ersten $^1/_2{}^+$-Niveau in ^{17}O (siehe Abschnitt 10.6.3.1.) folgt die Lage des $2s_{1/2}$-Zustandes. In analoger Weise ergeben sich die Lochzustände $(1p_{1/2})^{-1}$ und $(1p_{3/2})^{-1}$ aus Einteilchen-Pickup-Reaktionen ^{16}O(p, t) ^{15}O bzw. $(1s_{1/2})^{-1}$ aus Knock-out-Reaktionen ^{16}O(p, 2p) ^{15}N mit hochenergetischen Protonen. Auf diese Weise läßt sich das in Abb. 8.52 angegebene Schema von Einteilchenzuständen für Schalenmodellrechnungen mit ^{16}O-Rumpf ermitteln.

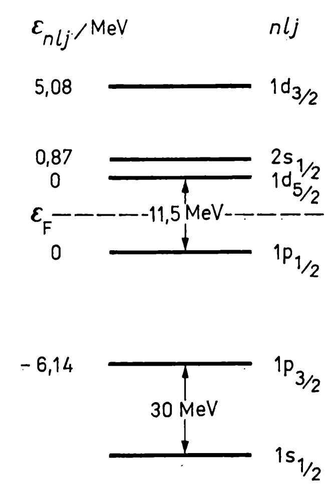


Abb. 8.52
Einteilchenenergien für Schalenmodellrechnungen mit ^{16}O-Rumpf

Für die Zweiteilchenmatrixelemente setzen wir ein:

$$I = 0:\quad \langle (1d_{5/2})^2\, 0\, |v_{12}|\, (1d_{5/2})^2\, 0\rangle = -3{,}0 \text{ MeV}\,,$$

$$\langle (2s_{1/2})^2\, 0\, |v_{12}|\, (2s_{1/2})^2\, 0\rangle = -2{,}9 \text{ MeV}\,,$$

$$\langle (1d_{5/2})^2\, 0\, |v_{12}|\, (2s_{1/2})^2\, 0\rangle = -1{,}5 \text{ MeV}\,;$$

$$I = 2:\quad \langle (1d_{5/2})^2\, 2\, |v_{12}|\, (1d_{5/2})^2\, 2\rangle = -1{,}2 \text{ MeV}\,,$$

$$\langle (1d_{5/2}\, 2s_{1/2})\, 2\, |v_{12}|\, (1d_{5/2}\, 2s_{1/2})\, 2\rangle = -1{,}65 \text{ MeV}\,,$$

$$\langle (1d_{5/2})^2\, 2\, |v_{12}|\, (1d_{5/2}\, 2s_{1/2})\, 2\rangle = -0{,}93 \text{ MeV}\,;$$

$$I = 3:\quad \langle (1d_{5/2}\, 2s_{1/2})\, 3\, |v_{12}|\, (1d_{5/2}\, 2s_{1/2})\, 3\rangle = +1{,}5 \text{ MeV}\,;$$

$$I = 4:\quad \langle (1d_{5/2})^2\, 4\, |v_{12}|\, (1d_{5/2})^2\, 4\rangle = -0{,}37 \text{ MeV}\,.$$

Man erkennt, daß die Nicht-Diagonalelemente betragsmäßig kleiner sind als die Diagonalelemente.

5. Die Diagonalisierung der Energiematrix liefert das in Abb. 8.53 (a) angegebene Niveauschema von ^{18}O. Bei einem Vergleich mit den experimentellen Daten stellen wir fest, daß die Schalenmodellrechnung sowohl die Reihenfolge der I^π-Zustände als auch die absoluten Anregungsenergien recht gut wiedergibt. Der erste 0^+-Zustand, der mit dem Grundzustand identifiziert wird, besitzt die Wellenfunktion

$$\Psi_{0^+1}(x_1, x_2) = 0{,}8726\, |(1d_{5/2})^2\, 0\rangle + 0{,}4885 |\, (2s_{1/2})^2\, 0\rangle\,.$$

Es überwiegt die Konfiguration $(1d_{5/2})^2$ ($|c_1^{(1)}|^2 \approx 0{,}76$, $|c_1^{(2)}|^2 \approx 0{,}24$). Beim Übergang in den ersten angeregten 0^+-Zustand,

$$\Psi_{0^+2}(x_1, x_2) = 0{,}4885\, |(1d_{5/2})^2\, 0\rangle - 0{,}8726\, |(2s_{1/2})^2\, 0\rangle\,,$$

Abb. 8.53
Experimentelles und im Schalenmodell mit Zweiteilchenkonfigurationen berechnetes Niveauschema von ^{18}O (a) und ^{90}Zr (b)

in den im Unterschied zum Grundzustand beide Komponenten mit unterschiedlicher Phase eingehen, wird die energetisch höher liegende Konfiguration $(2s_{1/2})^2$ stärker besetzt ($|c_1^{(1)}|^2 \approx 0{,}24$, $|c_1^{(2)}|^2 \approx 0{,}76$). Im ersten angeregten 2^+-Zustand

$$\Psi_{2^+1}(x_1, x_2) = 0{,}7811\ |(1d_{5/2})^2\ 2\rangle + 0{,}6244|\ (2s_{1/2}\ 1d_{5/2})\ 2\rangle$$

dominiert ebenfalls die Konfiguration $(1d_{5/2})^2$ mit geringer ungestörter Energie ($|c_1^{(1)}|^2 \approx 0{,}61$). Die Anregung des zweiten 2^+-Zustandes, aus dem ersten 2^+-Zustand,

$$\Psi_{2^+2}(x_1, x_2) = 0{,}6244\ |(1d_{5/2})^2\ 2\rangle - 0{,}7811|\ (2s_{1/2}\ 1d_{5/2})\ 2\rangle\ ,$$

erfolgt also vorwiegend durch den Einteilchenübergang $1d_{5/2} \to 2s_{1/2}$. Bei der Anregung des ersten 2^+-Niveaus aus dem 0^+-Grundzustand wird im wesentlichen die relative Orientierung des Drehimpulses der äquivalenten Neutronen im $1d_{5/2}$-Niveau geändert, $(1d_{5/2})^2\ 0 \to (1d_{5/2})^2\ 2$.

6. Auch in anderen Bereichen der Massenzahl können die Spektren zahlreicher Kerne durch Zweiteilchen-Schalenmodellkonfigurationen erklärt werden. Als Beispiel betrachten wir den Kern $^{90}_{40}Zr_{50}$ mit einer abgeschlossenen Neutronenschale $N = 50$. Die niedrigliegenden Zustände eines Kerns werden durch die Protonenkonfigurationen $(2p_{1/2})^2$ ($I^\pi = 0^+$), $(1g_{9/2})^2$ ($I^\pi = 0^+, 2^+, 4^+, 6^+, 8^+$), $(2p_{1/2}\ 1g_{9/2})$ ($I^\pi = 4^-, 5^-$) bestimmt. Anregungen innerhalb der Konfiguration $(j)^2$ aus äquivalenten Teilchen bestehen wiederum lediglich in einer Änderung der relativen Spinorientierung zweier $1g_{9/2}$-Protonen. Bis zu einer Anregungsenergie von etwa 4 MeV lassen sich alle Niveaus innerhalb der angegebenen Zweiteilchenkofigurationen verstehen (siehe Abb. 8.53 (b)).

8.6.3.3. Mehrteilchenkonfigurationen

1. Wir betrachten eine Konfiguration $(j)^k$ aus $k > 2$ äquivalenten Teilchen. Aus den Einteilchenfunktionen $\varphi_{nljm}(x_i)$, $i = 1, \ldots, k$, können wir durch schrittweise Vektorkopplung der Drehimpulse der einzelnen Nukleonen Vielteilchenfunktionen aufbauen, die Eigenfunktionen zum Gesamtdrehimpuls sind, $|(j)^k IM\rangle$. Diese Funktionen sind nicht automatisch auch antisymmetrisch, wie das bei Konfigurationen $(j)^2$ für gerade Werte des Gesamtdrehimpulses $I = 0$, 2, 4, ... der Fall war. Um Vielteilchenfunktionen zu konstruieren, die das Pauli-Prinzip erfüllen, geht man schrittweise vor, indem man nach dem Konzept der Abstammungskoeffizienten (cfp — coefficients of fractional parentage) die antisymmetrische Funktion $|(j)^k IM\rangle$ für k Teilchen aus den als bekannt vorausgesetzt antisymmetrischen Funktionen $|(j)^{k-1} IM\rangle$ konstruiert.

Als Beispiel betrachten wir drei Teilchen in einem Niveau mit $j = {}^5/_2$, $(j = {}^5/_2)^3$. Die antisymmetrischen Zustände der Konfiguration $(j)^2$ sind die Zustände $|(j)^2\, I'M'\rangle$ zum Gesamtdrehimpuls $I' = 0$, 2, 4. Von diesen Funktionen als Elternzustände ausgehend erzeugen wir zunächst durch die Vektorkopplung $\boldsymbol{I}' + \boldsymbol{j} = \boldsymbol{I}$ die Dreiteilchenfunktionen

$$|\{(j)^2\, I', j\}\, IM\rangle = \sum_{M',m} (I'M'jm\,|\,IM)\,|(j)^2\, I'M'\rangle\, \varphi_{nljm}(x_3)\,.$$

Aus allen derartigen Funktionen zu bestimmtem Drehimpuls I, die von verschiedenen Elternzuständen I' der Zweiteilchenkonfiguration abstammen, bilden wir eine Linearkombination, deren Koeffizienten so gewählt werden, daß ein antisymmetrischer Zustand $|(j)^3\, IM\rangle_a$ der Dreiteilchenkonfiguration entsteht,

$$|(j)^3\, IM\rangle_a = \sum_{I'} \langle (j)^3\, I\{|(j)^2\, I'j\rangle\, |\{(j)^2\, I', j\}\, IM\rangle\,. \tag{8.257}$$

Die Koeffizienten $\langle (j)^3\, I\{|(j)^2\, I'j\rangle$ bezeichnet man als Abstammungskoeffizienten. Bei der verwendeten Bezeichnungsweise $\langle\}|\rangle$ deutet die geschweifte Klammer an, daß die Abstammungskoeffizienten im Vektorraum $|\{(j)^2\, I', j\}\, IM\rangle$ nicht nur eine orthogonale Lineartransformation vermitteln, sondern auch eine Projektion auf den Unterraum der antisymmetrischen Zustände mit geringerer Dimension bewirken.

Tabelle 8.9
Abstammungskoeffizienten $\langle (j)^3\, I\{|(j)^2|\, I'j\}\rangle$ für $j = 7/2$

I	I'			
	0	2	4	6
3/2	0	$\sqrt{\frac{3}{14}}$	$-\sqrt{\frac{11}{14}}$	0
5/2	0	$\frac{1}{3}\sqrt{\frac{11}{2}}$	$\sqrt{\frac{2}{33}}$	$-\frac{1}{3}\sqrt{\frac{65}{22}}$
7/2	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{5}}{6}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{13}}{6}$
9/2	0	$\frac{1}{3}\sqrt{\frac{13}{14}}$	$-5\sqrt{\frac{2}{77}}$	$\frac{7}{3\sqrt{22}}$
11/2	0	$-\frac{1}{3}\sqrt{\frac{5}{2}}$	$\sqrt{\frac{13}{66}}$	$\frac{2}{3}\sqrt{\frac{13}{11}}$
15/2	0	0	$\sqrt{\frac{5}{22}}$	$\sqrt{\frac{17}{22}}$

Für $j = 5/2$, $I = 3/2, 5/2, 9/2$ sind die Abstammungskoeffizienten in Tabelle 8.9 zusammengestellt. Nach (8.257) und Tabelle 8.9 stammt z. B. der Zustand $|(5/2)^3\, 9/2\rangle_a$ von Elternzuständen mit $I' = 2, 4$ ab,

$$|(5/2)^3\, 9/2\rangle_a = \sqrt{\frac{3}{14}}\, |\{(5/2)^2\, 2, 5/2\}\, 9/2\rangle - \sqrt{\frac{11}{14}}\, |\{(5/2)^2\, 4, 5/2\}\, 9/2\rangle .$$

In allgemeiner Form können wir für die Konfiguration $(j)^k$ analog zu (8.257) schreiben:

$$|(j)^k\, IM\rangle_a = \sum_{I'} \langle (j)^k\, I\{|(j)^{k-1}\, I'j\rangle\, |\{(j)^{k-1}\, I', j\}\, IM\rangle ,$$

$$|\{(j)^{k-1}\, I', j\}\, IM\rangle = \sum_{M',m} (I'M'jm\,|\,IM)\, |(j)^{k-1}\, I'M'\rangle\, \varphi_{nljm}(x_k) . \tag{8.258}$$

Eine Übersicht über die antisymmetrischen Zustände mit dem Spin I und dem Isospin T, die sich mit Hilfe von Abstammungskoeffizienten für k Teilchen in einer $j = 3/2$-Schale konstruieren lassen, enthält die Tabelle 8.10.

Tabelle 8.10
Antisymmetrische Zustände mit dem Isospin T und dem Spin I für die Konfiguration $(j = 3/2)^k$

k	T	I
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$
2	0	1, 3
	1	0, 2
3	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}$
	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$
4	0	0, (2), 4
	1	1, 2, 3
	2	0

2. Die Konzeption der Abstammungskoeffizienten vereinfacht die Berechnung von Matrixelementen. Wir erläutern diesen Sachverhalt für das Diagonalmatrixelement einer Summe von Einteilchenoperatoren $\sum_{i=1}^{k} O(k)$ in der Konfiguration $(j)^k$

$$\langle M\rangle_a = \left\langle (j)^k\, IM \,\middle|\, \sum_{i=1}^{k} O(i) \,\middle|\, (j)^k\, IM \right\rangle_a .$$

Da die Zustände $|(j)^k\, IM\rangle_i$ antisymmetrisch sind, gilt zunächst

$$\langle M\rangle_a = k\langle (j)^k\, IM|\, O(k)\, |(j)^k\, IM\rangle_a .$$

Nach Gl. (8.258) koppeln wir mit Hilfe der Abstammungskoeffizienten aus der Vielteilchenfunktion $|(j)^k IM\rangle_a$ das k-te Teilchen ab.

$$\begin{aligned}\langle M\rangle_a = k \sum_{I',I''} &\langle (j)^k\, I\{|(j)^{k-1}\, I'j\rangle\, \langle (j)^k\, I\{|(j)^{k-1}\, I''j\rangle \\ &\times \sum_{\substack{M'M''\\ m'm''}} (I'M'jm'\,|\,IM)\,(I''M''jm''/IM) \\ &\times \langle (j)^{k-1}\, I'M'\,|\,(j)^{k-1}\, I''M''\rangle_a\, \langle \varphi_{nljm'}(x_k)|\, O(k)\, |\varphi_{nljm''}(x_k)\rangle .\end{aligned}$$

Die antisymmetrischen Zustände von (k — 1) Teilchen sind orthogonal bezüglich I' und M',

$$\langle (j)^{k-1} I'M' \mid (j)^{k-1} I''M'' \rangle = \delta_{I'I''} \delta_{M'M''} \,.$$

Für das gesuchte Matrixelement erhalten wir

$$\langle M \rangle_a = k \sum_{I'} \langle (j)^k I\{|(j)^{k-1} I'j\rangle^2 \sum_{M', m', m''} (I'M'jm' \mid IM)(I'M'jm'' \mid IM)$$
$$\times \langle \varphi_{nljm'}(x_k) \,|O(k)|\, \varphi_{nljm''}(x_k) \rangle \,. \tag{8.259}$$

Mit Hilfe der Abstammungskoeffizienten ist es also gelungen, ein Vielteilchenmatrixelement auf eine Summe über Einteilchenmatrixelemente $\langle \varphi(x_k)|\, O(k)\, |\varphi(x_k)\rangle$ zurückzuführen.

3. Für die Berechnung von Matrixelementen der Restwechselwirkung $\Sigma\, v_{ij}$ in Vielteilchenkonfigurationen ist es vorteilhaft, daß durch zweimalige Anwendung der cfp-Entwicklung (8.258) $(j)^k \to (j)^{k-1}\, \varphi(x_k) \to (j)^{k-2}\, \varphi(x_{k-1})\, \varphi(x_k)$ auch die Matrixelemente von Zweiteilchenoperatoren $\langle (j)^k IM\, |\Sigma v_{ij}\, |(j)^k IM\rangle$ auf Zweiteilchenmatrixelemente $\langle (j)^2 |\, v_{kk-1}\, |(j)^2\rangle$ zurückgeführt werden können. Dieser Zusammenhang erleichtert das Aufstellen der Energiematrix, deren Diagonalisierung die Entartung in der Mehrteilchenkonfiguration nach Abb. 8.54 aufhebt.

$E_0^{(\alpha)}((j)^k)$ I_1 I_2 I_3 I_4

$H_0 = \Sigma (T_i + U_i)$ $H = H_0 + \Sigma V_{ij}$

Abb. 8.54
Aufspaltung der entarteten Zustände in einer Konfiguration $(j)^k$ nach dem Gesamtdrehimpuls I_i durch die Restwechselwirkung $\Sigma\, v_{ij}$ (schematisch)

8.6.3.4. Teilchen-Loch-Anregungen, Riesenresonanzen

1. Die elementaren Anregungen von doppelt magischen Kernen, bei denen die Fermi-Grenze zwischen zwei Schalen liegt, bestehen in Übergängen eines Nukleons aus einem vollständig besetzten Einteilchenniveau j_h in ein unbesetztes Einteilchenniveau j_p. Es ergibt sich eine Konfiguration $(j_h)^{2j_h}(j_p)$, also eine 1 Teilchen-1 Loch-Konfiguration (oder ein Teilchen-Loch-Paar, siehe Abb. 8.55). Teilchen und Loch koppeln zum Gesamtspin $\boldsymbol{I} = \boldsymbol{j}_p + \boldsymbol{j}_h$. Die Parität

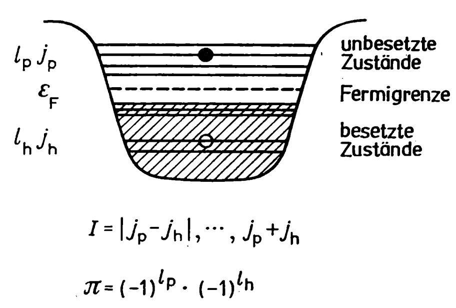


Abb. 8.55
1 Teilchen-1 Loch-Anregung mit dem Spin $\boldsymbol{I} = \boldsymbol{j}_p + \boldsymbol{j}_n$ und der Parität π in einem doppeltmagischen Kern

des Zustandes ist $\pi = (-1)^{l_p}(-1)^{l_h}$. Da die Einteilchenniveaus in Schalen angeordnet sind, die durch einen Energiespalt von $1\hbar\omega$ getrennt sind und alternierende Parität besitzen, ergeben sich auch Gruppen von 1 Teilchen-1 Loch-Anregungen: $1\hbar\omega$-Anregungen mit negativer Parität, $2\hbar\omega$-Anregungen mit positiver Parität, $3\hbar\omega$-Anregungen mit negativer Parität usw. (vgl. Abb. 8.56). Bezeichnet man mit $|0\rangle$ den Grundzustand des magischen Kerns, dann wird der Zustand $|(j_h^{-1}j_p)\,IM\rangle$ gebildet, indem man in $|0\rangle$ ein Teilchen auf dem Niveau j_h vernichtet und auf dem Niveau j_p erzeugt, wobei Teilchen und Loch (d. h. $2j_h$ Teilchen auf dem Niveau j_h) ihre Drehimpulse so orientieren, daß ein Zustand mit dem Gesamtspin I, M entsteht,

$$|(j_h^{-1}j_p)\,IM\rangle = \sum_{m_p,\,m_h} (-1)^{j_h-m_h}\,(j_pm_pj_h-m_h\,|\,IM)\,a^+_{j_pm_p}a^+_{j_hm_h}\,|0\rangle\,. \tag{8.260}$$

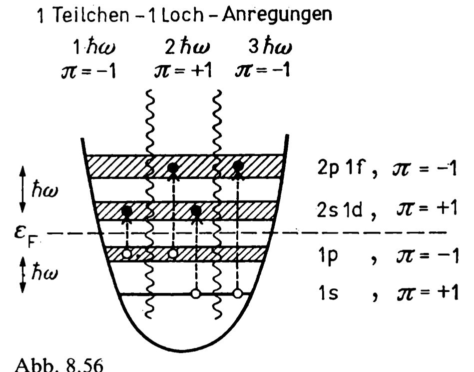


Abb. 8.56
Schalenstruktur und Gruppierung der 1-Teilchen-1-Loch-Anregungen in einem doppelt-magischen Kern

Der Phasenfaktor $(-1)^{j_h-m_h}$ sorgt dafür, daß der Lochzustand einem zeitumgekehrten Teilchenzustand entspricht. Zwischen dem Teilchen und dem Loch gibt es eine Restwechselwirkung v (siehe Abb. 8.57), die den Teilchen-Loch-Zustand durch Übergänge $|(j_h^{-1}j_p)\,IM\rangle \to |(j_h'^{-1}j_p')\,IM\rangle$ ändert. Die Schalenmodellwellenfunktion, die bei Beschränkung des Konfigurationsraumes

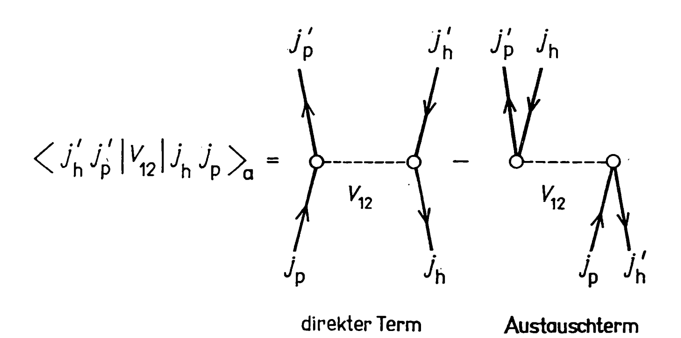


Abb. 8.57
Graphische Darstellung des antisymmetrisierten Matrixelements der Teilchen-Loch-Wechselwirkung. Teilchen-Linie: ↑. Loch-Linie: ↓. Direkter Term: Vernichtung des Teilchen-Loch-Paares j_p, j_n, Erzeugung des Teilchen-Loch-Paares j_p', j_n'. Austauschterm: Streuung eines Teilchen-Loch-Paares j_p, j_n in ein Teilchen-Loch-Paar j_p', j_n'

auf 1 Teilchen-1 Loch-Anregungen aus einer Diagonalisierung der Energiematrix folgt, stellt damit eine Überlagerung von 1 Teilchen-1 Loch-Paaren dar,

$$|IM\rangle = \sum_{j_p, j_h} c^{(I)}_{j_p j_h} |(j_h^{-1} j_p)\, IM\rangle\,. \tag{8.261}$$

2. Wir geben die 1 Teilchen-1 Loch-Struktur des ersten 2^+-Niveaus im ^{12}C-Kern an, der abgeschlossene $2s_{1/2}$, $1p_{3/2}$-Schalen besitzt. Um einen angeregten Zustand positiver Parität vom 1 Teilchen-1 Loch-Typ zu generieren, muß ein Nukleon aus der 1s-Schale in die 2s1d-Schale bzw. ein Nukleon aus der 1p-Schale in die 2p1f-Schale angeregt werden. Es treten sieben 1 Teilchen-1 Loch-Konfigurationen auf, die zum vorgegebenen Spin $I = 2$ koppeln können. Ihre ungestörten Energien E_{ph} liegen zwischen ≈ 14 MeV und ≈ 40 MeV (siehe Tabelle 8.11). Die Restwechselwirkung zwischen Teilchen und Loch bewirkt, daß die Anregungsenergie des ersten 2^+-Zustandes nach dem 1 Teilchen-1 Loch-Modell mit ≈ 8 MeV weit unter der niedrigsten 1 Teilchen-1 Loch-Energie liegt, während die übrigen sechs 2^+-Zustände zwischen den E_{ph}-Energien auftreten. Aus Tabelle 8.11 ist auch ersichtlich, daß im ersten 2^+-Zustand die Konfiguration $(1p_{3/2})^{-1}\, 1p_{1/2}$ deutlich überwiegt ($\approx 85\%$). Alle anderen Komponenten gehen mit wesentlich geringerem Gewicht ein.

Tabelle 8.11
Wellenfunktionen im 1 Teilchen-1 Loch-Modell

	Konfiguration	E_{ph}/MeV	$c^{(I)}_{j_p j_n}$
^{12}C	$(1p_{3/2})^{-1}\, 1p_{1/2}$	13,77	0,94
2_1^+, $T = 0$	$(1p_{3/2})^{-1}\, 1f_{5/2}$	34,17	−0,05
$E_{theor.} = 8{,}23$ MeV	$1f_{7/2}$	25,74	0,23
$E_{exp.} = 4{,}43$ MeV	$2p_{1/2}$	33,37	0,07
	$2p_{3/2}$	27,37	−0,07
	$(1s_{1/2})^{-1}\, 1d_{3/2}$	38,38	0,13
	$1d_{5/2}$	33,90	−0,19
^{16}O	$(1p_{3/2})^{-1}\, 1d_{3/2}$	22,73	0,22
3_1^-, $T = 0$	$(1p_{3/2})^{-1}\, 1d_{5/2}$	17,65	−0,28
$E_{theor.} = 7{,}47$ MeV $E_{exp.} = 6{,}13$ MeV	$(1p_{1/2})^{-1}\, 1d_{5/2}$	11,51	0,93
^{16}O	$(1p_{3/2})^{-1}\, 1d_{5/2}$	22,73	−0,27
3_2^-, $T = 0$	$(1p_{3/2})^{-1}\, 1d_{5/2}$	17,65	0,90
$E_{theor.} = 15{,}3$ MeV $E_{exp.} = 11{,}63$ MeV	$(1p_{1/2})^{-1}\, 1d_{5/2}$	11,51	0,34

Ähnliche Aussagen gelten für die 3^--Zustände in ^{16}O (siehe Tabelle 8.11). Auch in diesem Fall beobachtet man, daß das 1 Teilchen-1 Loch-Modell einen der Zustände durch eine besonders geringe Anregungsenergie, die aus dem Bereich der ungestörten 1 Teilchen-1 Loch-Energien deutlich herausfällt, auszeichnet. Diese niedrigliegenden 2^+- und 3^--Zustände besitzen einen kollektiven Charakter, der sich auch in hohen elektromagnetischen Übergangswahrscheinlichkeiten für die Übergänge $2_1^+ \to 0^+$ und $3_1^- \to 0^+$ in den Grundzustand äußert.

Die berechneten Anregungsenergien der kollektiven Zustände in ^{12}C und ^{16}O liegen um etwa 4 MeV bzw. 1,5 MeV über dem experimentellen Wert. Wir sehen diese Diskrepanz als Hinweis darauf an, daß am Aufbau der Wellenfunktionen für diese Niveaus noch kompliziertere Konfigurationen beteiligt sein müssen, die die Kohärenz der Nukleonenbewegung weiter fördern.

3. Die Analyse der angeregten Zustände von ^{12}C und ^{16}O hat gezeigt, daß das Auftreten kollektiver Kernanregungen auf der Grundlage der individuellen Nukleonenbewegung im 1 Teilchen-1 Loch-Modell verstanden werden kann. Um diese Situation zu verdeutlichen, betrachten wir ein schematisches Modell.

Aus der Schrödinger-Gleichung ergibt sich ein gekoppeltes algebraisches Gleichungssystem für die Entwicklungskoeffizienten $c^I_{j_p j_h}$ in (8.261),

$$(E_I - E_{ph})\, c^{(I)}_{j_p j_h} = \sum_{(j'_p j'_h) \neq (j_p j_h)} \langle (j'^{-1}_h j'_p)\, IM |\, v \,| (j^{-1}_h j_p)\, IM \rangle\, c^{(I)}_{j'_p j'_h} \,. \tag{8.262}$$

E_I ist der Eigenwert der Energie. Um dieses Gleichungssystem lösen zu können, nehmen wir an, daß sich die Matrixelemente der Restwechselwirkung näherungsweise in der Form

$$\langle (j'^{-1}_h j'_p)\, IM |\, v \,| (j^{-1}_h j_p)\, IM \rangle \approx \lambda M^{(I)}_{j_p j_h} M^{(I)}_{j'_p j'_h} \tag{8.263}$$

faktorisieren lassen, wobei λ ein Stärkeparameter ist. Wir setzen (8.263) in (8.262) ein und erhalten die Gleichung

$$(E_I - E_{ph})\, c^{(I)}_{j_p j_h} = \lambda M^{(I)}_{j_p j_h} \sum_{j'_p j'_h} M^{(I)}_{j'_p j'_h} c^{(I)}_{j_p j_h} \,. \tag{8.264}$$

Da die Summe auf der rechten Seiten von (8.264) als Konstante K aufgefaßt werden kann, erhalten wir als Lösung für $c^{(I)}_{j_p j_h}$

$$c^{(I)}_{j_p j_h} = \frac{\lambda M^{(I)}_{j_p j_h}}{E_I - E_{ph}} K \,. \tag{8.265}$$

Wir multiplizieren (8.265) mit $M^{(I)}_{j_p j_h}$ und summieren über j_p, j_h. Dabei wird die linke Seite zur Konstanten K, die wir auf beiden Seiten herauskürzen können, so daß eine Dispersionsrelation für die Energiewerte E_I entsteht

$$\frac{1}{\lambda} = \sum_{j_p, j_h} \frac{M^{(I)}_{j_p j_h}}{E_I - E_{ph}} \,. \tag{8.266}$$

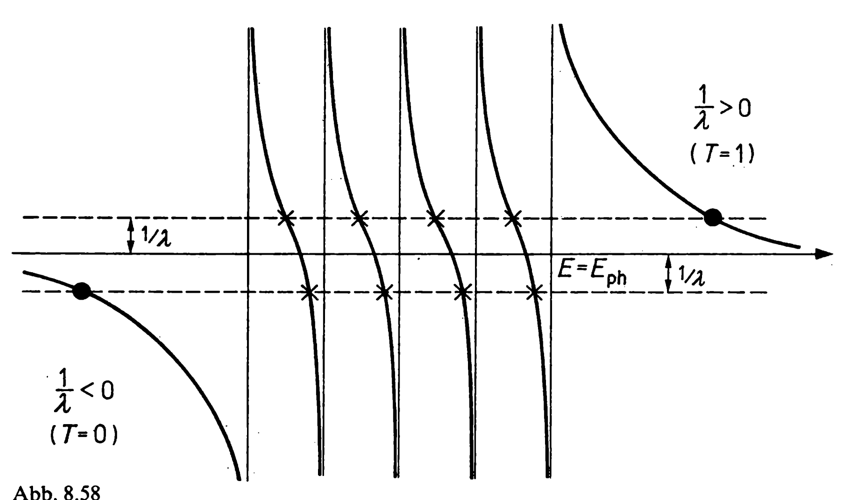


Abb. 8.58
Graphische Lösung der Dispersionsbeziehung (8.266) für korrelierte 1 Teilchen-1 Loch-Konfigurationen (schematisch). Die senkrechten Striche markieren die ungestörten Teilchen-Loch-Energien, E_{ph}. × : Energieeigenwerte, ●: Kollektive Anregungen

Für diese Gleichung suchen wir eine graphische Lösung. Die rechte Seite besitzt Pole bei $E_I = E_{ph}$, wobei die Funktion zwischen zwei benachbarten Polen das Vorzeichen wechselt. Die Kurve bleibt aber positiv (negativ) wenn E größer (kleiner) als alle auftretenden 1 Teilchen-1 Loch-Energien E_{ph} wird. Die Schnittpunkte mit der Geraden $1/\lambda$ sind die Eigenwerte E_I, die die Dispersionsrelation (8.266) erfüllen. Wie die Abb. 8.58 zeigt, tritt für $\lambda < 0$ ($\lambda > 0$) ein einziger Zustand bei sehr niedriger (hoher) Anregungsenergie auf, während alle anderen Eigenwerte im Bereich der ungestörten Teilchen-Loch-Energien verteilt sind. Diese ausgezeichneten Zustände stellen eine kollektive Anregung dar. In ihren Wellenfunktionen besteht eine Phasenbeziehung zwischen den einzelnen 1 Teilchen-1 Loch-Komponenten, die einer kohärenten Nukleonenbewegung mit dem Charakter einer Vibrationsanregung der Kernoberfläche entspricht. Die Dichteverteilung im Kerninneren bleibt dabei konstant. Vibrationen können auch bezüglich des Spin- oder Isospinfreiheitsgrades auftreten. Im allgemeinen ist die Restwechselwirkung zwischen Teilchen und Löchern anziehend in $T = 0^-$ und abstoßend in $T = 1$-Zuständen. Deshalb erwartet man, daß der niedrigliegende, gebundene kollektive Zustand (2^+, 3^-) den Isospin $T = 0$ besitzt (isoskalare Mode), während der hochliegende kollektive Zustand aus dem Grundzustand in einem Prozeß mit Isospinänderung $\Delta T = 1$ angeregt wird (isovektorielle Mode). Magnetische Resonanzen mit den Quantenzahlen $I = 1^+, 2^-, 3^+, \ldots$ werden in Übergängen mit Spinflip $\Delta S = 1$ erreicht. Auch Spin-Isospin-Oszillationen mit $\Delta T = 1$, $\Delta S = 1$ treten auf. Die Ausbildung dieser verschiedenen Schwingungsmoden ist unmittelbar mit der entsprechenden Komponente der Teilchen-Loch-Wechselwirkung verknüpft.

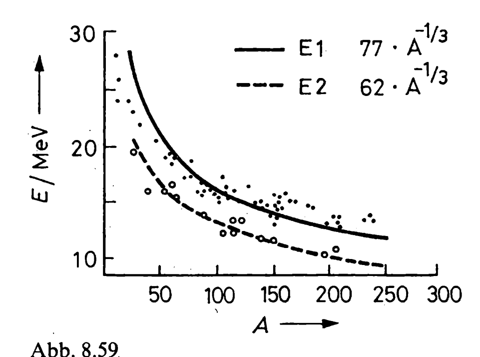


Abb. 8.59

Riesenresonanzen. Anregungsenergie E der elektrischen Dipol (E1)- und der isoskalaren Quadrupolresonanz (E2) in Abhängigkeit von der Massenzahl A

4. Die hochliegenden kollektiven Zustände von 1 Teilchen-1 Loch-Typ werden in Photoreaktionen ((γ, n), (γ, p)) und in der unelastischen Streuung ((e, e′), (p, p′), (α, α')) als Resonanzerscheinungen im Reaktionsquerschnitt beobachtet. Da diese Zustände eine Breite von mehreren MeV haben, bezeichnet man sie als Riesenresonanzen. Riesenresonanzen besitzen bestimmte Quantenzahlen I^π, T, die sich aus der Drehimpuls- und Isospinkopplung der beteiligten Teilchen-Loch-Paare ergeben. Die mikroskopische Teilchen-Loch-Struktur der Riesenresonanzen weist auf eine Abhängigkeit der Resonanzenergien von der Massenzahl hin, die durch den Schalenabstand $\hbar\omega \approx 41 \cdot A^{-1/3}$ MeV bestimmt ist. Die Abb. 8.59 zeigt, daß die A-Abhängigkeit der Resonanzenergien durch das Schalenmodell gut beschrieben wird. Nach dem im vergangenen Abschnitt diskutierten schematischen Modell wird der Absolutwert der Anregungsenergie in den einzelnen Kernen durch die Teilchen-Loch-Wechselwirkung festgelegt, wobei eine Aufspaltung der isoskalaren ($\lambda < 0$, $T = 0$) und isovektoriellen ($\lambda > 0$, $T = 1$)-Komponente der Multipolresonanz I^π in Bereiche weit unterhalb bzw. oberhalb des Energie-

bereichs der ungestörten Teilchen-Loch-Energien erfolgt. Die Systematik der experimentell beobachteten Riesenresonanzen liefert:

Dipolresonanz	(E1)	$I^\pi = 1^-$, $T = 0$,	$E \approx 80\,A^{-1/3\,\ldots\,-1/6}$ MeV
Quadrupolresonanz	(E2)	$I^\pi = 2^+$, $T = 0, 1$	$E \approx 60$—$65 \cdot A^{-1/3}$ MeV
Monopolresonanz	(E0)	$I^\pi = 0^+$, $T = 0$	$E \approx 80 \cdot A^{-1/3}$ MeV.

Vielfach untersucht wurde die elektrische Dipolresonanz (E1) $I = 1^-$, $T = 1$, die bei Experimenten mit geringer Energieauflösung vor allem in γ-Absorptionsquerschnitt bei γ-Energien zwischen 15 MeV und 30 MeV mit einer Breite von 3 MeV—20 MeV deutlich hervortritt (siehe Abb. 8.60). Sie wird aus 1 Teilchen-1 Loch-Anregungen mit der Anregungsenergie $1\hbar\omega$ (vgl. Abb. 8.56) gebildet. Ihre geringe Lebensdauer ergibt sich aus dem Zerfall der 1 Teilchen-1 Loch-Konfigurationen durch Teilchenemission und durch Übergang in komplexere Konfigurationen (z. B. 2 Teilchen-2 Loch-Zustände), die auch die Feinstruktur der Riesenresonanz erklären. Eine makroskopische Interpretation der elektrischen Dipolresonanz im Kollektivmodell ist möglich, wenn man als Anregungsmode eine Schwingung der Neutronen- gegenüber der

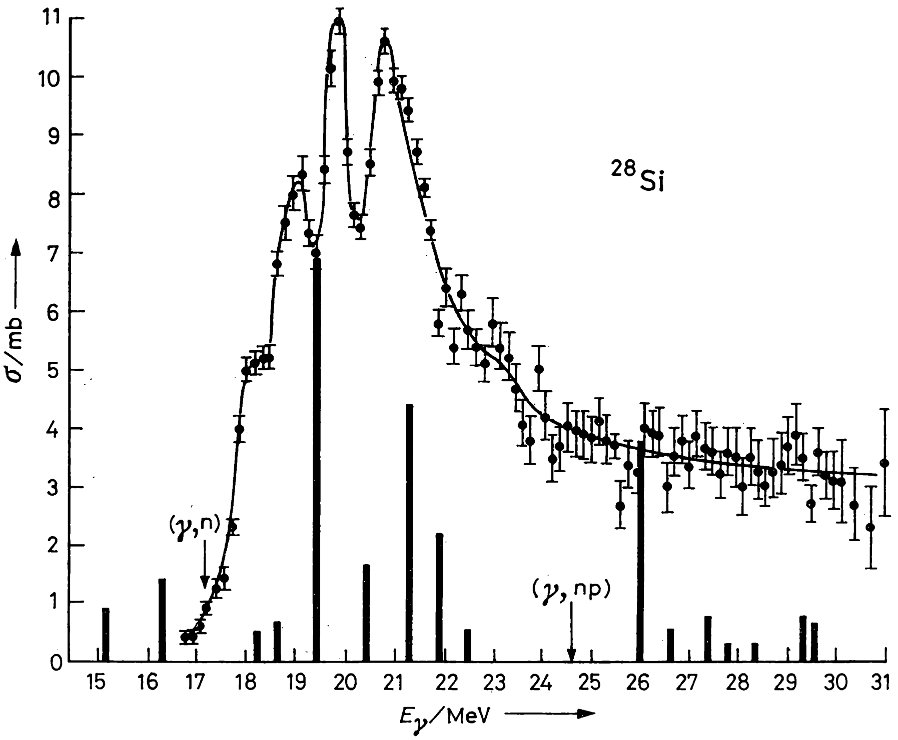


Abb. 8.60
Experimenteller Wirkungsquerschnitt der Photoreaktion an ^{28}Si in Abhängigkeit von der Energie der γ-Quanten. Eingezeichnet sind die Schwellenergien für die (γ, n)- und (γ, np)-Reaktion. Die senkrechten Linien geben die im 1 Teilchen-1 Loch-Modell berechneten Übergangswahrscheinlichkeiten an

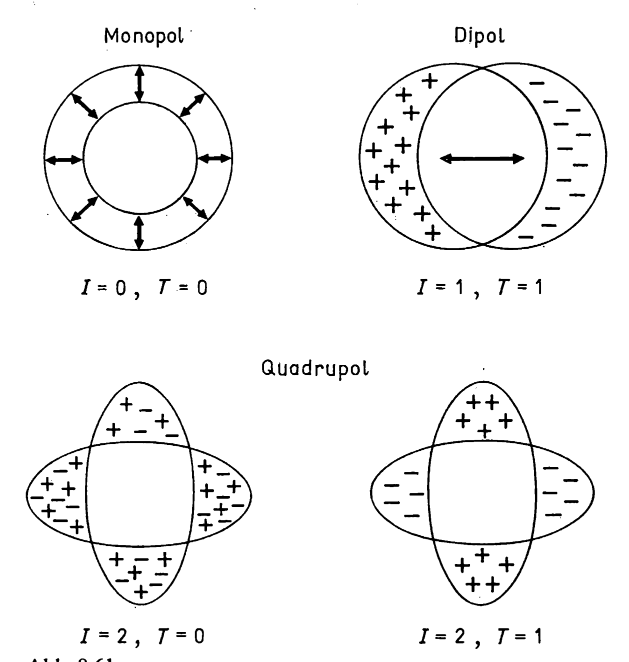


Abb. 8.61
Schwingungszustände des Kerns in Riesenresonanzen verschiedener Multipolarität I und Isospinquantenzahl T nach dem Kollektivmodell

Protonendichteverteilung annimmt (siehe Abb. 8.61). Als rücktreibende Kraft wirkt das Symmetriepotential, das eine maximale Überlappung der Neutronen- und Protonenverteilung energetisch bevorzugt.

Die Quadrupol-Riesenresonanz (E2) besteht aus $2\hbar\omega$-Anregungen, wobei infolge der Teilchen-Loch-Wechselwirkung die isoskalare Komponente bei $1{,}4\hbar\omega$ liegt, während die isovektorielle Komponente bis etwa $3{,}3\hbar\omega$ verschoben ist. Im Unterschied zur Riesenresonanz enthält der niedrigliegende kollektive 2^+-Zustand vor allem $0\hbar\omega$-Anregungen innerhalb einer nicht abgeschlossenen Schale. Die Monopolmode E0 besteht in radialen Kompressionsschwingungen des Kerns; ihre 1 Teilchen-1 Loch-Komponenten sind $2\hbar\omega$-Anregungen.

5. Zur Auswertung der Anregungswahrscheinlichkeit einer Riesenresonanz bestimmter Multipolarität L werden oft modellunabhängige Summenregeln herangezogen. Für einen isoskalaren Multipoloperator

$$Q_{LM} = \sum_{i=1}^{A} r_i^L Y_L^M(\vartheta_i, \varphi_i)$$

gilt z. B. für die mit der Anregungsenergie $(E_k - E_0)$ gewichtete Summe über die Übergangswahrscheinlichkeiten $|\langle k| Q_{L0} |0\rangle|^2$ aus dem Grundzustand $|0\rangle$ in alle angeregten Zustände $|k\rangle$ mit dem Spin L (m: Nukleonenmasse)

$$S_L = \sum_{k=0} (E_k - E_0) \, |\langle k| Q_{L0} |0\rangle|^2 = \frac{\hbar^2 A}{8\pi m} L(2L+1) \langle 0| r^{2L-2} |0\rangle . \tag{8.267}$$

Für eine gleichförmige Massenverteilung mit dem Radius R erhält man

$$S_L^{(0)} = \frac{3\hbar^2 A}{8\pi m} L R^{2L-2} . \tag{8.268}$$

Der gemessene Wirkungsquerschnitt für die Anregung eines bestimmten Niveaus läßt sich in Prozenten des Grenzwertes der Summenregel (8.267), (8.268) ausdrücken. Liegt ein kollektiver Zustand vor, dann sollte die Summenregel zu einem hohen Prozentsatz ausgeschöpft werden. Die Analyse der Experimente zeigt, daß die Anregungsquerschnitte für die Dipolresonanz etwa 50%—100% der Summenregel ausmachen. Bei Quadrapolanregungen trägt der niedrigliegende kollektive 2^+-Zustand nur 10%—20% der Summenregel, während in der Riesenresonanz 40%—80% der Übergangswahrscheinlichkeit konzentriert ist. Der jeweilige Rest verteilt sich auf weitere angeregte 2^+-Zustände, die nichtkollektiven Charakter besitzen.

8.6.4. Paarkorrelationen

Die in Abschnitt 8.4.1. angegebene empirische Formel für die Bindungsenergie der Kerne weist darauf hin, daß in gg-Kernen gegenüber uA-Kernen ein zusätzlicher Energiebeitrag frei wird, wenn sich identische Teilchenpaare mit dem Drehimpuls $I = 0$ bilden. Bei schweren Kernen erreicht das Korrekturglied in der Massenformel Werte von etwa 1 MeV. Es ist damit größer als der Abstand benachbarter Einteilchenniveaus, so daß man eine ausgeprägte Konfigurationsmischung erwartet, die Einteilchenzustände innerhalb eines Energieintervalls Δ in der Nähe der Fermigrenze überlagert. Ein starker Paareffekt wird erreicht, wenn die Restwechselwirkung nur Paarkonfigurationen des Typs $(j)^2 I = 0$, bei denen zwei äquivalente Teilchen ihren Drehimpuls antiparallel orientieren, miteinander koppelt. Diese Paarkorrelationen, die eine Folge des überwiegend anziehenden Charakters der Restwechselwirkung darstellen, sind für viele niederenergetische Kerneigenschaften bestimmend. Bereits die Systematik der Kernspins im Grundzustand ist ein Hinweis darauf, daß die Paarbildung zu energetisch bevorzugten Zuständen führt. Die in Abschnitt 8.3.4. erwähnte Besetzungsinversion von Einteilchenzuständen in ungeraden Kernen läßt sich ebenfalls als Paareffekt verstehen: der Gewinn an Paarenergie

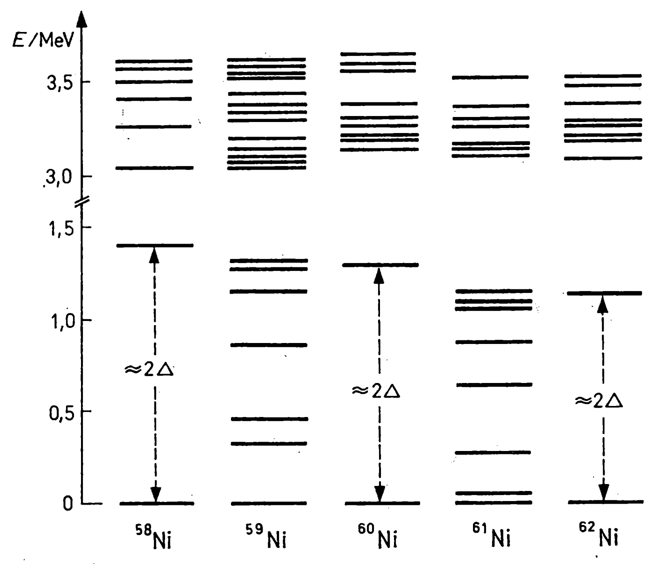


Abb. 8.62
Experimentell beobachtete Anregungszustände der Ni-Isotope. Der in gg-Kernen auftretende Energiespalt von $2\Delta \cong 1$—1,5 MeV wirkt sich bei Anregungsenergien $\gtrsim 3{,}0$ MeV nicht mehr aus

in Zuständen mit hohem Drehimpuls überwiegt den Verlust an Einteilchenenergie, wenn abweichend von der regulären Besetzungsfolge zwei Teilchen in ein höherliegendes Einteilchenniveau eingebaut werden. Auch das Auftreten eines Energiespalts im Anregungsspektrum von gg-Kernen bedeutet, daß eine minimale Energie aufgewendet werden muß, um ein Paar aufzubrechen. Die Abb. 8.62 veranschaulicht diese Situation für den Fall der Ni-Isotope.

Wir wollen in diesem Abschnitt zeigen, wie das Bild der unabhängigen Teilchenbewegung im sphärischen Kern abgeändert wird, wenn man die Restwechselwirkung auf Anteile beschränkt, die nur Paarkorrelationen in der Nukleonenbewegung zulassen.

8.6.4.1. Kurzreichweitige Restwechselwirkungen

1. Wir erläutern zunächst, wie eine kurzreichweitige anziehende Wechselwirkung zwischen zwei Nukleonen, die einen Einteilchenzustand l besetzen, zu einer besonders starken Bindung führt, wenn die beiden Nukleonen ihren Bahndrehimpuls antiparallel einstellen.

Die ungestörte Wellenfunktion ist gegeben durch den Ausdruck

$$|(l^2)\, LM\rangle = \frac{u_l(r_1)}{r_1}\,\frac{u_l(r_2)}{r_2} \sum_{m,m'} (lmlm' \mid LM)\, Y_l^m(\Omega_1)\, Y_l^{m'}(\Omega_2)\,. \tag{8.269}$$

Als Restwechselwirkung setzen wir ein δ-Potential an:

$$v_{12} = -v_0\delta(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2) = -v_0\,\frac{\delta(r_1 - r_2)}{r_1 r_2} \sum_{\lambda,\mu} Y_\lambda^{\mu *}(\Omega_1)\, Y_\lambda^{\mu}(\Omega_2)\,. \tag{8.270}$$

Die Korrektur ΔE_2 zur ungestörten Energie ergibt sich als Diagonalmatrixelement in dem Zustand $|(l^2)\, LM\rangle$,

$$\Delta E_L = \langle (l)^2\, LM |\, v_{12}\, | (l^2)\, LM\rangle\,. \tag{8.271}$$

Setzt man (8.269) und (8.270) in (8.271) ein, dann läßt sich die Integration über r_1 und r_2 wegen der δ-Funktion $\delta(r_1 - r_2)$ in der Multipolentwicklung der Restwechselwirkung sofort ausführen. Die Winkelintegration führt auf zwei Integrale über jeweils drei Kugelfunktionen, für die allgemein gilt (siehe Anhang A6)

$$\int d\Omega\, Y_l^{m*}(\Omega)\, Y_{l_1}^{m_1}(\Omega)\, Y_l^{m_2}(\Omega) = \sqrt{\frac{(2l_1+1)(2l_2+1)}{4\pi(2l+1)}}\,(l_1 0 l_2 0 \mid l0)\,(l_1 m_1 l_2 m_2 \mid lm)\,. \tag{8.272}$$

Nach der Integration über Ω_1 und Ω_2 treten im Matrixelement (8.271) Summen über Produkte aus vier Clebsch-Gordan-Koeffizienten auf, die man mit Hilfe der in Anhang A4.3. beschriebenen graphischen Technik ausführen kann. Man erhält

$$\Delta E_L = -\frac{v_0}{4\pi}(2l+1)\,(l0L0 \mid l0)^2 \int_0^\infty dr\, \frac{[u_l(r)]^4}{r^2}\,. \tag{8.273}$$

2. Der Clebsch-Gordan-Koeffizient $(l0L0 \mid l0)$ schränkt L auf geradzahlige Werte ein, $L = 0, 2, 4, \ldots, 2l$. Da dieser Clebsch-Gordan-Koeffizient in ΔE_L quadratisch eingeht und außerdem das in (8.273) auftretende Radialintegral positiv definiert ist, wird die Energiekorrektur (8.271) für alle L-Werte negativ, so daß die δ-Restwechselwirkung (8.270) für eine stärkere Bindung aller Zustände sorgt. Durch den Faktor $(2l + 1)$ wächst der Energiegewinn für gegebenen Gesamtdrehimpuls L mit dem Bahndrehimpuls des Niveaus, das von den beiden Nukleonen besetzt wird. Die Abhängigkeit der Energiekorrektur vom Gesamtdrehimpuls L ist lediglich im Faktor $(l0L0 \mid l0)^2$ enthalten, der für $L = 0$ seinen Maximalwert Eins erreicht.

Für alle anderen L-Werte wird dieser Faktor wesentlich kleiner als Eins. Im Zweiteilchenspektrum entsteht so ein deutlicher Energiespalt zwischen den Zuständen mit $L = 0$ und $L = 2, 4, \ldots$ (siehe Abb. 8.63). Wir ziehen den Schluß, daß Paarkorrelationen durch eine kurzreichweitige anziehende Restwechselwirkung energetisch bevorzugt werden, da sich die Wellenfunktionen der beiden Teilchen nur in Zuständen l, m und l, $-m$ stark überlappen (siehe Abb. 8.64) und damit einen beträchtlichen Gewinn an potentieller Energie ermöglichen.

ΔE_L	L
0	
−0,01	6
−0,14	4
−0,25	2
−1,00	0

Abb. 8.63
Spektren der Konfiguration $(l)^2$ für eine anziehende δ-Wechselwirkung ($l \gg 1$)

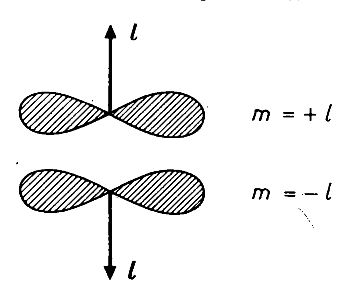


Abb. 8.64
Wahrscheinlichkeitsverteilung für ein Teilchen mit dem Bahndrehimpuls l in Zuständen $m = \pm l$. Die schraffierte Fläche deutet den Bereich hoher Aufenthaltswahrscheinlichkeit an

8.6.4.2. Paarwechselwirkung und Bogoljubov-Transformation

1. Wir betrachten eine bestimmte Klasse von Restwechselwirkungen, die dadurch charakterisiert wird, daß sie nur zwischen zwei Nukleonen in Einteilchenzuständen wirkt, die durch Zeitumkehr auseinander hervorgehen. In einer Impulsdarstellung wären das die beiden Zustände $\boldsymbol{k}$ und $-\boldsymbol{k}$, die unterschiedlichen Ausbreitungsrichtungen entsprechen. In einer Drehimpulsdarstellung bezieht sich diese Forderung auf Zustände jm und $j - m$, die sich nur im Vorzeichen der Drehimpulsprojektion unterscheiden. Nehmen wir an, daß das Zweiteilchenmatrixelement der Restwechselwirkung in gewisser Näherung von den Quantenzahlen der Zustände unabhängig und gleich einer effektiven Kopplungskonstante G ist, dann können wir die Paarwechselwirkung in zweiter Quantelung in der Form

$$V_p = -G \sum_{\substack{j,\, j' \\ m,\, m' > 0}} a^+_{j'm'} a^+_{j'-m'} a_{j-m} a_{jm}\,, \tag{8.274}$$

$$\left.\begin{array}{l} G \approx 17 \cdot A^{-1}\ \text{MeV} \\ G \approx 25 \cdot A^{-1}\ \text{MeV} \end{array}\right. \text{für} \begin{array}{l} \text{Protonen}, \\ \text{Neutronen} \end{array}$$

aufschreiben. Der Operator (8.274) vermittelt lediglich eine Streuung zwischen Paarzuständen, indem er zwei Teilchen in Zuständen $(jm, j-m)$ vernichtet und in Zuständen $(j'm', j'-m')$ erzeugt. Da der Hamiltonoperator für die Einteilchenbewegung in den Quantenzahlen jm diagonal ist, erhält man für den Hamilton-Operator des Kerns mit Paarwechselwirkung

$$H = \sum_{jm} \varepsilon_j a^+_{jm} a_{jm} - G \sum_{\substack{j,j' \\ m,m'>0}} a^+_{j'm'} a^+_{j'-m'} a_{j-m} a_{jm} \,. \tag{8.275}$$

2. Um die Zustände eines Vielteilchensystems, das durch den Hamilton-Operator (8.275) beschrieben wird, näherungsweise angeben zu können, nehmen wir eine unitäre Transformation der Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren a^+_{jm}, a_{jm} für ein Teilchen auf einen neuen Satz von Operatoren α^+_{jm}, α_{jm} vor:

$$\begin{aligned} \alpha^+_{jm} &= u_j a^+_{jm} - v_j a_{j-m}\,, \quad \alpha^+_{j-m} = u_j a^+_{j-m} + v_j a_{jm}\,, \\ \alpha_{jm} &= u_j a_{jm} - v_j a^+_{j-m}\,, \quad \alpha_{j-m} = u_j a_{j-m} + v_j a^+_{jm}\,. \end{aligned} \tag{8.276}$$

Diese Transformation wurde von N. N. BOGOLJUBOV vorgeschlagen. Wenn die reellen Transformationskoeffizienten u_j, v_j der Bogoljubov-Transformation (8.276) die Bedingung

$$u_j^2 + v_j^2 = 1 \tag{8.277}$$

erfüllen, dann bleiben für die Operatoren α^+_{jm}, α_{jm} die Antikommutationsbeziehungen, wie sie für die Fermionenoperatoren a^+_{jm}, a_{jm} gelten, erhalten,

$$\begin{aligned} \{\alpha_{jm}, \alpha_{j'm'}\} &= \{\alpha^+_{jm}, \alpha^+_{j'm'}\} = 0\,, \\ \{\alpha_{jm}, \alpha^+_{j'm'}\} &= \delta_{jj'}\delta_{mm'}\,. \end{aligned} \tag{8.278}$$

Die Operatoren α^+_{jm}, α_{jm}, in denen die Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren für reale Teilchen gemischt auftreten, lassen sich folglich als Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren von Größen interpretieren, die man als Quasiteilchen (QT) auffassen kann. Im Zusammenhang mit dem Hamilton-Operator (8.275) stellen Quasiteilchen eine bestimmte Überlagerung von Teilchen- und Lochzuständen dar. Der Operator $\Sigma\, \alpha^+_{jm}\alpha_{jm}$ ist der Operator der Quasiteilchenzahl. Für die Quasiteilchen existiert ein Vakuumzustand $|\Phi_0\rangle$, $\alpha|\Phi_0\rangle = 0$, der durch die Teilchenoperatoren ausgedrückt werden kann,

$$|\Phi_0\rangle^{\mathrm{BCS}} = \prod_{j,m>0} (u_j + v_j a^+_{jm} a^+_{j-m})\,|0\rangle\,. \tag{8.279}$$

Hierbei bedeutet $|0\rangle$ den Vakuumzustand für die realen Teilchen, $a_{jm}|0\rangle = 0$. Die Wellenfunktion $\Phi_0\rangle$ (8.279) wird als BCS-Zustand bezeichnet, da J. BARDEEN, L. N. COOPER und J. R. SCHRIEFFER eine analoge Form für den Grundzustand eines Supraleiters verwendeten. Aus Gl. (8.279) folgt, daß v_j die Wahrscheinlichkeitsamplitude für die Besetzung des Paarzustandes $(jm, j-m)$ im QT-Vakuum bedeutet. Die Größe u_j^2 gibt an, mit welcher Wahrscheinlichkeit des Niveaus j nicht durch ein Paar besetzt ist. Das QT-Vakuum stellt also eine Überlagerung von Teilchenzuständen mit den Komponenten $|0\rangle$, $a^+_{jm}a^+_{j-m}$, $a^+_{j'm'}a^+_{j'-m'}a^+_{jm}a^+_{j-m}$, ... dar, in denen null, zwei, vier, ... Teilchen vorliegen. Wir schließen daraus, daß die Bogoljubov-Transformation die Teilchenzahl nicht erhält. Es ist deshalb physikalisch sinnvoll, die Zustände eines Systems mit Paarwechselwirkung so zu bestimmen, daß die mittlere Teilchenzahl im System festliegt. Dazu ergänzt man den Hamilton-Operator (8.275) nach

$$H' = H - \lambda N\,, \qquad \langle N\rangle = A\,, \tag{8.280}$$

wobei $N = \Sigma\, a^+_{jm}a_{jm}$ der Teilchenoperator ist. Der Lagrange-Multiplikator λ übernimmt die Rolle eines chemischen Potentials. Er wird so gewählt, daß der Erwartungswert des Teilchenzahloperators im Sinne einer Nebenbedingung mit der vorgegebenen Teilchenzahl A im System übereinstimmt.

3. Das weitere Vorgehen wollen wir nur in den wesentlichen Schritten skizzieren. Wir transformieren zunächst den Hamilton-Operator (8.280) mit H aus (8.275) in die QT-Darstellung, indem wir die Teilchenoperatoren nach der Umkehrtransformation von (8.276)

$$\begin{aligned} a_{jm} &= u_j\alpha_{jm} + v_j\alpha^+_{j-m} \\ a_{j-m} &= u_j\alpha_{j-m} - v_j\alpha^+_{jm} \end{aligned} \tag{8.281}$$

durch QT-Operatoren ersetzen. Es entsteht ein Ausdruck mit mehreren Gliedern

$$H' = U' + H'_{11} + H'_{20} + H_{\text{int}} \,. \tag{8.282}$$

Der Term U', der keine α-Operatoren enthält, liefert die Energie des QT-Vakuums. In den zweiten Summanden H'_{11} gehen nur Glieder der Form $\alpha^+_{jm}\alpha_{jm}$ ein, die mit dem Operator der Quasiteilchenzahl kommutieren. Dieser Anteil entspricht der unabhängigen Bewegung von Quasiteilchen. Der Term H'_{20} enthält zwei QT-Erzeugungsoperatoren $\alpha^+_{jm}\alpha^+_{jm}$. Das letzte Glied H_{int} mit Produkten aus vier α-Operatoren entspricht der Wechselwirkung von Quasiteilchen, von der wir annehmen wollen, daß sie klein ist und weggelassen werden kann. Wenn wir nun die Transformationskoeffizienten u_j, v_j so wählen, daß H'_{20} verschwindet, dann ergibt sich der Hamilton-Operator H' in der Form

$$H' = U' + \sum_{jm} E_j\alpha^+_{jm}\alpha_{jm} \,. \tag{8.283}$$

Durch die Bogoljubov-Transformation ist es also gelungen, ein System von Nukleonen, in dem die unabhängige Bewegung durch Paarwechselwirkungen gestört wird, näherungsweise durch ein System nichtwechselwirkender Quasiteilchen zu ersetzen. Die Größe E_i ist die Energie eines freien Quasiteilchens in der Bahn j. Wir stellen die Bestimmungsgleichungen für u_j, v_j, E_j zusammen, die bei vorgegebener Stärke G der Paarwechselwirkung und bei bekannter Einteilchenenergie E_j durch Iteration numerisch gelöst werden kann:

$$\begin{aligned} u_j &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1 + \frac{\varepsilon_j - \lambda}{E_j}\right)^{1/2}, \\ v_j &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1 - \frac{\varepsilon_j - \lambda}{E_j}\right)^{1/2}, \\ E_j &= \sqrt{(\varepsilon_j - \lambda)^2 + \Delta^2}, \\ \Delta &= G\sum_j u_j v_j \,, \\ U' &= 2\sum_j (v_j^2\,\varepsilon_j - \lambda - u_j v_j\,\Delta\,) \end{aligned} \tag{8.284}$$

Abb. 8.65
Parameter der Bogoljubov-Transformation

Der Erwartungswert des Teilchenzahloperators N im BCS-Zustand wird

$$\langle \Phi_0 | N | \Phi_0 \rangle = 2 \sum_j v_j^2 = A . \tag{8.285}$$

Das chemische Potential λ entspricht dabei der Fermienergie für nichtwechselwirkende Teilchen. Der Parameter Δ heißt Spaltparameter. Die Beiträge zur Summe, die seine Größe bestimmt, kommen vor allem von Zuständen in der Nähe der Fermi-Energie, da das Produkt $u_j v_j$ sonst klein wird (siehe Abb. 8.65). Der Spaltparameter, der mit G gegen Null geht, führt zur Abweichung der QT-Energie E_j von der Einteilchenenergie ε_j. Mit den in (8.274) angegebenen Parameterwerten für G ergibt sich bei Kernen im Massenzahlbereich $A \approx 150$—190 ein Spaltparameter von $2\Delta \approx 1{,}5$ MeV. Die Transformationskoeffizienten u_j, v_j nehmen für Zustände weit oberhalb bzw. unterhalb der Fermigrenze ε_F folgende Werte an:

$$\begin{aligned} \varepsilon_j &\gg \varepsilon_F \approx \lambda\colon\; u_j^2 \approx 1 ,\; v_j^2 \approx 0 , \\ \varepsilon_j &\ll \varepsilon_F \approx \lambda\colon\; u_j^2 \approx 0 ,\; v_j^2 \approx 1 . \end{aligned} \tag{8.286}$$

In diesen Grenzfällen wird die Erzeugung eines Quasiteilchens nach (8.276) zur Erzeugung eines Teilchens oberhalb bzw. eines Loches unterhalb der Fermigrenze. Der qualitative Verlauf von u_j, v_j im gesamten Energiebereich ist aus Abb. 8.65 ersichtlich.

8.6.4.3. Quasiteilchenanregungen

1. Die im vorangegangenen Abschnitt beschriebene Lösung der Schrödinger-Gleichung für ein Vielnukleonensystem mit Paarwechselwirkung bezeichnet man als supraflüssige Lösung mit $u_j v_j \neq 0$ für alle j. Das Supraflüssigkeitsmodell wurde auf der Grundlage des von N. N. Bogoljubov entwickelten mathematischen Apparates und nach einer einführenden Arbeit von A. Bohr, B. R. Mottelson und D. Pines vor allem von V. G. Soloviev und S. T. Beljajev entwickelt. In diesem Modell, das den Kern durch ein System unabhängiger Quasiteilchen mit dem Hamilton-Operator $H' = u' + \Sigma\, E_j \alpha_{jm}^+ \alpha_{jm}$ ersetzt, erhalten wir folgendes Bild für den Grundzustand und die Anregungsformen von Kernen mit starker Paarwechselwirkung.

Der Grundzustand eines gg-Kerns wird durch die BCS-Funktion $|\Phi_0\rangle$ (8.279) beschrieben, die das QT-Vakuum repräsentiert. Damit besitzt das System eine verschmierte Fermikante (siehe Abb. 8.66) und der Erwartungswert der Energie ist mit (8.282) gegeben. Eine innere

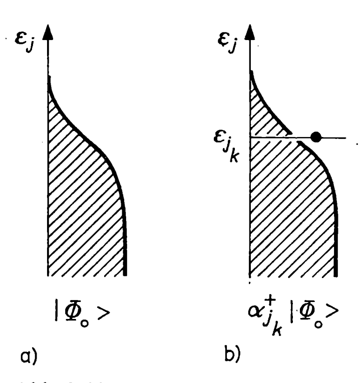


Abb. 8.66
Schematische Darstellung des Grundzustandes $|\Phi_0\rangle$ eines gg-Kerns (a) und eines Ein-Quasiteilchen-Zustandes $\alpha_{j_k}^+ |\Phi_0\rangle$ (b)

Anregung eines Nukleonensystems wird durch die Anwendung eines Operators $a^+_{j'm'}a_{jm}$ vermittelt, der ein Teilchen aus dem Zustand (j, m) in den Zustand (j', m') bringt. Ersetzen wir die Teilchenoperatoren nach (8.281) durch die QT-Operatoren

$$a^+_{j'm'}a_{jm} = u_{j'}u_j\alpha^+_{j'm'}\alpha_{jm} + v_{j'}u_j\alpha_{j'-m'}\alpha_{jm} + v_{j'}v_j\alpha_{j'-m'}\alpha_{jm} + v_{j'}v_j\alpha_{j'-m'}\alpha^+_{j-m} + u_jv_j\alpha^+_{j'm'}\alpha^+_{j-m}$$

dann ist ersichtlich, daß bei einer Anwendung von $a^+_{j'm'}a_{jm}$ auf das QT-Vakuum wegen $\alpha|\Phi_0\rangle = 0$ nur das letzte Glied einen Beitrag liefert. Einem Einteilchenübergang in einem System realer Teilchen entspricht also eine Anregung von zwei Quasiteilchen. Die Anregung eines 2QT-Zustandes bedeutet den Aufbruch eines Paares, so daß die beiden Nukleonen bestimmte Niveaus besetzen, die für die restlichen Nukleonen zur Paarbildung blockiert werden. Die angeregten Zustände eines gg-Kerns können wir folglich als 2QT-Anregungen interpretieren, die zum Gesamtspin I koppeln,

$$|\Phi(j_1j_2)\,IM\rangle = \sum_{m_1, m_2} (j_1m_1j_2m_2\,|\,IM)\,\alpha^+_{j_1m_1}\alpha^+_{j_2m_2}\,|\Phi_0\rangle\,. \tag{8.287}$$

Die Anregungsenergie ΔE_I dieses Zustandes ist gegeben durch die Summe der Energien E_{j_1}, E_{j_2} der unabhängigen Quasiteilchen

$$\Delta E_I = E_{j_1} + E_{j_2} = \sqrt{(\varepsilon_{j_1} - \lambda)^2 + \Delta^2} + \sqrt{(\varepsilon_{j_1} - \lambda)^2 + \Delta^2}\,. \tag{8.288}$$

Selbst wenn die beiden Quasiteilchen in unmittelbarer Umgebung der Fermienergie λ erzeugt werden, $(\varepsilon_j - \lambda) \approx 0$, erhält man eine Anregungsenergie $\Delta E_I \gtrsim 2\Delta$, so daß im Energiespektrum ein Energiespalt dieser Größe auftritt. Die Tabelle 8.12 enthält einen Vergleich der nach (8.288) berechneten Anregungsenergien einiger 2 QT-Zustände in sphärischen gg-Kernen mit dem Experiment. Man erkennt, daß das Supraflüssigkeitsmodell die gemessenen Energiewerte bis auf etwa 500 keV reproduziert.

2. Wir betrachten nun einen Kern mit ungerader Massenzahl. Operiert man mit einem QT-Erzeugungsoperator auf den QT-Vakuumzustand, dann findet man

$$\alpha^+_{jm}\,|\Phi_0\rangle = a^+_{jm} \prod_{j' \neq j} (u_{j'} + v_{j'}a^+_{j'm'}a^+_{j'-m'})\,|0\rangle\,. \tag{8.289}$$

Im Teilchenbild ergibt sich ein Zustand, in dem das Niveau jm mit einem Teilchen besetzt ist, während die restlichen Teilchen des gg-Rumpfes die Zustände $j' \neq j$ paarweise besetzen (siehe

Tabelle 8.12
Zwei-Quasiteilchenzustände in sphärischen gg-Kernen. Vergleich der experimentellen Anregungsenergien mit Ergebnissen im Supraflüssigkeitsmodell. In den in Klammern gesetzten Fällen ist die genaue Zuordnung der Niveaus experimentell nicht geklärt

Kern	I^π	Konfiguration	Anregungsenergie (in MeV) Experiment	Theorie
^{90}Zr	$(5^-, 4^-)$	$p_{1/2}\ g_{9/2}$	(2,319 / 2,739)	2,8
^{94}Mo	6^+	$d_{5/2}\ g_{7/2}$	2,423	2,8
^{116}Sn	$(5^-, 6^-)$	$s_{1/2}\ h_{11/2}$	(2,367 / 2,774)	2,7
^{118}Sn	5^-	$s_{1/2}\ h_{11/2}$	2,321	2,6
	7^-	$h_{11/2}\ d_{3/2}$	2,575	3,1
^{120}Sn	7^-	$h_{11/2}\ d_{3/2}$	2,482	2,8
^{136}Ba	7^-	$h_{11/2}\ d_{3/2}$	2,031	2,2

Abb. 8.66). Der Zustand $\alpha_{jm}^{+}|\Phi_0\rangle$ entspricht also einem Kern mit ungerader Massenzahl. Der Grundzustand des uA-Kerns sei $\alpha_{j_0m_0}^{+}|\Phi_0\rangle$. Ein angeregter Zustand kann dann durch $\alpha_{jm}^{+}|\Phi_0\rangle$ $(j \neq j_0)$ generiert werden, was eine Einteilchenanregung $j_0 \to j$ bedeutet. Die Anregungsenergie ist

$$\Delta E_j = E_j - E_{j_0}\,. \tag{8.290}$$

In ungeraden Kernen tritt also kein Energiespalt im Anregungsspektrum auf. Dieser Sachverhalt wird für die Nickel-Isotope mit $A = 58$—62 in Abb. 8.62 veranschaulicht. Eine detaillierte Übereinstimmung zwischen den gemessenen und berechneten Spektren ungerader Kerne ergibt sich im Suprafl\u00fcssigkeitsmodell allerdings nur zum Teil.

8.6.5. Kerndeformationen

1. Das in Abschnitt 8.6.2. beschriebene Hartree-Fock (HF)-Verfahren gibt die Möglichkeit, das mittlere Feld für die unabhängige Nukleonenbewegung im Kern ausgehend von einer effektiven Nukleon-Nukleon-Wechselwirkung auf mikroskopischer Grundlage näherungsweise zu berechnen. Wenden wir diese Methode auf doppeltmagische Kerne an, dann folgt notwendigerweise ein sphärisches mittleres HF-Potential, da die in der Slater-Determinate (8.230) auftretenden Einteilchenzustände für jeden Drehimpuls j auch alle Projektionen m erfassen. Außerhalb abgeschlossener Schalen besetzen die Nukleonen aber Einteilchenbahnen mit unterschiedlicher Orientierung im Raum, so daß die Aufenthaltswahrscheinlichkeit nicht länger eine sphärische Symmetrie besitzt. Damit gewinnt auch das selbstkonsistente mittlere Feld eine Deformation. Wir sprechen davon, daß mit der Einführung des mittleren Feldes neben der Translationsinvarianz eine weitere Symmetrie des ursprünglichen Vielteilchen-Hamilton-Operators gebrochen wird, die Rotationssymmetrie. Das HF-Potential ist nicht mehr kugelsymmetrisch, so daß die Slater-Determinante (8.230) keine Eigenfunktion des Drehimpulsoperators darstellt. Dieses Vorgehen eröffnet einen Weg, auch solche kollektiven Effekte, die zu statischen Deformationen führen, in einer Vielteilchentheorie zu erfassen. Die phänomenologische Einführung makroskopischer Kollektivkoordinaten wie die Quadrupoldeformationsparameter β, γ wäre damit von einem mikroskopischen Standpunkt aus verständlich.

Um im HF-Verfahren den Fall so zu berücksichtigen, daß das Minimum der HF-Energie bei von Null verschiedenen Werten der Deformationsparameter liegt, führt man eine Variation des Erwartungswertes der Energie mit Nebenbedingungen durch. Setzen wir eine Quadrupoldeformation voraus, dann lassen sich diese Nebenbedingungen so formulieren, daß ein Minimum der Energie $\langle\Phi_0|\,H\,|\Phi_0\rangle$ so zu bestimmen ist, daß ein vorgegebener Wert des Erwartungswertes des Quadrupoloperators

$$Q_{2\mu} = \sum_{i=1}^{A} r_i^2 Y_2^{\mu}(\vartheta_i, \varphi_i)\,, \qquad \mu = \pm 2, 0\,, \tag{8.291}$$

eingehalten wird. Formal kann man diese Bedingung durch einen Zusatzterm im Hamilton-Operator berücksichtigen

$$H \to H' = H \sum_{\mu} \lambda_\mu Q_{2\mu}\,. \tag{8.292}$$

Variiert man in $\langle\Phi_0|\,H'\,|\Phi_0\rangle = \langle\Phi_0|\,H\,|\Phi_0\rangle - \sum_{\mu} \lambda_\mu \langle\Phi_0|\,Q_{2\mu}\,|\Phi_0\rangle$ die Lagrangeschen Multiplikatoren λ_μ, dann ergibt sich numerisch die HF-Grundzustandsenergie als Funktion der Quadrupoldeformation des Kerns. Die Abb. 8.67 zeigt das Ergebnis solcher Rechnungen für den Kern ^{12}C. Man erkennt ein tiefes Minimum der Energie für ein negatives Quadrupolmoment $Q \approx -40\ \mathrm{fm}^2$ (abgeplattete Deformation) und ein schwächeres Minimum bei $Q \approx +20\ \mathrm{fm}^2$ (gestreckte Deformation). Beide Minima, die durch einen Energiespalt von etwa 10 MeV von-

einander getrennt sind, liegen unterhalb der Bindungsenergie der sphärischen Kernform ($Q = 0$). In Übereinstimmung mit dem Experiment erwartet man aus HF-Rechnungen eine negative Deformation des ^{12}C-Grundzustandes. Von den Kernen der 1p- und der 2s1d-Schale besitzen lediglich ^{16}O und ^{40}Ca eine Kugelform. Für die anderen Kerne liefert die HF-Näherung im Grundzustand zum Teil ein stark deformiertes selbstkonsistentes Feld. Viele Kerne zeigen sogar Abweichungen von der Axialsymmetrie ($\gamma \neq 0$), vgl. Gl. (8.156). Bei ^{28}Si sind die drei HF-Lösungen mit $\beta = 0, \beta \gtrless 0$ nahezu entartet, was auf eine komplizierte Struktur dieses Kerns hinweist.

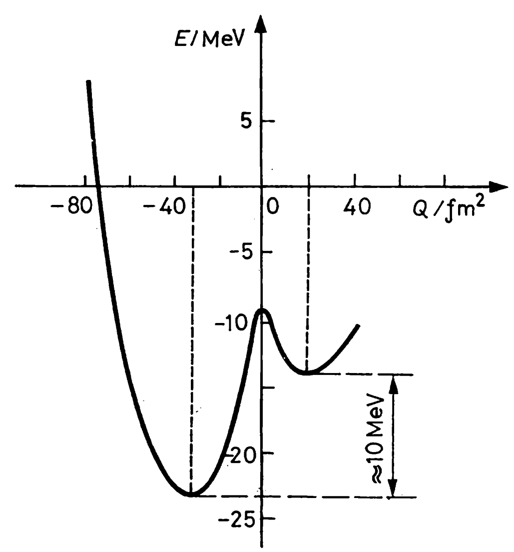


Abb. 8.67
Hartree-Fock-Energie des ^{12}C-Kerns als Funktion des Quadrupolmoments. Die Rechnungen wurden mit einem realistischen Nukleon-Nukleon-Potential (Tabakin-Potential) durchgeführt

Ein deformierter HF-Zustand stellt eine Überlagerung von Zuständen mit bestimmten Drehimpuls I dar. Wenn man diese Anteile herausprojiziert, ergibt sich eine Rotationsbande mit $E_I \sim I(I + 1)$ (siehe Gl. (8.130)). In diesem Sinne liefert die Hartree-Fock-Näherung eine mikroskopische Theorie der kollektiven Rotationsbewegung der Kerne.

In einem HF-Verfahren mit Nebenbedingungen können auch weitere kollektive Koordinaten Q_i (z. B. eine Hexadekupoldeformation) berücksichtigt werden. Man hat dann das Minimum auf der Hyperfläche der Energie $E(q_1, q_2, \ldots)$, $q_i = \langle \Phi_0 | Q_i | \Phi_0 \rangle$ aufzusuchen.

2. Viele theoretische Untersuchungen zur Kerndeformation wurden mit einer phänomenologischen Wechselwirkung durchgeführt, die neben der Paarkraft (8.274) eine als separabel angesetzte Quadrupol-Quadrupol-Komponente

$$V_{QQ} = -g \sum_{\mu} \sum_{\substack{(j_1)(j_1') \\ (j_2)(j_2')}} (-1)^{\mu} \langle j_1' m_1' | \, r^2 Y_2^{\mu} \, | j_1 m_1 \rangle \langle j_2' m_2' | \, r^2 Y_2^{-\mu} \, | j_2 m_2 \rangle$$
$$\times \, a^{+}_{j_1' m_1'} a^{+}_{j_2' m_2'} a_{j_2 m_2} a_{j_1 m_1} \tag{8.293}$$

enthält ($g \approx 75 \cdot A^{-1,4}$ MeV). Man nimmt an, daß diese QQ-Kraft einen wesentlichen Teil des langreichweitigen Anteils der effektiven Nukleon-Nukleon-Wechselwirkung darstellt. Während die Paarkraft die Nukleonenbewegung in allen zeitumgekehrten Bahnen korreliert und deshalb sphärische Zustände bevorzugt, bringt die QQ-Kraft die Tendenz zur Quadrupoldeformation des Kerns hervor, da sie Zustände mit unterschiedlicher Orientierung des Drehimpulses koppelt. Das Wechselspiel von (kurzreichweitiger) Paar- und (langreichweitiger) QQ-Kraft bestimmt die potentielle Energie des Kerns als Funktion der Deformationsparameter β und γ. Das Kernmodell, dem der Hamilton-Operator

$$\begin{aligned} H &= \sum_{j,m} \varepsilon_j a^+_{jm} a_{jm} - g \sum_{\mu=-2}^{2} : Q^+_\mu Q_\mu : - G P^+ P \,, \\ Q_\mu &= \sum_{\substack{j_1 m_1 \\ j_2 m_2}} \langle j_2 m_2 | \, r^2 Y^\mu_2 \, | j_1 m_1 \rangle \, a^+_{j_2 m_2} a_{j_1 m_1} \,, \\ P &= \sum_{m>0} a^+_{jm} a_{jm} \,, \end{aligned} \tag{8.294}$$

zugrundeliegt, bezeichnet man als Paar-plus-Quadrupol-Modell. Im Rahmen dieses Modells läßt sich das Auftreten von Kerndeformationen in seinen wesentlichen Abhängigkeiten interpretieren. Eine geeignete Näherungsmethode zur Bestimmung der Grundzustandseigenschaften ist dabei das Hartree-Fock-Bogoljubov-(HFB)-Verfahren. Mit Hilfe einer Bogoljubov-Transformation wird zunächst der Hamilton-Operator (8.294) auf Quasiteilchendarstellung (siehe Gl. (8.282)) transformiert. In einem anschließenden Variationsverfahren, das statt einer Slaterdeterminante Φ_0 (8.230) eine BCS-Funktion $|\Phi_0\rangle^{\mathrm{BCS}}$ (8.279) als Probefunktion verwendet, wird als Minimum des Energieerwartungswertes $\langle \Phi_0^{\mathrm{BCS}} | \, H \, | \Phi_0^{\mathrm{BCS}} \rangle$ ermittelt. Variationsparameter sind die Parameter u, v der Bogoljubov-Transformation.

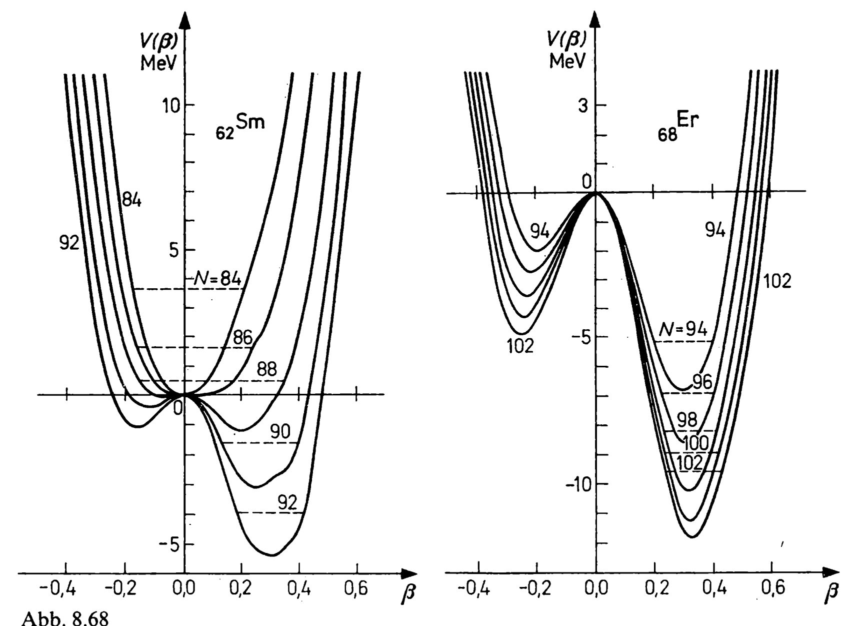


Abb. 8.68
Deformationsenergie einiger Sm- und Er-Isotope als Funktion der Quadrupoldeformation $\beta(\gamma = 0)$ in einem Modell mit Paar- und Quadrupol-Quadrupol-Kraft

Als Beispiel ist in Abb. 8.68 die berechnete Deformationsenergie $V(\beta)$ als Funktion der Quadrupoldeformation für einige Sm- und Er-Isotope angegeben. Der Kern $_{62}Sm_{84}$ ist sphärisch, da das Minimum der in guter Näherung parabelförmige Potentialkurve bei $\beta = 0$ liegt. Erhöht man die Neutronenzahl, dann verbreitert sich die Potentialkurve, bis die gestreckte Kernform ($\beta > 0$) energetisch bevorzugt wird. Mit wachsender Neutronenzahl werden sowohl der Energiespalt zwischen der abgeplatteten ($\beta < 0$) und der gestreckten Kernform als auch die Gleichgewichtsform größer. Bei den Er-Isotopen hingegen sollte keine sphärische Kernform auftreten; alle Isotope zeigen gestreckte Deformation, wobei sich die Größe der Gleichgewichtsdeformation mit der Neutronenzahl nur wenig ändert.

8.6.6. Zustände mit hohem Drehimpuls

1. Die Fusion schwerer Ionen (siehe Kapitel 10) führt zu Compoundkernzuständen mit hohem Drehimpuls. In einem peripheren Stoß läßt sich der maximale Drehimpuls, der bei einem solchen Prozeß vom Compoundkern aufgenommen wird, abschätzen nach

$$I_{\max} \approx (R_1 + R_2)\sqrt{2\mu_{12}(E_S - V_C^{(B)})}/\hbar\,. \tag{8.295}$$

Dabei sind R_1 und R_2 die Radien der wechselwirkenden Kerne (siehe Gl. (10.422)), μ_{12} ist die reduzierte Masse des Systems; $E_S - V_C^{(B)}$ bezeichnet im M-System die über der Coulomb-Barriere $V_C^{(B)} = Z_1 Z_2 \epsilon^2/(R_1 + R_2)$ verfügbare kinetische Energie (Z_i Ladungszahl, $\epsilon^2 = e^2/4\pi\varepsilon_0$).
Für das Projektil ^{40}Ar mit einer Einschußenergie von 400 MeV ergibt sich bei einem Target der Massenzahl $A \sim 200$ nach (8.295) ein Drehimpuls von $I_{max} \sim 170\,h$. Damit eröffnen kernspektroskopische Untersuchungen mit Hilfe von schwerioneninduzierten Kernreaktionen eine Möglichkeit, die Eigenschaften des nuklearen Vielteilchensystems in schnell rotierenden Zuständen (Hochspinzustände) zu studieren.

Die Bildung des Compoundkerns in einer Fusionsreaktion erfolgt nach einer Wechselwirkungszeit von etwa 10^{-21} s. Nach etwa 10^{-19} s setzt eine statistische Verdampfung von Neutronen (oder anderen leichten Teilchen) ein, die zu einer Abkühlung des hochangeregten

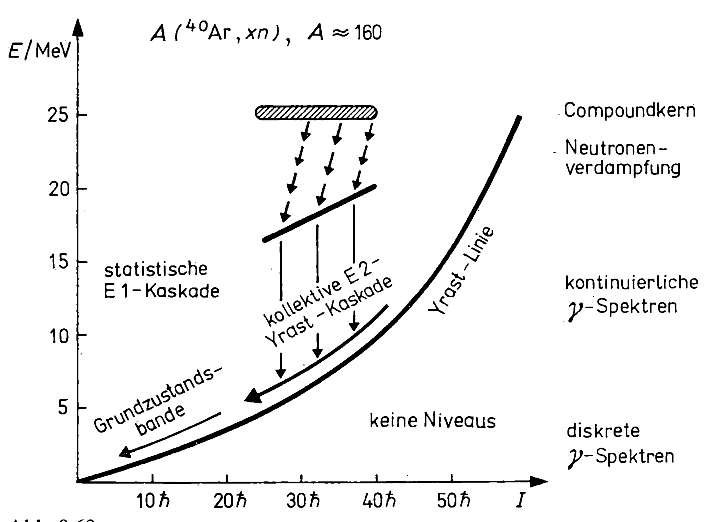


Abb. 8.69
Schematische Darstellung des Compoundkernzerfalls in einer (^{40}Ar, xn)-Reaktion im E,I-Diagramm (E: Anregungsenergie, I: Drehimpuls)

Systems führt. Die Emission eines Neutrons vermindert die Anregungsenergie um etwa 8 MeV und den Drehimpuls um etwa $1\hbar$. Diese Neutronenkaskade bricht ab, wenn die Anregungsenergie des verbleibenden Kerns kleiner als die Neutronenbindungsenergie geworden ist. Danach erfolgt die weitere Abregung des Compoundkerns, der noch einen hohen Drehimpuls trägt, durch eine Folge schneller elektrischer Dipolübergänge (E1), bis die sogenannte Yrast-Linie erreicht ist. Dann schließt sich eine Reihe kollektiver Quadrupolübergänge (E2) längs der Yrast-Linie an, die bei deformierten Kernen schließlich in die Grundzustandsbande mündet (siehe Abb. 8.69). Da die Abregung des Compoundkerns statistisch erfolgt, ergeben sich γ-Spektren hoher Komplexität, die vielfältige Informationen über den Zerfallsprozeß enthalten. Die Analyse dieser Spektren ist schwierig, da nur für $I \lessapprox 30\hbar \dots 40\hbar$ noch aufgelöste γ-Linien vorliegen, während man für noch höhere Drehimpulse bereits kontinuierliche Spektren erhält.

Als Yrast-Linie bezeichnet man in einem (E, I)-Diagramm diejenige Folge von Kernzuständen, die bei vorgegebenem Drehimpuls I jeweils die niedrigste Anregungsenergie E besitzen. Unterhalb der Yrast-Linie existieren keine Kernniveaus. Für die Niveaus in der Nähe der Yrast-Linie erwartet man selbst bei hohen Drehimpulsen eine einfache Struktur der Zustände und damit eine relativ niedrige Niveaudichte, während bei gegebenem Drehimpuls die Niveaudichte mit wachsender Anregungsenergie stark ansteigt. Mit zunehmendem Drehimpuls ändert sich infolge der größer werdenden Zentrifugalkräfte auch die Gleichgewichtsform des Kerns, so daß sich längs der Yrast-Linie gestreckte, dreiaxiale und abgeplattete Deformationen ergeben, bis die Stabilität des Kerns bei einem kritischen Drehimpuls I_{krit} durch die einsetzende Spaltung begrenzt wird (Abb. 8.70). Welche Formen der Kern mit wachsender Winkelgeschwindigkeit im Unterschied zu einem klassischen Wassertröpfchen durchläuft, wird stark durch die Schalenstruktur bestimmt. Der kritische Drehimpuls I_{krit}, bei dem die Yrast-Linie abbricht, weil der Kern instabil gegenüber Spaltung wird, wächst mit der Größe des Kerns zunächst an (siehe Abb. 8.71). Bei mittelschweren Kernen wird mit $I_{\text{krit}} \approx 100\hbar$ ein Maximum erreicht. Wegen der abstoßenden Coulombkräfte fällt I_{krit} für wachsendes A dann stark ab, so daß oberhalb $A \approx 300$ der Kern selbst bei verschwindender Rotation nicht mehr stabil bleibt.

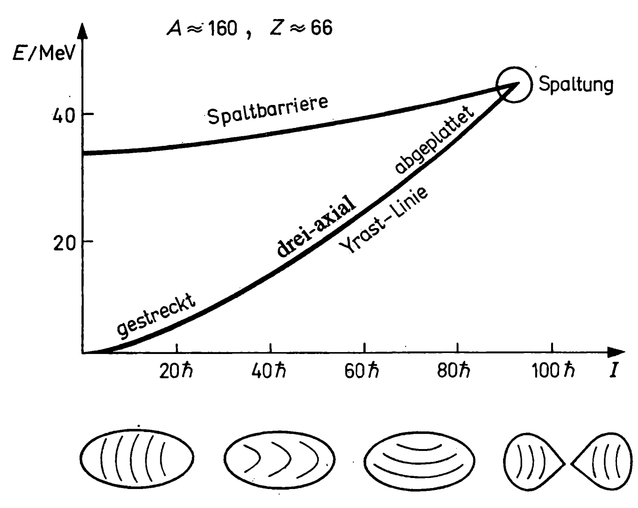


Abb. 8.70
Mögliche Gleichgewichtsformen eines deformierten Kerns längs der Yrast-Linie

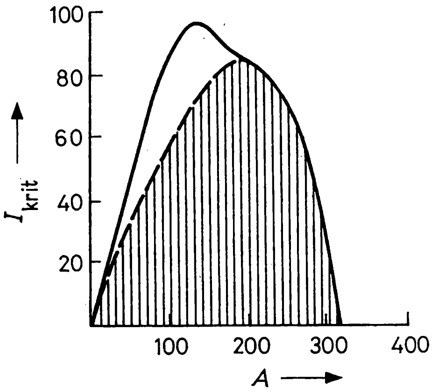


Abb. 8.71
Im Tröpfchenmodell berechnete Stabilität des rotierenden Kerns gegenüber Spaltung in Abhängigkeit von der Massenzahl A. Die Spaltbarriere verschwindet bei I_{krit}. Im schraffierten Bereich entspricht die Gleichgewichtsform des Kerns einer gestreckten Deformation, im Bereich zwischen den beiden Kurven liegt eine dreiaxiale Deformation vor

2. Für eine Reihe von deformierten Kernen im Gebiet der Seltenen Erden wird im Drehimpulsbereich zwischen $10\hbar$ und $20\hbar$ in der Folge der Yrast-Zustände eine Anomalie beobachtet, die Schlußfolgerungen über die charakteristische Struktur der Yrast-Zustände zuläßt. Mit Hilfe von (α, xn)-Reaktionen konnte nachgewiesen werden, daß für bestimmte Werte des Drehimpulses in der E2-Yrast-Kaskade die Übergangsenergie unter den Wert für den benachbarten Übergang sinkt. In ^{162}Er z. B. wurden folgende Übergangsenergien gemessen: $14^+ \to 12^+$ 580,6 keV, $16^+ \to 14^+$ 546,6 keV. Dieser Effekt weist auf eine sprunghafte Zunahme des Trägheitsmomentes bei $I \approx 12\hbar$ hin.

Für die phänomenologische Beschreibung von Hochspinphänomenen ist es günstig, die experimentellen Daten nach der Rotationsfrequenz ω zu parametrisieren. Diese (nicht meßbare) Größe läßt sich halbklassisch nach

$$\omega = \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}I}, \qquad I = \langle I \rangle = \sqrt{I(I+1)}, \qquad J = \frac{I}{\omega}, \tag{8.296}$$

einführen. Da der Drehimpuls nur diskrete Werte annimmt, geht man in (8.296) vom Differentialquotienten zum Differenzenquotienten über. Die experimentellen Werte für Rotationsfrequenz ω und Trägheitsmoment J ergeben sich dann aus

$$\omega_{\text{exp}} \simeq \frac{E(I) - E(I-2)}{\sqrt{I(I+1)} - \sqrt{(I-2)(I-1)}}, \qquad J_{\text{exp}} \simeq \frac{2I-1}{\Delta E_{I,\,I-2}}. \tag{8.297}$$

Für den Grenzfall eines starren Rotators gilt $E_I \sim I(I+1)$, d. h., das Trägheitsmoment bleibt als Funktion der Rotationsfrequenz konstant, $J = J_0$ für $I = 0$. Im allgemeinen Fall stellt man das Trägheitsmoment als Funktion des Quadrates der Rotationsfrequenz dar:

$$J = J_0 + b\omega^2 + \cdots. \tag{8.298}$$

Bei geringen Abweichungen vom starren Rotator erwartet man zunächst einen linearen Anstieg des Trägheitsmoments als Funktion von ω^2, wie das auch im Experiment z. B. für ^{174}Hf (siehe Abb. 8.72a) nachgewiesen wird. Wächst das Trägheitsmoment wie bei den Er-Isotopen

bei bestimmten Drehimpulswerten jedoch sprunghaft an, dann muß nach $\langle I \rangle = \omega J$ bei gegebenem I die Rotationsfrequenz ω zurückgehen, so daß sich in einem (J, ω)-Diagramm eine S-förmige Kurve ergibt. Dieses in Abb. 8.72a für ^{158}Er demonstrierte Phänomen wird als Backbending-Effekt des Trägheitsmoments bezeichnet. Oberhalb des Backbending-Bereiches beobachtet man in den meisten Fällen wiederum einen linearen Anstieg von J mit ω^2. Dieses Verhalten legt die Vermutung nahe, daß der Backbending-Effekt als Kreuzung zweier Rotationsbanden verstanden werden kann, denen Zustände mit unterschiedlichem Trägheitsmoment zugrunde liegen (siehe Abb. 8.72b).

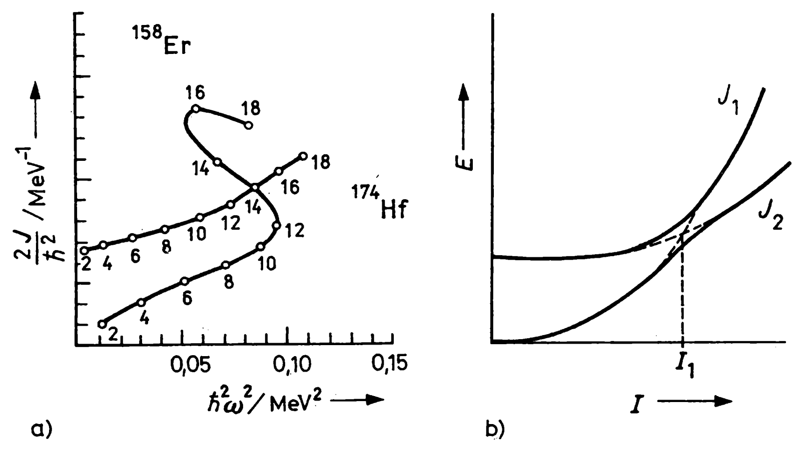


Abb. 8.72
a) Trägheitsmoment J als Funktions des Quadrates der Rotationsfrequenz ω für ^{174}Hf und ^{158}Er. Das Trägheitsmoment von ^{158}Er zeigt den Backbending-Effekt
b) Schematische Darstellung zweier sich kreuzender Banden mit verschiedenem Trägheitsmoment J_1, J_2. Am Kreuzungspunkt I_1 ändert sich sprunghaft die Steigung der Yrast-Linie

3. Zur physikalischen Interpretation des Backbending-Effekts als Bandenkreuzung werden verschiedene Überlegungen angestellt.

— Bei einem bestimmten Wert des Drehimpulses erfolgt eine sprunghafte Änderung der Deformation, etwa der Übergang in eine dreiaxiale Kernform. Dieser Übergang führt zu einem hohen Trägheitsmoment der zweiten Bande. Ein solcher Mechanismus sollte nur bei wenigen Kernen weitab von der Stabilitätslinie für den Backbending-Effekt maßgebend sein.
— Mit wachsender Rotationsfrequenz nimmt die Coriolis-Kraft $V_c \sim \boldsymbol{Ij}$ zu, die auf ein Nukleonenpaar in den Einteilchenzuständen wirkt, also einer Paarung entgegensteht. Bei einem hohen Drehimpuls wird die Coriolis-Kraft so stark, daß alle Paare gleichzeitig aufbrechen. Dieser Effekt würde zu einem Phasenübergang von dem supraflüssigen Zustand der Grundzustandsbande zu einem ungepaarten Zustand führen, dessen Trägheitsmoment wesentlich näher am Trägheitsmoment des starren Körpers liegt. Theoretische Abschätzungen haben aber ergeben, daß der kritische Drehimpuls dieses Phasenüberganges wesentlich höher liegt als der Drehimpulsbereich, für den der Backbending-Effekt beobachtet wird.
— Mit wachsender Rotationsfrequenz brechen nicht alle Paare gleichzeit auf, sondern zuerst solche mit hohem Einteilchendrehimpuls j. Nach Aufbruch des Paares erfolgt eine Ausrichtung des Einteilchendrehimpulses längs der Rotationsachse, da Zustände mit geringer Projektion Ω von $\boldsymbol{j}$ auf die Symmetrieachse durch die Corioliskraft energetische bevorzugt

werden: $\langle V_c \rangle \sim \sqrt{j(j+1) - \Omega(\Omega+1)}$. Damit entkoppeln sich einzelne Teilchen von der kollektiven Rotation und tragen eigenständig zum Gesamtdrehimpuls $\boldsymbol{I}$ bei (siehe Abb. 8.73). Für gegebenen Gesamtdrehimpuls $\boldsymbol{I}$ muß der Drehimpuls $\boldsymbol{R}$ der kollektiven Rotation dann kleiner werden, d. h. der Rumpf rotiert mit geringerer Winkelgeschwindigkeit.

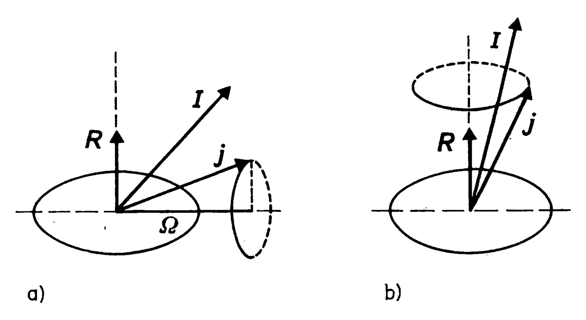


Abb. 8.73
Kopplung eines Einteilchendrehimpulses $\boldsymbol{j}$ an den Drehimpuls $\boldsymbol{R}$ der kollektiven Rotation des Rumpfes
a) starke Kopplung
b) Ausrichtung (Alignment) längs der Rotationsachse

Die zuletzt angeführte Interpretation ist heute weitgehend anerkannt. Sie erklärt den Backbending-Effekt der Seltenen Erden durch den Aufbruch eines $i_{13/2}$-Neutronenpaares und die Ausrichtung der Einteilchendrehimpulse längs der Rotationsachse (rotational alignment).

Literaturhinweise zu Kapitel 8
Ban 78, Bau 68, Bet 71, Bla 52, Bli 73, Bod 72/78, Boh 69/75, Brow 64, Bru 77, Dav 58, Dav 63, Dav 67, Dže 80, Eis 70/72, Gri 74, Her 60, Lan 64, Mar 71, Mig 67, Nat 67, Pos 71, Pre 62, Rin 80, Šir 72, Sha 63, Sha 74, Sie 66, Sit 72, Sol 71, Sol 81, Str 67/68, Wil 77

9. Kerninstabilität

9.1. Natürliche Radioaktivität

1. Der erste Nachweis radioaktiver Strahlung und damit die Entdeckung der Radioaktivität gelangen 1896 H. Becquerel. Die gerade gefundenen Röntgen-Strahlen hatten in Verbindung mit der Fluoreszenz an den Wänden von Röntgen-Röhren aus Glas zu der Vermutung geführt, daß diese die Ursache der Röntgen-Strahlung sein könnte. H. Becquerel prüfte daraufhin ohne Erfolg phosphoreszierende Körper mit Hilfe von Photoplatten. Erst als er ein Uransalz einsetzte, fand er die gesuchte Wirkung. Er mußte jedoch feststellen, daß auch ohne Vorbelichtung der Probe eine Strahlung auftrat, die, wie er später zeigen konnte, lichtundurchlässige Stoffe durchdringen kann, Luft ionisiert und unabhängig von chemischen Beeinflussungen der Quelle und von Temperaturänderungen wirkt. Bei der systematischen Durchforschung aller bekannten chemischen Elemente fanden Marie und P. Curie 1898 die Radioaktivität von Thorium und die millionenfach stärkere spezifische Aktivität zweier neuer Elemente, die sie Polonium und Radium nannten.

2. In den ersten Jahren nach der Entdeckung der radioaktiven Strahlung waren die physikalischen Untersuchungen besonders auf die Aufklärung ihrer Eigenschaften und ihrer Natur gerichtet. So konnte E. Rutherford 1899 zeigen, daß die von H. Becquerel gefundene Uran-Strahlung aus zwei Komponenten besteht, von denen die eine weniger, die andere stärker durchdringend ist. Er nannte sie α- und β-Strahlen. Im gleichen Jahr wurde von S. Meyer und E. v. Schweidler sowie von F. Giesel gefunden, daß sich diese Strahlung mit Hilfe von magnetischen Feldern ablenken läßt. Eine dritte Komponente wurde 1900 von P. Villard entdeckt; sie läßt sich nicht vom Magnetfeld ablenken. Man nannte sie γ-Strahlung. Sie durchdringt viel stärkere Metallfolien als die β-Strahlung und diese ihrerseits viel stärkere Folien als die α-Strahlung. Die Identifizierung der drei Strahlenarten war 1909 abgeschlossen. Über e/m-Bestimmungen hatten sich α- und β-Teilchen als vollständig ionisierte Heliumkerne bzw. als Elektronen erwiesen. Der elektromagnetische Charakter der γ-Strahlung wurde 1914 endgültig durch E. Rutherford und E. Andrade mit Hilfe von Diffraktionsexperimenten nachgewiesen.

3. Auf der Grundlage einer Analyse der damals bekannten Eigenschaften der radioaktiven Substanzen entwickelten E. Rutherford und F. Soddy bereits 1903 die Hypothese, die Radioaktivität sei mit der Umwandlung von Elementen verknüpft. Beim radioaktiven Zerfall bildet sich häufig wieder ein radioaktives Nuklid, d. h. ein Radionuklid. So kommt es zu Zerfallsreihen, in denen die Isotope verschiedener benachbarter Elemente enthalten sind. Von

Tabelle 9.1
Mutter- und Endnuklide der vier natürlichen radioaktiven Zerfallsreihen

Reihe	Mutter-nuklid	$T_{1/2}$/a	Endnuklid	Massen-formel
Thorium	$^{232}_{90}Th$	$1{,}39 \cdot 10^{10}$	$^{208}_{82}Pb$	4n
Uran-Radium	$^{238}_{92}U$	$4{,}51 \cdot 10^{9}$	$^{206}_{82}Pb$	4n + 2
Uran-Actinium	$^{235}_{92}U$	$7{,}13 \cdot 10^{8}$	$^{207}_{82}Pb$	4n + 3
Neptunium	$^{237}_{93}Np$	$2{,}14 \cdot 10^{6}$	$^{209}_{83}Bi$	4n + 1

wenigen Ausnahmen abgesehen sind die Ordnungszahlen der in der Natur vorkommenden Radionuklide größer als 82. Sie lassen sich in drei Zerfallsreihen einordnen. Ausgangsnuklid jeder dieser Zerfallsreihen ist ein sehr langlebiges Mutternuklid. Am Ende jeder dieser Zerfallsreihen steht ein stabiles Tochternuklid. In allen drei Fällen ist es ein Bleiisotop. In Tabelle 9.1 ist ein Überblick gegeben. Die vierte dort mit aufgeführte Zerfallsreihe ist erst entdeckt worden, als es möglich war, die ersten Glieder in Kernreaktionen zu erzeugen. In der Natur existiert diese Reihe nicht mehr. In Abb. 9.1 sind die Zerfallsreihen dargestellt. Die Bezeichnungen der Radionuklide trugen in den ersten Jahren, als es noch keine Nuklidzuordnungen gab vorläufigen Charakter. Die Symbole werden allerdings heute zum Teil noch benutzt. Eine Zusammenstellung ist auf S. 509 gegeben.

In jeder Zerfallsreihe gibt es ein gasförmig vorkommendes Nuklid, Emanation genannt (^{220}Rn, ^{222}Rn, ^{219}Rn), das in merklichen Mengen die Strahlenumwelt mitbestimmt.

Bereits 1913 fanden K. FAJANS und F. SODDY, daß in den natürlichen Zerfallsreihen nur α- und β-Zerfälle zur Nuklidänderung führen. Sie formulierten die sogenannten radioaktiven Verschiebungssätze. Danach ist der α-Zerfall mit der Emission eines He-Kerns, der β^--Zerfall mit der Emission eines Elektrons verbunden. Die Zerfallsgleichungen sind als (2.26) und (2.9) angegeben. Daß beim β^--Zerfall ein elektronisches Antineutrino auftritt, war damals noch nicht bekannt. Seine Existenz folgt aus dem Satz von der Erhaltung der Leptonenladung (6.13a). Auf die Notwendigkeit der Einführung dieses Teilchens kommen wir in 9.5.1. zu sprechen.

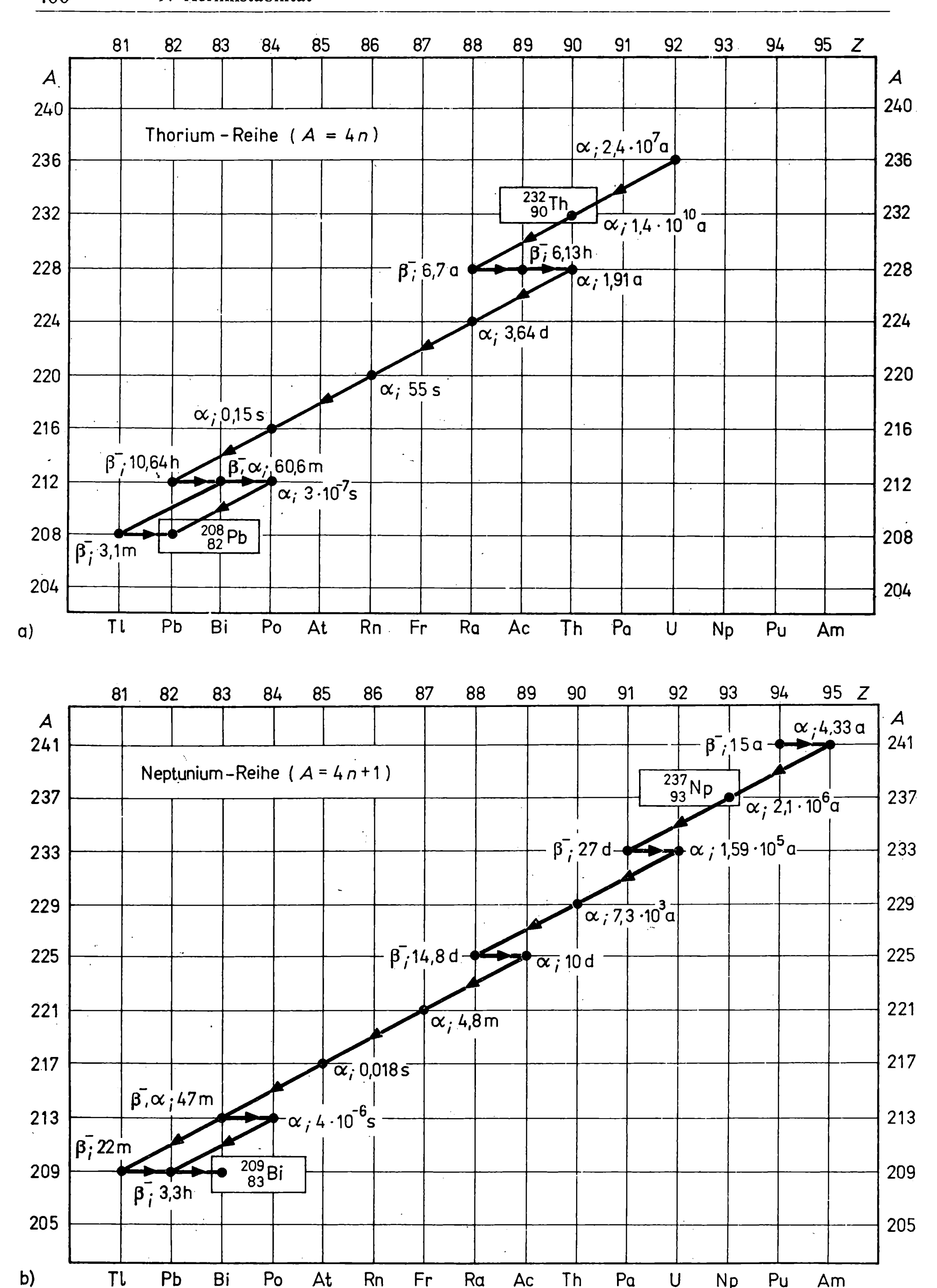
Warum außer dem α- noch β^--Zerfall vorkommt, läßt sich leicht verstehen. Da beim α-Zerfall zwei Protonen und zwei Neutronen weggetragen werden, ist der prozentuale Anteil der Neutronen im Tochterkern größer, als einem Kern auf dem Stabilitätsband entspricht; er ist neutronenangereichert. Der Neutronenüberschuß kann nur durch β^--Zerfall abgebaut werden. Nicht wenige der Zerfallsreihen-Nuklide zeichnen sich durch zwei Zerfallskanäle aus. So zerfällt z. B. ^{218}Po durch α- und β^--Zerfall. Eine interessante Eigenheit der Zerfallsreihen-Nuklide ist auch die Befolgung einer einheitlichen Massenformel

$$A = 4n + m, \tag{9.1}$$

wobei m die ganzzahligen Werte 0, 1, 2 und 3 entsprechend Tabelle 9.1 annimmt.

4. Außer den Radionukliden der natürlichen Zerfallsreihen mit $Z > 82$ gibt es in der Natur noch eine Reihe anderer Radionuklide mit $Z < 82$, die mit nennenswerter Häufigkeit vorkommen. Unter ihnen kann man zwei Gruppen unterscheiden. Die eine enthält Nuklide, deren Lebensdauer so groß ist, daß ihr Vorrat seit ihrer Bildung vor mehr als 10^{10} Jahren nicht vollständig zerfallen konnte. In der anderen mit kurzen Lebensdauern werden die Nuklide ständig in Kernreaktionen nachgebildet, die von der kosmischen Strahlung ausgelöst werden. Zwei der bekanntesten Beispiele sind die Reaktionen $^{14}_{7}N_6(n, p)^{14}_{6}C_6$, in der das Radionuklid ^{14}C entsteht, das neben dem gewöhnlichen ^{12}C in die organischen Verbindungen aller lebenden Materie eingebaut wird sowie die Reaktion $^{14}_{7}N_6(n, t)^{12}_{6}C_6$, in der das radioaktive Tritium entsteht. In Tabelle 9.2 sind die wichtigsten in der Natur vorkommenden Radionuklide mit $Z < 82$ verzeichnet.

Die natürliche Radioaktivität ist eine Erscheinung, die die lebende Natur als natürlicher Umweltfaktor umgibt. In bestimmtem, der lebenden Materie nicht schädlichem Maße sind in Luft, Wasser, Erdschichten und damit in Flora und Fauna, also auch in Lebensmitteln und im Menschen selbst Radionuklide enthalten. In Tabelle 9.3a sind die mittlere Aktivitätskonzentration und die Dosisleistung (siehe 12.4.) im Boden sowie die vom Menschen in 1 m Höhe aufgenommene Dosisleistung angegeben. Die Aktivitätskonzentration von Baumaterialien als Mittelwert über die Angaben aus einigen europäischen Staaten enthält Tabelle 9.3b.



Thorium-Reihe (A = 4n)
α; 2,4·10⁷ a
232 90 Th
α; 1,4·10¹⁰ a
β⁻; 6,13 h
β⁻; 6,7 a
α; 1,91 a
α; 3,64 d
α; 55 s
α; 0,15 s
β⁻; 10,64 h
β⁻, α; 60,6 m
α; 3·10⁻⁷ s
208 82 Pb
β⁻; 3,1 m
Neptunium-Reihe (A = 4n+1)
β⁻; 15 a
α; 4,33 a
237 93 Np
α; 2,1·10⁶ a
β⁻; 27 d
α; 1,59·10⁵ a
α; 7,3·10³ a
β⁻; 14,8 d
α; 10 d
α; 4,8 m
α; 0,018 s
β⁻, α; 47 m
α; 4·10⁻⁶ s
β⁻; 22 m
β⁻; 3,3 h
209 83 Bi
Tl Pb Bi Po At Rn Fr Ra Ac Th Pa U Np Pu Am
a)
b)

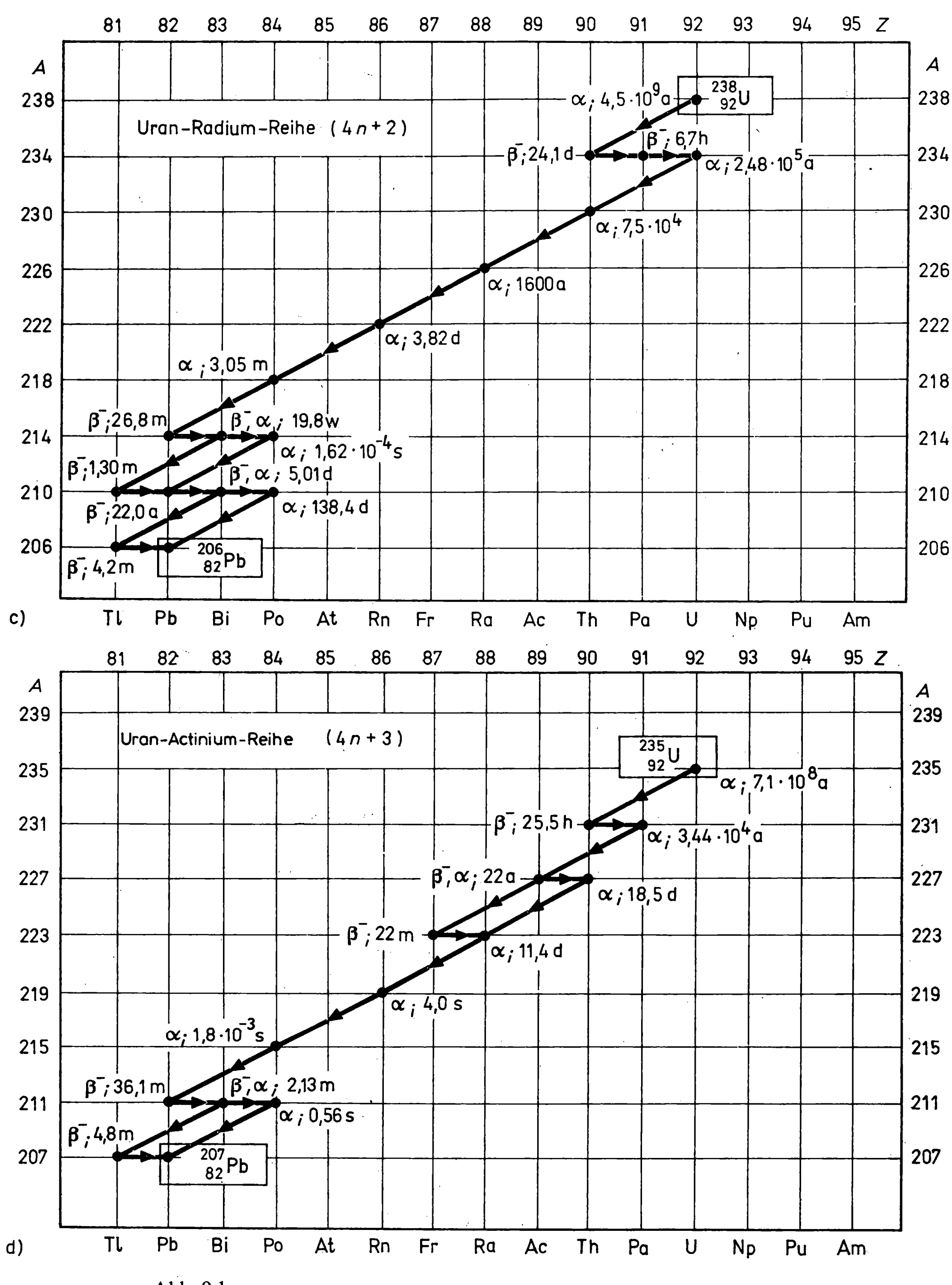


Abb. 9.1
Radioaktive Zerfallsreihen; Zeitangaben in $T_{1/2}$

Tabelle 9.3
Einige natürliche Radionuklide mit $Z < 82$

Mutter-nuklid	Tochternuklid	Zerfallsart	$T_{1/2}$/a	Bemerkung
$^{3}_{1}T$	$^{3}_{2}He$	β^-	12,26	Im Wasser 0,74 Bq/kg
$^{14}_{6}C$	$^{14}_{7}N$	β^-	$5,68 \cdot 10^3$	Im menschlichen Organismus 370 bis 3700 Bq
$^{40}_{19}K$	$^{40}_{18}Ar$, $^{40}_{20}Ca$	EE, β^-	$1,25 \cdot 10^9$	Im natürlichen Isotopengemisch 0,012%
$^{50}_{23}V$	$^{50}_{22}Ti$, $^{50}_{24}Cr$	EE, β^-	$6 \cdot 10^{15}$	
$^{87}_{37}Rb$	$^{87}_{38}Sr$	β^-	$5,25 \cdot 10^{10}$	
$^{148}_{62}Sm$	$^{144}_{60}Nd$	α	$1,2 \cdot 10^{13}$	
$^{187}_{75}Re$	$^{187}_{76}Os$	β^-	$6,2 \cdot 10^{10}$	

Tabelle 9.3a
Mittlere Aktivitätskonzentration und Dosisleistung im Boden sowie absorbierbare Dosisleistung 1 m darüber (siehe 12.4). In Klammern sind typische Schwankungsbereiche angegeben

Radionuklid	Mittlere Aktivitätskonzentration/$Bqkg^{-1}$	Mittlere Dosisleistung pro Aktivitätskonzentration/ 10^{-15} $Gyh^{-1}/Bqkg^{-1}$	Absorbierbare Dosisleistung 1 m über dem Erdboden/ 10^{-8} Gyh^{-1}
^{40}K	370 (100—700)	0,43	1,6 (0,4—3,0)
^{238}U [1])	25 (10—50)	4,27	1,1 (0,4—2,1)
^{232}Th [1])	25 (7—50)	6,62	1,7 (0,5—3,3)
Σ	420	11,32	4,4

[1]) Im radioaktiven Gleichgewicht mit allen Zerfallsprodukten der Reihe

Tabelle 9.3b
Mittlere Aktivitätskonzentrationen von Baumaterialien

Material	Aktivitätskonzentration/$Bqkg^{-1}$ ^{40}K	^{226}Ra	^{232}Th
Ziegel	690	70	70
Zement	240	50	40
Beton	510	60	40
Granit	1230	100	120
Putz	150	20	10

9.2. Zerfallsgesetze

9.2.1. Statistischer Charakter

1. In 2.6. wurde darauf hingewiesen, daß der radioaktive Zerfall ein spontaner, statistischer Prozeß ist. Zu dieser Erkenntnis kam 1905 E. VON SCHWEIDLER, als es ihm gelang, das 1903 von E. RUTHERFORD und F. SODDY formulierte Grundgesetz des radioaktiven Zerfalls (2.46) auf

statistischer Grundlage herzuleiten. Zu diesem Zweck wurde von ihm der Begriff der Zerfallswahrscheinlichkeit mit der Größe λ in (2.44) eingeführt. Er konnte zeigen, daß bei Zählmessungen mit Strahlen aus radioaktiven Quellen der Meßwert X in 68,3% der Messungen innerhalb der durch die Standardabweichung (5.12) vorgegebenen Fehlergrenzen

$$X \pm \sigma \tag{9.2}$$

liegt, in 31,7% außerhalb, wobei

$$\sigma = \sqrt{X} \tag{9.3}$$

ist. Dieses theoretische Ergebnis wurde 1906 durch K. KOHLRAUSCH und 1908 durch H. GEIGER mit Hilfe genauester Messungen experimentell bestätigt. Wir wissen heute, daß der radioaktive Zerfall der Poisson-Verteilung (5.15) gehorcht. Wenn die Zahl der Ereignisse X größer ist als 20, dann kann man die bequemere symmetrische Näherung der Gauß-Verteilung (5.25) nutzen.

2. Eine der wichtigsten Aufgabenstellungen der experimentellen Kernphysik ist die Messung der Aktivität A (2.43). Meist treten im Gefolge eines Zerfallsaktes mehrere Teilchen auf, neben α- oder β-Teilchen vor allem γ-Quanten, so daß A eine größere Zahl ist, als die mittlere Zahl der zerfallenden Kerne. Daher hat man zur Charakterisierung der Quelle streng zwischen den einzelnen Aktivitäten für diese Teilchen zu unterscheiden. Als Quellstärke bezeichnet man das Produkt aus der Aktivität und der pro Kernumwandlung emittierten Teilchen- oder Quantenzahl ν:

$$S = \nu A \,. \tag{9.4}$$

Zur Ermittlung der Aktivität einer Quelle geht man von dem Zusammenhang (5.1) zwischen der Zählrate N_r eines Detektors, seiner Effektivität η und der Aktivität aus:

$$N_r = \eta A = G f_A f_R f_S f_\tau f_u f_{eff} A \,. \tag{9.5}$$

Die Größe G wird Geometriefaktor genannt. Es ist das Verhältnis der im Raumwinkel Ω einfallenden Strahlung der Quelle zu der in den gesamten Raumwinkel 4π emittierten:

$$G = \frac{\Omega}{4\pi} \,. \tag{9.6}$$

Die mit f bezeichneten Faktoren dienen der Korrektur auf die verschiedenen, das Ergebnis verfälschenden Einflüsse. Der Absorptionsfaktor f_A berücksichtigt die Absorption der Strahlung zwischen Quelle und empfindlichem Detektorvolumen, der Rückstreufaktor f_R die Rückstreuung an der Detektoroberfläche, der Selbstabsorptionsfaktor f_S die Absorption in der Quelle, f_τ, der Auflösungsfaktor, die Zählverluste infolge endlicher zeitlicher Auflösung, f_U korrigiert auf Einstrahlungen aus der Umgebung und f_{eff} ist die Ansprechwahrscheinlichkeit des Detektors. Mit (9.5) ist eine Absolutbestimmung der Aktivität möglich, ebenfalls mit der in 12.1.1. besprochenen Koinzidenzmethode. Die meist verwendete Relativbestimmung wird in 12.3.5. beschrieben.

Neben der Aktivität wird oft auch die spezifische Aktivität benötigt, d. h. die auf die Massen-, Mengen- oder Volumeneinheit bezogene Aktivität

$$A_S = \frac{A}{m}; \quad \frac{A}{n}; \quad \frac{A}{V} \,. \tag{9.7}$$

Die Einheit ist je nach der Bezugsgröße Bq/kg, Bq/mol oder Bq/m^3. Zur Bestimmung der spezifischen Aktivität sind zwei Messungen erforderlich, die der Aktivität und die der Bezugsgröße. Daher ist der Fehler, der bei der Bestimmung von A_S gemacht werden kann, größer als der bei der Aktivitätsmessung.

3. Die Tatsache, daß ein Kern oder Zustand gleichzeitig mehrere Möglichkeiten des Zerfalls haben kann, wird durch unterschiedliche Zerfallskonstanten festgehalten. Da sich die Gesamtwahrscheinlichkeit aus der Summe der Einzelwahrscheinlichkeiten zusammensetzt, gilt

$$\lambda = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \,. \tag{9.8a}$$

Man nennt die λ_i die partiellen Zerfallskonstanten und die über (2.45) gebildeten τ_i die partiellen Lebensdauern. Entsprechend gibt es gemäß (2.47) die partiellen Halbwertszeiten $T_{1/2}(i)$ und in Übereinstimmung mit (2.3) die partiellen Zerfallsbreiten Γ_i, die sich zur Gesamtzerfallsbreite Γ wie die λ_i zu λ gemäß

$$\Gamma = \sum_{i=1}^{n} \Gamma_i \tag{9.8b}$$

zusammensetzen. Das Zerfallsgesetz (2.46) kann, da die Zerfallskanäle statistisch unabhängig voneinander sind, auf diese Weise für jeden Zerfallskanal getrennt aufgeschrieben werden:

$$N_i = N_{0i}\, \mathrm{e}^{-\lambda_i t}, \qquad A_i = A_{0i}\, \mathrm{e}^{-\lambda_i t}\,. \tag{9.9}$$

Für die partiellen Aktivitäten gilt

$$A_i = |-\dot{N}_i| = |-\lambda_i N_i| \tag{9.10}$$

und für die charakteristischen Parameter des partiellen Zerfallskanals

$$T_{1/2}(i) = \frac{\ln 2}{\lambda_i} = \tau_i \ln 2 = \frac{\hbar}{\Gamma_i} \ln 2\,. \tag{9.11}$$

4. Eine zweite wichtige Aufgabenstellung der experimentellen Kernphysik ist die Messung dieser, den Zerfall charakterisierenden statistischen Parameter für die Grund- und Anregungszustände. In vielen Fällen kann die dazu erforderliche Aktivität als Funktion von der Zeit direkt gemessen werden. In 9.6.2.4. ist eine Übersicht der Methoden für die Zustandsabregung gegeben.

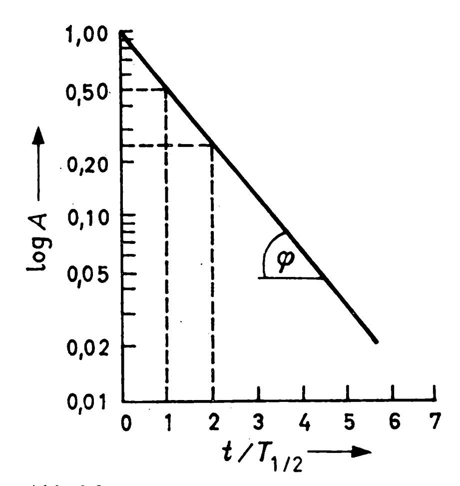


Abb. 9.2
Aktivitätskurve eines Radionuklids in logarithmischer Ordinateneinteilung als Funktion der Zeit in Einheiten der Halbwertszeit $T_{1/2}$

Die historisch gesehen erste Methode zur Ermittlung von $T_{1/2}$ ist die direkte Messung der Aktivität mit Stoppuhr und Detektor, bei kleinen Zeiten elektronisch und automatisiert. Sie eignet sich im Intervall zwischen Jahren und Bruchteilen von Sekunden. Infolge des exponentiellen Abfalls ergibt sich in einer halblogarithmischen Darstellung, wie sie die Abb. 9.2 zeigt, eine Gerade mit der Steigung $\lambda = \tan \varphi$. Den gesuchten Wert von $T_{1/2}$ ermittelt man auf der Zeitachse für die Differenz der Ordinatenwerte $A - A/2$.

Wenn die Halbwertszeit sehr groß ist, kann in annehmbaren Zeitabschnitten kein Aktivitätsabfall mehr festgestellt werden. Man setzt dann für N den aus der Nuklidmasse m, der relativen Atommasse A_r und der Avogadrokonstanten N_A berechenbaren Wert

$$N = \frac{mN_A}{A_r} \tag{9.12}$$

ein und erhält mit der gemessenen und korrigierten Zählrate $\dot{N}$

$$T_{1/2} = \frac{mN_A \ln 2}{A_r\dot{N}}. \tag{9.13}$$

Für Halbwertszeiten im Intervall zwischen ms bis hinab zu 0,1 ns eignet sich die Methode der verzögerten Koinzidenzen. Der Nullpunkt der Zeitmessung wird hier durch ein zeitsignifikantes Ereignis vorgegeben, das einen Zeitgenerator auslöst. Meist ist das ein Signal, das von einem Beschleunigerimpuls oder von einem Teilchen der betreffenden Kernreaktion abgeleitet wird. Das Stoppsignal liefert das Teilchen, dessen Zeitverzögerung festgestellt werden soll. Aus der Einsortierung aller Ereignisse dieser Art in ein Zeitspektrum ergibt sich der gesuchte Aktivitätsabfall.

9.2.2. Zerfallsketten

Beim Zerfall eines Zustandes können viele andere Zustände angeregt werden, die ihrerseits wieder zerfallen. Auf diese Weise kann eine ganze Kette von Zuständen entstehen, die durch Zerfall miteinander verbunden sind. Dabei kann es sich um Anregungs- und Grundzustände handeln. Im ersten Fall haben die Folgezustände niedrigere Energie als der Anfangszustand, im zweiten handelt es sich um verschiedene Nuklide. Ein Beispiel für den zweiten Fall sind die Nuklide der natürlichen Zerfallsreihen. Oft interessiert die Ab- und Zunahme der Aktivität der einzelnen Kettenglieder als Funktion der Zeit. Wir betrachten hier nur den einfachen Fall einer Folge von drei Zuständen mit den zerfallbaren Kernen oder Zuständen N_1, N_2 und N_3 sowie mit den Zerfallskonstanten $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \neq 0$ und $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Obgleich die folgenden Betrachtungen für Grund- und Anregungszustände Gültigkeit haben, werden wir der Kürze wegen nur von zerfallenden Nukliden sprechen. Die Zerfallskette wird symbolisch dargestellt durch

$$N_1 \xrightarrow{\lambda_1} N_2 \xrightarrow{\lambda_2} N_3 . \tag{9.14}$$

Zur Berechnung des An- und Abklingens der Aktivität von Mutter- und Tochternuklid gilt der Ansatz

$$\dot{N}_1 = -\lambda_1 N_1 ; \quad \dot{N}_2 = \lambda_1 N_1 - \lambda_2 N_2 . \tag{9.15}$$

Das negative Vorzeichen entspricht der Abnahme, das positive der Zunahme der Zahl der vorhandenen Kerne N_1 oder N_2. Die Lösung dieses Systems von zwei Differentialgleichungen ergibt mit der Anfangsbedingung $N_2(t = 0) = 0$

$$N_2(t) = N_1(0) \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} (e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}) \tag{9.16a}$$

und

$$A_2(t) = \lambda_2 N_2 = A_1(0) \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} (e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}) . \tag{9.16 b}$$

In der Praxis treten drei wichtige Spezialfälle auf:

a) $\lambda_1 > \lambda_2$, d. h. $T_{1/2}(1) < T_{1/2}(2)$. Für große Werte von t wird $e^{-\lambda_2 t} \gg e^{-\lambda_1 t}$, so daß in (9.16b) der erste Term in der Klammer vernachlässigt werden kann. Es ist dann

$$A_2(t) = A_1(0) \frac{\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{-\lambda_2 t} . \tag{9.17}$$

Wenn t klein ist, wächst $A_2(t)$ zunächst an, wie es in Abb. 9.3 gezeigt ist. Nach Erreichen eines Maximums erfolgt dann der Abfall gemäß (9.17).

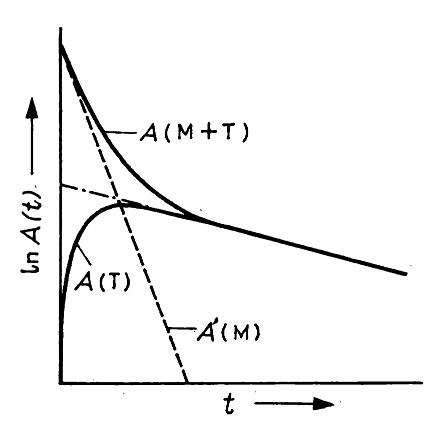


Abb. 9.3
Aktivitätsänderung von Mutter- und Tochternuklid A(M) und A(T) im Falle λ(M) > λ(T), d. h. $T_{1/2}$(M) < $T_{1/2}$(T)

b) $\lambda_2 > \lambda_1$, d. h. $T_{1/2}(2) < T_{1/2}(1)$. Hier wird für große Werte von t im Unterschied zu Fall a) der erste Term des Klammerausdrucks von (9.16) sehr viel größer als der zweite, so daß letzterer vernachlässigt werden kann. Der Abfall erfolgt dann mit λ_1 bzw. $T_{1/2}(1)$ gemäß

$$A_2(t) = A_1(0) \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{-\lambda_1 t} = A_1(t) \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} . \tag{8.18 a}$$

Zwischen Mutter- und Tochternuklid besteht das sogenannte dynamische oder gleitende radioaktive Gleichgewicht

$$\frac{A_2(t)}{A_1(t)} = \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} = \frac{N_2}{N_1} = \text{const.} \tag{9.18 b}$$

Es nehmen also, wie in Abb. 9.4 dargestellt, die Mengen von Mutter- und Tochternuklid im gleichen Verhältnis ab.

c) $\lambda_2 \gg \lambda_1$, d. h. $T_{1/2}(2) \ll T_{1/2}(1)$. Durch Vernachlässigung von λ_1 und $e^{-\lambda_1 t}$ in (9.16b) wird

$$A_2(t) = A_1(t) (1 - e^{-\lambda_2 t}) . \tag{9.19 a}$$

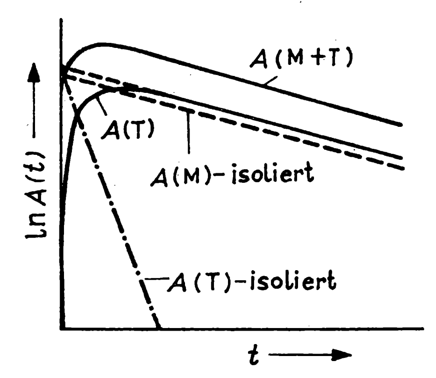


Abb. 9.4
Aktivitätsänderung von Mutter- und Tochternuklid A(M) und A(T) im Falle λ(M) < λ(T), d. h. $T_{1/2}$(M) > $T_{1/2}$(T)

Für große Werte von t ergibt sich

$$A_2(t) = A_1(t) \quad \text{und} \quad \lambda_2 N_2 = \lambda_1 N_1 \,. \tag{9.19b}$$

Man sagt, die beiden Nuklide befinden sich im dauernden radioaktiven Gleichgewicht. Die Abb. 9.5 zeigt die Aktivitäten in diesem Falle.

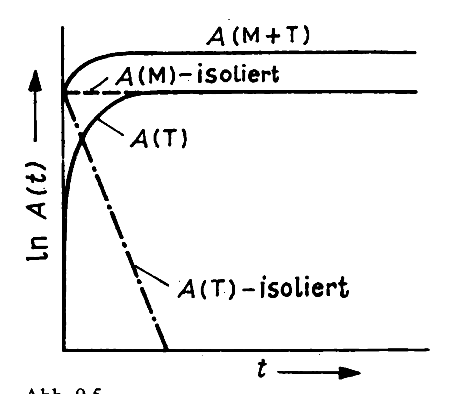


Abb. 9.5
Aktivitätsänderung von Mutter- und Tochternuklid A(M) und A(T) im Falle λ(M) ≪ λ(T), d. h. $T_{1/2}$(M) ≫ $T_{1/2}$(T)

9.3. Künstlich erzeugte Radioaktivität

1. Die Entdeckung, daß man radioaktive Nuklide künstlich erzeugen kann, wurde 1934 von Irene und F. Joliot Curie gemacht. Zu den ersten von ihnen verwendeten Reaktionen gehörte die Umwandlung

$$^{27}_{13}\mathrm{Al}(\alpha, n)\; ^{30}_{15}\mathrm{P} \xrightarrow[2{,}5\,\mathrm{min}]{\beta^+} {}^{30}_{14}\mathrm{Si}\,. \tag{9.20}$$

Sie bemerkten daß bei Wegnahme des α-Präparats zwar die Neutronen ebenfalls wegblieben, die β^+-Teilchen jedoch nicht.

In der Zwischenzeit ist bekannt, daß radioaktive Nuklide praktisch mit allen Elementarteilchen sowie mit allen Nukliden als Geschoßteilchen, d. h. mit γ, e, ν, n, p, d, t, ^{3}He, α, ... SI ... U erzeugt werden können, wenn diese nur die erforderliche Energie haben. Auf diese Weise können alle Nuklide, die zwischen dem Stabilitätsband und den Linien $E_B^{(p)} = E_B^{(n)} = 0$ existenzfähig sind erzeugt werden. Aus Abb. 2.1 kann man erkennen, daß es sich schätzungsweise um ca. 5000 Nuklide handelt.

2. Bei der künstlichen Erzeugung radioaktiver Nuklide in Kernreaktionen ist zu berücksichtigen, daß es wenig Sinn hat, sehr viel länger zu bestrahlen, als ein oder zwei Halbwertszeiten. Die zeitliche Änderung der Zahl der in einem Target von einer bestimmten Nuklidsorte erzeugten Kerne N_i berechnet sich aus der Erzeugungs- oder Produktionsrate der Kernreaktion $\Delta\dot{N}_i$, die in Übereinstimmung mit (2.51) $\sigma\dot{N}_0 N_S$ beträgt und, wenn das erzeugte Nuklid selbst wieder radioaktiv ist, auch aus der momentanen Aktivität des neuen Nuklids $A_i = \lambda_i N_i$ (9.10). Die Bilanz ergibt die Differentialgleichung

$$\dot{N}_i = \Delta\dot{N}_i - A_i \tag{9.21}$$

mit der Lösung

$$N_i = \frac{\Delta\dot{N}_i}{\lambda_i}(1 - e^{-\lambda_i t}) ; \qquad A_i = \Delta\dot{N}_i(1 - e^{-\lambda_i t}) . \tag{9.22}$$

Der Klammerausdruck ist in Abb. 2.3b dargestellt. Man sieht, daß bei einer Bestrahlungszeit von $3T_{1/2}$ bereits der Wert 0,8 erreicht ist. Meist wählt man kürzere Zeiten. Den Grenzwert für $t = \infty$ nennt man Sättigungsaktivität.

3. Die meisten der in der Praxis benötigten und in Kernreaktionen erzeugten Radionuklide werden in Kernreaktoren und an FF-Zyklotronen erzeugt. Sie befinden sich in der Nähe des Stabilitätsbandes, da sie bei relativ geringen Energien in (n, γ)-, (n, p)-, (p, n)-, (d, n)-, (d, α)- und (α, n)-Prozessen entstehen. Da hier die Zerfallsenergie noch nicht groß ist, zeichnen sich diese Nuklide meist durch große Halbwertszeiten aus. An Hand der Tabelle D3. kann man sich am Beispiel von Radionukliden, die dicht bei stabilen Nukliden gelegen sind davon überzeugen. Einige typische in Wissenschaft und Technik verbreitet eingesetzte Radionuklide sind in den Tabellen von Kapitel 12 aufgeführt. Manchmal ist man daran interessiert, nur kurzlebige Strahler zu erzeugen. Das ist z. B. oft bei der Aktivierungsanalyse oder in der Prozeßsteuerung der Fall. Dann eignen sich besonders Reaktionen mit schnellen Neutronen, die zu kurzlebigen Nukliden oder zur Anregung von Zuständen führen. Wir kommen darauf ebenfalls in Kapitel 12 zu sprechen.

4. Die vielen Radionuklide weit ab vom Stabilitätsband werden in Spallations- und Schwerionenreaktionen sowie durch Kernspaltung als Spaltprodukte erzeugt. Mit zunehmender Entfernung vom Stabilitätsband nimmt die Zerfallsenergie zu und damit die Halbwertszeit ab. Die Erzeugungsquerschnitte nehmen mit der Entfernung vom Stabilitätsband ebenfalls ab.

Neutronendefizite Kerne werden meist über Spallationsreaktionen mit Protonen und Neutronen von einigen hundert MeV Energie erhalten. Wenn die Synthesereaktionen mit schweren Ionen genutzt werden, dann muß die kinetische Energie der Geschoßteilchen größer als der Coulomb-Wall sein, d. h. etwa 10 MeV pro A. Je ein Beispiel für diese beiden Reaktionen, die auf das Nuklid $_{66}Dy_{83}$ führen können, sind $_{73}Ta_{108}(p, 8p\ 25n)^{149}Dy$ und $^{114}Cd\ (^{40}Ar, 5n)^{149}Dy$.

Nuklide auf der neutronenangereicherten Seite liefern hauptsächlich die Kernspaltung in Form der Spaltprodukte sowie die Austauschreaktionen mit schweren Ionen. Zwei Beispiele für letztere sind die Reaktionen $^{139}_{57}La_{82}(^{40}_{18}Ar_{22}, {}^{21}_{14}Si_7)^{150}_{53}J_{97}$ und $^{232}_{90}Th_{142}(^{15}_{7}N_8, {}^{8}_{2}He)^{239}_{95}Am_{144}$. Der Kern $^{8}_{2}He_6$ scheint das letzte gegen Neutronenemission aus dem Grundzustand stabile Heliumisotop zu sein (siehe 9.9.1).

Während sich die Nuklide der ersten Transurane noch durch Vielfacheinfang von Neutronen erzeugen lassen, kommt man zu den Isotopen der schweren transuranen Elemente nur noch über Schwerionen-Synthesereaktionen. Ein Beispiel, wie im VIK Dubna das Isotop 261 des Elements 107 synthetisiert wurde, sind die Reaktionen $^{209}_{83}Bi(^{54}_{24}Cr, 2n)$ und $^{209}_{82}Pb(^{55}_{25}Mn, 2n)$.

9.4. Alphazerfall

9.4.1. Experimentelle Ergebnisse und Methoden

1. Von der Entdeckung der radioaktiven Strahlen bis zur Aufklärung der Natur der α-Strahlen vergingen 12 Jahre. 1908 hatten E. RUTHERFORD und H. GEIGER endgültig bewiesen, daß α-Teilchen zweifach geladene Heliumatome sind. Einer der letzten Beweise bestand darin, daß Radongas, das selbst α-aktiv ist, in einer dünnwandigen Glasampulle eingeschmolzen und in Gasentladungsversuchen das Ansteigen der Intensität der Spektrallinien des Heliums beobachtet wurde.

2. Für das Experimentieren mit den α-Strahlen waren zwei weitere Erkenntnisse von größter Wichtigkeit. 1903 entdeckten J. ELSTER und H. GEITEL, daß schnelle α-Teilchen in lumineszierenden Substanzen Lichtblitze erzeugen. Das war die Grundlage für die zunächst visuelle Zählung der α-Teilchen mit dem 1903 von W. CROOKES entwickelten Spinthariskop und später auf elektronischem Wege mit dem Szintillationsdetektor. Das Spinthariskop bestand aus einem Zinksulfidschirm, in dem die Lichtblitze erzeugt und einem Mikroskop, durch das sie beobachtet wurden. Die zweite Erkenntnis bestand in der Feststellung, daß α-Teilchen auf ihrem Weg durch Luft deren Moleküle ionisieren und eine definierte Reichweite haben. Damit war die Grundlage für die Ionisationsdetektoren und über die Energie-Reichweite-Beziehung (4.12) die Möglichkeit für die Messung der Energie der α-Teilchen gegeben. Bis in die 30er Jahre wurden die α-Teilchen auf diese Weise spektrometriert. Die kinetischen Energien der α-Teilchen der natürlichen Zerfallsreihen bei Z oberhalb 82 und die dazugehörigen Reichweiten liegen in den Intervallen

$$4\ \text{MeV} \lesssim E_k(\alpha) \lesssim 9\ \text{MeV}\,; \qquad 3\ \text{cm} \lesssim R \lesssim 9\ \text{cm}\,. \tag{9.23}$$

Für die α-Strahler des Seltenerdgebiets fand man kleinere Werte zwischen 2 und 4,5 MeV.

Auch Proportionalzählrohre und Szintillationsdetektoren haben später breite Anwendung gefunden. Die relative energetische Auflösung von ca. einem bzw. mehreren Prozent ist zwar besser als die der Luft-Reichweite-Messung, aber längst nicht ausreichend. Daher fanden die magnetischen Spektrographen und Spektrometer große Verbreitung. Die damit heute erreichbare energetische Auflösung liegt für die α-Strahlen bei einigen hundert eV. Sehr bequem für die Laborpraxis sind die Hableiterdetektoren, deren energetische Auflösung für α-Strahlen bei einigen keV liegt. In Tabelle 9.4 werden die Eigenschaften der α-Spektrometer denen der β-Spektrometer gegenübergestellt (siehe auch 9.5.3. und 9.6.2.3.).

Tabelle 9.4
Charakteristika von α- und β-Spektrometern

Spektrometer, bzw. Detektor	Teilchenart	Relative energetische Auflösung $\Delta E/E$ in %	Lichtstärke $\Lambda/\%$
Ionisationskammern	α	0,7	≲50—100
Szintillationsdetektor	α (≈5 MeV)	5	≲50
	β (≈1 MeV)	5	≲50
Halbleiterdetektor	α (≈5 MeV)	0,3	≲50
	β (≈1 MeV)	0,2	≲50
Magnetspektrometer mit			
— inhomogenem Querfeld	α (≈7 MeV)	0,1	$\lesssim 2 \cdot 10^{-2}$
— inhomogenem Querfeld	β	0,1	$\lesssim 2 \cdot 10^{-2}$
— homogenem Längsfeld	β	0,4	≲ 2
— Kurzlinsen	β	2,5	≲ 5
— Toroidlinsen	β	1	≲40

3. Zu den ersten experimentellen Befunden über die α-Strahlen gehörte der Liniencharakter der Spektren. Die Abb. 9.6 zeigt ein Beispiel. In Übereinstimmung mit (B.93) kann daraus der Schluß gezogen werden, daß es sich um einen Zweiteilchenzerfall handelt, was zu der Zerfallsgleichung (2.26) berechtigt. Auf dieser Grundlage konnte die Energiebilanz des α-Zerfalls (6.52) und die Verteilung der Energie auf die beiden Zerfallsprodukte (6.54, 55) berechnet werden. Die Erarbeitung von Zerfallsschemata des α-Zerfalls wurde auch durch das Auftreten mehrerer α-Linien begünstigt. Dabei treten immer neben einer intensiven mehrere weniger intensive Linien auf. Man spricht von der Haupt- und von den Nebengruppen sowie von der Feinstruktur des α-Zerfalls. Die Energiedifferenz zwischen den Linien ist nach der Korrektur auf die Rückstoßenergie mit der Energiedifferenz zwischen den γ-Strahlen identisch, die den α-Zerfall begleiten. Das α-Spektrum von ^{208}At in Abb. 9.6a mit einer Haupt- und drei Nebengruppen entspricht dem Zerfallsschema von Abb. 9.6b sowie im Prinzip dem von ^{240}Pu in Abb. 9.7. In

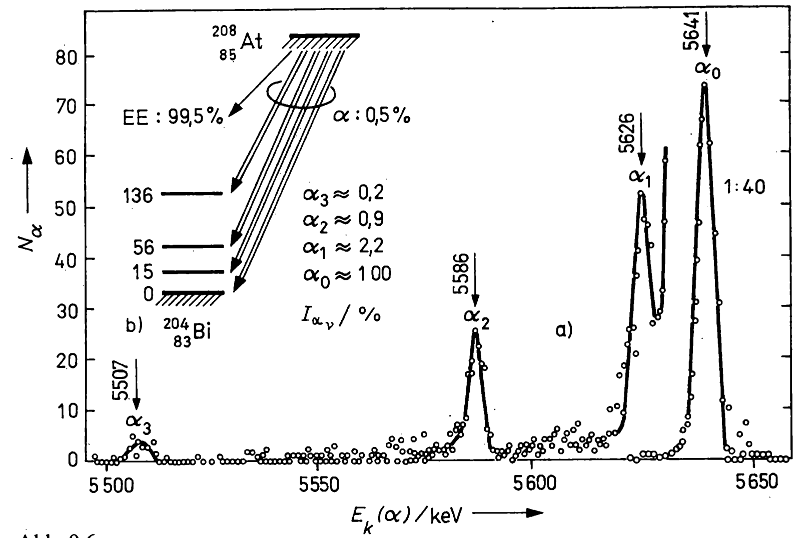


Abb. 9.6
α-Zerfall von ^{208}At: a) Linienspektrum mit vier α-Gruppen, aufgenommen mit Magnetspektrographen ($\Delta E_k \approx 5$ keV); b) Zerfallsschema des ^{208}At

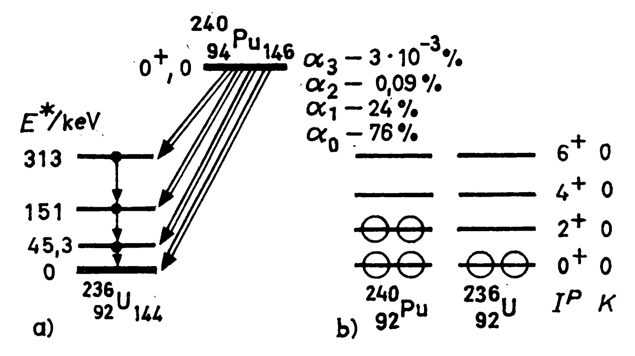


Abb. 9.7
Zerfallsschema des ^{240}Pu (a) und Nukleonenzustände (b)

einer Reihe von Fällen treten α-Gruppen auf, die sich nicht in das Zustandsschema des Tochterkerns einordnen lassen. In diesen Fällen liegen die Nebengruppen energetisch rechts von der Hauptgruppe. Man nennt sie zur Unterscheidung von den kurzreichweitigen die langreichweitigen α-Gruppen. Die Abb. 9.8 zeigt die Lösung des Problems. Der α-Zerfall erfolgt in diesen Fällen aus Anregungszuständen des Mutternuklids. Man kann die langreichweitigen α-Gruppen somit nur beobachten, wenn das Mutternuklid des betrachteten α-Zerfalls auch in den Anrengungszuständen erzeugt wird, d. h. entweder in Kernreaktionen oder im radioaktiven Zerfall.

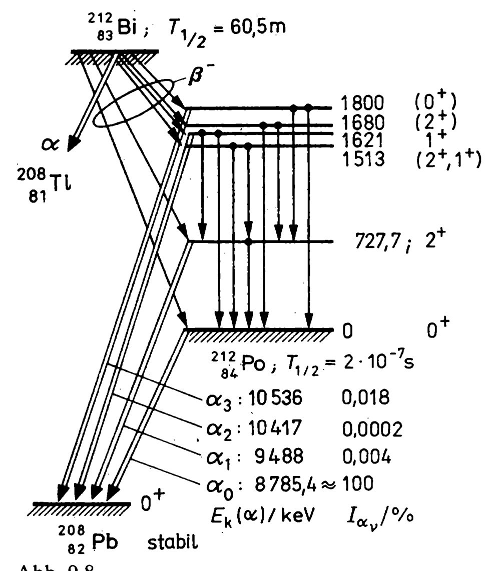


Abb. 9.8
Zerfallsschema von $^{212}_{83}$Bi und $^{212}_{84}$Po mit langreichweitigen α-Gruppen

4. Ein weiteres sehr wichtiges experimentelles Ergebnis betrifft die Halbwertszeiten und damit die Zerfallskonstanten der natürlichen α-Strahler. H. GEIGER und J. H. NUTTALL fanden 1911, daß die Zerfallskonstante λ der α-Strahler aller drei damals bekannten Zerfallsreihen mit der Reichweite R_α in Luft in einem eindeutigen Zusammenhang stehen, den man als Gesetz von GEIGER und NUTTALL bezeichnete:

$$\log(\lambda/\mathrm{s}^{-1}) = A' + B' \log(R_\alpha/\mathrm{cm})\,. \tag{9.24}$$

Die Konstante A' hat für alle drei Zerfallsreihen den gleichen Wert, während B' von Reihe zu Reihe Unterschiede von etwa 5% aufweist. Da Reichweite und kinetische Energie der α-Teilchen über (4.12), miteinander verbunden sind, kann man auch schreiben

$$\log(\lambda/\mathrm{s}^{-1}) = A + B \log(E_\mathrm{k}/\mathrm{MeV})\,. \tag{9.25}$$

Die Energien liegen dabei in dem in (9.23) angegebenen Intervall, während die Halbwertszeiten von 10^{-7} s bis zu mehr als 10^{15} Jahren reichen. Die Abb. 9.9 zeigt die Geiger-Nuttall-Kurven. Später wurde erkannt, daß auch die vierte Zerfallsreihe dem Gesetz von GEIGER und NUTTALL gehorcht.

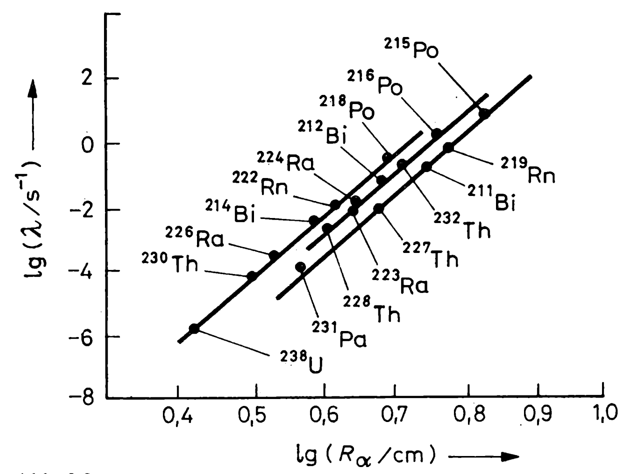


Abb. 9.9
Geiger-Nuttall-Kurven mit experimentellen Werten für die α-Strahler der drei langlebigen natürlichen Zerfallsreihen

5. An Hand der Analysen der kinematischen Größen des α-Zerfalls wurde nachgewiesen, daß alle klassischen Erhaltungssätze, d. h. der Energie-, Impuls-, Drehimpuls- und Ladungserhaltungssatz gelten. Darüber hinaus gilt auch der Baryonenerhaltungssatz (6.11). Auch die Parität ist bei allen α-Zerfällen eine Erhaltungsgröße, so daß sie gemäß (6.149) oder (6.151) berechenbar ist. Die innere Parität der α-Teilchen ist $+1$. Durch einen einfachen Beweis kann man zeigen, daß beim α-Zerfall der Isospin ebenfalls erhalten bleibt. T und T_z berechnet man gemäß (6.182) und (6.184) zu $T = |Z - A/2|$ und $T_z = (Z - N)/2$. Einsetzen in die Zerfallsgleichung (2.26) liefert die Idendität $|Z - A/2| = |Z - A/2|$. Aus der Tatsache der Gültigkeit des Satzes von der Isospinerhaltung im Verein mit der Paritätserhaltung muß der Schluß gezogen werden, daß der α-Zerfall über die starke Wechselwirkung abläuft. Bei der elektromagnetischen Wechselwirkung ist T keine, wohl aber T_z eine Erhaltungsgröße. Die schwache Wechselwirkung ist dadurch charakterisiert, daß weder T noch T_z Erhaltungsgrößen sind.

9.4.2. Elemente der Theorie des Alphazerfalls

1. Mit der einfachen Theorie des α-Zerfalls müssen vor allem die grundlegenden experimentell ermittelten Fakten erklärt werden können. Zu ihnen gehören neben den bereits in 9.4.1. angeführten auch die Feststellungen, daß die Kerne im Bereich des Stabilitätsbandes und in großen Abständen davon keine Nukleonen aus dem Grundzustand im radioaktiven Zerfallsprozeß emittieren, sondern nur die Nukleonenassoziation α-Teilchen und das auch nur in einigen wenigen Gebieten. Daß die Emission von Nukleonen nicht möglich ist, erkennt man an Hand von Abb. 8.4. Die am wenigsten gebundenen Nukleonen sitzen unmittelbar in der Nähe der Fermi-Energie. Diese liegt um die Separations- oder Bindungsenergie des Nukleons tiefer als der Nullwert des Kernpotentials. Ein radioaktiver Zerfall erfordert aber, daß z. B. ein Neutron mindestens auf dieses Nullniveau gehoben wird, damit es den Potentialtopf verlassen kann. Für die α-Teilchen gibt es eine Möglichkeit, auf ein solches Niveau gehoben zu werden, da bei ihrer Bildung aus vier Nukleonen von den oberen Zuständen die Bindungsenergie $E_B(\alpha)$ des α-Teilchens in dem betreffenden Mutterkern zur Verfügung steht.

In Übereinstimmung mit (2.25) ist der α-Zerfall nur möglich, wenn $E_Q(\alpha) > 0$ ist. Mit Hilfe von (6.53) läßt sich $E_Q(\alpha)$ als Funktion der Ruhenergien der beteiligten Kerne berechnen. In Abb. 9.10 ist das Ergebnis für einige Nuklide auf dem β-Stabilitätsband sowie für einige Hf- und U-Isotope dargestellt. Für die Nuklide des Stabilitätsbandes ist die Bedingung 2.25 erst oberhalb von $A = 140$ erfüllt. Daher treten natürliche α-Strahler auch erst von hier an auf.

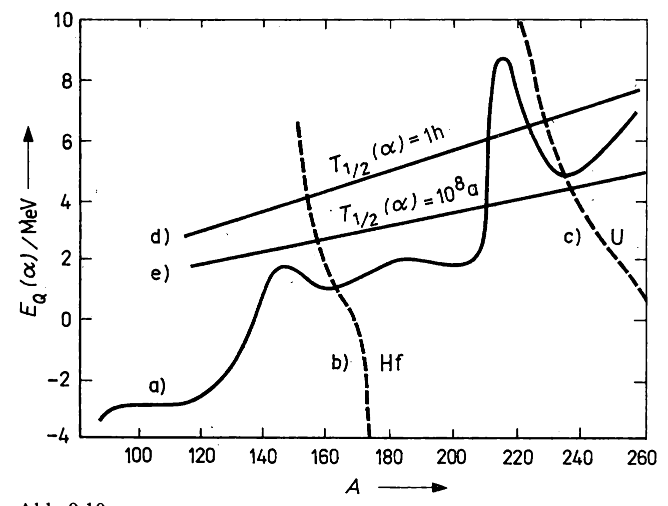


Abb. 9.10
α-Zerfallsenergie als Funktion von A: a) für Nuklide auf dem β-Stabilitätsband; b), c) für Hf- und U-Isotope und d), f) Halbwertszeit für Nuklide auf dem β-Stabilitätsband als Funktion von $E_Q(\alpha)$ und A

Bei $A = 140$ und 210 hat die Kurve $E_Q(\alpha)$ über A zwei ausgeprägte Maxima. Sie können mit Hilfe des Schalenmodells verstanden werden. Bei $A = 140$ steht das Maximum im Zusammenhang mit der Auffüllung der Neutronenzustände bis $N = 82$. $E_Q(\alpha)$ hat für Mutterkerne $N = 82$ allgemein bei einer magischen Nukleonenzahl ein Minimum. Danach nimmt $E_Q(\alpha)$ wieder zu, so daß auch die Wahrscheinlichkeit des α-Zerfalls zunimmt. Deshalb beginnt das α-Zerfallsgebiet der Elemente der seltenen Erden bei $N = 84$. Ähnlich erklärt man das Maximum bei $A = 210$, d. h. mit $Z = 84$.

2. Einen bestimmenden Einfluß auf die Wahrscheinlichkeit des α-Zerfalls übt offensichtlich das Verhältnis der Zahl der Protonen Z zu der der Neutronen N im Mutterkern aus. α-aktiv sind hauptsächlich neutronendefizite Kerne. Die Abb. 9.11 vermittelt eine Vorstellung von den Gebieten des α-Zerfalls. Als typisches Beispiel kann man die Holmium-Isotope anführen. Während das stabile ^{165}Ho 98 Neutronen enthält, sind es bei den α-aktiven Isotopen mit $A > 155$ weniger als 88. Zum Ausgleich des Neutronendefizits zerfallen diese Kerne vor allem auch über β^+-Zerfall und Elektroneneinfang in Richtung β-Stabilitätsband. Dabei handelt es sich um Umwandlungen, die in Konkurrenz zum α-Zerfall auftreten. Wenn sich die partiellen Halbwertszeiten stark voneinander unterscheiden, dann wird praktisch nur der Zerfall mit der kleineren Halbwertszeit beobachtet. Daher kann man den α-Zerfall nicht bei allen Nukliden ohne Schwierigkeiten nachweisen, für die die Bedingung $E_Q(\alpha) > 0$ erfüllt ist. Die Kurven d) und f) in Abb. 9.10 zeigen die Halbwertszeit des α-Zerfalls, die Nuklide des β-Stabilitätsbandes haben würden, wenn ihre α-Zerfallsenergie den auf der Ordinate ablesbaren Wert hätten. Man

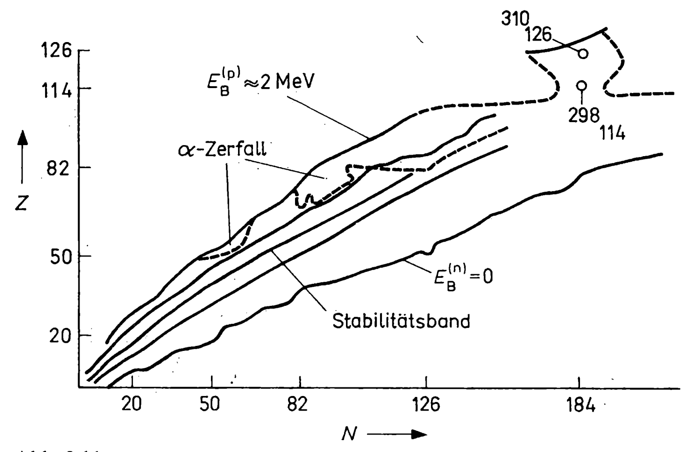


Abb. 9.11
α-Zerfallsgebiete im Z- über N-Diagramm

erkennt den steilen Anstieg von $T_{1/2}(\alpha)$, wenn $E_Q(\alpha)$ nur geringfügig kleiner wird. Die Berechnung der Halbwertszeit erfolgte hier gemäß (9.49). Welche Zerfallsart mit der größeren Wahrscheinlichkeit, also kleineren Halbwertszeit abläuft, hängt auch von den Wellenfunktionen des Anfangs- und Endzustandes ab und damit von der Kernstruktur. Im Falle der Ho-Isotope tritt der α-Zerfall praktisch erst 10 Neutronen vom Stabilitätsband entfernt auf. Bei ^{155}Ho hat der α-Zerfall eine partielle Halbwertszeit von 16 min, während der β^+-Zerfall und der E-Einfang gemeinsam 47 min haben. Die Halbwertszeit der dazwischen liegenden und sich nur über β^+-Zerfall und E-Einfang umwandelnden Ho-Isotope betragen Stunden und Minuten. Bei den schweren Nukliden tritt beginnend mit $A \approx 230$ als Konkurrenzprozeß zum α-Zerfall die spontane Spaltung auf. Für ^{230}Th ist das Verhältnis der Halbwertszeiten $T_{1/2}(f)/T_{1/2}(\alpha)$ größer, als $2 \cdot 10^{12}$, wobei $T_{1/2}(f) \gtrsim 1{,}5 \cdot 10^{17}$ a beträgt. Bei noch schwereren Nukliden wird $T_{1/2}(f)$ kleiner. So ist der Unterschied bei ^{246}Fm etwa ein Faktor 10, wobei $T_{1/2}(f) \approx 15$ s ist. Im Falle von ^{258}Fm mit $T_{1/2}(f) \approx 0{,}38$ ms wird kein α-Zerfall mehr beobachtet.

3. Ein weiteres experimentelles Ergebnis, das mit einer einfachen Theorie des α-Zerfalls erklärt werden konnte, ist das Gesetz von Geiger und Nuttall. In diesem Zusammenhang spielte ein Widerspruch eine Rolle, den 1927 E. Rutherford bemerkte. Er hatte festgestellt, daß die 8,8-MeV-Strahlen des ^{212}Po nicht in den ^{238}U-Kern eindringen können. Im Bilde des Kernpotentials, das für ^{238}U und α-Teilchen gemäß (3.13) eine Coulomb-Barriere von 31 MeV Höhe hat, ist das verständlich. Nicht verständlich ist dann aber, wieso das gleiche ^{238}U im radioaktiven Zerfall α-Teilchen mit einer Energie von 4,2 MeV emittieren kann. In Abb. 9.12 sind diese Verhältnisse dargestellt. Selbst wenn man annimmt, daß, wie in Punkt 1 besprochen, die α-Teilchen auf einen Zustand oberhalb 0 gehoben werden, dann bleibt die Antwort auf die Frage aus, wie sie über den Coulomb-Wall hinwegkommen.

Die Erklärung erfolgte mit Hilfe eines von G. A. Gamov sowie E. U. D. Condon und R. W. Henry 1928 zu diesem Zweck erstmals vorgeschlagenen und nur quantenmechanisch zu verstehenden Effekts, den Tunneleffekt. Danach bilden sich die α-Teilchen mit der Bildungswahrscheinlichkeit W_B. Die dabei freiwerdende Energie reicht aus, um sie auf einen Zustand bei 4,2 MeV zu haben. Dort stoßen sie mit einer Frequenz f gegen die Wände des Coulomb-Walls. Diese können und das ist die quantenmechanische Vorstellung, mit der Durchdringungswahr-

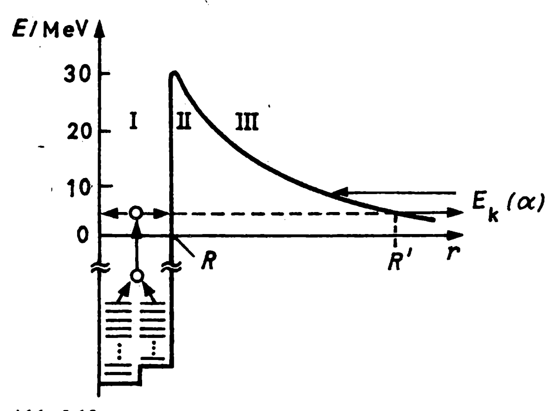


Abb. 9.12
Schematische Darstellung von α-Teilchenbildung und α-Zerfall durch Tunneleffekt

scheinlichkeit W_D durchtunnelt werden. Damit ergibt sich für die Berechnung der Zerfallskonstanten λ der Ansatz

$$\lambda = W_B f W_D = \lambda_0 W_D \,. \tag{9.26}$$

Die Durchdringungswahrscheinlichkeit, manchmal auch Transmissionskoeffizient genannt, ist das Verhältnis der Zahl der erfolgreichen zur Gesamtzahl der Durchtunnelungsversuche. Man bildet W_D über die Stromdichten, die ein Produkt aus der Teilchendichte und der Teilchengeschwindigkeit sind. Quantenmechanisch ist die Teilchendichte durch die Wahrscheinlichkeitsdichte $|\Psi|^2$ zu ersetzen:

$$j = |\Psi|^2 v \,. \tag{9.27}$$

Für den Übergang des α-Teilchens aus dem Gebiet I in Abb. 9.12 mit der Einfallsstromdichte j_I und der in Gebiet III mit der Auslaufstromdichte j_III ist

$$W_D = \frac{j_\mathrm{III}}{j_\mathrm{I}} = \frac{|\Psi_\mathrm{III}|^2 v_\mathrm{III}}{|\Psi_\mathrm{I}|^2 v_\mathrm{I}} = \frac{k_\mathrm{III}\,|\Psi_\mathrm{III}|^2}{k_\mathrm{I}\,|\Psi_\mathrm{I}|^2} \,. \tag{9.28}$$

Zwischen k und dem Impuls p einerseits und k und der Materiewellenlänge $\lambda\!\!\!^-$ andererseits besteht der bekannte Zusammenhang

$$k = \frac{p}{\hbar} = \frac{1}{\lambda\!\!\!^-} \,. \tag{9.29}$$

Geht man von einem dreidimensionalen sphärisch symmetrischen Potentialwall aus, in dem sich die α-Teilchen befinden sollen, dann kann die Beschreibung mit der separierbaren Wellenfunktion

$$\Psi = R(r)\,\Theta(\vartheta)\,\Phi(\varphi) = R(r)\,Y_l^m(\vartheta, \varphi) \tag{9.30}$$

erfolgen. Die Schrödinger-Gleichung kann in drei Komponentengleichungen aufgespalten werden, von denen infolge der sphärischen Symmetrie die Radialgleichung von besonderem Interesse ist:

$$R'' + \frac{2}{r} R' + \frac{2m}{\hbar^2}\left[E - V(r) - \frac{\hbar^2}{2m}\frac{l(l+1)}{r^2}\right] = 0 \,. \tag{9.31}$$

Hier sind E die gesamte kinetische Energie, $V(r)$ das Kern- und das Coulomb-Potential und der darauffolgende Term das Zentrifugalpotential $V_l(r)$ mit der Bahndrehimpulsquantenzahl l. Mit m ist die reduzierte Masse von α-Teilchen und Tochterkern bezeichnet. Setzt man für die von l abhängigen Lösungen den Ansatz

$$R_l = \frac{u_l}{r} \tag{9.32}$$

ein, dann lautet die Schrödinger-Gleichung

$$u_l'' + \frac{2m}{\hbar^2}[E - U(r)]\,u_l = 0\,, \tag{9.33}$$

wobei

$$U(r) = V_C(r) + V_l(r) \tag{9.34}$$

ist. Die Lösungen haben die Form

$$u_l(r) = \alpha\,e^{ikr} + \beta\,e^{-ikr}\,. \tag{9.35}$$

Im ersten Term stellen sie eine einlaufende, im zweiten eine auslaufende Welle dar. α und β sind Reflexionskoeffizienten. Die Lösungen und ihre Ableitungen müssen an den Grenzen zwischen den drei Gebieten stetig angepaßt werden. Aus ihnen bestimmt man das Verhältnis (9.28). Die aufwendige Rechnung wird in vielen Lehrbüchern der Quantenmechanik betrachtet, kann hier also weggelassen werden. Es ergibt sich

$$W_D = \exp\left(-\frac{2}{\hbar}\int_R^{R'}\sqrt{2m[U(r) - E]}\,dr\right) = e^{-G}\,. \tag{9.36}$$

Für $l = 0$, d. h. für $U(r) = V_C(r)$ mit $V_l(r) = 0$, läßt sich das Integral in geschlossener Form angeben. Die Gamov-Funktion G wird dazu in Faktoren dargestellt:

$$G = 2g\gamma\,, \tag{9.37}$$

wobei

$$g = \frac{R}{\lambda}\,; \qquad \gamma = \sqrt{\frac{V_C(R)}{E_k(\alpha)}}\arccos\sqrt{\frac{E_k(\alpha)}{V_C(R)}} - \sqrt{1 - \frac{E_k(\alpha)}{V_C(R)}}\,. \tag{9.38}$$

Die hier enthaltenen Variablen lassen sich leicht berechnen. Für $V_C(r)$ kann man durch Einsetzen der Konstanten einen recht guten Näherungswert

$$V_C = \frac{zZ\,e^2}{4\pi\varepsilon_0 R} \approx \frac{zZ}{A^{1/3}}\,\text{MeV} \tag{9.39}$$

erhalten. Für λ ergibt sich in nichtrelativistischer Näherung gemäß Anhang D.3 für $E_k \ll E_0$

$$\lambda = \frac{\hbar c}{\sqrt{2E_0E_k}} \approx 1{,}39\,\frac{10^{-13}}{\sqrt{E_0E_k}}\,m\,; \qquad E_0,\,E_k \;\text{ in }\; \text{MeV}\,. \tag{9.40}$$

Über eine Reihenentwicklung kommt man zu dem Näherungswert

$$G \approx \frac{zZ}{\sqrt{E_k(\alpha)}}\,. \tag{9.41}$$

Wenn in (9.36) $l \neq 0$, d. h. $V_l(r) \neq 0$ ist, dann werden die α-Teilchen mit einem von Null verschiedenen Bahndrehimpuls aus dem Kern emittiert. Die Zentrifugalbarriere ist dann zu berücksichtigen. Klassisch betrachtet ergibt sich aus der Zentrifugalkraft

$$-\frac{\partial V_l}{\partial r} = \frac{mv^2}{r} = \frac{m^2v^2r^2}{mr^3}. \tag{9.42}$$

In der Quantenmechanik gilt

$$-\frac{\partial V_l}{\partial r} = \frac{|l|^2}{mr^3} = \frac{\hbar^2 l(l+1)}{mr^3}. \tag{9.43}$$

Da die Integration von r^{-3} auf $-r^2/2$ führt, folgt damit

$$V_l = \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2mr^2}. \tag{9.44}$$

Auch für V_l läßt sich ein einfacher Näherungswert an der Stelle R angeben. Dabei wird berücksichtigt, daß wegen $m_\alpha \ll m_K$ anstelle der reduzierten Masse m_α eingesetzt werden kann, d. h. ein zu $A_1 = 4$ proportionaler Wert, und anstelle von r wegen $r = r_0 A^{-1/3}$ die Proportionalität $r^2 \sim A_2^{2/3}$. Mit den Zahlenwerten für die Konstanten erhält man

$$V_l \approx \frac{10\,l(l+1)}{A_1 A_2^{2/3}}\,\text{MeV}. \tag{9.45}$$

Einen Vergleich zwischen V_l und V_C für α-Teilchen liefert die Tabelle 9.5. Man kann zeigen, daß infolge der Ungleichung $\varrho \leqq R$ für den Stoßparameter ϱ der Bahndrehimpuls einen oberen Grenzwert

$$l \leqq \frac{R}{\lambda} \tag{9.46}$$

hat, der theoretisch bei 10 liegt, aber kaum erreicht wird. Selbst für diesen Wert erhält man aus (9.45) nur etwa 5 MeV. Hinzu kommt, daß $V_l(r)$ schneller abfällt als $V_C(r)$, so daß der Einfluß von $V_l(r)$ auf den α-Zerfall für viele Betrachtungen vernachlässigt werden kann.

${}^{A}_{Z}X$	V_C/MeV	$V_l(l = 1)$/MeV
${}^{27}_{13}Al$	1	0,56
${}^{64}_{28}Ni$	14	0,31
${}^{125}_{52}Te$	21	0,20
${}^{170}_{72}Hf$	26	0,16
${}^{238}_{92}U$	30	0,13

Tabelle 9.5
Vergleich von Coulomb- und Zentrifugalbarriere für α-Teilchen mit $l_\alpha = 1$ in der Näherung (9.39, 45)

Nachdem nun W_D in (9.26) bekannt ist, soll λ_0 betrachtet werden. Die Berechnung der Stoßfrequenz erfolgt über die Zeit $\tau = 1/f$, die ein α-Teilchen benötigt, um den Kern einmal zu durchqueren, d. h.

$$f = \frac{1}{\tau} = \frac{v}{2R}. \tag{9.47}$$

Die Bildungswahrscheinlichkeit zu berechnen, ist nicht einfach und ist bisher auf der Grundlage einer einwandfreien Theorie auch noch nicht gelungen. Aus Vergleichen mit den experi-

mentellen Ergebnissen zu λ kann aber entnommen werden, daß W_B z. B. für alle gg-Kerne im Grundzustand und in den niederenergetischen Anregungszuständen den gleichen Wert hat, der sich von 1 nur unwesentlich unterscheidet. Man kommt so auf Werte von

$$\lambda_0 = 10^{20}/\text{s} . \tag{9.48}$$

Für ^{238}U-Kerne, die gerade nach der Lebensdauer von $6{,}5 \cdot 10^9$a zerfallen bedeutet das, daß die entsprechenden α-Teilchen ca. 10^{38}mal gegen den Potentialwall stoßen.

Ein Vergleich des Ergebnisses (9.26) mit den für λ_0 und W_D erhaltenen Ergebnissen (9.36) und (9.48) mit der Formel von GEIGER und NUTTALL (9.24) zeigt gute Übereinstimmung. Durch Logarithmieren von (9.26) mit den gefundenen Funktionen (9.36, 48) erhält man

$$\log \lambda = \log \lambda_0 + \frac{B}{\sqrt{E_k(\alpha)}} = A + \frac{B}{\sqrt{E_k(\alpha)}}, \tag{9.49}$$

wobei A und B wie in (9.24) Konstanten sind, die nur wenig von Z abhängen. Für die Energien der natürlichen α-Strahler ergeben sich aus (9.24) und (9.49) nahezu gleiche Werte.

4. Der α-Zerfall kann auch auf Anregungszustände der Tochterkerne gerichtet sein, wie es die Abb. 9.7 zeigt. Dabei ist die Intensität auf die höher gelegenen Zustände sehr gering. Dieser experimentelle Befund steht in Übereinstimmung mit der extrem starken Abhängigkeit der Zerfallswahrscheinlichkeit λ von der kinetischen Energie $E_k(\alpha)$, wie sie in (9.49) enthalten ist. Für die Übergänge zwischen den Grundzuständen macht sie sich dadurch bemerkbar, daß die α-Teilchen von den schwereren Kernen mit 9 MeV praktisch sofort nach der Bildung emittiert werden, während die Halbwertszeit der etwas leichteren mit 4 MeV so groß wird, daß der α-Zerfall nicht mehr festgestellt werden kann. Das ist der Grund, weshalb der α-Zerfall in dem großen Gebiet oberhalb von $A = 140$ von Abb. 9.10 nicht beobachtet wird, obgleich $E_Q(\alpha) > 0$ ist.

5. Die hier dargestellte Theorie des α-Zerfalls enthält neben λ, Z und $E_k(\alpha)$ auch den Kernradius R. Da die drei ersten Parameter heute aus einer großen Zahl von α-Zerfällen auch für künstlich erzeugte α-Strahler bekannt sind, hat man R für viele Kerne über λ ermitteln können. Für den Parameter r_0 in $R = r_0 A^{1/3}$ ergibt sich daraus der Wertebereich

$$r_0 = (1{,}45 - 1{,}50) \cdot 10^{-15}\ \text{m}, \tag{9.50}$$

d. h. die obere Grenze der mit Hilfe von (6.30) berechneten Werte. Die Ursache dafür kann in der Tatsache gesehen werden, daß die α-Strahler meist kein sphärisch-symmetrisches Potential haben, wie es bei der Herleitung von (9.36, 49) vorausgesetzt wurde. Vielmehr handelt es sich um deformierte Kerne.

6. Die Betrachtungen der Grundlagen der Theorie des α-Zerfalls zeigen, daß es noch weit ist bis zur vollständigen Beschreibung. In diesem Zusammenhang sind neue experimentelle Befunde von Interesse, die Anlaß zu neuen Modellvorstellungen geben. Dazu gehören die Zerfälle $^{222}_{88}$Ra und ^{224}Ra in $^{208}_{82}$Pb und ^{210}Pb unter Emission von $^{14}_{6}$C sowie von $^{231}_{91}$Pa in $^{207}_{81}$Tl unter Emission von $^{24}_{10}$Ne. Im Rahmen eines Modells, in dem der α-Zerfall als extrem asymmetrische spontane Kernspaltung aufgefaßt wird, sind viele bisher unbekannte Zerfallskanäle zu erwarten. Die experimentellen Untersuchungen zum Nachweis der neuen Zerfallsprodukte sind allerdings sehr schwierig, da die Zerfallswahrscheinlichkeiten weit unterhalb der des α-Zerfalls liegen. Hier haben sich besonders Festkörperspurdetektoren bewährt, eine Detektorart, die in den letzten Jahren intensiv entwickelt worden ist.

9.4.3. Alphazerfall und Kernstruktur

1. Während in (9.26) der Faktor W_D nur von der Wechselwirkung der α-Teilchen mit dem Coulomb-Wall abhängt, ist die Kernstruktur, d. h. unter anderem die Verteilung der Nukleonen auf ganz bestimmte Zustände, in dem Faktor λ_0 enthalten, anders ausgedrückt, in der Bildungswahrscheinlichkeit für die α-Teilchen. Damit liefert W_D den Zugang zur Kernstruktur. Für die gg-Kerne gibt es, wie bereits dargelegt wurde, gute Übereinstimmung zwischen Theorie und Experiment hinsichtlich λ. α-Zerfälle, für die das uneingeschränkt zutrifft, nennt man erleichterte oder unbehinderte Übergänge. Im Unterschied dazu gibt es die erschwerten oder behinderten Übergänge. In diesen Fällen ist $W_D \ll 1$. Zur Beschreibung dieses Sachverhalts hat man den Hinderungsfaktor

$$F = \frac{T_{1/2,\,\mathrm{exp}}}{T_{1/2,\,\mathrm{theor}}} \tag{9.51}$$

eingeführt. Für uA-Kerne ist F etwa 10^2, für uu-Kerne etwa 10^3. Die Gründe für $F \gg 1$ können verschiedener Natur sein. Die wichtigste Ursache ist der Unterschied in der Struktur von Anfangs- und Endzustand. Wir betrachten einige Beispiele dazu.

2. Die Anregungszustände auf die der α-Zerfall gerichtet ist, gehören in den meisten Fällen der Rotationsbande des Grundzustandes an. Das hängt mit der guten Übereinstimmung der Struktur von Anfangs- und Endzustand zusammen. Bei den gg-Kernen ist im Grundzustand $K, I^\pi = 0, 0^+$. Das deutet darauf hin, daß die beiden Neutronen und Protonen, die das α-Teilchen bilden, auf Nilsson-Zuständen mit $\Omega_{nn} = 0$ und $\Omega_{pp} = 0$ eingebaut sind. Die Bildung ist um so wahrscheinlicher, desto mehr die Wellenfunktionen von Anfangs- und Endzustand übereinstimmen, d. h. desto mehr es gleiche Quantenzahlen gibt. Bei der Bildung der α-Teilchen mit $\Omega_{nn} = \Omega_{pp} = 0$ sind die Umstellungen minimal, so daß Zustände mit gleichem Ω bevorzugt sind. Ebenso ist es mit den Anfangs- und Endzuständen von Mutter- und Tochterkernen. Auch hier wird maximale Übereinstimmung der Wellenfunktionen bevorzugt. Im Falle des ^{240}Pu von Abb. 9.7 liegt im Grundzustand $K, I^\pi = 0, 0^+$ vor. Das α-Teilchen hat bekanntlich ebenfalls $I^\pi = 0^+$. Seine Bildung ist also erleichtert. Der Tochterkern $^{226}_{92}$U hat im Grundzustand auch $K, I^\pi = 0, 0^+$. Die Anregungszustände der Rotationsbande des Grundzustandes, die sich durch die gleiche innere Struktur auszeichnen, haben $0, 2^+$; $0, 4^+$ und $0, 6^+$. Die Übergänge sind durch $\Delta K = 0$ und $P_i/P_f = +1$ charakterisiert.

3. Beim α-Zerfall des $^{232}_{92}$U auf die Zustände des $^{228}_{90}$Th, dessen Zustandsschema die Abb. 9.13 zeigt, werden außer den Zuständen der Grundzustands-Rotationsbande von ^{228}Th mit $K, I^\pi = 0, 0^+$; $0, 2^+$; $0, 4^+$ und $0, 6^+$ auch die Zustände der Vibrationsbande mit $K, I^\pi = 0, 1^-$; $0, 3^-$; $0, 5^-$; also Zustände mit Birnenform angeregt. Dabei ist zu beachten, daß in Übereinstimmung mit (8.176) die Zustände mit

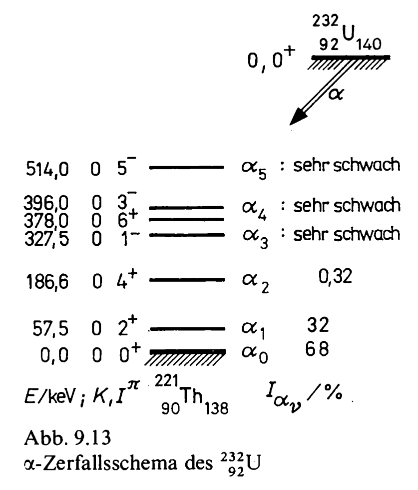


Abb. 9.13
α-Zerfallsschema des $^{232}_{92}$U

$I^\pi = 3^-$ und 5^- Rotationszustände sind, die auf dem echten Vibrationszustand mit 1^- aufbauen. Sie haben also alle drei die gleiche innere Struktur. In Anbetracht der für den α-Zerfall doch schon sehr großen Energieunterschiede zwischen den Anregungszuständen von bis zu 0,5 MeV ist die Anregung sehr schwach. Die negative Parität der Zustände kann mit Hilfe der Bahndrehimpulsabhängigkeit der Parität gemäß (6.149) erklärt werden, wenn $l = l_\alpha \neq 0$ ist. In diesen Fällen muß es zu einer Strukturänderung kommen, die mit $P_i/P_f = -1$ zu $F \gg 1$ führt.

4. Als erstes Beispiel für den α-Zerfall eines uA-Kerns soll der in Abb. 9.14 dargestellte Fall das $^{233}_{92}$U erörtert werden. Für alle uA-Kerne ist I halbzahlig, bei den deformierten Kernen wird der innere Kernspin durch Ω vorgegeben. Im Falle des ^{233}U werden die Grundzustandscharakteristika durch das 141. Neutron mit $\Omega = 5/2$ bestimmt. K, I^π ergeben sich zu 5/2, $5/2^+$. Die Übergänge auf die Grundzustandsbande mit $\Delta K = 0$, $P_i/P_f = +1$ haben die relativ großen Intensitäten 14,7; 1,5 und 0,06%. Ganz im Unterschied dazu sind die Intensitäten der α-Gruppen, die auf die Zustände der Rotationsbande des Neutronen-Einteilchenzustandes bei 29,1 keV als Kopfzustand der Bande mit ebenfalls $K = 5/2$, aber mit negativer Parität aufbauen, nur 0,3; 0,1 und 0,01%. Diese Behinderung wird offensichtlich durch $P_i/P_f = -1$ bewirkt.

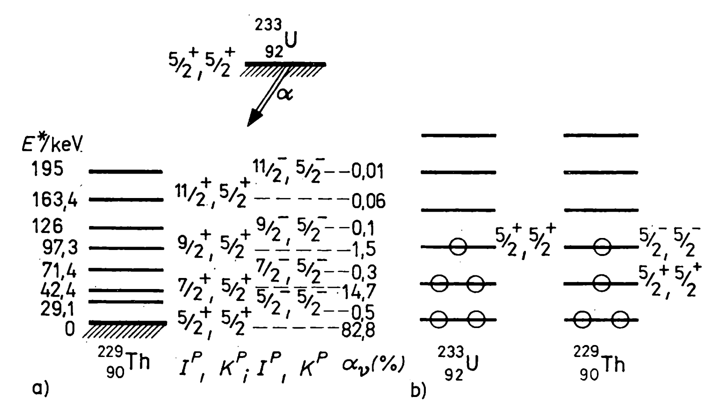


Abb. 9.14
α-Zerfallsschema des $^{233}_{92}$U

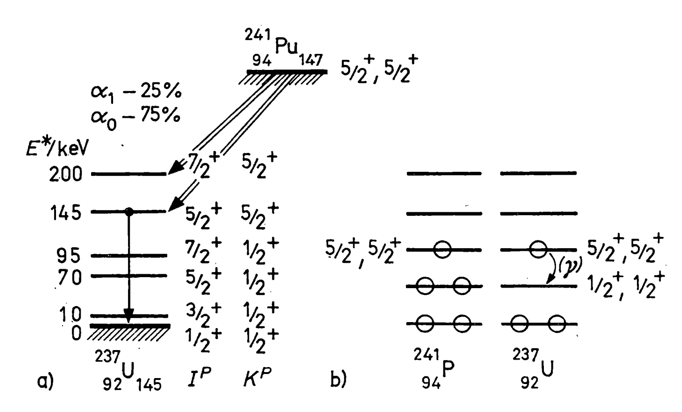


Abb. 9.15
α-Zerfallsschema des $^{241}_{94}$Pu

Einen zweiten sehr aufschlußreichen α-Zerfall eines uA-Kerns zeigt die Abb. 9.15 mit dem α-Zerfallsschema von ^{241}Pu. Im Grundzustand ist $\Omega_n = 5/2$; K, I^π ergeben sich zu 5/2, 5/2$^+$. Der Tochterkern hat im Grundzustand K, $I^\pi = 1/2$, 1/2$^+$. Übergänge mit $\Delta K = \Delta\Omega = 2$ sind verboten. Eine andere Zerfallsmöglichkeit bietet sich auf die Rotationszustände des Neutronenkopfzustandes bei 145 keV mit K, $I^\pi = 5/2$, 5/2$^+$ und 5/2, 7/2$^+$ an. Die beobachteten Intensitäten des α-Zerfalls auf diese Zustände sind im Maße der Übereinstimmung der Wellenfunktionen 75 und 25 %. Die Abregung der beiden Zustände erfolgt durch Emission von γ-Quanten, so daß schließlich der Kern auf diese Weise in den Grundzustand mit K, $I^\pi = 1/2$, 1/2$^+$ gelangt, wobei das ungepaarte Neutron auf den entsprechenden Nilsson-Zustand rutscht.

9.5. Betazerfall

9.5.1. Arten des Betazerfalls

1. Im Unterschied zum α- und zum γ-Zerfall wird beim β-Zerfall kein Linienspektrum beobachtet, wie es die Abb. 9.16 zeigt. Diese Entdeckung machte J. Chadwick 1914 durch Absorptionsmessungen der Elektronen des Betazerfalls. Die Maximal- oder Grenzenergie $E_{k,\,max}(e)$ erwies sich als charakteristische Größe der β-aktiven Nuklide. Sie liegt zwischen einigen keV und einigen MeV.

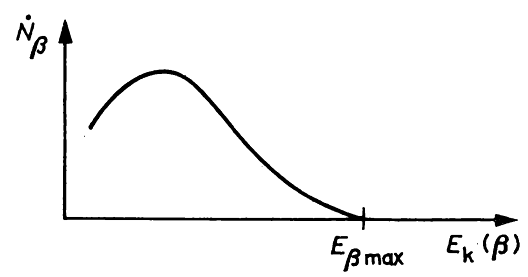


Abb. 9.16
Kontinuierliches Teilchenspektrum beim β-Zerfall

Aus dem kontinuierlichen Charakter des β-Spektrums können zunächst zwei Schlüsse gezogen werden. Entweder handelt es sich in Übereinstimmung mit B.3.5. um einen Mehrteilchenzerfall, für den die Gleichungen (B.93) nicht gelten, weil die Zerfallsenergie in statistischer Verteilung auf die Produktteilchen konzentriert wird, oder der Energiesatz gilt prinzipiell nicht beim β-Zerfall. Der zweite Schluß würde bedeuten, daß der beim β-Zerfall eines Nuklids auftretende Energiebetrag keinen festen Wert hat. Andererseits stehen aber die Ruhenergien von Mutter- und Tochterkern eindeutig fest, und damit ist auch die Zerfallsenergie eine konstante Größe. Die Gültigkeit des Energiesatzes beim β-Zerfall wurde auch durch die Energieverhältnisse beim Doppelzerfall von Nukliden bestätigt, wie er z. B. bei der Thoriumverzweigung[1]) auftritt:

$$^{212}\mathrm{Bi} \nearrow {}^{212}\mathrm{Po} \searrow {}^{208}\mathrm{Pb}, \qquad ^{212}\mathrm{Bi} \searrow {}^{208}\mathrm{Tl} \nearrow {}^{208}\mathrm{Pb}.$$

In beiden Fällen gilt $E_{k,\,max}(e) - E_k(\alpha) = 11{,}20$ MeV.

[1]) Eine historische Bezeichnung, die an den Zerfall von ThC in ThC′ und ThC″ erinnert (siehe Übersicht auf S. 509).

Der zweite Schluß würde auch die Verletzung des Impulssatzes bedeuten. Man müßte z. B. in der Nebelkammer wegen der entgegengesetzt gleich großen Impulse die Emission von Tochterkern und β-Teilchen in entgegengesetzten Richtungen beobachten können. Das ist aber nur ganz selten der Fall. Hinzu kommt noch ein zweiter Widerspruch. Zu Beginn der Untersuchungen zum β-Zerfall schien es, als würde auch der Drehimpuls-Erhaltungssatz verletzt. Da uA-Kerne und Elektronen halbzahligen Spin haben, müßte der β-Zerfall eines ug-Kerns auf einen gu-Kern mit ganzzahligem Spin führen. Solche gu-Kerne gibt es aber nicht.

Die Lösung dieser Widersprüche wurde durch die Annahme erreicht, daß der β-Zerfall ein Dreiteilchenzerfall ist. Allerdings stellte sich eine neue Schwierigkeit ein. Das dritte Teilchen, das 1931 hypothetisch von W. PAULI eingeführt und von E. FERMI den Namen Neutrino, d. h. kleines Neutron bekommen hatte, war zuvor nie beobachtet worden. Man schrieb ihm verschwindende Ruhenergie $E_0(\nu) = 0$ und die Ladung $z(\nu) = 0$ zu. Der direkte Nachweis des Neutrino gelang erst 1955 (Siehe 9.5.2.). Die Zerfallsgleichung haben wir bereits als Gleichung (2.9) aufgeschrieben.

2. Der β-Zerfall unterscheidet sich auch in einer zweiten Hinsicht sehr wesentlich vom α-Zerfall, indem er in drei verschiedenen Arten auftritt. Neben dem β^--Zerfall gibt es noch den β^+-Zerfall und den Elektronen-Einfang. Der β^+-Zerfall wurde 1934 von IRENE und F. JOLIOT-CURIE entdeckt, als sie die andere bereits besprochene wichtige Entdeckung machten, daß man radioaktive Nuklide künstlich in Kernreaktionen erzeugen kann. In (9.20) ist ein Beispiel eines solchen Zerfalls angeführt. Man sieht, daß das Tochternuklid eine um eine Einheit kleinere elektrische Ladung hat als das Mutternuklid. An die Stelle des elektronischen Antineutrinos in (2.9) tritt beim β^+-Zerfall in Übereinstimmung mit dem Satz von der Erhaltung der Leptonenzahl (6.13a) ein elektronisches Neutrino. In den Abbn. 9.17a, b sind je ein Zerfallsschema für β^-- und β^+-Zerfall dargestellt. Die Zerfallsgleichungen (2.9a) und (2.9b) sind nicht anders zu deuten, als daß beim β^+-Zerfall ein Kernproton in ein Kernneutron und beim β^--Zerfall ein Kernneutron in ein Kernproton umgewandelt werden. Daraus leiten sich für das Kernnukleon die Umwandlungsgleichungen

$$n \to p + e^- + \bar{\nu}_e\,, \tag{9.52a}$$

$$p \to n + e^+ + \nu_e \tag{9.52b}$$

ab. Den β-Zerfall auf Nukleonen-Quark-Niveau zeigt die Abb. 9.18. Ein Zerfall gemäß (9.52a) tritt auch beim freien Neutron auf. Infolge seiner im Vergleich zum Proton etwas größeren Ruhenergie zerfällt es durch β^--Zerfall. Die Halbwertszeit ist 10,37 Minuten. Das freie Proton kann wegen (2.24, 25), also aus energetischen Gründen nicht gemäß (9.52b) zerfallen.

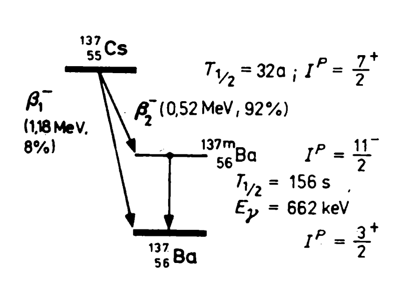


Abb. 9.17a
Zerfallsschema des $^{137}_{55}$Cs

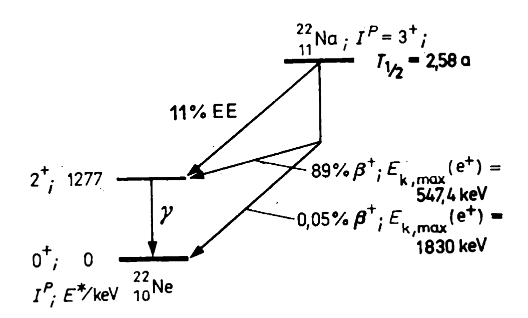


Abb. 9.17b
Zerfallsschema des $^{22}_{11}$Na

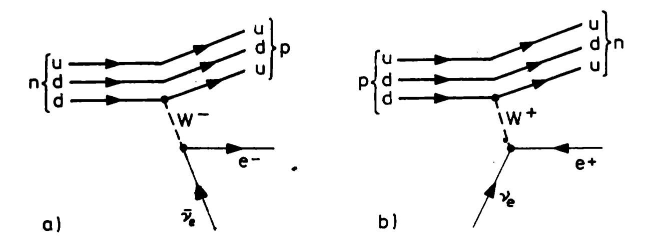


Abb. 9.18
β^+-(a) und β^+-(b) Zerfall durch Quarkänderung mit virtuellen W^--, bzw. W^+-Bosen (hier ist die Abszisse die Zeitachse)

Die Umwandlung eines Kernprotons in ein Kernneutron ist auch durch den Einfang eines Hüllenelektrons möglich. Dabei geht die Reaktion

$$e^- + p \rightarrow n + \nu_e \tag{9.53}$$

vor sich, was für den Kern gleichbedeutend ist mit

$$e^- + {}^A_Z X_N \rightarrow {}_{Z-1}^{\ A} X_{N+1} + \nu_e \,. \tag{9.54}$$

Da der Elektronen-Einfang, abgekürzt EE, am intensivsten von der dem Kern am nahesten gelegenen K-Schale erfolgt, spricht man oft nur vom K-Einfang (KE). Die Abb. 9.19 zeigt eine schematische Darstellung des Effekts. Man sieht, daß die Aufenthaltswahrscheinlichkeit $W(r) = |\Psi(r)|^2$ des Elektrons auch im Kernbereich endliche Werte hat. Für die K-Schale sind sie am größten. Über die Zerfallsgleichung (9.54) läßt sich die Energiebilanz des E-Einfangs aufschreiben. Da beim E-Einfang die Ruhenergien des Mutterkerns $E_{\text{Atom}}(Z, A) - ZE_0(\text{e})$ und des eingefangenen Elektrons $E_0(\text{e})$ in die Ruhenergie des Tochterkerns $E_{\text{Atom}}(A, Z-1) - (Z-1)\,E_0(\text{e})$ übergehen, ergibt sich die Zerfallsenergie zu

$$\begin{aligned} E_Q(\text{EE}) &= [E_{\text{Atom}}(A,Z) - ZE_0(\text{e}) + E_0(\text{e})] - [E_{\text{Atom}}(A,Z-1) - (Z-1)\,E_0(\text{e})] \\ &= [E_{\text{Atom}}(A,Z) - E_{\text{Atom}}(A,Z-1)] > E_{\text{B}}^{(\text{e})} \end{aligned} \tag{9.55 a}$$

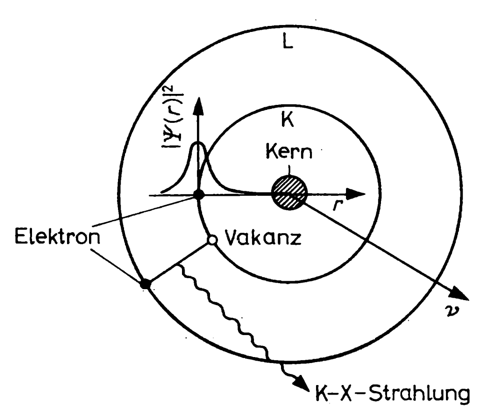


Abb. 9.19
Schematische Darstellung des Elektroneneinfangs

und mit den kinetischen Energien

$$E_Q(EE) = E_\nu + E_k(A, Z - 1) > E_B^{(e)}. \tag{9.55b}$$

Im Gegensatz zum β^+-Zerfall, der nur möglich ist, wenn gemäß (6.63) $E_Q(\beta^+) \geqq 2E_0(e) = 1{,}022$ MeV ist, kann der E-Einfang immer dann ablaufen, wenn die Zerfallsenergie größer ist als die Bindungsenergie des einzufangenden Elektrons. Über die Impulsanalyse kann man sehr leicht zeigen, daß infolge der großen Masse des Tochterkerns die Rückstoßenergie $E_k(A, Z - 1)$ sehr klein ist und in (9.55b) vernachlässigt werden kann. Die Energie des Neutrinos ergibt sich dann aus (9.55) mit

$$\Delta E_0(A, Z, Z - 1) = E_{\text{Atom}}(A, Z) - E_{\text{Atom}}(A, Z - 1) \tag{9.56}$$

über

$$E_\nu + E_k = E_Q(EE) - E_B^{(e)} \tag{9.57}$$

zu

$$E_\nu = \Delta E_0(A, Z, Z - 1) - E_B^{(e)} = E_Q(\beta^+) + 2E_0(e) - E_B^{(e)}. \tag{9.58a}$$

Manchmal schreibt man diese Gleichung mit Hilfe der Ruhenergien der beteiligten Kerne auf. Dann erhält man anstelle von (9.58a) die Beziehung

$$E_\nu = E_Q(\beta^+) + E_0(e) - E_B^{(e)}. \tag{9.58b}$$

Für die Bindungsenergie kann man die tabellierten Werte einsetzen. Den analytischen Zusammenhang mit den Parametern des Atoms erkennt man aus dem Ausdruck, der in der Bohrschen Theorie für die K-Schale erhalten wurde:

$$E_B^{(K)} = \frac{Z^2 e^2}{8\pi\varepsilon_0 a_0}; \qquad a_0 = \frac{4\pi\varepsilon_0 \hbar^2}{E_0(e)}. \tag{9.59}$$

Diese Gleichung bestätigt, daß die Neutrinoenergie für einen gegebenen Übergang konstant ist.

Der E-Einfang führt zu einer Vakanz in der betreffenden Schale der Hülle. Diese wird entweder strahlungslos, d. h. durch Auger-Effekt aufgefüllt, oder aber unter Aussendung der charakteristischen Röntgenstrahlung des Tochterkerns als K-X-, L-X-Strahlung usw.

3. Ebenso wie für die anderen Zerfallsarten gelten auch für den β-Zerfall die klassischen Erhaltungssätze für Energie, Impuls, Drehimpuls und elektrische Ladung. Daß Baryonenerhaltung gemäß (6.11) vorliegt, steht außer Zweifel. Bisher gibt es auch keine Anzeichen dafür, daß der Satz von der Erhaltung der Leptonenladung verletzt wird. (Im Rahmen der großen einheitlichen Theorie der Elementarteilchen (siehe 14.9.) wird eine solche Verletzung geradezu gefordert.) Hinsichtlich Isospin und Parität gibt es im Vergleich zum α-Zerfall eine neue Situation: Weder die Projektion des Isospins noch der Isospin selbst sind Erhaltungsgrößen des β-Zerfalls. Durch Einsetzen von $|Z - A/2|$ gemäß (6.184) und $T_z = |Z - N/2|$ gemäß (6.182) in die Zerfallsgleichung (9.2) erhält man $|Z - A/2| \neq |Z + 1 - A/2|$ und $(Z - N)/2 \neq (Z + 1 - N + 1)/2$. Da bei der starken Wechselwirkung T und T_z Erhaltungsgrößen sind, bei der elektromagnetischen nur T_z, kann der β-Zerfall nicht über diese Wechselwirkungen ablaufen. Er wird von der schwachen Wechselwirkung beherrscht. Diese hat eine erst 1956 beim β-Zerfall nachgewiesene Eigenschaft, die bei den anderen fundamentalen Wechselwirkungen nicht auftritt: Die räumliche Parität ist hier keine Erhaltungsgröße mehr (siehe 9.5.7.).

4. Eine im Prinzip denkbare Zerfallsart ist der doppelte β-Zerfall (2β), der einen Kern mit A, Z, N in einen mit A, $Z \pm 2$, $N \mp 2$ überführen soll. Da die Behandlung der Grundlagen eng mit den Eigenschaften von Neutrino und Antineutrino zusammenhängt, wird der 2β-Zerfall in 9.5.2., Punkt 4, besprochen.

5. Im Zusammenhang mit dem β-Zerfall gewinnt der Begriff des Antiteilchens an Bedeutung. Unsere Vorstellungen über Teilchen und Antiteilchen haben sehr praktische Konsequenzen.

Die beim β-Zerfall auftretenden Leptonen sind im allgemeinen relativistische Teilchen. Für Neutrino und Antineutrino als masselose oder nur äußerst gering massebehaftete Teilchen gilt das immer, für Elektronen und Positronen fast immer, da sie nur selten im Zusammenhang mit dem β-Zerfall kleine Energien haben, denn meist ist die β-Zerfallsenergie von der Größenordnung 1 MeV. Als Spin-1/2-Teilchen müssen sie mit der relativistisch invarianten Dirac-Gleichung beschrieben werden. In der relativistischen Physik ist die Gesamtenergie E eines Teilchen gemäß (2.16) aus einem Wurzelausdruck zu berechnen, der zwei Vorzeichen hat. In der Dirac-Gleichung werden daher neben Wellenfunktionen von Zuständen mit positiver Energie $\psi(+E)$ auch solche von Zuständen mit negativer Energie $\psi(-E)$ zugelassen. Darin besteht gerade eine Schwierigkeit der Dirac-Theorie, denn die Zustände mit positiver Energie sollten in die mit negativer zerfallen. Daher wird nach Dirac angenommen, daß alle Zustände mit negativer Energie normalerweise besetzt sind. Erst wenn ein Teilchen fehlt, kann das Loch durch eine zum Teilchen entgegengesetzt gleich große Ladung bemerkt werden. Dieses Loch wird mit dem Antiteilchen identifiziert. Physikalisch betrachtet ist die Löchertheorie der Antiteilchen unbefriedigend, da sie von einer unendlich großen Teilchenzahl aller Fermionen ausgeht. Eine Verallgemeinerung auf alle Bosonen würde bedeuten, daß diese ebenfalls unendlichfach vorhanden sein müssen.

Eine widerspruchsfreie Deutung ist 1940 von G. A. Zisman vorgeschlagen worden. Danach ist unter einem + Antiteilchen ein Teilchen zu verstehen, das sich in die Vergangenheit bewegt, also in die negative Zeitrichtung. Diese Interpretation verlangt keine Annhame über die Zustände des physikalischen Vakuums in der Form eines Sees mit besetzten negativen Energiezuständen und zwar unabhängig davon, ob es sich um Fermionen oder Bosonen handelt. Zur Beschreibung derartiger Teilchen eignen sich die in Anhang C betrachteten Feynman-Diagramme. In Abb. 9.20 sind die Feyman-Diagramme des Neutronen-β-Zerfalls und das Protonen-β-Zerfalls im Kern dargestellt. Das Antineutrino ist ein in der Zeit zurücklaufendes Neutrino, das Positron ein in der Zeit zurücklaufendes Elektron. Auf dieser Grundlage kann man auch den Umkehrprozeß zum β-Zerfall aufschreiben:

$$n \to p + e^- + \bar{\nu}_e ; \qquad p \to n + e^+ + \nu_e , \tag{9.60a, b}$$

$$\nu_e + n \to p + e^- ; \qquad \nu_e + p \to n + e^+ . \tag{9.60c, d}$$

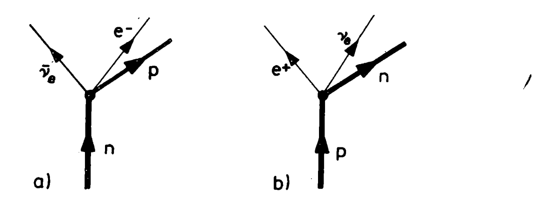


Abb. 9.20
Feynman-Diagramme des Neutronen-β-Zerfalls und des Protonen-β-Zerfalls im Kern

Man sieht, daß in diesen Gleichungen das Lepton nur auf die andere Seite gebracht werden kann, wenn es dabei durch sein Antiteilchen ersetzt wird. Auf diese Weise kann man Prozeß und Umkehrprozeß mit einer einheitlichen Formel beschreiben:

$$n + \nu_e \to p + e^- , \tag{9.61a}$$

$$p + e^- \to n + \nu_e . \tag{9.61b}$$

Diese Formulierung bedeutet, daß ein Nukleon in ein anderes Nukleon und ein Lepton in ein anderes Lepton umgewandelt werden. Je nachdem, in welcher Zeitrichtung man den rechten Graphen liest, sind ν_e und e als Teilchen oder Antiteilchen aufzufassen. Wenn es sich um geladene Teilchen handelt, dann bedeutet die Umkehr der Zeitrichtung eine Umkehr des Vorzeichens der Ladung. Nach E. Fermi stellt

man z. B. das Elektron durch eine ebene Welle dar. Wenn es, wie in Abb. 9.20, nach rechts läuft, dann lautet die Wellenfunktion

$$\psi(x, t) = \exp \frac{i}{\hbar} (px - Et) . \tag{9.62}$$

Der Übergang auf Zustände mit negativer Energie bedeutet den Ersatz von E durch $-E$. Im Exponenten von (9.62) ist das gleichbedeutend mit positivem E und Ersatz von t durch $-t$, d. h., ein Teilchen mit positiver Energie läuft in der Zeit zurück. Für ein Elektron in einem magnetischen Feld kann man die Bewegungsgleichung entsprechend umschreiben:

$$m\dot{\boldsymbol{v}} = -q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B} = -q \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t} \times \boldsymbol{B} = q \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}(-t)} \times \boldsymbol{B} . \tag{9.63}$$

Teilchen mit negativer Ladung und positiver Energie verhalten sich genauso wie Teilchen mit positiver Ladung und negativer Energie. Diese Erkenntnis ist die Grundlage dafür, daß Teilchen mit negativer Energie als Antiteilchen mit positiver Energie aufgefaßt werden können.

9.5.2. Neutrinos

1. Die ersten Versuche, die Existenz des Neutrinos nachzuweisen waren indirekter Natur. Man versuchte es über den Rückstoß der Tochterkerne. Der erste realisierbare Vorschlag kam 1936 von A. I. Leipunskij. Die Grundidee bestand im Nachweis der Rückstoßatome eines leichten β-Strahlers mit Hilfe eines elektrischen Feldes. Die radioaktiven ^{11}C-Atome waren gemeinsam mit den ^{12}C-Atomen eines CO_2-Gases an der gekühlten Innenfläche eines Vakuumgefäßes adsorbiert. Durch den Rückstoß beim β-Prozeß wurden sie zum Teil in das Gefäß gestoßen, wo sie nach Durchlaufen eines Gegenfeldes nach einem Gitter nachgewiesen wurden. Der von mehreren Autoren durchgeführte Versuch brachte nur qualitative Ergebnisse.

Von A. I. Alichanjan und A. I. Alichanjanov kam ebenfalls 1936 der Vorschlag, den E-Einfang zum indirekten Neutrinonachweis über den Rückstoß des Tochterkerns zu nutzen. Für den Rückstoßimpuls findet man

$$p_R = -p_\nu = \sqrt{2m(A, Z-1, N+1)\, E_k(A, Z-1, N+1)} . \tag{9.64}$$

Da die Energie und damit auch der Impuls des Neutrinos beim K-Einfang konstant sind, müssen auch die Rückstoßkerne alle die gleiche Energie haben. Beim Zerfall

$$^7_4\mathrm{Be} \xrightarrow[53{,}6\,\mathrm{d}]{\mathrm{KE}} {}^7\mathrm{Li}; \qquad E_Q = 0{,}86\ \mathrm{MeV} < 2E_0(\mathrm{e}) \tag{9.65}$$

ergibt sich eine kinetische Energie von 57,3 eV. In Versuchen dieser Art mit ^7_3Li in der Nebelkammer und auch mit elektrischen Gegenpotentialen zum Messen des Ionenstromes wurden die Neutrinos so ebenfalls indirekt nachgewiesen.

2. Der direkte Nachweis des Neutrinos konnte erst in den 50er Jahren geführt werden, als an Kernreaktoren sehr starke Antineutrinoströme aus dem β^--Zerfall der Spaltprodukte zur Verfügung standen. Im ersten von F. Reines und C. L. Cowan vorgeschlagenen und durchgeführten Experiment wird davon ausgegangen, daß die Reaktion (9.60d) der Umkehrprozeß des Neutronenzerfalls (9.60a) ist. Als Targetkerne wurden die Protonen des Wasserstoffs in zwei 200-l-Wassertanks benutzt. Es waren insgesamt $N_p = 2 \cdot 1{,}1 \cdot 10^{28}$ Protonen. Die Anordnung ist in Abb. 9.21 dargestellt. Bei Erzeugung der Positronen wurden die Annihilationsquanten mit insgesamt 1,022 MeV mit Hilfe von drei 5400-l-Szintillationsdetektoren nachgewiesen. Die Stromdichte der Antineutrinos betrug $j = 1{,}2 \cdot 10^{13}/\mathrm{cm}^{-2}\ \mathrm{s}^{-1}$. Der Nachweis der Neutronen erfolgte nach ihrer Abbremsung in der Targetflüssigkeit, wozu etwa 10 μs benötigt wurden, über die Neutroneneinfangsreaktion $^{113}Cd(n, \gamma)^{114}Cd$. Die Energie aller in dieser Reaktion auftreten-

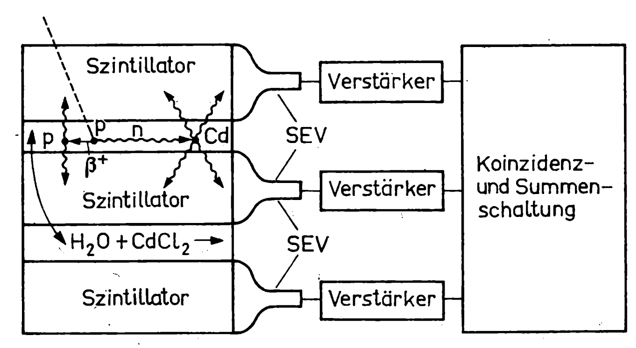


Abb. 9.21
Versuchsschema zum Antineutrino-Nachweis nach F. Reines und C. L. Cowan

den γ-Quanten beträgt 9,1 MeV. Auf diese Summe wurde das Spektrometer eingestellt. Die Koinzidenzrate für die Ereignisse mit 1,022 und 9,1 MeV beträgt $\dot{N}_K = (1{,}5 \pm 0{,}1)/\mathrm{h}$, die Zählеffektivität für Positronen und Neutronen betrug $\varepsilon_{\beta^+} = 0{,}15 \pm 0{,}02$ und $\varepsilon_n = 0{,}17 \pm 0{,}06$. Damit ergab sich ein Wirkungsquerschnitt von

$$\sigma = \frac{\dot{N}_K}{jN_p\varepsilon_n\varepsilon_\beta} = \left(1{,}2 \begin{array}{l} +0{,}7 \\ -0{,}4 \end{array}\right) \cdot 10^{-43}\ \mathrm{cm}^2\,. \tag{9.66}$$

Dieser experimentelle Wert befindet sich in guter Übereinstimmung mit dem über die Theorie des Betazerfalls berechneten.

3. Nach dem Gesetz von der Erhaltung der Leptonenzahl (6.13a) muß es Neutrinos und Antineutrinos geben. Die Frage war berechtigt, ob sie sich auch unterscheiden lassen. Zum Nachweis der Nichtidendität von Neutrino und Antineutrino führte R. H. Davis zwischen 1955 und 1960 ein von B. M. Pontecorvo vorgeschlagenes Experiment mit den Antineutrinos an einem Kernreaktor durch. Im Falle unterschiedlicher Teilchen darf die Reaktion

$$\bar{\nu}_e + n \rightarrow p + e^- \tag{9.67a}$$

nicht ablaufen, denn in (9.60) finden wir sie nicht unter den möglichen Reaktionen. Als günstigsten Targetkern hatte Pontecorvo ^{37}Cl vorgeschlagen, das im Versuch in 11700 l CCl_4 enthalten war. Die Reaktion lautete

$$\bar{\nu}_e + {}^{37}_{17}\mathrm{Cl} \rightarrow e^- + {}^{37}_{18}\mathrm{Ar} \xrightarrow{\mathrm{EE}} {}^{37}_{17}\mathrm{Cl} + \nu_e\,. \tag{9.67b}$$

Der Vorteil dieser Targetwahl besteht darin, daß sich Argon als Edelgas sehr leicht aus der großen Targetmaterialmenge auswaschen und über den Elektronen-Einfangsprozeß nachweisen läßt. Die Schwellenergie der Reaktion (9.67b) ist mit 0,81 MeV größer als die Energie der auftretenden Neutrinos des E-Einfangs von ^{37}Ar. Über die Aktivitätsmessung des abgetrennten Argons konnte ein oberer Grenzwert des Wirkungsquerschnitts von $\sigma < 9 \cdot 10^{-46}\ \mathrm{cm}^2$ angegeben werden. Bei einem Vergleich mit (9.66) zeugt er davon, daß die Reaktion kaum abläuft, also Neutrinos und Antineutrino unterschiedliche Teilchen sind. Man spricht in diesem Zusammenhang vom zweikomponentigen Neutrino oder der zweikomponentigen Theorie des Neutrinos.

4. Der bereits in 9.5.1., Punkt 4, erwähnte doppelte β-Zerfall geht in seiner ursprünglichen, 1935 von Maria Goeppert-Mayer vorgeschlagenen Form von der Umwandlung zweier Kernneutronen oder -protonen in zwei Kernprotonen oder -neutronen aus. Wenn Neutrino und Antineutrino unterschiedliche

Teilchen sind, was wir durch unterschiedliche Leptonenzahl $L_e = \pm 1$ ausdrücken, und wenn diese eine Erhaltungsgröße ist, dann könnte der Zerfall gemäß

$$^{A}_{Z}X_N \rightarrow {}^{A}_{Z\pm 2}X_{N\mp 2} + 2e^{\mp} + \begin{matrix} 2\bar{\nu}_e \\ 2\nu_e \end{matrix} \tag{9.68a}$$

ablaufen. Wenn aber Neutrino und Antineutrino identische Teilchen sind, wie das 1937 von E. Mayorana angenommen wurde, oder die Leptonenzahl keine Erhaltungsgröße ist, dann ist der in (9.60) nicht enthaltene Prozeß (9.67a) möglich, so daß ein beim Zerfall eines ersten Neutrons entstehendes Antineutrino von einem zweiten Neutron absorbiert werden kann, also ein doppelter β-Zerfall ohne Neutrinoemission möglich wird, wie er gleich 1937 von G. Racah vorgeschlagen wurde:

$$^{A}_{Z}X_N \rightarrow {}^{A}_{Z\pm 2}X_{N\mp 2} + 2e^{\mp}\,. \tag{9.68b}$$

Die Energiebilanz lautet unter Berücksichtigung einer möglicherweise von Null verschiedenen Ruhenergie des Neutrinos, die in den letzten Jahren ins Auge gefaßt wird:

$$E_Q(2\beta^-_{2\bar{\nu}}) = E_k(Z+2, A) + E_{k,\max}(e) + 2E_0(\bar{\nu}_e) \tag{9.69a}$$

$$E_Q(2\beta^-_{0\bar{\nu}}) = E_k(Z+2, A) + E_{k,\max}(e) \tag{9.69b}$$

$$E_Q(2\beta^+_{2\nu}) = E_k(Z-2, A) + E_{k,\max}(e) + 2E_0(\nu_e) + 4E_0(e) \tag{9.69c}$$

$$E_Q(2\beta^+_{0\nu}) = E_k(Z-2, A) + E_{k,\max}(e) + 4E_0(e) \tag{9.68d}$$

Der $2\beta^+$-Zerfall kann auch teilweise (β^+, EE) oder gänzlich (2EE) über den E-Einfang ablaufen.

Die theoretische Beschreibung des 2β-Zerfalls im Rahmen der Theorie der schwachen Wechselwirkung legt die Auswahlregeln $\Delta Q = \pm 1$, $\Delta S = 0$ und $\Delta L_e = 0$, bzw. $\Delta L_e = 2$ im Falle des 2ν-, bzw. 0ν-2β-Zerfalls fest. Zur Erfassung des Maßes der Nichterhaltung der Leptonenzahl beim $2\beta_{0\nu}$-Zerfall führt man einen Parameter η ein, der die Extremalwerte $\eta = 0$ bei maximaler Nichterhaltung der Leptonenzahl und damit maximaler Erhaltung der räumlichen Parität, bzw. $\eta = 1$ bei Erhaltung der Leptonenzahl, also Nichterhaltung der räumlichen Parität annimmt. Die 2β-Zerfallswahrscheinlichkeit in dieser Zweinukleonenvariante hängt für den $2\beta_{2\nu}$-Übergang von $E_{\beta,\max}$ ab, für den $2\beta_{0\nu}$-Prozeß aber von der Neutrino-Ruhenergie und von η. Daher müssen in Übereinstimmung mit den experimentellen Daten vernünftige Annahmen gemacht oder eine der Größen aus mehreren Experimenten eliminiert werden.

Existenz oder Nichtexistenz des 2β-Zerfalls, insbesondere des $2\beta_{0\nu}$-Zerfalls bedeuten eine Antwort auf prinzipielle Fragestellungen der modernen Theorie der fundamentalen Wechselwirkung. So wird im Rahmen der großen einheitlichen Theorie der Elementarteilchen auf der Basis der $SU(5)$-Gruppe (siehe 14.9.) Nichterhaltung von Leptonen- und Baryonenzahl gefordert; lediglich die Differenz $B-L$ soll erhalten bleiben. Quarks und Leptonen gehören dann zu einem Teilchenmultiplett, so daß selbst das Proton nicht mehr stabil gegen Zerfall ist. Die Halbwertszeiten des Protons auf der Grundlage dieser einheitlichen Wechselwirkung werden zu 10^{29}—10^{32} Jahren abgeschätzt. Die Schwierigkeiten der Beobachtung derartiger Zerfälle liegt auf der Hand: Bei einer Lebensdauer von 10^{30} a sind in 1 Tonne Stoff 0,6 Zerfälle pro Jahr zu erwarten, d. h. $6 \cdot 10^8$ Zerfälle in 10^9 a. Ihre Atomkonzentration würde dann 10^{-19} Atome/Atom betragen.

Gegenwärtig gibt es drei Modelle des 2β-Zerfalls (siehe Abb. 9.22): Die Zweinukleonen-Variante im Rahmen der Theorie der schwachen Wechselwirkung, die Variante der superschwachen Wechselwirkung und die Baryonenresonanzvariante im Rahmen der $SU(5)$-Eichgruppe der großen einheitlichen Theorie der Elementarteilchen. Wir können hier zu jeder von ihnen nur einige wenige Bemerkungen machen. Von besonderem Interesse ist der neutrinolose 2β-Zerfall. Im Rahmen der gewöhnlichen schwachen Wechselwirkung kann der $2\beta_{0\nu}$-Zerfall solange nicht ausgeschlossen werden, als die 100%ige Helizität des Neutrinos nicht experimentell bewiesen ist. Die gegenwärtige Genauigkeit ist durch einen Fehler von 10% charakterisiert (siehe 9.5.7., Punkt 7). Somit ist der $2\beta_{0\nu}$-Prozeß in dem Maße unterdrückt, in dem das im Neutronenzerfall (9.60a) entstehende Antineutrino in den Fehlergrenzen entgegengesetzte Helizität hat, als sie in der Reaktion (9.61a) mit dem zweiten Neutron benötigt wird. Die Existenz einer superschwachen Wechselwirkung zur Erklärung des $2\beta_{0\nu}$-Zerfalls wurde 1968 von B. M. Pontecorvo begründet. Danach wird ein neutrinoloser 2β-Zerfall möglich, wenn ein Pion seine Ladung um zwei Einheiten ändert. Es gilt dann die Auswahlregel $\Delta Q = 2$, $\Delta S = 0$, $\Delta L_\nu = 2$. Eine analoge Zerfallsvariante wurde 1964 von J. Wolfenstein zur Erklärung des Zerfalls von K^0-Mesonen im Zusammenhang mit der CP-Invarianzverletzung eingeführt (siehe 13.3.5.). Die dritte Möglichkeit des 2β-Zerfalls gründet sich auf dem Vor-

handensein von Baryonenresonanzen im Kern. Für die Anfangs- und Endzustände von Mutter- und Tochterkernen wird eine etwa 1 %ige Beimengung der Resonanz $\Delta(1232)$ mit $I^P = 3/2^+$ und $T = 3/2$ angenommen. Beim $2\beta_{0\nu}$-Zerfall wird zwischen zwei d-Quarks ein virtuelles Neutrino ausgetauscht, wobei zwei Elektronen emittiert und damit die beiden d- in zwei u-Quarks verwandelt werden. Eine Δ^--Resonanz wird dabei in ein Proton, ein Neutron in eine Δ^{++}-Resonanz verwandelt gemäß

$$\Delta^- \to p + 2^- ; \qquad n \to \Delta^{++} + 2e^- . \tag{9.70}$$

Da der Abstand zwischen den Quarks — vorgegeben durch die Abmessungen der Nukleonen — viel kleiner ist, als die Abmessungen des Kerns, ist die Wahrscheinlichkeit des Zweiquarks-Prozesses viel größer, als die des Zweinukleonenprozesses. Abbildung 9.22 zeigt Graphen der Varianten des 2β-Zerfalls.

In Anbetracht der prinzipiellen Bedeutung des 2β-Zerfalls werden gegenwärtig viele neue Experimente geplant. Man kann die Bestrebungen zur Bestimmung der Halbwertszeit, denen das Hauptaugenmerk gewidmet ist, in zwei große Gruppen einteilen: in die Methoden der direkten Aktivitätsmessung und in die ihrer indirekten Ermittlung aus der Anreicherung von Mineralien mit den Zerfallsprodukten über geologisch lange Zeiträume. Zu den Zielen gehören die Feststellung der Existenz des 2β-Zerfalls, die Ermittlung des Verzweigungsverhältnisses $2\beta_{2\nu}$ zu $2\beta_{0\nu}$ sowie die Aussonderung nichtzutreffender Modelle. Neben der Halbwertszeit muß die Helizität des Neutrinos aus Polarisationsmessungen genauer bestimmt werden. Zur Untersuchung sind solche Isobarenpaare geeignet, die neben dem 2β- keinen

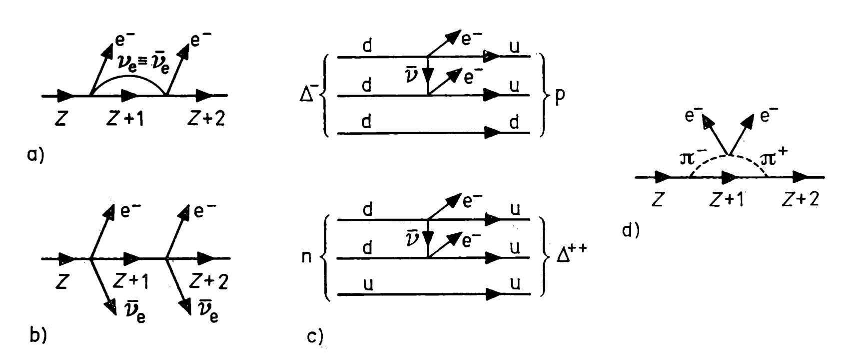


Abb. 9.22
Graphendarstellungen des 2β-Zerfalls
a) $2\beta_{0\nu}^-$-Zerfall bei Identität von ν_e und $\bar{\nu}_e$
b) $2\beta_{2\nu}^-$-Zerfall
c) $2\beta_{0\nu}^-$-Zerfall durch Quarksumwandlungen
d) $2\beta_{0\nu}^-$-Zerfall bei superschwacher Wechselwirkung

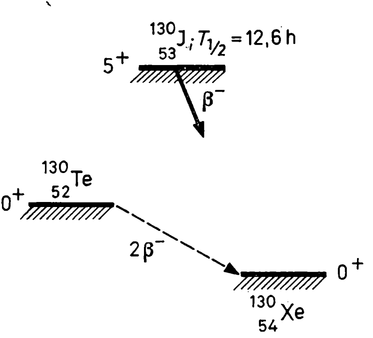


Abb. 9.23
Energieverhältnisse bei den Grundzuständen in der Isobarentriade mit A = 130

anderen Zerfall erfahren. Beispiele sind ^{128}Te, ^{128}Xe und ^{130}Te, ^{130}Xe (Abb. 9.23). Für die bisher genauesten experimentellen Werte $T_{1/2}(2\beta) = (2{,}60 \pm 0{,}28) \cdot 10^{21}$ a des Zerfalls $^{130}_{52}$Te → $^{130}_{54}$Xe und $8 \cdot 10^{24}$ a des Zerfalls ^{128}Te → ^{128}Xe ergibt sich $E_0(\nu) \leqq 5{,}6$ eV und $\eta = 2{,}4 \cdot 10^{-5}$, d. h. 95%ige Erhaltung der Leptonenzahl und damit $T_{1/2}(2\beta_{0\nu}) > T_{1/2}(2\beta_{2\nu})$. Allerdings darf das Ergebnis nicht überbewertet werden, da nicht genau genug bekannt ist, wieviel Xe-Atome über die mehr als 10^9 Jahre aus der Probe, deren Alter mit Hilfe der Rb-Sr-Methode zu $2{,}460 \cdot 10^9$ a bestimmt worden war, verloren gegangen sind. Die sichere Grenze der Halbwertszeitbestimmung liegt gegenwärtig bei 10^{22} a. Durch Kombination der ultrahochauflösenden Massenspektrometrie an Tandemgeneratoren mit negativen Ionen und der Methode der Atomhüllenanregung mit Laserstrahlung in den unter Berücksichtigung von Isotopieeffekten eingestellten Frequenzen will man den Untergrund wesentlich verringern und damit die feststellbare Halbwertszeit um weitere Größenordnungen erhöhen.

9.5.3. Experimentelle Methoden

1. In den vorausgegangenen Abschnitten wurde deutlich, daß die Untersuchung des β-Zerfalls die Spektrometrierung der β-Teilchen, der Neutrinos und Antineutrinos erfordert, daneben auch der α-Teilchen und γ-Quanten. Wichtige Meßaufgaben sind auch die Untersuchung zeitlicher und Winkelkorrelationen. Die maximalen Energien der β-Teilchen liegen je nach der Entfernung der untersuchten Nuklide vom β-Stabilitätsband und damit der Zerfallsenergie von einigen keV und MeV auf und in der Nähe dieses Bandes bis zu 10, 20 und 30 MeV im Gebiet Kerninstabilität gegen Nukleonenemission aus dem Grundzustand. In Kapitel 5 wurden die wichtigsten Methoden des Nachweises und der Spektrometrie der Kernstrahlungen behandelt. Hier sollen nur einige Ergänzungen für die Elektronen gebracht werden.

2. Infolge der großen Reichweite der Elektronen in Gasen, die z. B. in Luft bei 0,1 MeV etwa 12 cm beträgt, sind gasgefüllte Detektoren zum Nachweis weniger gut geeignet, wenn es auf vollständige Absorption, d. h. auf hohe Nachweiseffektivität, ankommt. Mit langen (40 cm) sowie mit Hochdruck-Proportionalzählrohren (10^6 Pa), die im magnetischen Solenoid angeordnet waren, hat man relative energetische Auflösungen von einigen wenigen Prozent bei maximaler Effektivität für Elektronen unterhalb 1 MeV erreicht. Diesen Aufwand kann man sich jedoch nur selten leisten. Wegen des elektronischen Rauschens liegt die untere Nachweisgrenze bei einigen keV.

In weiten Energiebereichen sind Szintillationsdetektoren aus NaJ(Tl), Anthrazen und Stilben gut geeignet. Die untere Nachweisgrenze liegt hier bei 1 keV. Nach großen Energien hin wird die Begrenzung des Einsatzes durch die Detektorgröße bestimmt. In letzter Zeit haben Halbleiterdetektoren große Verbreitung gefunden, besonders auf der Basis von Silizium. Bei den Si(Li)-Detektoren mit p-i-n-Struktur ist die maximale Effektivität mit hoher energetischer Auflösung von einigen hundert eV gepaart. Wegen ihrer hohen Zeitauflösung eignen sich sowohl die Szintillations-, als auch die Halbleiterdetektoren zur Messung von β-β- und β-γ-Koinzidenzen, bis hinab in das ns-Gebiet. In Tabelle 9.4. sind einige Angaben über Energieauflösung und Lichtstärke konkreter Szintillations- und Halbleiterdetektoren enthalten.

3. Große Bedeutung haben in der β-Spektrometrie die magnetischen Spektrometer erlangt, vor allem wegen ihrer hohen Energieauflösung insbesondere in einer Zeit, da es die Halbleiterdetektoren noch nicht gab. Diese hohe Energieauflösung ist erforderlich, um einerseits die Grenzenergien eines β-Übergangs so genau als möglich ermitteln zu können. Andererseits treten beim β-Zerfall aber auch in anderen Kernumwandlungen Elektronenspektren auf, die durch innere Konversion, Photo-, Compton- und Paarbildungseffekt verursacht werden. Die charakteristischen Energien liegen oft sehr dicht beieinander, so daß die Elektronenspektren in den meisten Fällen ein recht kompliziertes Bild von Linien und kontinuierlichem Untergrund zeigen.

Man kann die magnetischen Teilchenspektrometer in Flachbahn- und Linsenspektrometer einteilen. In Abb. 9.24a ist ein Flachbahnspektrometer mit Halbkreisfokussierung dargestellt.

Quelle und Detektor liegen in einer Ebene senkrecht zu den Linien des homogenen Magnetfeldes. Da sich für unterschiedliche Elektronenenergien gemäß (5.67) unterschiedliche Radien ergeben, liegt der Fokus an unterschiedlichen Koordinatenpunkten F. Die relative Energieauflösung beträgt einige hundertstel Prozent. Erstmalig wurde das Halbkreisspektrometer 1912 von J. Danysz verwendet. Ein Nachteil der Halbkreisspektrometer besteht darin, daß sie keine räumliche Fokussierung haben. Die Lichtstärke von einigen hundertstel Prozent ist daher sehr klein. Im Doppelfokussierungsspektrometer wird dieser Nachteil überwunden, indem die vom Zyklotron und Betatron bekannten Axialfokussierung rotationssymmetrischer Magnetfelder mit Radialkomponente genutzt wird, wie sie in Abb. 3.15 dargestellt ist. Der Fokus liegt hier nicht bei 180°, sondern bei $\pi\sqrt{2} \approx 254°$. In Abb. 9.24b ist das Prinzip dargestellt. Die relative Energieauflösung liegt bei einigen Zehntel Prozent, die Lichtstärke aber bei bis zu einigen Prozent.

Eine große Lichtstärke wird mit dem von P. L. Kapica vorgeschlagenen Linsenspektrometer erzielt. Hier wird von der Tatsache Gebrauch gemacht, daß ein axialsymmetrisches Magnetfeld Elektronen, die von der Quelle unter einem Winkel kleiner als 90° in Feldrichtung emittiert werden, nach Durchlaufen einer schraubenförmigen Bahn auf die Mittelachse fokussiert werden, aber je nach ihrer Energie in verschiedenen Abständen F von der Quelle. In Abb. 9.24c ist

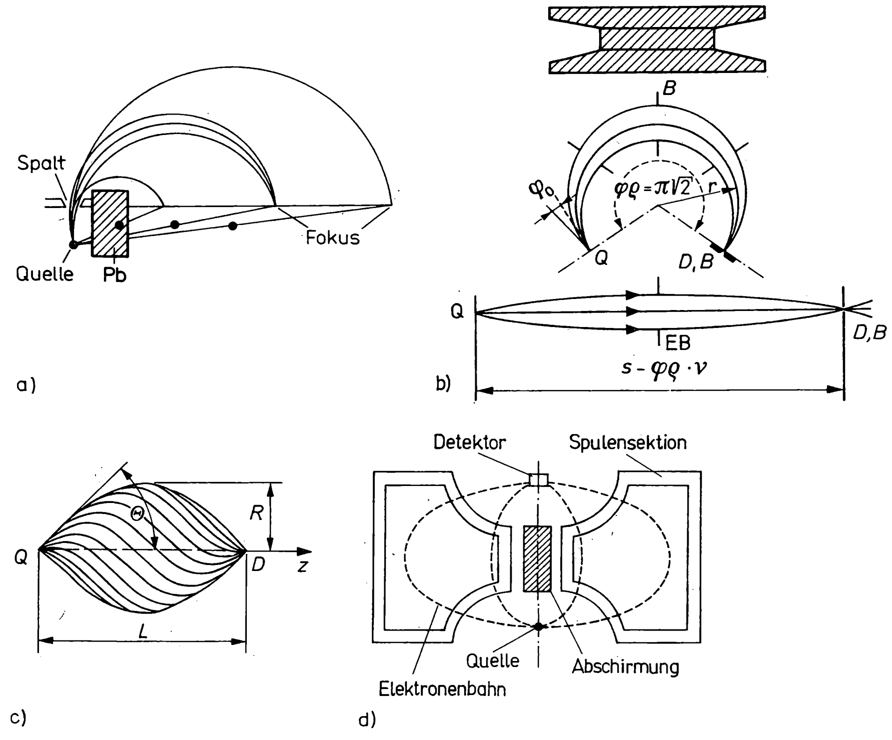


Abb. 9.24
magnetische Teilchenspektrometer
a) Flachbahnspektrometer mit Halbkreisfokussierung
b) Doppelfokussierungsspektrometer $\pi\sqrt{2}$
c) Teilchenbahnen im Linsenspektrometer mit axialsymmetrischem Magnetfeld
d) eisenkernloses Toroidspektrometer

dieses Prinzip dargestellt. Für vorgegebene magnetische Induktion haben Elektronen mit gleicher Energie nur für einen bestimmten Emissionswinkel den gleichen Fokus F. Da alle Elektronen unter diesem Winkel im Vollkreis um die Quelle genutzt werden können, zeichnen sich Linsenspektrometer in Analogie zu den Doppelfokussierungsspektrometern durch große Lichtstärke aus. Typische Werte der relativen Energieauflösung und der Lichtstärke sind entsprechend einige Zehntel und einige Prozent. In Tabelle 9.4 sind die Energieauflösung und die Lichtstärke einiger konkreter Spektrometer gegenübergestellt.

4. Um die Gleichzeitigkeit von Strahlungen oder Ereignissen feststellen zu können, werden in der Kernspektrometrie Koinzidenzspektrometer verwendet. Darauf wurde bereits in 5.1, Punkt 5, eingegangen. In der β-Spektrometrie verwendet man zur Energieauswahl der zur Koinzidenz zugelassenen β-Teilchen, Konversions- und anderen Elektronen nicht nur Szintilations- und Halbleiterdetektoren, sondern auch Magnetspektrometer. Wegen ihrer hohen energetischen Auflösung können kleine Elektronenenergieintervalle ausgewählt werden. Um möglichst viele dieser oft nur mit sehr geringer Intensität auftretenden Strahlungen zu erfassen, sind spezielle Magnetspektrometer mit großer Lichtstärke entwickelt worden. Zu ihnen gehören auch die Linsenspektrometer, die sich durch ihre Einfachheit auszeichnen. Ein Spektrometertyp mit besonders großer Lichtstärke ist das Toroidspektrometer, in dem Segmentspulen apfelsinenscheibenförmig rund um die Mittelachse angeordnet sind. Das Prinzip zeigt die Abb. 9.24d. Die Transmission beträgt hier bis zu 20%, wobei gleichzeitig eine relative Energieauflösung von 1% erreicht wird.

9.5.4. Fermi-Theorie des Betazerfalls

1. Die erste Theorie des β-Zerfalls wurde 1933 von E. FERMI entwickelt. Er stellte sich die Aufgabe, ausgehend von seinen speziellen Annahmen über den Mechanismus, die Übergangswahrscheinlichkeit und die Form des β-Spektrums zu berechnen. Er postulierte, daß in Analogie zur Emission von Lichtquanten Elektron und Antineutrino im Ergebnis der Wechselwirkung zwischen Nukleon und Elektron-Antineutrino-Feld gemäß (9.60a, b) erst im Moment des Zerfalls, d. h. im Moment der Emission, entstehen und vorher nicht im Kern vorhanden sind. Da die Stärke dieser Wechselwirkung sehr gering ist, sind die Voraussetzungen der Störungsrechnung erster Ordnung erfüllt, so daß die „Goldene Regel" der Quantenmechanik in Ansatz gebracht werden kann. Sie beschreibt die Übergangswahrscheinlichkeit W_{fi} dafür, daß der Impuls der emittierten Teilchen in ein Intervall p, $p + dp$ fällt. Wie bei der Emission der Lichtquanten handelt es sich um Übergänge eines Systems aus einem in einen anderen Quantenzustand; beim β-Zerfall geht ein Nukleon aus dem Zustand mit der Isospinprojektion $\pm T_z$ in einen mit $\mp T_z$ über. Mit der Zerfallskonstanten λ und der Lebensdauer τ hängt W_{fi} über

$$\lambda = \frac{1}{\tau} = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} = \int\limits_{E=0}^{E_{k,\max}} W_{fi}\, dE = \int\limits_{E=0}^{E_{k,\max}} N(p)\, dp\, dE \tag{9.71}$$

zusammen. Dabei ist

$$W_{fi} = \frac{2\pi}{\hbar}\, \varrho(E_f)\, |H_{fi}|^2 \tag{9.72}$$

mit dem Matrixelement des Übergangs aus dem Anfangszustand i in den Endzustand f

$$H_{fi} = \langle f|\, H\, |i\rangle = \int \Psi_f^* H \Psi\, d\tau \tag{9.73}$$

und der Dichte der möglichen Endzustände pro Energieintervall

$$\varrho(E_f) = \frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}E_Q} \,. \tag{9.74}$$

Das Matrixelement enthält den Hamilton-Operator mit der schwachen Wechselwirkung. Aus den gemessenen Spektren kann man erkennen, daß das Matrixelement meist gar nicht oder nur sehr wenig von der Energie abhängt. In diesem Falle werden die Leptonen hinsichtlich des Kerns mit $l = 0$ emittiert. In (9.73) muß also eine Wahrscheinlichkeit W_{Lep} dafür enthalten sein, die beiden Leptonen bei der Entstehung im Kernzentrum mit $r = 0$ vorzufinden:

$$W_{\text{Lep}} = |\Psi_e(0)|^2 \, |\Psi_{\bar{\nu}}(0)|^2 \,. \tag{9.75}$$

Abseits von $r = 0$ verschwindet W_{Lep}. Außerdem muß ein Faktor enthalten sein, der die Übergangswahrscheinlichkeit als Funktion von Anfangs- und Endzustand des Kerns beschreibt. Er wird als Matrixelement

$$M_{fi} = \int \Psi_f^* O \Psi_i \, \mathrm{d}v \tag{9.76}$$

angesetzt, das die Kernstruktur enthält. Im Falle identischer Nukleonenzustände, d. h., wenn $\Delta I = \Delta T = \Delta\pi = 0$, stimmen die Wellenfunktionen überein und $M^2 = 1$. Die Stärke der Wechselwirkung wurde von Fermi mit der Kopplungskonstanten g festgelegt. Man erhält somit

$$|H_{fi}|^2 = g^2 W_{\text{Lep}}^2 M_{fi}^2 \,. \tag{9.77}$$

Für eine einfache Theorie genügt es, $W_{\text{Lep}} = 1$ zu setzen. Das folgt aus einer Betrachtung, in der die Leptonenwellenfunktionen als ebene Wellen

$$\Psi_e(\boldsymbol{r}) \, \Psi_{\bar{\nu}}(\boldsymbol{r}) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\boldsymbol{k}_e + \boldsymbol{k}_{\bar{\nu}}) \boldsymbol{r}} \tag{9.78}$$

angesetzt werden. Für viele β-Übergänge ist $\lambda\!\!\!^{-} \gg R$, d. h., die Materiewellenlänge der Leptonen ist viel größer als der Kernradius oder, anders ausgedrückt, die Leptonenwellenfunktionen sind über das Kernvolumen hinweg fast konstant. Wenn die beiden Wellenvektoren $\boldsymbol{k}$ gleich groß sind, dann ergibt sich für eine Energie von 2 MeV, d. h. im ultrarelativitischen Falle gemäß (D 2.1.) mit $\lambda = \hbar c/E_k$ und $2k = 10^{-11}\ \text{cm}^{-1}$ ein Wert von $(\boldsymbol{k}_e + \boldsymbol{k}_{\bar{\nu}}) R \approx 10^{11} \cdot 10^{-12} \lesssim 10^{-1}$. In der Reihenentwicklung von (9.78)

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\boldsymbol{k}_e + \boldsymbol{k}_{\bar{\nu}}) \boldsymbol{r}} = 1 - i(k_e + k_{\bar{\nu}}) \, r - \frac{1}{2} (k_e + k_{\bar{\nu}})^2 \, r^2 + \dots \tag{9.79}$$

unterscheidet sich das zweite Glied vom ersten um einen Faktor 10^{-1}. Da in (9.77) das Quadrat eingeht, kann man alle Glieder nach dem ersten vernachlässigen, und es ergibt sich

$$|H_{\text{fi}}|^2 = g^2 M_{\text{fi}}^2 \,. \tag{9.80}$$

2. Zur Berechnung der Endzustandsdichte, die man auch statistischen Faktor nennt, weil sie die statistische Aufteilung der Energie zwischen den beiden Leptonen erfaßt, also die Form des β-Spektrums beschreibt, wird angenommen, daß die Endzustände nicht entartet sind und daß

$$E_Q(\beta) = E_k(e) + E_{\bar{\nu}} \,; \qquad \mathrm{d}E_k(e) = -\mathrm{d}E_{\bar{\nu}} \tag{9.81}$$

gilt. Der Kernrückstoß ist gering und wird vernachlässigt. Für dn wurde bei der Besprechung des Fermigas-Modells in (8.8) die Deutung als Zahl von Zuständen in einer Elementarzelle des Phasenraumes gefunden. Da dn_e und d$n_{\bar{\nu}}$ statistisch unabhängig voneinander sind, denn die Impulse werden in einem Dreiteilchenzerfall, wie er in B.3.5 behandelt wurde, gebildet, kann dn als Produkt aus beiden angesetzt werden:

$$\mathrm{d}n = \mathrm{d}n_e \, \mathrm{d}n_{\bar{\nu}} = \frac{16\pi^2 V^2 p_e^2 p_{\bar{\nu}}^2 \, dp_e \, \mathrm{d}p_{\bar{\nu}}}{(2\pi\hbar)^6} \,, \tag{9.82}$$

so daß

$$\varrho(E_f) = \frac{dn}{dE_Q} = \frac{dn_e\,dn_{\bar\nu}}{dE_Q} = \frac{16\pi^2V^2}{(2\pi\hbar)^6}\,p_e^2\,dp_e\,p_{\bar\nu}^2\,\frac{dp_{\bar\nu}}{dE_Q}\,. \tag{9.83}$$

Der Neutrinoimpuls ist nur schwer meßbar. Er wird daher eliminiert. In der Annahme $E_0(\bar\nu) = 0$ gilt mit (B.12)

$$p_{\bar\nu} = \frac{E_{\bar\nu}}{c} = \frac{E_Q - E_k(e)}{c}\,; \qquad \frac{dp_{\bar\nu}}{dE_Q} = \frac{1}{c}\,. \tag{9.84}$$

Den Faktor V^2 kann man aus Normierungsgründen weglassen. Wenn die Wellenfunktion im Matrixelement auf V normiert ist, enthält $|M|^2$ den Faktor V^{-2}. Es ergibt sich somit

$$\varrho(E_f) = \frac{1}{4\pi^4\hbar^6c^3}\,p_e^2(E_Q - E_k)\,dp_e\,. \tag{9.85}$$

Einsetzen in (9.77) liefert

$$W_{fi} = N(p_e)\,dp_e = \frac{1}{4\pi^4\hbar^7c^3}\,g^2|M|^2\,p_e^2[E_Q - E_k(e)]\,dp_e\,. \tag{9.86}$$

Oft drückt man Energie und Impuls in Einheiten der Ruhenergie und des Ruhimpulses des Elektrons

$$\eta = \frac{p_e}{m_e c}\,; \qquad \varepsilon = \frac{E_k(e)}{m_e c^2}\,; \qquad \varepsilon^2 - \eta^2 = 1 \tag{9.87}$$

aus. Dann erhält man mit der Abkürzung

$$C^2 = \frac{g m_e^5 c^4}{2\pi^3\hbar^7} \tag{9.88}$$

für die Form des β-Spektrums

$$W_{if} = C^2\,|M|^2\,\eta^2(\sqrt{1+\eta_Q} - \sqrt{1+\eta})^2\,d\eta\,, \tag{9.89a}$$

$$W_{if} = C^2\,|M|^2\,\varepsilon\sqrt{\varepsilon^2 - 1}(\varepsilon_Q - \varepsilon)^2\,d\varepsilon\,. \tag{9.89b}$$

In Abb. 9.25a ist (9.89) als Kurve A dargestellt. Kurve B zeigt die in der Annahme hergeleitete Wahrscheinlichkeit, daß $E_0(\bar\nu) \neq 0$ jedoch klein ist. Auf der Grundlage von Kurve b) sind β-Spektren mit sehr hoher Energieauflösung gemessen worden, um daraus die Neutrino-Ruhenergie abzuschätzen. Besonders geeignet ist das Spektrum von Tritium mit der kleinen Zerfallsenergie

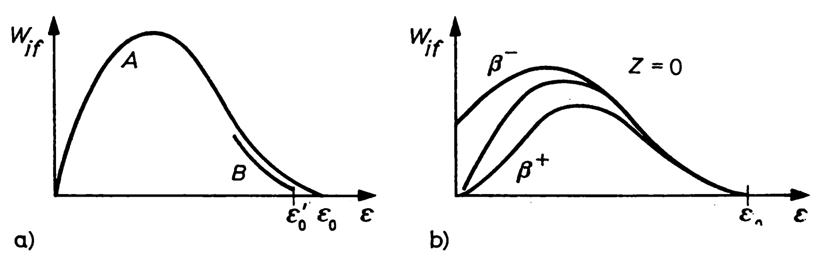


Abb. 9.25
β-Übergangswahrscheinlichkeit als Funktion der reduzierten Elektronenenergie
a) ohne, b) mit Einfluß des Kern-Coulomb-Feldes

von $F_Q = 18{,}1$ keV. Gegenwärtig ist sicher, daß $E_0(\bar{\nu})$ kleiner ist als 50 eV[1]. Zur genaueren Bestimmung des Spektrenendpunktes verwandelt man das β-Spektrum in eine Gerade, wie sie in Abb. 9.29 dargestellt ist, die sogenannte Fermi-Kurie-Kurve (9.109). Die angegebenen Energiegrenzen der Neutrino-Ruhenergie wurden auf diese Weise erhalten.

3. Das β-Spektrum wird auch vom Coulomb-Feld des Kerns beeinflußt: Elektronen werden vom Kern angezogen, Positronen abgestoßen. Die Folge ist eine Verformung des β-Spektrums insbesondere bei kleinen Energien. Das Ergebnis ist in Abb. 9.25 b dargestellt (stark übertrieben). Die rechnerische Berücksichtigung erfolgt durch einen Korrekturfaktor in (9.89), die Fermi-Funktion

$$F(Z, \varepsilon) = \frac{|\Psi_e(0)_{\text{Coul.}}|^2}{|\Psi_e(0)_{\text{frei}}|^2}. \tag{9.90}$$

Die Zahlenwerte können aus einschlägigen Tabellenwerken entnommen werden. Abb. 9.26 zeigt den Verlauf der Funktion für Elektronen und Positronen.

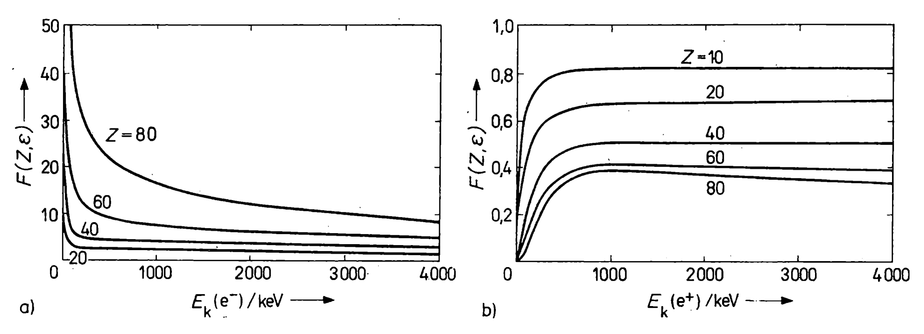


Abb. 9.26
Fermi-Funktion a) für Elektronen, b) für Positronen

4. Zur Berechnung von λ ist in (9.71) die Integration auszuführen. Die Integrationsgrenzen sind $\eta = 0$ und η_Q oder $\varepsilon = 1$ und ε_Q. Zur Abkürzung wird eine dimensionslose Funktion, die Fermi-Integralfunktion

$$f(Z, \varepsilon_Q) = \int_1^{\varepsilon_Q} F(Z, \varepsilon)\, \varepsilon \sqrt{\varepsilon^2 - 1}\, (\varepsilon_Q - \varepsilon)^2\, d\varepsilon \tag{9.91}$$

eingeführt, deren Zahlenwerte ebenfalls in Tabellenwerken abgegeben sind und zwar getrennt für β^-- und β^+-Zerfall sowie E-Einfang und verschiedene Verbotenheitsgrade. Abb. 9.27 zeigt die Funktion f für erlaubten β^-- und β^+-Zerfall. Für λ erhält man schließlich

$$\lambda = \frac{1}{\tau} = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} = \int_0^{\eta_Q} N(\eta)\, d\eta = \int_1^{\varepsilon_Q} N(\varepsilon)\, d\varepsilon = C^2 M^2 f(Z, \varepsilon_Q). \tag{9.92}$$

Meistens schreibt man diese Gleichung mit der Abkürzung

$$B = C^{-2} \tag{9.93a}$$

und der universellen β-Zerfallszeit

$$\tau_0 = \frac{2\pi^3 \hbar^7}{g^2 m_e^5 c^4} \approx 7000 \text{ s} \tag{9.93b}$$

[1]) Aus der Theorie der Großen Vereinigung wird ein Wert von 0,01 eV erwartet.

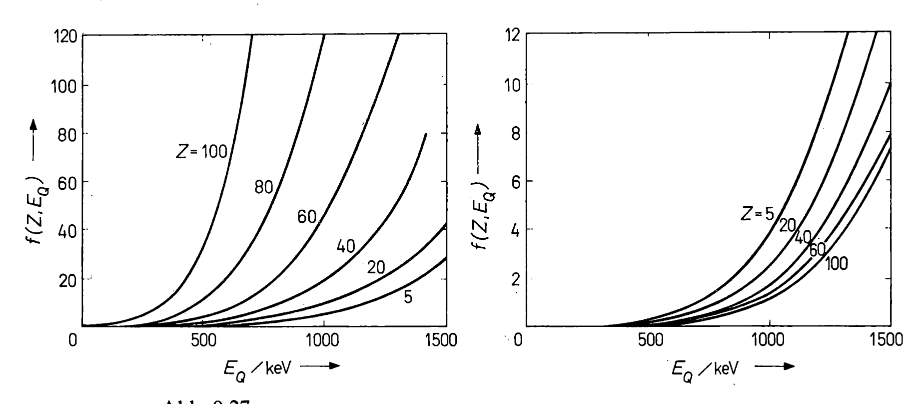


Abb. 9.27
Fermi-Integralfunktion
a) für erlaubten β^-- und b) für erlaubten β^+-Zerfall

in der Form

$$f(Z, \varepsilon_Q)\, T_{1/2} = \frac{\tau_0 \ln 2}{M^2} = \frac{B}{M^2} . \tag{9.94}$$

Man nennt die Größe $f \cdot T_{1/2}$ den „ft"-Wert oder, mit der Lebensdauer ausgedrückt, den „$f \cdot \tau$"-Wert. Die Bedeutung kommt in der Bezeichnung reduzierte Halbwertszeit oder reduzierte Lebensdauer zum Ausdruck. Sie deutet darauf hin, daß alle β-Übergänge die gleiche mit f multiplizierte Halbwertszeit haben, wenn ihre Matrixelemente gleich groß sind. Da sie sich aber in weiten Grenzen ändern, nimmt auch $f \cdot T_{1/2}$ einen sehr großen Wertebereich ein. Er liegt zwischen 10^3 und 10^{23} s. Man gibt daher meist den dekadischen Logarithmus an, d. h. $\log(f \cdot T_{1/2})$. Wie wir in Punkt 7 sehen werden, gruppieren sich die β-Übergänge für verschiedene Verbotenheitsgrade um bestimmte Werte von $\log(f \cdot T_{1/2})$.

Für Abschätzungen der Halbwertszeit eines β-Zerfalls ist eine Näherung von (9.94) sehr nützlich. Für $E_Q \gg E_0(\mathrm{e})$ und für kleine Werte von Z wird

$$f(Z, \varepsilon_Q) \approx \frac{1}{30} \varepsilon_Q^5 . \tag{9.95}$$

5. Da $T_{1/2}$ experimentell bestimmt werden kann und $f(Z, \varepsilon_Q)$ berechnet vorliegt, kann mit (9.94) das Kernmatrixelement bestimmt und mit Werten, die auf der Grundlage von Modellvorstellungen berechnet wurden, verglichen werden. Über den $f \cdot T_{1/2}$-Wert ergibt sich somit beim β-Zerfall der Zugang zur Kernstruktur. Allerdings muß das Matrixelement noch präzisiert werden. Bei seiner Einführung in (9.76) war angenommen worden, daß es nur einen Operator O gibt, mit dem M gebildet werden kann. Tatsächlich gibt es jedoch viele. Zwei davon spielen eine dominierende Rolle. Man bezeichnet sie nach den beiden, gleich noch zu besprechenden Arten der β-Übergänge, den Fermi- und Gamov-Teller-Übergängen mit den Matrixelementen M_{F} und M_{GT} und den Stärken, mit denen sie zum Zerfall beitragen g_{F} und g_{GT}. Anstelle von (9.77) tritt nun der Ansatz

$$|H_{\mathrm{fi}}|^2 = g_{\mathrm{F}}^2 M_{\mathrm{F}}^2 + g_{\mathrm{GT}}^2 M_{\mathrm{GT}}^2 \tag{9.96a}$$

und

$$g_{\mathrm{F}}^2 + g_{\mathrm{GT}}^2 = 1 . \tag{9.96b}$$

Aus (9.94) folgt damit

$$f \cdot T_{1/2} = \frac{B}{g_F^2 M_F^2 + g_{GT}^2 M_{GT}^2} . \tag{9.97}$$

Diesen Ansatz liefert auch eine strenge Theorie des β-Zerfalls, wie in 9.5.5. gezeigt wird. Hier gehen wir den einfachen Weg der Verifikation. Dazu kann von der Tatsache ausgegangen werden, daß die Emission der beiden Leptonen auf zweierlei Art erfolgen kann, je nachdem ob sie mit entgegengesetzt eingestelltem Spin den Kern verlassen oder ob mit gleichgerichtetem, wie es die Abb. 9.28 veranschaulicht. Im ersten Falle spricht man von Fermi-Übergängen. Dabei gilt wegen $\Delta s = \Delta l = 0$ auch

$$\Delta I = 0 , \qquad P_i/P_f = +1 . \tag{9.98}$$

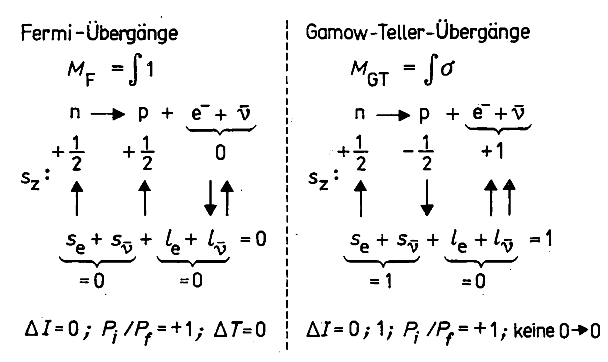


Abb. 9.28
Auswahlregeln bei Fermi- und Gamov-Teller-Übergängen

Man kann zeigen, daß neben dieser Auswahlregel noch eine für den Isospin gilt. Wenn die Wellenfunktionen Ψ_i und Ψ_f nicht Zuständen des gleichen Isospinmultipletts angehören, dann verschwinden die Fermi-Matrixelemente. Die zusätzliche Auswahlregel lautet

$$\Delta T = 0 , \qquad \Delta T_z = \pm 1 . \tag{9.99}$$

Im zweiten Falle, wenn die beiden Leptonen den Kern zwar auch mit $l = 0$, aber mit $\Delta s = 1$ verlassen, gilt offensichtlich

$$\Delta I = \pm 1 , \qquad P_i/P_f = +1 . \tag{9.100}$$

Diese Art der β-Zerfälle werden Gamov-Teller-Übergänge genannt. Im Unterschied zu den Fermi-Übergängen sind hier 0-0-Übergänge von $I_i = 0$ nach $I_f = 0$ nicht möglich.

6. Die Bestimmung der Kopplungskonstanten kann an Hand reiner Übergänge erfolgen. Beim Zerfall von $^{14}_{8}O$ mit $I^\pi = 0^+$, $T = 1$, $T_z = +1$ auf den ersten Anregungszustand von $^{14}_{7}N$ ($I^\pi = 1^+$, $T = 0$, $T_z = 0$) mit $E^* = 2{,}31$ MeV, $I^\pi = 0^+$, $T = 1$, $T_z = +1$ handelt es sich um einen reinen Fermi-Übergang. Die Rechnung ergibt $M_{GT}^2 = 0$ und $M_F^2 = 2$. Mit $T_{1/2,\,exp} = (71{,}36 \pm 0.09)$ s und $E_{k,\,max} = (1{,}8126 \pm 0{,}0014)$ MeV sowie $fT_{1/2} = 3111 \pm 15$ ergibt sich über (9.97)

$$g_F = 0{,}88 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{MeV(fm)^3} . \tag{9.101}$$

Ein reiner Gamov-Teller-Übergang liegt beim Zerfall von $^{6}_{2}He$ mit $I^\pi = 0^+$ auf den Grundzustand von $^{6}_{3}Li$ mit $I^\pi = 1^+$ vor. $T_{1/2,\,exp}$ wurde zu $(0{,}813 \pm 0{,}007)$ s und $E_{k,\,max}$ zu

(3,50 ± 0,05) MeV bestimmt. Für $f \cdot T_{1/2}$ erhält man 808 ± 32. Während $M_F = 0$ ist, hängt der für M_{GT} erhaltene Wert davon ab, welches Spin-Kopplungsmodell für die Nukleonen zutrifft. Daher ist das zahlenmäßige Ergebnis 6 mit einer gewissen Unsicherheit behaftet. Exaktere Verhältnisse ergeben sich beim Zerfall des freien Neutrons mit einer experimentell zu 10,37 min bestimmten Halbwertszeit und einer Zerfallsenergie von 782 keV. Der $f \cdot T_{1/2}$-Wert beträgt hier 1187 ± 35. Man kann sich auch an Hand von Abb. 9.28 davon überzeugen, daß es sich hierbei um einen gemischten Übergang zwischen Zuständen mit $I_i = 1/2^+$ und $I_f = 1/2$ handelt. Für die Matrixelemente errechnet man $M_F^2 = 1$ und $M_{GT}^2 = 3$ (siehe auch 9.5.5., Punkt 3). Über (9.96) kann man nun das Verhältnis der Kopplungskonstanten berechnen. Es ist

$$\frac{g_{GT}}{g_F} = -1{,}253 \pm 0{,}007\,. \tag{9.102}$$

Damit ist der Zusammenhang zwischen den experimentellen Werten von $T_{1/2}$ und $E^{(e)}_{k,\,max}$ sowie der Kernstruktur in der Form der Matrixelemente eindeutig über (9.97) festgelegt.

7. Bei den bisher betrachteten β-Übergängen ändert sich die Parität nicht. Die Leptonen werden mit $l = 0$ emittiert, d. h. als s-Wellen und zwar aus dem Zentrum des Kerns mit $r = 0$, wo die Wellenfunktionen der Leptonen gemäß (9.75) gerade nicht verschwinden. Man spricht in diesem Falle mit $l = 0$ und $P_i/P_f = +1$ von erlaubten Übergängen. Wenn $l > 0$ ist, dann verschwinden wegen $\Psi_{e,\bar{\nu}}(r \neq 0) = 0$ die in Betracht kommenden Matrixelemente. Die Leptonen werden dann in einem Abstand $r \neq 0$ emittiert. Es müssen neue Wellenfunktionen eingeführt werden, für die $W_{Lep}(r = 0) \neq 0$ ist. Diese nehmen in (9.77) Werte an, die kleiner sind als 1. In (9.79) müssen dann Glieder höherer Ordnung berücksichtigt werden. Die Größe der Matrixelemente wird durch das jeweils nächste von Null verschiedene Glied bestimmt. Im Falle des Verbots 1. Ordnung mit $l = 1$ und $P_i/P_f = -1$ bestimmt das in kr lineare Glied die Wahrscheinlichkeit, die um $(kr)^2 = (r/\lambda)^2 \approx 10^{-2}$ im Vergleich zum erlaubten β-Übergang vermindert wird. Der log $(f \cdot T_{1/2})$-Wert nimmt dadurch um 2 ab. Bei höheren Verbotenheitsgraden mit größeren Drehimpulsänderungen nimmt die Wahrscheinlichkeit der β-Übergänge von Ordnung zu Ordnung um $(r/\lambda)^2$ ab. Ein Übergang n-ter Ordnung bedeutet, daß der $(n + 1)$te Term von (9.79) wirksam wird. Für das Verhältnis der Wahrscheinlichkeiten des Falles mit $l \neq 0$ und des erlaubten Übergangs mit $l = 0$ ergibt sich damit bei sonst gleichen Parametern

$$\frac{W(l \neq 0)}{W(l = 0)} \approx \left(\frac{r}{\lambda}\right)^{2l} \tag{9.103}$$

Somit zeichnen sich niederenergetische Übergänge mit großen Werten von λ und Übergänge mit großem l durch geringe Wahrscheinlichkeit aus. In diesem Zusammenhang sei darauf hingewiesen, daß der relative Bahndrehimpuls l_r der beiden Leptonen 0 ist. Das ist eine Folge der Voraussetzung (9.52), daß der β-Zerfall primär eine Nukleonenumwandlung ist, d. h., daß er in einem Kernpunkt stattfindet. Teilchen, die aus einem Punkt emittiert werden, können keinen relativen Bahndrehimpuls haben. Genauer betrachtet hat das Nukleon allerdings einen Radius $R_N \neq 0$. In Anwendung von (9.103) folgt daraus eine Wahrscheinlichkeit des Übergangs mit $l = 0$ im Nukleon, die sich aus

$$\left(\frac{W(l \neq 0)}{W(l = 0)}\right)_N \approx \left(\frac{R_N}{\lambda}\right)^{2l} \tag{9.104}$$

als äußerst kleiner Wert ergibt.

Ähnliche Verhältnisse ergeben sich für die Dipol-, Quadrupol- und sonstige Strahlung der Atomhülle. Dort ist aber (r/λ) von der Größenordnung $10^{-8}/10^{-5} = 10^{-3}$. Dadurch nimmt die

Wahrscheinlichkeit vom Dipol- zum Quadrupolübergang um einen Faktor 10^{-6} ab. Beim β-Zerfall ist es nur ein Faktor 10^{-2}.

In Tabelle 9.6 sind die β-Übergänge nach Auswahlregeln und log $(f \cdot T_{1/2})$-Werten klassifiziert. Allgemein gilt, daß n-fach verbotene Übergänge, d. h. Übergänge für die in (9.78) das $(n+1)$-Glied bestimmend wirkt, durch die Auswahlregeln

$$\Delta I = n \quad \text{oder} \quad n+1\,, \qquad P_i/P_f = (-1)^n \tag{9.105}$$

gekennzeichnet sind. Innerhalb einer Verbotsordnung unterscheidet man zwei Arten von Übergängen. Unikal verboten bezeichnet man alle Übergänge, für die

$$\Delta I = n+1\,, \qquad P_i/P_f = (-1) \quad \text{bei geradem } n \tag{9.106}$$

ist. Die Änderungen sind dann $\Delta I^{\pi} = 2^-, 3^+, 4^-, 5^+, \ldots$ Offensichtlich kann es sich dabei nur um Gamov-Teller-Übergänge handeln. Im Unterschied dazu spricht man von nichtunikalen Übergängen, wenn

$$\Delta I = n\,, \qquad P_i/P_f = (-1) \quad \text{bei geradem } n\,. \tag{9.107}$$

Die Änderungen sind hier $0^-, 1^-, 2^+, 3^-, 4^+, \ldots$ Der physikalische Hintergrund für diese Auswahlregel, d. h. die Kernstruktur wird in 9.5.5 erörtert.

Tabelle 9.6
Klassifikation der β-Übergänge nach Auswahlregeln und $\log fT_{1/2}$-Werten

Verbotenheitsgrad	Auswahlregel*	$\log fT_{1/2}$	Beispiel	
			Nuklid	$T_{1/2}$
übererlaubt	$I = 0;\ \pm 1$; nein	$3{,}5 \pm 0{,}2$	^{1}n	10,37 min
erlaubt		$5{,}7 \pm 1{,}1$	^{60}Co	5,26 a
1-fach	$I = 0;\ \pm 1$; ja	$7{,}5 \pm 1{,}5$	^{198}Au	2,70 d
1-fach unikal	$I = \pm 2$; ja	$8{,}5 \pm 0{,}7$	^{91}Y	59 d
2-fach	$I = \pm 2$; nein	$12{,}1 \pm 1{,}0$	^{137}Cs	30 a
2-fach unikal	$I = \pm 3$; nein	$11{,}7 \pm 0{,}9$	^{10}Be	$1{,}6 \cdot 10^{6}$ a
3-fach	$I = \pm 3$; ja	$18{,}2 \pm 0{,}6$	^{87}Rb	$4{,}7 \cdot 10^{10}$ a
3-fach unikal	$I = \pm 4$; ja	15,2	^{40}K	$1{,}3 \cdot 10^{9}$ a
4-fach	$I = \pm 4$; nein	22,7	^{115}In	$6 \cdot 10^{14}$ a

* „ja" bedeutet Paritätsänderung, „nein" bedeutet keine Paritätsänderung

8. Der Verbotenheitsgrad des β-Zerfalls kann in vielen Fällen aus der Form des β-Spektrums erkannt werden, wenn es gelingt, das isolierte Spektrum eines bestimmten Übergangs aufzunehmen. Diese Möglichkeit wurde von F. N. D. Kurie an Hand einer jetzt nach Fermi und Kurie genannten Abhängigkeit vorgeschlagen. Mit (9.92) und (9.97) ergibt sich

$$N(\eta) = \frac{g_F^2 M_F^2 + g_{GT}^2 M_{GT}^2}{B} F(Z, \eta)\, \eta^2 (\varepsilon_Q - \varepsilon)^2\,. \tag{9.108}$$

Trägt man

$$\sqrt{\frac{N(\eta)}{\eta^2 F(Z\eta)}} = \sqrt{\frac{g_F^2 M_F^2 + g_{GT}^2 M_{GT}^2}{B}}\,(\varepsilon - \varepsilon_0) \tag{9.109}$$

über ε auf, dann beschreibt die Gleichung für konstante Werte in der Wurzel eine Gerade, die Fermi-Kurie-Kurve. Ihr Endpunkt liegt bei der Maximalenergie ε_{max}. In Abb. 9.29 werden die ex-

perimentellen Werte des Zerfalls von ${}^3_1T$ mit zwei berechneten Kurven verglichen. Die eine wurde für Neutrinos ohne Ruhenergie, die andere für eine Neutrino-Ruhenergie von 250 eV erhalten. Man sieht, daß der Unterschied in einem scharfen Knick der Kurve b) zum Ausdruck kommt. Der Zerfall von ^{3}T ist sehr gut geeignet, da die Zerfallsenergie bei nur 18 keV liegt. In Punkt 2 wurde bereits im Zusammenhang mit Abb. 9.25a auf die Möglichkeit hingewiesen, auf diese Weise die Neutrino-Ruhenergie experimentell zu bestimmen (siehe S. 435).

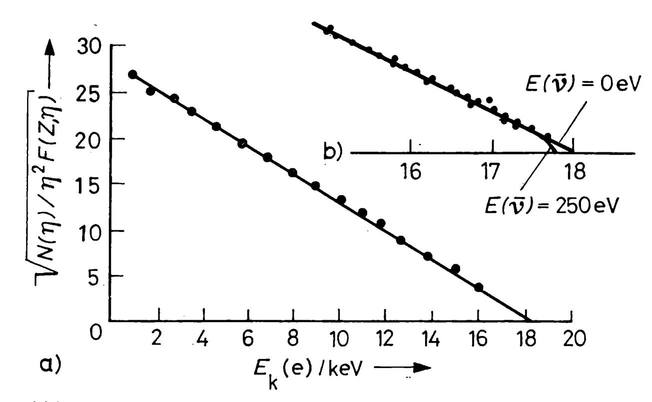


Abb. 9.29
Fermi-Kurie-Kurven beim β-Zerfall von ${}^3_1$T: a) mit $E_0(\nu) = 0$, b) mit $E_0(\nu) = 0{,}25$ keV

Wenn die Funktionen unter der Wurzel in (9.109) energieabhängig sind, dann ergeben sich keine Geraden. Ein typischer Fall sind die unikal verbotenen Übergänge. Bei ihnen ist der Beitrag der höherenergetischen Elektronen größer als gemäß (9.89) erwartet wird. Man kann aber für die unikal verbotenen Übergänge je nach Verbotenheitsgrad Formfaktoren einführen, die das Spektrum korrigieren, so daß wieder eine Gerade entsteht. Die Abb. 9.30a zeigt das Beispiel des Zerfalls von ^{91}Y mit und ohne den Formfaktor a_1.

Auch gewöhnlich verbotene Übergänge können einen gekrümmten Verlauf der Fermi-Kurie-Kurve haben. In manchen Fällen kann man sogar die Krümmung als Maß für den Verbotenheitsgrad nehmen. Ein Beispiel ist das Spektrum des ^{210}Bi, das in Abb. 9.30b gezeigt ist. Es gibt allerdings auch Fälle, in denen verbotene Übergänge Geraden ergeben, so daß in jedem Fall eine sorgfältige Analyse aller über den Zerfall bekannten Daten zur Grundlage für die Bestimmung des Verbotenheitsgrades gemacht werden muß.

9. Mit Hilfe der Fermi-Theorie des β-Zerfalls kann man auch die Übergangswahrscheinlichkeit und damit die Halbwertszeit des bereits in 9.5.1., Punkt 2 besprochenen Elektroneneinfangs berechnen. Der Ansatz erfolgt gemäß (9.71). Bei der Berechnung der Endzustandsdichte (9.74) ist zu berücksichtigen, daß das Neutrino für einen gegebenen Übergang immer die gleiche Energie hat und daß das Elektron in einem definierten Quantenzustand war, also nicht mit statistischer Energieaufteilung erzeugt wird. In (9.74) kann daher zu

$$\varrho(E_f) = \frac{dn_\nu}{dE_\nu} \tag{9.110}$$

übergegangen werden. Setzt man in Übereinstimmung mit (9.82)

$$dn_\nu = \frac{4\pi p_\nu^2 \, dp_\nu \, V}{(2\pi\hbar)^3} \tag{9.111}$$

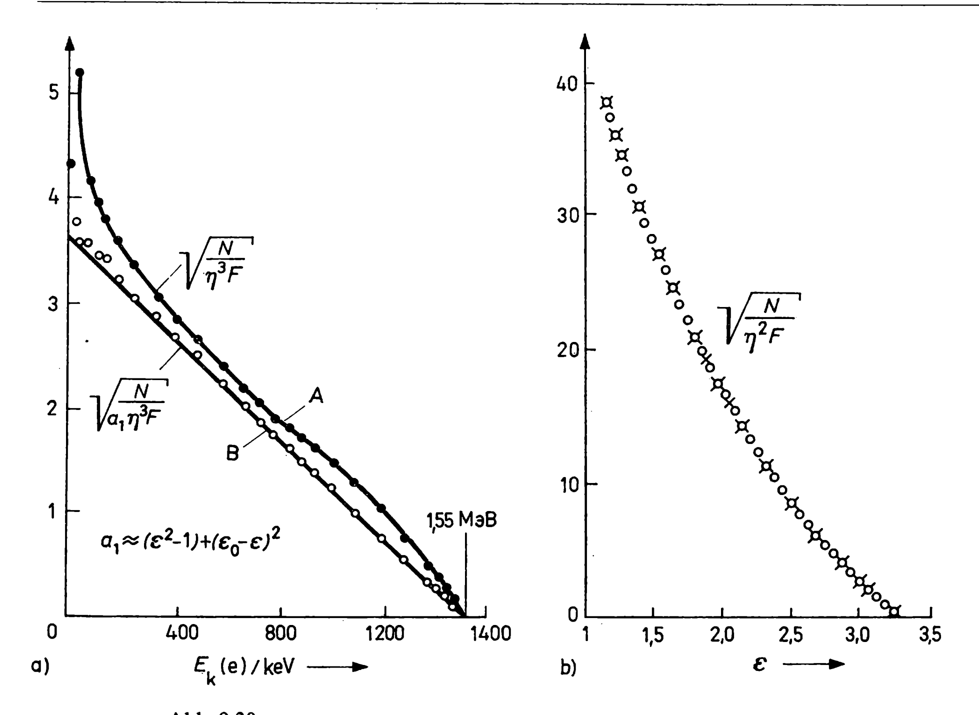


Abb. 9.30
Fermi-Kurie-Kurven
a) für den β-Zerfall von ^{91}Y, wobei die Kurven A und B ohne, bzw. mit Formfaktor für unikalen Übergang erhalten wurden
b) für den β-Zerfall von $^{210}_{83}$Bi

sowie gemäß (B.12) $p_\nu = E_\nu/c$, so ergibt sich

$$\frac{dn_\nu}{dE_\nu} = \frac{4\pi E_\nu V}{(2\pi\hbar c)^3}. \tag{9.112}$$

Das Matrixelement in (9.72) ist das gleiche wie beim gewöhnlichen β-Zerfall. Es enthält nur die Kerneigenschaften:

$$|H_{fi}|^2 = g^2\,|\Psi_e(0)|^2\,|\Psi_\nu(0)|^2\,|M_{fi}|^2\,. \tag{9.113a}$$

Die Wellenfunktion des Neutrino kann in (9.78) als ebene Welle angesetzt werden. Bei der Berechnung der Wellenfunktion des Elektrons muß aber berücksichtigt werden, daß es aus einem ganz bestimmten Hüllenzustand kommt. Geht man von der K-Schale aus, dann ergibt sich, wie hier nicht näher gezeigt werden soll, mit a_0 gemäß (9.59) als Bohrschem Radius

$$\Psi_{eK}(r) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{Z}{a_0}\right)^{3/2} e^{-Zr/a_0}\,, \tag{9.114}$$

$$|\Psi_{eK}(0)|^2 = \frac{1}{\pi}\left(\frac{Z}{a_0}\right)^3 = \frac{1}{\pi}\left(\frac{Zm_e e^2}{\hbar^2}\right)^3. \tag{9.115}$$

Für das Matrixelement (9.113a) erhält man damit

$$|H_{fi}|_K = \frac{g^2}{V \cdot \pi} \left(\frac{Zm_e e^2}{\hbar^2}\right)^3 |M_{fi}|^2 \tag{9.113b}$$

und da auf der K-Schale zwei Elektronen vorhanden sind, folgt

$$\lambda_K = \left[\frac{2g^2}{\pi^2 \hbar^{10}} \left(\frac{Zm_e e^2}{c}\right)^3\right] |M_{fi}|^2 E_\nu^2 . \tag{9.116}$$

Die Neutrinoenergie wird mit Hilfe der Zerfallsenergie E_Q und der Bindungsenergie des Elektrons $E_B^{(K)}$ auf der K-Schale in Einheiten der Elektronenruhenergie E ausgedrückt. Vernachlässigt man die Rückstoßenergie des Tochterkerns, dann ist in Übereinstimmung mit (9.58)

$$\varepsilon_\nu = \Delta\varepsilon_0(A, Z; Z-1) + 2 - \varepsilon_B^{(K)} . \tag{9.117}$$

Führt man noch die universelle Betazerfallszeit (9.93b) ein, dann ergibt sich

$$\lambda_K = \frac{|M_{fi}|^2}{\tau^0} 4\pi \left(\frac{Ze^2}{\hbar c}\right)^3 [\Delta\varepsilon_0(A, Z; Z-1) + 2 - \varepsilon_B^{(K)}]^2 . \tag{9.118}$$

Mit einer Fermi-Integralfunktion

$$f_K = 4\pi \left(\frac{Ze^2}{\hbar c}\right)^3 [\Delta\varepsilon_0(A, Z; Z-1) + 2 - \varepsilon_B^{(K)}]^2 \tag{9.119}$$

erhält man schließlich in vollständiger Analogie zu (9.94)

$$f_K(Z, \Delta\varepsilon_0)\, T_{1/2} = \frac{\tau_0 \ln 2}{M^2} = \frac{B}{M^2} . \tag{9.120}$$

Die Wahrscheinlichkeit des Elektroneneinfangs nimmt gemäß (9.118) sehr stark mit Z zu. Dafür gibt es mehrere Ursachen. Erstens kann der E-Einfang im Vergleich zum β^+-Zerfall bei Zerfallsenergien stattfinden, die kleiner sind als 1,022 MeV aber größer als die Bindungsenergie der Elektronen $E_B^{(e)}$. Wenn die auf der K-Schale zu groß ist, dann kommt die L-Schale in Betracht und so fort. Zweitens wirkt das Coulomb-Feld nicht wie beim β^+-Zerfall als Hinderungsfaktor. Drittens ist die Dichte der Elektronen besonders bei Kernen mit großem Z in der Nähe des Kerns sehr groß, so daß es zu einer intensiveren Überlappung der Wellenfunktionen von Kern und Elektron kommt. Das Verhältnis der Zerfallskonstanten ergibt sich aus (9.94) und (9.120) unabhängig vom Kernmatrixelement zu

$$\frac{\lambda_K}{\lambda_{\beta^+}} = \frac{f_K}{f_{\beta^+}} \approx 60\pi \left(\frac{\alpha Z}{\Delta\varepsilon_{0K}}\right)^3 \quad \text{für} \quad \Delta\varepsilon_{0K} \gg 1 \tag{9.121}$$

wobei α die Feinstrukturkonstante ist. Die Abb. 9.31 a zeigt das Verhältnis (K/β^+) für erlaubte Übergänge. Für sehr große Zerfallsenergien überwiegt der β^+-Zerfall, für Zerfallsenergien kleiner als 5 Elektronen-Ruhenergien und $Z > 55$ der E-Einfang. Bei der Durchführung genauer Rechnungen müssen relativistische Effekte und die Abschirmung der Kernladung durch die Hüllenelektronen berücksichtigt werden.

Auch für das Verhältnis der Wahrscheinlichkeiten des Einfangs von der K- und der L-Schale gibt es eine einfache Näherungsformel. Für erlaubte Übergänge gilt

$$\frac{\lambda_L}{\lambda_K} = \frac{1}{8} \left(\frac{\Delta\varepsilon - \varepsilon_B^{(L)}}{\Delta\varepsilon - \varepsilon_B^{(K)}}\right)^2 , \tag{9.122}$$

wenn Abschirmungs- und relativistische Effekte nicht berücksichtigt werden. Die Abb. 9.31 b zeigt das Verhältnis (L/K) für erlaubte Übergänge. Der L-Einfang überwiegt den K-Einfang bei kleinen Zerfallsenergien $\Delta\varepsilon_0 < 0{,}5$ mit wachsendem Z um ein Mehrfaches. Bei größeren Energien ist es umgekehrt.

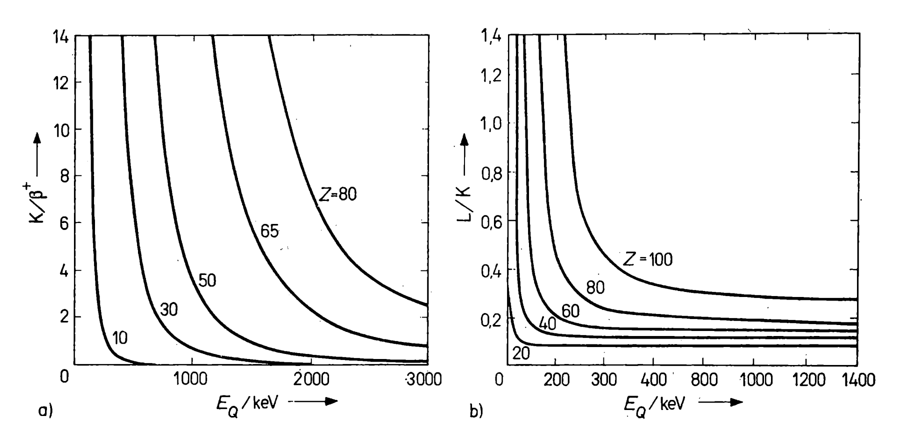


Abb. 9.31
Verzweigungsverhältnisse für erlaubten β-Zerfall: a) K/β^+ und b) L/K

9.5.5. Allgemeine Theorie des Betazerfalls

1. Mit Hilfe der Fermi-Theorie des β-Zerfalls sind die Halbwertszeit, die Form des Spektrums und, unter Hinzuziehung experimenteller Daten, auch die Kopplungskonstanten berechnet worden. In dieser Theorie wurden eine Reihe drastischer Vereinfachungen zugelassen, darunter insbesondere die Konstanz der Stärke der schwachen Wechselwirkung und der Leptonenwahrscheinlichkeit, so daß das Matrixelement des β-Übergangs die einfache Form (9.80) hat.

Eine genauere Theorie muß das Matrixelement (9.73) auf der Grundlage aller bekannten Eigenschaften der den β-Zerfall beherrschenden schwachen Wechselwirkung zu berechnen gestatten, und sie muß relativistisch invariant sein. Wie bei der Fermi-Theorie geht man davon aus, daß es sich um einen Umwandlungsprozeß eines Nukleons handelt, der wegen der äußerst kleinen Reichweite der schwachen Wechselwirkung auf einen sehr kleinen Raum beschränkt bleibt, also als punktförmiger Prozeß betrachtet werden kann. Die Feynman-Graphen des β-Zerfalls in Abb. 9.20 beschreiben gerade solche punktförmigen Wechselwirkungen, d. h., sie verbinden alle vier Teilchen in einem Punkt. Die Übergangswahrscheinlich in diesem Punkt wird wie in (9.72) angesetzt. Dem Anfangszustand entspricht die Wellenfunktion ψ_{Ni}, dem Endzustand $\psi_{\mathrm{f}} = \psi_{\mathrm{Nf}}\psi_{\mathrm{e}^-}\psi_{\bar{\nu}}$ oder $\psi_{\mathrm{Nf}}\psi_{\mathrm{e}^+}\psi_{\nu}$. Da es sich in allen Fällen um relativistische Teilchen handelt, sind nach der Dirac-Theorie diese Wellenfunktionen als Bispinoren, d. h. in der Form von einreihigen Matrizen mit vier Komponenten, anzusetzen:

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}. \tag{9.123}$$

Davon sind zwei Komponenten zur Angabe des Spinzustandes erforderlich, während die anderen den beiden Zuständen mit den Energien $\pm E$ entsprechen. Der Hamilton-Operator, d. h., die Wechselwirkungsenergie muß als Skalar oder Pseudoskalar darstellbar sein, denn die Energie darf nicht vom Koordinatensystem abhängen. Allerdings hängt sie beim β-Zerfall, wie 1956 durch die Entdeckung der Verletzung des Satzes von der Paritätserhaltung festgestellt wurde, von der Links- oder Rechtshändigkeit

des Koordinantensystems ab. Da Pseudoskalare Größen sind, die ihr Vorzeichen beim Übergang von einem Rechts- zu einem Linkssystem ändern, muß der Hamilton-Operator Pseudoskalare enthalten. Insgesamt beschränkt man sich auf Linearkombinationen von Skalaren und Pseudoskalaren, die aus den Bispinoren und vierreihigen γ-Matrizen der Dirac-Theorie gebildet werden. Die γ-Matrizen sind eine Analogie zu den Pauli-Matrizen. Während man mit den Pauli-Matrizen Operatoren konstruieren kann, die den Spin oder Isospin der Teilchen umkehren, kann man mit den Diracschen γ-Matrizen Operatoren aufbauen, die alle vier Komponenten der Bispinoren nach bestimmten Regeln, genauer gesagt mit Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren für gegebene Energie und gegebenen Spin umwandeln. Auf diese Weise entstehen bilineare Ausdrücke für die Energiedichte. Für den Übergang vom Neutron zum Protron ergibt sich z. B.

$$(\psi_{\mathrm{p}}^{*} O \psi_{\mathrm{n}})\,(\psi_{\mathrm{e^-}}^{*} O \psi_{\bar{\nu}})\,. \tag{9.124}$$

Das Symbol * zeigt hier an, daß die entsprechende Wellenfunktion nicht nur konjugiert komplex, sondern auch hermitisch adjungiert ist, also durch eine vierkomponentige Zeilenmatrix dargestellt wird. Diese Ausdrücke sind Wahrscheinlichkeitsamplituden für zwei gleichzeitig ablaufende Umwandlungen, z. B. des Übergangs eines Protons in ein Neutron und gleichzeitig eines Antineutrinos in ein Elektron.

Aus den vier Bispinoren kann man durch Kombination mit den 16 linear unabhängigen Dirac-Matrizen $16^2 = 256$ mathematisch mögliche bilineare Größen der Art (9.124) bilden. Da die Theorie den Anforderungen der speziellen Relativitätstheorie genügen soll, also invariant sein soll gegen Lorentz-Transformation, d. h. gegen Koordinatensystem-Translation und -Rotation, verringert sich die Zahl der zulässigen bilinearen Terme auf je fünf für Skalare und Pseudoskalare. Darin sind noch fünf verschiedene Dirac-Matrizen O enthalten, die folgende Bezeichnungen erhalten haben:

$$O_\varkappa = \begin{cases} O_{\mathrm{S}} & \text{(Skalar)} \\ O_{\mathrm{P}} & \text{(Pseudoskalar)} \\ O_{\mathrm{V}} & \text{(Polarer Vektor)}\,, \\ O_{\mathrm{A}} & \text{(Axialer Vektor)} \\ O_{\mathrm{T}} & \text{(Tensor)} \end{cases} \qquad \varkappa = \begin{cases} \mathrm{S} \\ \mathrm{P} \\ \mathrm{V} \\ \mathrm{A} \\ \mathrm{T} \end{cases} \tag{9.125}$$

Im allgemeinsten Falle kann man den Hamilton-Operator somit in der Form

$$H = \int \sum_{\varkappa=\mathrm{S}}^{\mathrm{T}} g_\varkappa (\psi_{\mathrm{Ni}\varkappa}^{*} O_\varkappa \psi_{\mathrm{Nf}\varkappa})\,(\psi_{\mathrm{e^-}}^{*} O_\varkappa \psi_{\bar{\nu}})\,\mathrm{d}\tau + \int \sum_{\varkappa=\mathrm{S}}^{\mathrm{T}} g'_\varkappa (\psi_{\mathrm{Ni}\varkappa}^{*\prime} O_\varkappa \psi'_{\mathrm{Nf}\varkappa})\,(\psi_{\mathrm{e^-}}^{*\prime} O_\varkappa \psi'_{\bar{\nu}})\,\mathrm{d}\tau \tag{9.126}$$

aufschreiben. Die Koeffizienten $g_\varkappa$ und $g'_\varkappa$ sind zunächst komplexe Zahlen. Die ersten fünf Glieder ändern ihre Vorzeichen bei Koordinateninversion nicht, die zweiten fünf ändern es jedoch dabei. Aus Normierungsgründen gilt für die Koeffizienten

$$\sum_\varkappa (g_\varkappa^2 + g_\varkappa'^2) = 1\,. \tag{9.127}$$

Damit enthält diese Formulierung der Theorie des β-Zerfalls zehn komplexe Konstanten. Es kann gezeigt werden, daß für den Fall der Invarianz gegen Zeitumkehr alle Konstanten reell sein müssen, so daß nur noch reelle Konstanten übrigbleiben. Wenn die zweikomponentige Neutrino-Theorie zugrunde gelegt wird, d. h., die Diracsche Neutrino-Wellenfunktion enthält nur zwei Komponenten anstelle von vier, die dem vollständig polarisierten Neutrino und Antineutrino im positiven bzw. negativen Energiezustand entsprechen, dann reduziert sich die Zahl der unabhängigen Konstanten auf fünf.

2. Für alle Terme in (9.126) sind die Auswahlregeln bestimmt worden. Wir betrachten zunächst nur erlaubte Übergänge. Es zeigt sich, daß für die Skalar- und Vektorvariante die Auswahlregeln der Fermi-Übergänge gelten. Die Nukleonenmatrixelemente mit der Skalar- und Vektorwechselwirkung schreibt man abgekürzt

$$\int \psi_{\mathrm{pS}}^{*} \beta \psi_{\mathrm{nS}}\,\mathrm{d}\tau = \int \beta\,; \qquad \int \psi_{\mathrm{pV}}^{*} \mathbf{1} \psi_{\mathrm{nV}}\,\mathrm{d}\tau = \int \mathbf{1}\,. \tag{9.128}$$

Das Fermi-Matrixelement setzt sich aus beiden zusammen:

$$g_{\mathrm{F}}^2 M_{\mathrm{F}}^2 = g_{\mathrm{S}}^2 M_{\mathrm{S}}^2 + g_{\mathrm{V}}^2 M_{\mathrm{V}}^2 = g_{\mathrm{S}}^2 |\textstyle\int \beta|^2 + g_{\mathrm{V}}^2 |\textstyle\int \mathbf{1}|^2\,. \tag{9.129}$$

Der Operator $\mathbf{1}$ ist die Einheitsmatrix, während β eine der Diracschen Matrizen ist. Für erlaubte Übergänge können die Matrizen (9.126) von Null verschieden sein, für verbotene nicht.

Für die Tensor- und Axialvektorvarianten treffen die Auswahlregeln der Gamov-Teller-Übergänge zu. Die Nukleonenmatrixelemente schreibt man abgekürzt

$$M_{GT} = \int \beta\boldsymbol{\sigma}\,; \qquad M_A = \int \boldsymbol{\sigma}\,. \tag{9.130}$$

Das Gamov-Teller-Matrixelement ergibt sich damit zu

$$g_{GT}^2 M_{GT}^2 = g_T^2 M_T^2 + g_A^2 M_A^2 = g_T^2 |\int \beta\boldsymbol{\sigma}|^2 + g_A^2 |\int \boldsymbol{\sigma}|^2\,. \tag{9.131}$$

Das Symbol $\boldsymbol{\sigma}$ steht für den Diracschen Spinoperator. Im Falle der verbotenen Übergänge verschwindet auch dieses Matrixelement.

Die Pseudoskalarvariante ist zur Beschreibung erlaubter Übergänge nicht geeignet, da sie Übergängen mit $\Delta I = 0$ und $P_i/P_f = -1$ entspricht. Nachdem die Nichterhaltung der Parität in der schwachen Wechselwirkung erwiesen war, was in 9.5.7. besprochen wird, ergab sich

$$g_x = \pm g_x'\,, \tag{9.132}$$

d. h., die g_x sind reell. Zur Beschreibung der erlaubten Übergänge verbleiben wegen $g_P = 0$ noch die vier Koeffizienten g_S, g_V, g_A und g_T. Eine weitere Aussage über die Kopplungskonstanten liefert das Verschwinden des sogenannten Fierzschen Interferenzterms, der proportional ist zu E^{-1} und als Bestandteil des Matrixelements auch für erlaubte Übergänge gemäß (9.109) Abweichungen vom geraden Verlauf der Fermi-Kurie-Kurve verursachen würde. Aus der Geradlinigkeit folgt aber

$$g_F^2 = g_S^2 + g_V^2\,; \qquad g_{GT}^2 = g_T^2 + g_A^2\,. \tag{9.133}$$

Eine Aussage darüber, welcher Koeffizient von den jeweils zwei in diesen Summen bestimmend ist, kann aus Winkelkorrelations-Experimenten erhalten werden. Dazu bieten sich mehrere Möglichkeiten, insbesondere die Messung der Winkelverteilung zwischen Elektronen und Antineutrinos einerseits und Elektronen und polarisierten Mutterkernen andererseits. Auf die zweite Methode kommen wir bei der Besprechung des Wu-Experiments in 9.5.7., Punkt 2, zu sprechen. Die Winkelverteilung zwischen Elektronen und Antineutrinos $W(\Theta)$ mit dem Winkel Θ zwischen den beiden Leptonen erhält man theoretisch bei der Berechnung von λ durch Integration des zu (9.71) analogen Ausdrucks, indem über die Kernorientierungen gemittelt wird. Dabei ergibt sich für den winkelabhängigen Faktor

$$W(\Theta) = 1 + a(\boldsymbol{p}_e \boldsymbol{p}_{\bar{\nu}}) = 1 + a\,\frac{v_e}{c}\cos\Theta\,. \tag{9.134a}$$

Der Anisotropiefaktor a ist eine Funktion der Matrixelemente:

$$a = a_F - a_{GT}\,\frac{|M_F|^2}{|M_F|^2 + |M_{GT}|^2} + a_{GT}\,, \tag{9.134b}$$

$$a_F = \frac{g_V^2 - g_S^2}{g_V^2 + g_S^2}\,; \qquad a_{GT} = \frac{1}{3}\,\frac{g_T^2 - g_A^2}{g_T^2 + g_A^2}\,. \tag{9.134c}$$

Der Faktor 1/3 kommt von den drei Zuständen des Tripletts mit 0, ± 1 beim Gamov-Teller-Übergang. Einsetzen von (9.134c) in (9.134b) liefert für die verschiedenen Varianten des Anisotropiekoeffizienten

$$a = \begin{cases} -1 & \text{(S-Kopplung)} \\ +1 & \text{(V-Kopplung)} \\ +1/3 & \text{(T-Kopplung)} \\ -1/3 & \text{(A-Kopplung)} \\ -1 & \text{(P-Kopplung, existiert nur für verbotene Übergänge)} \end{cases} \tag{9.135}$$

Da direkte e-ν-Experimente sehr schwierig sind, weil die äußerst geringen Wirkungsquerschnitte der Neutrinos enorm große Meßzeiten bedeuten, hat man an ihrer Stelle die Winkelkorrelationen zwischen Elektronen und Rückstoßkernen gemessen. Der Winkel zwischen der Emissionsrichtung der β-Teilchen und dem Rückstoßkern φ genügt der Beziehung

$$\sin\varphi = \frac{p_{\bar{\nu}}}{p_R}\sin\Theta\,. \tag{9.136a}$$

wobei p_R der Rückstoßimpuls ist, der gemäß

$$p_R = \sqrt{p_e^2 + p_\nu^2 + 2p_e p_\nu \cos\Theta} \tag{9.136b}$$

berechnet werden kann. Daraus folgt für die Rückstoßenergie

$$E_R = p_R^2/2m_R\,. \tag{9.137}$$

Zur Untersuchung können die drei Abhängigkeiten $W(E_e, E_R)$, $W(E_e, \varphi)$ und $W(E_R, \varphi)$ dienen, in denen jeweils zwei von drei Variablen miteinander verknüpft sind. Zerfälle, für die derartige Messungen durchgeführt wurden, gehen von ^{6}He, ^{19}Ne, ^{23}Ne, ^{35}Ar und vom Neutron aus. Ein wichtiges Beispiel ist der Zerfall von ^{8}Li in ^{8}Be, weil der Tochterkern in zwei α-Teilchen zerfällt. Die Bestimmung der Impulse dieser drei geladenen Teilchen ist eine leichte Meßaufgabe, und im Ergebnis erhält man eine eindeutig bestimmte Impulsbilanz. Aus den Kurven für a über $|M_F|^2/(|M_F|^2 + |M_{GT}|^2)$ folgt, daß jeweils nur ein Term in (9.133) dominiert und zwar nicht der S- und T-, sondern der A- und V-Term. Eine Bestätigung dieses Sachverhalts erfolgt durch die Experimente zum Nachweis der Nichterhaltung der Parität, speziell über (9.149). In Erweiterung von (9.102) kann man daher schreiben

$$\frac{g_{GT}}{g_F} = \frac{g_A}{g_V} = (-1{,}254 \pm 0{,}006)\,. \tag{9.138}$$

Die einfache Fermi-β-Theorie wurde damit in ihren wesentlichen Aussagen bestätigt. Die Fehlergrenzen der experimentellen Ergebnisse sind gegenwärtig nicht klein genug, um die T- und S-Variante des β-Zerfalls vollständig auszuschließen.

Bei einfach verbotenen Übergängen treten andere Matrixelemente in Erscheinung. In der Fermi-Theorie waren zwei Voraussetzungen gemacht worden, die man nun aufgeben muß, die Annäherung der Leptonenwellenfunktionen durch ebene Wellen und die nichtrelativistische Näherung für die Nukleonen. Wenn in der Reihenentwicklung (9.79) der zweite, in $\boldsymbol{r}$ lineare Term berücksichtigt wird, dann tritt ein Matrixelement

$$\int \boldsymbol{r} = k \int \psi_p^* \boldsymbol{r} \psi_n \, d\tau \tag{9.139}$$

auf, dessen Quadrat Werte zwischen 10^{-2} und 10^{-4} annimmt. Die von ihm bestimmten einfach verbotenen Übergänge mit $P_i/P_f = -1$ haben etwa 10^3mal größere Halbwertszeiten als die erlaubten. Andere Matrixelemente, die bei einfach verbotenen Übergängen einen Beitrag liefern können, sind neben anderen $\int \boldsymbol{\sigma r}$, $\int \boldsymbol{\sigma} \times \boldsymbol{r}$, $\int \alpha$, $\int \gamma_5$, wobei α und γ_5 Diracsche Matrizen sind. Für höhere Verbotenheitsgrade verschwinden auch diese Matrixelemente, und es werden andere, kleinere wirksam, für die andere Auswahlregeln gelten. In Tabelle 9.6. sind sie zusammengestellt.

9.5.6. Betazerfall und Kernstruktur

1. In diesem Abschnitt sollen einige konkrete β-Zerfälle betrachtet werden, die einerseits die Angaben von Tabelle 9.6. erläutern, andererseits gleichzeitig zeigen, wie man aus den experimentellen Daten auf die Eigenschaften der Zustände, auf denen die am Übergang beteiligten Nukleonen eingebaut sind, schließen kann. Es muß betont werden, daß historisch gesehen die Charakteristika I^π der Kernzustände meist nicht bekannt waren, wenn man von den Grundzuständen der gg-Kerne absieht. Sie mußten aus den $f \cdot T_{1/2}$-Werten des β-Zerfalls oder aus den Intensitätsverhältnissen der Abregung der Zustände ermittelt werden.

2. Bei den übererlaubten Übergängen ist die Übereinstimmung der Wellenfunktionen von Anfangs- und Endzustand am größten. Solche Verhältnisse liegen nur bei den leichten Kernen vor. Aus Tabelle 9.6. kann man erkennen, daß der $\log(fT_{1/2})$-Wert besonders klein ist. Man kann eine Einteilung in zwei Gruppen vornehmen. In der ersten befinden sich Übergänge zwischen Spiegelkernen, in der zweiten Übergänge zwischen gA-Kernen. Zur ersten Gruppe gehören die Zerfälle der uN-, bzw. uZ-Kerne $^1_0$n, $^3_1$T, $^{19}_9$F, $^7_4$Be, $^{11}_6$C, $^{15}_8$O, $^{39}_{20}$Ca usw. In der zweiten Gruppe findet man solche β-Strahler, wie $^6_2$He, $^{10}_6$C, $^{14}_8$O, $^{18}_9$F, $^{38}_{19}$K, $^{50}_{25}$Mn usw., d. h. gg- und uu-Kerne.

Als Beispiel aus der ersten Gruppe wurde in 9.5.4., Punkt 6, der β-Zerfall des Neutrons besprochen. Auch beim Zerfall von ${}^{17}_{9}F_8$ in ${}^{17}_{8}O_9$ handelt es sich um einen übererlaubten gemischten Fermi- und Gamov-Teller-Übergang. Für $T_{1/2}$ hat man 66 s, für $E_{k,\,max}(e)$ 1,75 MeV gefunden. Der log $(f \cdot T_{1/2})$-Wert beträgt 2,38. Nach dem Schalenmodell kann man erwarten, daß das 9. Proton und das 9. Neutron auf dem $d_{5/2}$-Zustand sitzen. Tatsächlich sind die Charakteristika beider Grundzustände $I^\pi = 5/2^+$. In diesem Fall ändert sich die Wellenfunktion beim Übergang nur wenig. Das Fermi-Matrixelement $\int 1$ hat für die Spiegelkern-Übergänge den Wert 1. Das Gamov-Teller-Matrixelement der Spiegelkerne läßt sich leicht allgemein berechnen:

$$|\int \sigma|^2 = \frac{j+1}{j}, \quad \text{wenn} \quad j = l + \frac{1}{2}, \tag{9.140a}$$

$$= \frac{j}{j+1}, \quad \text{wenn} \quad j = l - \frac{1}{2}. \tag{9.140b}$$

Für den Zerfall eines Neutrons mit $I = j = l + 1/2$ gilt somit

$$|M_F|^2 = 1, \qquad |M_{GT}|^2 = 3. \tag{9.140c}$$

In dem hier betrachteten Falle liefert (9.140a) den Wert 7/5. Das experimentelle Ergebnis findet so seine theoretische Fundierung oder umgekehrt wird die angenommene Zustandsbesetzung durch die experimentellen Werte bestätigt.

Die Beispiele ${}^{6}_{2}He$ und ${}^{14}_{8}O$, die bereits in 9.5.4., Punkt 6, besprochen wurden, gehören in die zweite Gruppe. Da es sich um reine Übergänge handelt, verschwindet eins der beiden Matrixelemente. Die experimentellen Werte des β-Zerfalls bestätigen die angenommene Struktur.

3. Zu den erlaubten Übergängen gehören die β-Zerfälle ${}^{35}_{16}S \to {}^{35}_{17}Cl$ und ${}^{60}_{27}Co \to {}^{60}_{28}Ni$. Im ersten Falle findet der Zerfall zwischen den Grundzuständen mit $I^\pi = 3/2^+$ statt. Experimentell fand man $T_{1/2} = 87$ d, $E_{k,\,max}(e) = 0{,}167$ MeV, so daß sich log $(fT_{1/2}) = 5{,}0$ ergab. Nach dem Schalenmodell ist zu erwarten, daß sich das 18. Neutron und das 17. Proton im $d_{3/2}$-Zustand befinden. Das Fermi-Matrixelement $\int 1$ ist aber offensichtlich kleiner als im Falle der übererlaubten Übergänge.

Das Zerfallsschema von ${}^{60}Co$ ist in Abb. 9.32 dargestellt. Hier handelt es sich um einen reinen Gamov-Teller-Übergang. Trotzdem ist auch hier das Matrixelement $\int \sigma$ kleiner als im Falle der übererlaubten Übergänge. Die Unterschiede in den Wellenfunktionen sind offensichtlich.

4. Ein interessantes Beispiel eines einfach verbotenen Übergangs ist der Zerfall des ${}^{210}_{83}Bi$. Aus der Form der Fermi-Kurie-Kurve von Abb. 9.306 erkennt man, daß es sich um einen verbotenen Übergang handelt. Er findet zwischen den Grundzuständen von ${}^{210}_{83}Bi_{127}$ und ${}^{210}_{84}Po_{126}$ statt. Für $E_{k,\,max}(e)$ wurde 1,155 MeV gemessen und für $T_{1/2}$ 5 d. Für log $(f \cdot T_{1/2})$ erhält man damit 8,0. Zur endgültigen Aufklärung dieses Zerfalls wurden etwa 40 Jahre benötigt. Nach dem Schalenmodell hat ${}^{210}Po$ die Charakteristika 0^+.

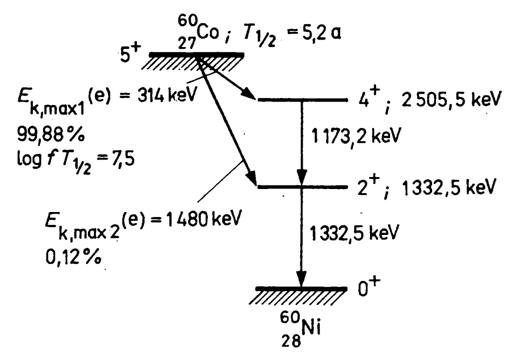


Abb. 9.32
Zerfallsschema von ${}^{60}Co$

Vom 83. Proton kann man annehmen, daß es sich im Zustand $h_{9/2}$, $f_{7/2}$ oder $p_{3/2}$ befindet, das 127. Neutron im Zustand $i_{11/2}$, $g_{9/2}$ oder $d_{5/2}$. Erst durch Berücksichtigung der effektiven Reichweite der Kernkraft zwischen den Nukleonen und des Tensorcharakters konnte begründet werden, daß der Grundzustand von ^{210}Bi durch 1^- gekennzeichnet sein muß, d. h., daß sich die beiden unpaarigen Nukleonen im Zustand $h_{9/2}$ bzw. $g_{9/2}$ befinden. Auf diese Weise konnte der experimentelle $\log(f \cdot T_{1/2})$-Wert theoretisch begründet werden.

5. Als Beispiel eines zweifach verbotenen Übergangs betrachten wir den in Abb. 9.17 dargestellten Zerfall des ^{137}Cs. Die Spins der Grundzustände wurden direkt gemessen. Die $\log(f \cdot T_{1/2})$-Werte betragen für die beiden β-Übergänge 8,5 und 11,8. Sie stimmen mit den theoretischen Werten überein.

Ein dreifach unikal verbotener β-Zerfall liegt bei $^{40}_{19}$K vor, das mit $E_{k,\max}(e) = 1{,}321$ MeV und $T_{1/2} = 2{,}7 \cdot 10^9$ a, also mit $\log(f \cdot T_{1/2}) = 18$ in $^{40}_{20}$Ca zerfällt. Die Charakteristika der Grundzustände sind 4^- und 0^+. Die Spindifferenz von 4 Einheiten tragen der Restkern mit $l = 3$ und die beiden Leptonen mit $l = 1$ weg. Die gekrümmte Fermi-Kurie-Kurve läßt sich durch einen Formfaktor a_3 für unikale Übergänge des 3. Verbotenheitsgrades in eine Gerade verwandeln, wie es die Abb. 9.33 zeigt.

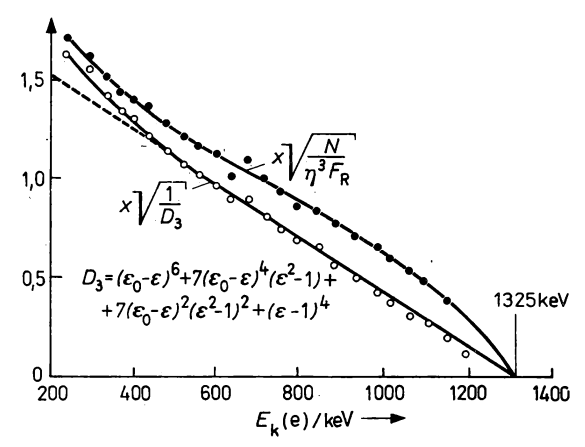


Abb. 9.33
Fermi-Kurie-Kurven des β-Zerfalls von ^{40}K

9.5.7. Paritätsverletzung beim Betazerfall

1. Auf die Bedeutung der Parität zur Beschreibung von Zuständen wurde bereits in 6.5. aufmerksam gemacht. Es wurde dort festgestellt, daß bis 1956 angenommen worden war, die räumliche Parität sei immer eine Erhaltungsgröße, d. h. die Naturgesetze seien invariant gegen Rechts- oder Linkssymmetrie. Tatsächlich wird für alle Erscheinungen der klassischen Physik und die meisten Erscheinungen im atomaren und subatomaren Bereich diese Invarianz des Ablaufs der Naturgesetze gegen Koordinateninversion beobachtet. Auf Vorschlag von T. D. Lee und C. N. Yang konnte 1957 von C. S. Wu u. a. im oft als Wu-Experiment genannten Versuch erstmalig beim β-Zerfall eine physikalische Erscheinung gefunden werden, die nicht der Raumspiegelsymmetrie unterliegt. Später wurde offenbar, daß ganz allgemein die schwache Wechselwirkung durch diese Nichterhaltung der Parität gekennzeichnet ist.

2. Für das Verständnis des Versuchs und seine Deutung ist die Kenntnis des Verhaltens axialer und polarer Vektoren $A = [r_1 \times r_2]$ und $r = (x, y, z)$ bei Rauminversion erforderlich. Die vollständige Koordinatentransformation des Systems K mit (x, y, z) in K′ mit $(x', y', z') = (-x, -y, -z)$ kann in zwei Schritten erreicht werden. Durch eine Spiegelung des rechtshändigen Systems K an einer x-z-Ebene

entsteht, wie in Abb. 9.34a, b gezeigt ist, ein linkshändiges mit $y' = y$ und x, z. Eine Drehung dieses Spiegelbildes um 180° um die y'-Achse als zweiter Schritt führt zur vollständigen Inversion in Abb. 9.34c. Im ersten Schritt wird der Drehsinn des axialen Vektors umgekehrt; aus $\boldsymbol{A}$ wird $-\boldsymbol{A}$. Die Orientierung des polaren Vektors $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}'$ bleibt demgegenüber erhalten. Im zweiten Schritt wird die Richtung des polaren Vektors umgekehrt; aus $\boldsymbol{r}'$ wird $\boldsymbol{r}'' = -\boldsymbol{r}$. Wegen $\boldsymbol{r}_1'' = -\boldsymbol{r}_1$ und $\boldsymbol{r}_2'' = -\boldsymbol{r}_2$ besteht die Konsequenz für den axialen Vektor darin, daß er mit dem Original identisch ist, d. h. $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}'$. Wenn in der Natur Paritätserhaltung vorliegt, dann zeichnen sich mögliche Vorgänge durch eben solche Vektortransformationen aus. Dabei kann man sich durchaus auf die Betrachtung des ersten Schritts beschränken, da bereits er zu einem linkshändigen Koordinatensystem führt. Der zweite Schritt ist physikalisch in diesem Zusammenhang invariant.

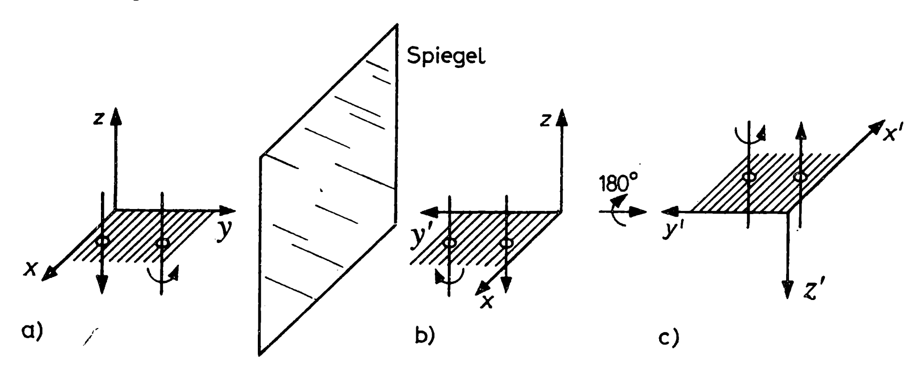


Abb. 9.34
Verhalten von axialen und polaren Vektoren bei Rauminversion

Es entsteht die Frage, welche Vektoren man beim β-Zerfall beobachten muß, um einen Dreh- oder Schraubensinn nachweisen zu können. Die Annahme ein axialer Vektor z. B. der Vektor $\boldsymbol{B}$ der magnetischen Induktion einer stromdurchflossenen Leiterschleife sei geeignet, ist falsch, da die Richtung dieses Vektors definitionsgemäß an die Stromrichtung geknüpft ist. Um sie zu erklären, muß man wiederum einen Drehsinn festlegen. Die Definition, was wir unter Links- und Rechtsdrehsinn verstehen, muß jedoch auch für Bewohner einer anderen Welt eindeutig sein. Als geeignete Größe erwies sich ein Pseudoskalar. Er entsteht durch skalare Multiplikation eines axialen mit einem polaren Vektor $S = (\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{r})$. Bei Koordinateninversion K in K' ändert S sein Vorzeichen:

$$S = (\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{A}); \quad S' = (-\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{A}) = -S. \tag{9.141}$$

Beim β-Zerfall gibt es geeignete Größen, mit denen man von Null verschiedene Pseudoskalare bilden kann und die gleichzeitig leicht beobachtet werden können. Es sind dies Impuls und Spin des Elektrons oder Geschwindigkeit des Elektrons und Kernspin:

$$S = (\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{p}); \quad S = (\boldsymbol{I} \cdot \boldsymbol{p}). \tag{9.142}$$

Wenn die β-Teilchen aus einer Quelle, in der die Mutterkerne ausgerichtet sind, vorwiegend in eine bestimmte Richtung emittiert werden, dann wird ein Schraubensinn ausgezeichnet.

3. Im Wu-Experiment wurde die Anisotropie der β-Emissionswahrscheinlichkeit polarisierter ^{60}Co-Kerne untersucht. Aus dem Zerfallsschema in Abb. 9.32 erkennt man, daß es sich um einen Zerfall vom Typ $\Delta I = 1$, $P_i/P_f = +1$ handelt und, wie in 9.5.6., Punkt 3, erläutert wurde, um einen reinen Gamov-Teller-Übergang. Die erforderliche experimentelle Anordnung unter Benutzung tiefster Temperaturen wurde in 6.4.4.2., Punkt 3, als Beispiel für die Methode der adiabatischen Entmagnetisierung besprochen. Abb. 9.35 zeigt den Aufbau. Die Wahl des ^{60}Co hängt mit der relativ leichten Polarisierbarkeit zusammen, die gemäß (6.140) proportional zum magnetischen Moment ist, d. h. in Übereinstimmung mit (6.86) proportional zum Kern-

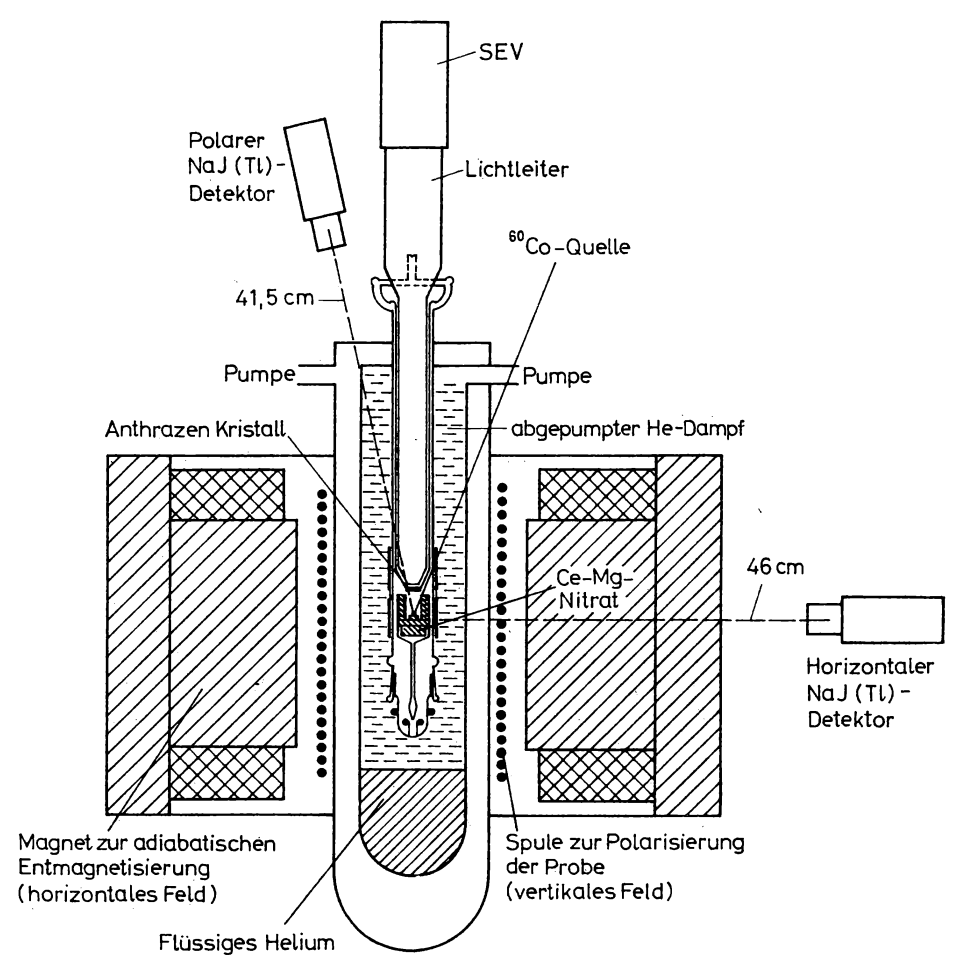


Abb. 9.35
Experimentelle Anordnung im Wu-Experiment

spin, der in diesem Falle den Wert 5 hat. Als Maß für die erreichte Polarisation wurde die Anisotropie der γ-Strahlung genutzt. Dabei konnte man sich auf den in 9.6.4. beschriebenen Effekt der anisotropen γ-Emission aus polarisierten Quellen stützen. Die Messung der Anisotropie erfolgte mit Hilfe je eines axial und radial zur Quelle aufgestellten NaJ(Tl)-Detektors und in Analogie zu (9.216) über

$$A_\gamma = \frac{N_\perp - N_\parallel}{N_\perp}. \tag{9.143}$$

Die β-Teilchen wurden mit einem Anthrazen-Szintillationsdetektor, der oberhalb der Quelle im Kryostaten untergebracht war, registriert und zwar für zwei entgegengesetzte Polarisationsrichtungen. Aus Abb. 9.36 erkennt man, daß die Polarisation infolge der Erwärmung der Quelle als Funktion von der Zeit langsam wieder verschwindet. Die Messung ergab, daß die Anisotropie

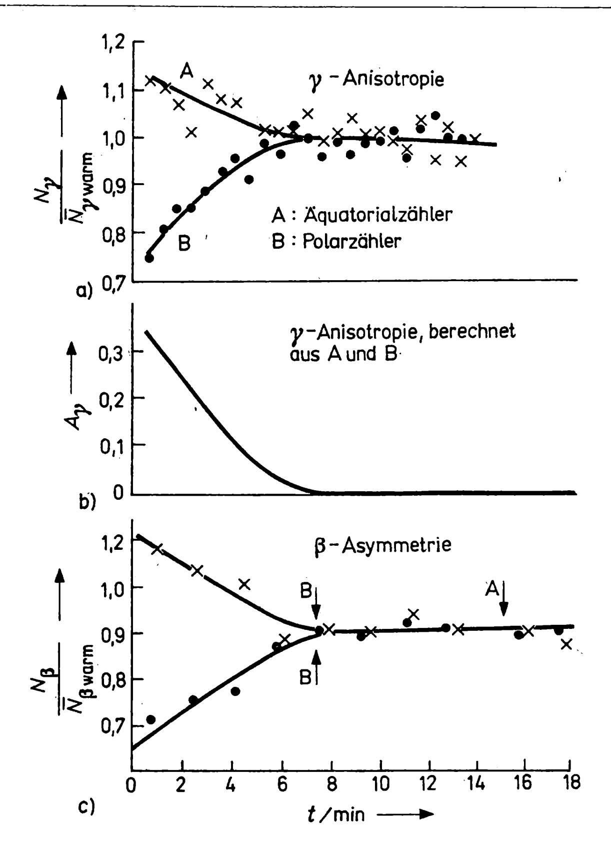


Abb. 9.36
γ- und β-Asymmetrie im Wu-Experiment als Funktion von der Zeit

der γ-Strahlung nicht von der Polarisationsrichtung abhängt, die der β-Teilchen aber sehr stark. Der Anfangswert der Anisotropie $A_\gamma \approx 0{,}4$ entspricht gemäß (6.129) einer Kernpolarisation von 0,65.

Die Winkelverteilung der β-Teilchen kann wie bei der Herleitung von (9.134) berechnet werden, nun jedoch als Funktion von der Polarisationsrichtung der Mutterkerne $\boldsymbol{P}$, der Richtung der Elektronenimpulse $\boldsymbol{p}_e$ sowie vom Winkel zwischen beiden Θ. Dabei wird die Kernpolarisationsrichtung konstant gehalten und über die Elektronenrichtungen gemittelt. Dadurch enthält $W(\Theta)$ ein Skalarprodukt dieser beiden Vektoren:

$$W(\Theta) = 1 + A(\boldsymbol{p}_e \cdot \boldsymbol{P})\,. \tag{9.144}$$

Im realen Experiment müssen ein Korrekturfaktor für die β-Rückstreuung $k = 0{,}66$, die Elektronengeschwindigkeit als $v/c \approx 0{,}6$ und der β-Korrelationskoeffizient A_β berücksichtigt werden:

$$W(\Theta) = 1 + kA_\beta P\beta \cos\Theta\,. \tag{9.145}$$

A_β kann aus der gemessenen Anisotropie der β-Teilchen ermittelt werden, die, wie man auch aus der Abb. 9.36c erkennen kann, 24% beträgt:

$$\frac{W(0) - W(\pi)}{W(0) + W(\pi)} = kA_\beta P\beta = -0{,}24 \,. \tag{9.146}$$

Die über (9.145) mit den experimentellen Daten des Wu-Experiments berechnete Winkelverteilung ist in Abb. 9.37 dargestellt, im Vergleich dazu gestrichelt die für 100% Polarisation zu erwartende Kurve. Die β-Teilchen werden vorwiegend in die zum Spin des Kerns entgegengesetzte Richtung emittiert.¹) In den Abb. 9.38a und 9.39a sind die experimentellen Kurven für entgegengesetzte Kernspinorientierung dargestellt, in den Abb. 9.38b und 9.39b die dazugehörigen Spiegelbilder.

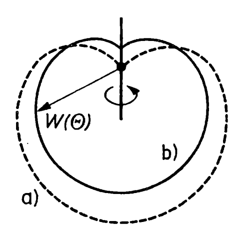


Abb. 9.37
Winkelverteilung der β-Teilchen im Wu-Experiment a) bei 100% Polarisation, b) bei 65% Polarisation

Das Ergebnis muß als Paritätsverletzung angesehen werden. Im Falle der Paritätserhaltung müßte eine Magnetfeldumkehr, also eine Umkehr des Drehsinns des axialen Vektors Kernspin zur gleichen Winkelverteilung führen. Die Teile b der Abb. 9.38 und 9.39 weisen aber aus, daß eine Spiegelung keine Richtungsumkehr der polaren Vektoren Elektronenspin nach sich ziehen darf. Beobachtet wird jedoch das Gegenteil. Die Abb. 9.38b und 9.39a, bzw. 9.38a und 9.39b sind nicht identisch. Die Spiegelbilder 9.38b und 9.39b stellen also keine in der Natur

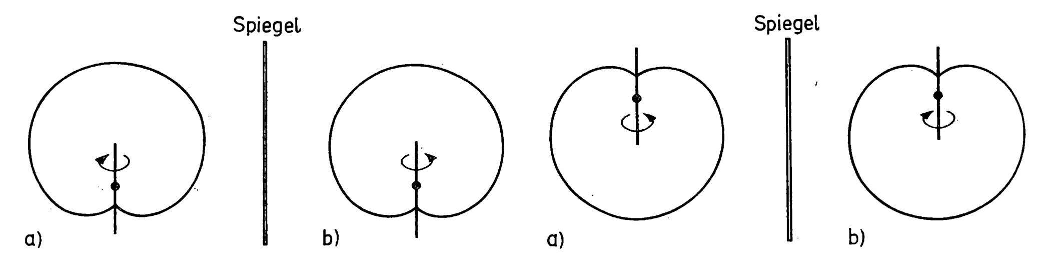


Abb. 9.38
Winkelverteilung der β-Teilchen im Wu-Experiment a) und b) im Spiegelbild

Abb. 9.39
Winkelverteilung der β-Teilchen im Wu-Experiment a) mit entgegengesetztem Kernspin als in Abb. 9.38, b) Spiegelbild

¹) Im Experiment mit ^{58}Co, einem β^+-Strahler, ergab sich $a < 0$, d. h., die Positronen werden vorwiegend parallel zum Kernspin emittiert.

möglichen Vorgänge dar, denn Paritätserhaltung würde eine isotrope Winkelverteilung hinsichtlich des Kernspins bedeuten. Offensichtlich wird somit beim β-Zerfall ein Drehsinn ausgezeichnet, denn das skalare Produkt $(\boldsymbol{p}_e \cdot \boldsymbol{I})$ ist von Null verschieden und definiert ganz unabhängig von der Händigkeit des Koordinatensystems eine Linksschraube.

4. Zur Beschreibung des Drehsinns eines Teilchens wird der Begriff der Helizität benutzt. Sie ist aus der klassischen Mechanik für ein Teilchen mit der Geschwindigkeit v und der Winkelgeschwindigkeit ω bekannt zu

$$H = \frac{\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\omega}}{|\boldsymbol{v}| \cdot |\boldsymbol{\omega}|} = \pm 1 . \tag{9.147}$$

Beim β-Zerfall versteht man darunter den Erwartungswert des Teilchenspins in Impulsrichtung. Er ist, wie in der Dirac-Theorie gezeigt wird, gleich der Longitudinalpolarisation mit dem Wert $\beta = v/c$:

$$H = \frac{\boldsymbol{s}\boldsymbol{p}}{|\boldsymbol{s}|\,|\boldsymbol{p}|} = \pm 1 . \tag{9.148}$$

Da im Rahmen der gesamten bisher betrachteten Theorie von ruhemasselosen Neutrinos ausgegangen wird, bewegen diese sich immer mit Lichtgeschwindigkeit, so daß für sie $H = \pm 1$ ist. Elektronen und Positronen haben kleinere Werte als 1, je nach ihrer Geschwindigkeit. Das Minuszeichen trifft für Neutrinos und Elektronen zu, sie haben immer Linksdrall, das Pluszeichen für Antineutrinos und Positronen, sie haben immer Rechtsdrall. In Abb. 9.40 ist die Helizität veranschaulicht.

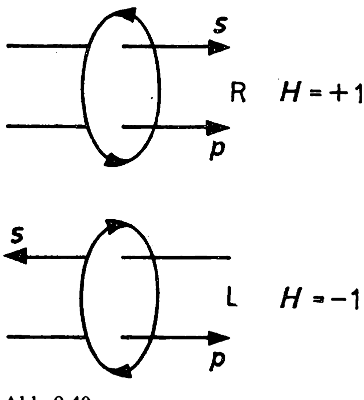


Abb. 9.40
Veranschaulichung der Helizität H

Mit Hilfe der Helizität ist die Nichterhaltung der Parität beim β-Zerfall leicht zu erklären. Dazu sind in Abb. 9.41 die Spin- und Paritätsverhältnisse beim β-Zerfall von ^{60}Co dargestellt. Der Tochterkern bleibt mit der Spinprojektion 4 zurück; das Elektron und das Antineutrino tragen jeweils 1/2, d. h. insgesamt 1 weg. Das Antineutrino kann nur mit $H = +1$, also mit Rechtsdrall emittiert werden. Die Emissionsrichtung des Elektrons liegt wegen $\boldsymbol{p}_e = -\boldsymbol{p}_\nu$ fest, sie ist der des Antineutrinos entgegengesetzt gerichtet. Die Helizität des Elektrons muß also negativ sein, d. h., es wird in die zum Kernspin entgegengesetzte Richtung emittiert.

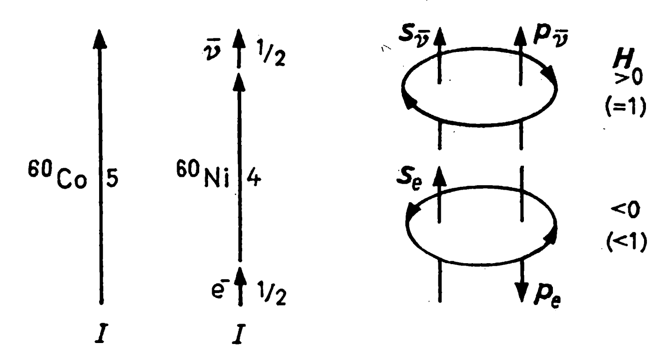


Abb. 9.41
Spin- und Paritätsverhältnisse beim Zerfall von ^{60}Co

5. Eine weitere Schlußfolgerung aus der Nichterhaltung der Parität beim β-Zerfall kann aus dem Wert der β-Korrelationskoeffizienten A_β in (9.145) gezogen werden. Er ergibt sich aus (9.146) zu —1. Seine Berechnung unter der Voraussetzung eines reinen Gamov-Teller-Übergangs und für die V-A-Variante der β-Wechselwirkung gemäß (9.102, 138) ergibt

$$A_\beta = -2\frac{(g_A^2 + g_A g_V)}{|g_A|^2 + |g_A'|^2} = -1\,, \quad \text{d. h.} \quad g_A = g_A'\,. \tag{9.149}$$

Dieses Ergebnis wurde bereits in (9.132) genutzt. Es bedeutet gleichzeitig auch, daß die Paritätsverletzung maximal ist.

6. Die Nichterhaltung der Parität ermöglicht eine Schlußfolgerung über eine grundlegende Symmetrieeigenschaft der schwachen Wechselwirkung, die kombinierte Raum- und Ladungsinversion. Im Falle der Erhaltung der räumlichen Parität gilt die Vertauschungsrelation, d. h., Parität und Energie sind vertauschbar. Die Energie im System K hat den gleichen Wert, wie im System K'. Ist sie keine Erhaltungsgröße, dann gilt die Vertauschungsrelation nicht mehr, d. h., die Energie im System K unterscheidet sich von der im System K'. Eben das wird beim β-Zerfall beobachtet, so daß der Pseudoskalar in (9.142) nicht verschwindet. Die Folge davon ist, daß das Elektron immer eine Linksschraube darstellt, das Spiegelbild Rechtsschraube also unzutreffend ist. Wohl aber ist das Positron, das immer eine Rechtsschraube ist, ein zutreffendes Spiegelbild. Es hat jedoch positive Ladung und nach der Dirac-Theorie entgegengesetzt gleich große Energie $E' = -E$. Durch die Einführung des Operators C kann man die Ladung umkehren. Wir haben diesen Operator als Ladungskonjugation in (6.7.2.) eingeführt.

L. D. Landau hat darauf hingewiesen, daß die Verletzung der räumlichen Parität beim β-Zerfall gleichbedeutend ist mit der Verletzung der Ladungskonjugation. Der experimentelle Nachweis ist jedoch in einem Experiment wie dem von Wu u. a. ausgeführten nicht möglich, da man ^{60}Co durch das Antinuklid $\overline{^{60}\text{Co}}$ ersetzen müßte. Allerdings ist der Beweis an Hand verschiedener Elementarteilchen geführt worden. Darauf kommen wir in 13.3. zu sprechen. Für die Elementarteilchen konnte gezeigt werden, daß in Prozessen der schwachen Wechselwirkung gleichzeitig P- und C-Verletzungen auftreten. Unabhängig voneinander schlugen daher 1956 L. D. Landau sowie T. D. Lee und C. N. Yang vor, an die Stelle der getrennten P- und C-Inversion die kombinierte CP-Inversion zu setzen:

$$CP = 1\,. \tag{9.150}$$

Die Operationen P und C sind gleichzeitig durchzuführen, und Invarianz ergibt sich auch dann, wenn sie für die einzelnen Transformationen P und C nicht existiert. Wenn die CP-Inversion

ein Naturgesetz ist, dann führt der Austausch von Teilchen durch Antiteilchen bei gleichzeitiger Koordinateninversion auf einen neuen Prozeß, der ebenfalls in der Natur möglich ist und dessen Wahrscheinlichkeit mit der des ersten Prozesses vor der Inversion identisch sein muß. Die Wahrscheinlichkeit, daß ein Neutron beim Zerfall ein Elektron antiparallel zu seinem Spin emittiert, muß genau so groß sein, wie die für die Emission eines Positrons parallel zum Spin eines Antineutrons. Anders ausgedrückt bedeutet die *CP*-Invarianz, daß man das richtige Bild, d. h. einen in der Natur möglichen Vorgang dann bekommt, wenn man neben der Spiegelung eine Ladungsumkehr durchführt. Dann wird z. B. das linkshelische Neutrino in das rechtshelische Antineutrino übergeführt, wie es die Abb. 9.42 zeigt.

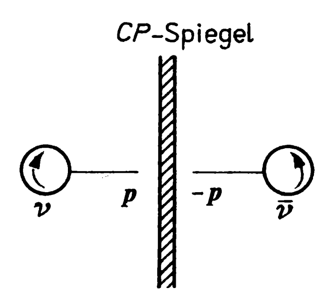


Abb. 9.42
CP-Inversion beim Neutrino

Die *CP*-Invarianz ist in einer Vielzahl von Experimenten geprüft worden. Erst 1964 wurde für den Zerfall des neutralen Kaons eine Verletzung gefunden. Wir besprechen das in 13.3. Sie bedeutet, daß die *CP*-Invarianz durch die allgemeinere Transformation ersetzt werden muß. Dazu eignet sich das bereits 1954 von G. Lüders untersuchte *PCT*-Theorem (6.202), aus dem folgt

$$PCT = 1 \,. \tag{9.151}$$

In Übereinstimmung damit sollten die Naturgesetze invariant gegenüber der kombinierten Transformation *PCT* sein, auch wenn die Invarianz gegenüber den einzelnen Transformationen nicht gegeben ist.

7. Die experimentelle Bestimmung der Helizität gelang zuerst für das elektronische Neutrino in einem 1958 von M. Goldhaber u. a. durchgeführten Experiment auf direkte Weise, indem sie auf die Bestimmung der Helizität von γ-Quanten, d. h. deren Zirkularpolarisation, zurückgeführt wurde. Im Goldhaber-Experiment wurde der K-Einfang des Isomers ^{152m}Eu genutzt, der vom 9,2-h-0^--Zustand auf den

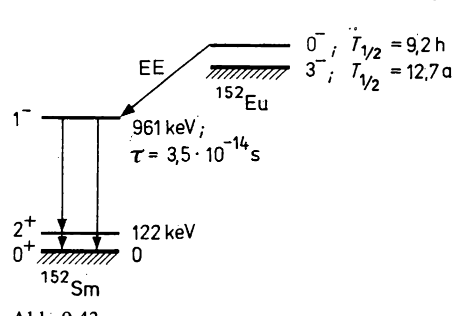


Abb. 9.43
Zerfallsschema von ^{152}Eu

961-keV-1^--Zustand von ^{152}Sm führt. Dieser zerfällt mit einer Lebensdauer von $3{,}5 \cdot 10^{-14}$ s durch Emission von γ-Quanten in den 0^+-Grundzustand von ^{152}Sm. Das Zerfallsschema zeigt die Abb. 9.43. Die Zerfallsgleichung lautet

$$^{152m}\text{Eu} + e_K^- \rightarrow {}^{152}\text{Sm}^* + \nu_e \rightarrow {}^{152}\text{Sm} + \nu_e + \gamma \,. \tag{9.152}$$

Berücksichtigt man, daß sich das K-Elektron im S-Zustand mit $l_e = 0$ befindet und das γ-Quant den Drehimpuls 1 wegträgt, dann ergeben sich die folgenden Drehimpulsverhältnisse:

$$0 + 1/2 \rightarrow 1 - 1/2 \rightarrow 0 - 1/2 + 1 \,. \tag{9.153}$$

Die Spins von Tochterkern und Neutrino müssen antiparallel ausgerichtet sein, also die von Neutrino und γ-Quant ebenfalls. An Hand von Abb. 9.44 kann man sich davon überzeugen.

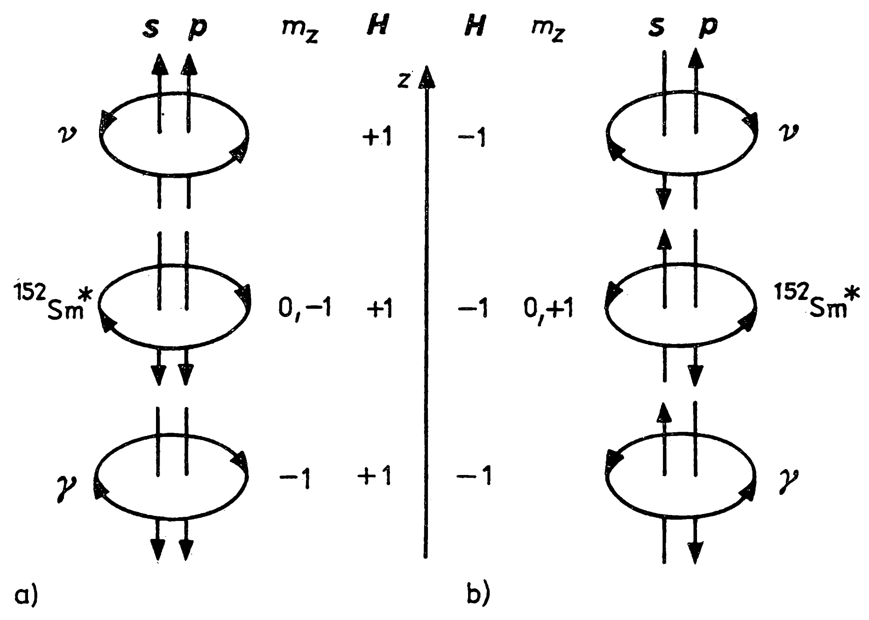


Abb. 9.44
Impuls-, Spin- und Helizitätsverhältnisse beim Goldhaber-Experiment mit ^{152}Eu
a) beobachtetes, b) nichtbeobachtetes Bild

Zur Bestimmung der Helizität wird noch die Impulsrichtung zueinander gehörender Neutrinos und γ-Quanten benötigt. Ihre Emissionsrichtungen sind aber statistisch unabhängig voneinander. Die zueinander gehörenden Paare kann man relativ leicht herausfinden, wenn man sie in entgegengesetzten Richtungen beobachtet. Die Neutrinos mit der festen Energie 950 keV erteilen dem Tochterkern einen Rückstoßimpuls von $p_\nu = E_\nu/c$. Der durch die γ-Quanten verursachte Rückstoßimpuls ist $p_\gamma = E_\gamma/c$ mit $E_\gamma = 961$ keV. Die Differenz ergibt bei entgegengesetzter Emissionsrichtung die kleine Rückstoßenergie von

$$E_R = \frac{p_R^2}{2M_R} = \frac{p_\nu - p_\gamma}{2M_R} = \frac{(E_\nu - E_\gamma)^2}{2M_R c^2} = 4{,}3 \cdot 10^{-4}\ \text{eV}\,, \tag{9.154}$$

d. h., die Rückstoßeffekte kompensieren einander fast vollständig. Gerade dadurch sind die Voraussetzungen zur Anwendung der Methode der Resonanzfluoreszenz, die in 9.6.4. besprochen wird, gegeben, die es ermöglicht, kleine Zustandslebensdauern experimentell zu bestimmen. Einer Zustandslebensdauer von $3 \cdot 10^{-14}$ s entspricht eine Linienbreite von $2{,}2 \cdot 10^{-2}$ eV. Für in entgegengesetzte Richtungen emittierte Neutrinos und γ-Quanten überlappen also die Energielinien einander.

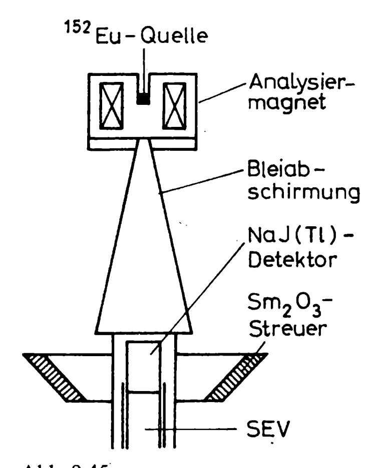


Abb. 9.45
Exberimentelle Anordnung im Goldhaber-Experiment

Die experimentelle Anordnung ist in Abb. 9.45 dargestellt, der entsprechende Ausschnitt aus dem γ-Spektrum in Abb. 9.46. Zur Analyse der Zirkularpolarisation wurde die Quelle in einem bis zur Sättigung magnetisierten Stahlstreuer untergebracht (siehe 9.6.4.2), der etwa drei mittlere freie Weglängen dick war, d. h. 6,4 cm. Der Wirkungsquerschnitt der Compton-Streuung hängt nun davon ab, ob es sich um links- oder rechtszirkular polarisierte γ-Quanten handelt. In der Anordnung des Goldhaber-Experiments treffen die ungestreuten γ-Quanten auf den ringförmigen Resonanzstreuer aus Sm_2O_3, der zur Untergrundmessung durch Streukörper mit gleicher Elektronendichte, z. B. aus Nd_2O_3, ersetzt wurde.

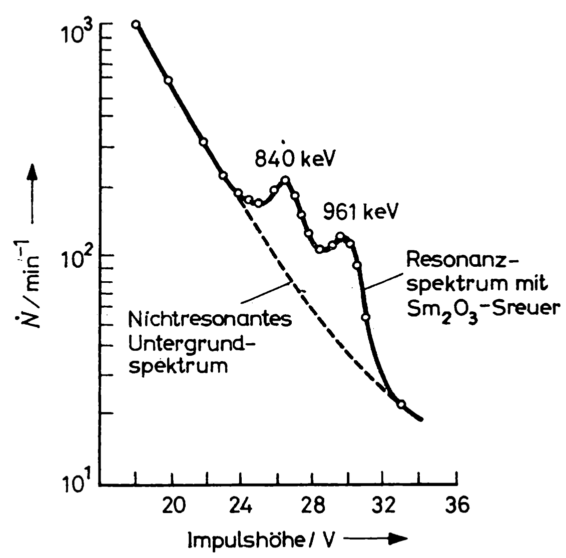


Abb. 9.46
γ-Spektrum im Goldhaber-Experiment

Bei Umpolung des Magnetfeldes konnte eine Zählratenänderung registriert werden, die zu einer relativen Zählratendifferenz von

$$\delta = 2\frac{(N_- - N_+)}{(N_- + N_+)} = -(0{,}017 \pm 0{,}003) \tag{9.155}$$

führte. Aus ihr ergab sich eine Linkszirkularpolarisation der γ-Quanten von $0{,}66 \pm 0{,}15$. Da γ-Quanten und Neutrinos in entgegengesetzten Richtungen emittiert wurden, müssen letztere negative Helizität haben. Der gegenwärtig genaueste Wert wurde mit Hilfe eines Ge(Li)-Detektors zu $-0{,}93 \pm 0{,}10$ bestimmt, was in guter Übereinstimmung mit $H(\nu) = -1$ ist.

9.6. Gammazerfall

9.6.1. Arten der Kernabregung

Die Kernphysik untersucht sowohl Grund- als auch Anregungszustände. Letztere machen den überwiegenden Teil aus, da jeder Kern eine gegen unendlich gehende Zahl möglicher Zustände hat. Der unmittelbare Untersuchungsgegenstand sind die Übergänge, über deren Eigenschaften die Quantenzahlen von Anfangs- und Endzuständen ermittelt werden sollen. Die Anregung von Kernzuständen kann prinzipiell in den verschiedensten Kanälen der beiden Kernumwandlungsarten erfolgen. Die Höhe der Anregungsenergie hängt von der Reaktions- oder Zerfallsenergie ab, die Anregungswahrscheinlichkeit von der Stärke der Wechselwirkungsart und von den Quantenzahlen der beteiligten Zustände, die im Falle der Reaktionen den Wirkungsquerschnitt, bei den Zerfällen die Zerfallskonstanten bestimmen. Auch die Natur der Anregung kann sehr unterschiedlich sein, es können sowohl Teilchen-, als auch Kollektivanregungen sein.

Wie die Anregung, so kann auch die Abregung auf unterschiedliche Weise erfolgen. Meistens handelt es sich bei der Abregung um einen radioaktiven Prozeß, d. h. um eine spontane Emission von Teilchen oder Quanten, wenn man solche Prozesse, wie die direkten Reaktionen, ausklammert. Abregungsenergie, Art und Wahrscheinlichkeit der Abregung werden durch die Quantenzahlen von Anfangs- und Endzustand geregelt. In allen Fällen setzt sich die Zerfallskonstante λ der Zustandsabregung bzw. die Zerfallsbreite Γ aus den partiellen Zerfallskonstanten λ_ν bzw. partiellen Zerfallsbreiten Γ_ν für unterschiedliche Abregung und auf unterschiedliche Endzustände gemäß (9.8a, b) zusammen.

Wenn die Anregungsenergie größer ist als die Bindungsenergie von Nukleonen und Nukleonengruppen, dann herrscht aus diesen ungebundenen Zuständen die Verdampfung von Nukleonen oder Nukleonengruppen (siehe 9.9.1. und 10.4.5.) vor. Ein Spezialfall ist die induzierte Kernspaltung. Ungebundene Zustände können auch nach β-Zerfall abgeregt werden, wenn dieser auf Zustände führt, in denen die Bindungsenergie von Nukleonen oder Nukleonengruppen kleiner ist, als die Anregungsenergie (siehe 9.9.1.). Man spricht dann von verzögertem Zerfall, weil die Emission der an sich sofort nach dem β-Zerfallsakt frei werdenden Nukleonen mit der Halbwertszeit des β-Zerfalls beobachtet wird. Bei Anregungsenergien kleiner als die Bindungsenergie von Kernteilchen, also bei der Anregung gebundener Zustände, dominieren im allgemeinen die Abregung durch Emission von γ-Quanten oder in manchen Fällen auch die Übertragung der Anregungsenergie auf Hüllenelektronen, die innere Konversion. Wenn die Übergangswahrscheinlichkeiten dieser beiden Kanäle sehr klein sind, kann die Abregung auch durch α- oder β-Zerfall erfolgen. Ein relativ seltener Prozeß ist die innere Paarbildung.

9.6.2. Experimentelle Ergebnisse und Methoden

9.6.2.1. Natur und Ursachen der Gammastrahlung

1. Bereits 1914 wurde von E. Rutherford und E. Andrade über die Diffraktion der γ-Strahlung an Kristallen nachgewiesen, daß sie elektromagnetischer Natur sind. Sie unterscheiden sich ihrem Wesen nach nicht von den Röntgen-Strahlen, sondern lediglich durch den Ort ihrer Entstehung: Bei der γ-Strahlung ist es der Kern, bei der Röntgen-Strahlung sind es die inneren Hüllenzustände. Die Energie der γ-Strahlung liegt bei der Emission aus Kernen größenordnungsmäßig zwischen keV und mehr als 10 MeV. In der Elementarteilchenphysik, wo der Entstehungsort die Wechselwirkungszone der Elementarteilchen ist, treten γ-Strahlen auf, deren Energien meist um einige Zehnerpotenzen größer sind.

Man erkannte bald, daß die γ-Strahlung im Ergebnis der elektromagnetischen Wechselwirkung der Kernnukleonen mit dem elektromagnetischen Feld entsteht. Im Unterschied zum β-Zerfall kann es sich aber dabei nicht um einen innernukleonischen Prozeß handeln, sondern vielmehr um einen innernuklearen. Es kann leicht gezeigt werden, daß ein freies Nukleon ein Photon weder absorbieren noch emittieren kann, da für diesen Prozeß Energie- und Impulssatz nicht gleichzeitig erfüllt werden können.

2. Die Emission von γ-Strahlung ist eine Erscheinung, die beim radioaktiven Zerfall fast aller Kerne beobachtet wird. Das gemeinsame Auftreten von α- und γ-Strahlung bzw. β- und γ-Strahlung wurde bereits in den ersten Jahren der Untersuchung der Kernstrahlung bemerkt, als nur α- und β-aktive natürliche Radionuklidquellen zur Verfügung standen. Ausnahmen treten nur bei der Abregung isolierter Isomere auf, von denen γ-Abregung verboten ist, oder beim α- und β-Zerfall in den Grundzustand der Tochterkerne. Den Beweis dafür, daß die γ-Strahlung in den Tochterkernen der über α- oder β-Umwandlung zerfallenden radioaktiven Nuklide bei der Abregung von Anregungszuständen entsteht, hat 1925 Lise Meitner durch ihre Untersuchungen der Erscheinung der inneren Konversion erbracht. Damit war auch die 1913 von K. Fajans und F. Soddy bei der Formulierung der radioaktiven Verschiebungssätze (siehe 9.1., Punkt 3) gemachte Voraussetzung bestätigt worden, daß die Emission von γ-Strahlung der Reaktionsgleichung (2.27) oder genauer

$$ {}^{A}_{Z}X^{**}_{N} \to {}^{A}_{Z}X^{*}_{N} + \gamma\,; \qquad \Delta A = \Delta Z = 0 \tag{9.156}$$

genügt. In dieser Formel sollen zwei Sterne eine höhere Anregungsenergie bedeuten als einer.

3. Eine weitere wichtige Erkenntnis besteht darin, daß sich die γ-Spektren durch Liniencharakter auszeichnen. In B.3.5. wird gezeigt, daß Linienspektren beim Zweiteilchenzerfall auftreten. Die beiden Teilchen sind hier das γ-Quant und der Rest- oder Rückstoßkern. Aus dem diskreten Charakter der γ-Strahlung folgt einerseits ihre Quantenhaftigkeit, andererseits die diskrete Energie der Anregungszustände. Für die Energie des γ-Quants E_γ als Funktion von der fortgetragenen Anregungsenergie ΔE^* sowie von der Energie des Anfangs- und Endzustandes gilt

$$E_\gamma = \Delta E^* = E_i - E_f\,, \tag{9.157}$$

wenn man die Rückstoßenergie vernachlässigt. Daß dies in vielen Fällen durchaus möglich ist, zeigt eine Abschätzung über Energie- und Impulssatz:

$$\Delta E^* = E_\gamma + E_k(R)\,; \qquad p_\gamma + p_R = 0\,, \tag{9.158}$$

$$E_k(R) = \frac{E_\gamma^2}{2E_0(R)} \approx \frac{\Delta E^{*2}}{2E_0(R)}\,. \tag{9.159}$$

Für $\Delta E^* = (0{,}1$ bis $1{,}0)$ MeV und $A = 100$ erhält man $E_k(R) \approx (10^{-6}$ bis $10^{-5})\,\Delta E^* \approx (0{,}1$ bis $1{,}0)$ eV.

9.6.2.2. Entwicklung von Kernzustandsschemata

Beim Auftreten mehrerer γ-Linien im Spektrum eines Kerns werden mehrere Zustände abgeregt. Ihre Einordnung in ein Anregungs- oder Zerfallsschema, je nachdem, ob das Spektrum im Gefolge der Anregung der Zustände in Kernreaktionen oder beim Kernzerfall entsteht, erfolgt meist in drei Schritten. Zuerst wird mit Hilfe von (9.157) die sogenannte Energiebilanz durchgeführt. In Analogie zum Ritzschen Kombinationsprinzip wird dabei festgestellt, für welche Übergänge die Summe der Energien bzw. ihre Differenz wieder eine experimentell gefundene Übergangsenergie liefern. Als zweiter Schritt folgt die Intensitätsbilanz. Hierbei wird geprüft, ob die Intensitäten der einen Zustand vermeintlich besiedelnden und abregenden Übergänge übereinstimmen. Dabei müssen alle An- und Abregungsformen berücksichtigt werden. Beim Zerfall auf der neutronendefiziten Seite in der Nähe des β-Stabilitätsbandes können das α- und β^+-Zerfall, E-Einfang, γ-Abregung und innere Konversion oder auch innere Paarbildung sein. Auf der neutronenangereicherten Seite können es β^--Zerfall, γ-Abregung, innere Konver-

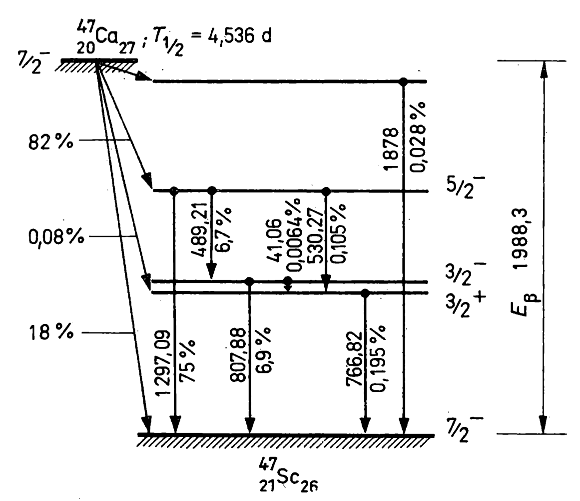


Abb. 9.47
Zerfallsschema von ^{47}Ca

Tabelle 9.7
Übergangsenergien und -intensitäten bei Abregung nach dem β-Zerfall von ^{47}Ca

E_γ/keV	I_γ/rel. Einh.	I_γ/% pro Zerfall
41,06 ± 0,05	0,0085 ± 0,0009	0,0064
489,23 ± 0,10	9,0 ± 0,3	6,7
530,4 ± 0,3	0,14 ± 0,02	0,105
787,0 ± 0,3	0,26 ± 0,02	0,195
807,86 ± 0,10	9,2 ± 0,3	6,9
1297,09 ± 0,10	100	74,9
1878,0 ± 0,5	0,038 ± 0;04	0,028

sion und innere Paarbildung sein. Dabei wurde zunächst von der verzögerten Nukleonenemission abgesehen. Der dritte Schritt besteht schließlich in einer Koninzidenzanalyse, in der die zeitliche Korrelation von Übergängen verschiedener Energie festgestellt wird. Dabei wird ebenfalls eine Intensitätsbilanz durchgeführt, also Antwort auf die Frage gegeben, wieviel Prozent eines Übergangs mit wieviel Prozent eines anderen gleichzeitig emittiert werden. Erst nachdem auf diese Weise die Existenz der Zustände mit relativ großer Sicherheit bewiesen wurde, kann ihre Charakterisierung mit den Quantenzahlen erfolgen. Zu den Charakteristika der Zustände gehören auch die Lebensdauer bzw. Zerfallsbreiten. In Abb. 9.47 ist als Beispiel das Zerfallsschema von ^{47}Ca gezeigt. Tabelle 9.7 enthält neben den Übergangsenergien die relativen Übergangsintensitäten sowie die Übergangswahrscheinlichkeiten pro Zerfall in der Annahme, daß 11 % der β-Zerfälle direkt in den Grundzustand gerichtet sind. Die Kernzustandsschemata werden tabellarisch erfaßt.

9.6.2.3. Gammaspektrometrie

1. Zur Spektrometrie der γ-Strahlung sind die verschiedensten Methoden entwickelt worden. Größte Verbreitung haben heute Spektrometer mit Halbleiter- und Szintillationsdetektoren. Ihnen folgen die magnetischen Spektrometer, und in einigen wenigen Fällen werden auch Kristall-Diffraktionsspektrometer verwendet.

2. Im Kristall-Diffraktionsspektrometer werden die γ-Quanten entsprechend der Braggschen Reflexionsbeziehung (4.45) in Abhängigkeit von der Wellenlänge in einen bestimmten Winkel gestreut. Nach dieser strengen Auswahl kann ihre Registrierung mit einem einfachen Zählerdetektor erfolgen. Die Ansprechfunktion, d. h. die Linienform, ist sehr einfach, da sie nur aus einer Gauß-Verteilung besteht. Die im Kristall durch Photo-, Compton- und Paarbildungseffekt gestreute Strahlung tritt als Untergrund auf.

3. Die magnetischen γ-Spektrometer sind im Grunde β-Spektrometer, in denen an die Stelle der β-Quelle eine Konverterfolie eingesetzt ist, auf die der gut kollimierte γ-Strahl trifft. Analysiert werden die im Wechselwirkungsprozeß entstehenden Rückstoßelektronen. Im Photoelektronenspektrometer verwendet man Folien aus Materialien mit großer Ordnungszahl Z, z. B. Uran. Folien mit kleinem Z kommen im Compton-Spektrometer zur Anwendung, z. B. Beryllium. Infolge der starken Z-Abhängigkeit des Wirkungsquerschnitts des Photo- und Compton-Effekts mißt man in guter Näherung die reinen Photo- bzw. Compton-Elektronen-Spektren. Paarspektrometer enthalten ebenfalls Konverterfolien mit großem Z. Man analysiert Elektronen und Positronen magnetisch nach ihrem Impuls und elektronisch durch Koinzidenzauswahl auf Gleichzeitigkeit.

4. In Spektrometern mit Halbleiter- und Szintillationsdetektoren ist Z durch das Detektormaterial vorgegeben. Die Erzeugungsrate der im Detektor zu verarbeitenden Elektronen, aufgeschlüsselt auf die drei wichtigsten Wechselwirkungseffekte, hängt vom Wirkungsquerschnitt für Photo-, Compton- und Paarbildungseffekt ab, aber nicht nur im Detektormaterial, sondern auch in der näheren Umgebung des Detektors. Daher kann die Ansprechfunktion für einen Übergang aus einem Kontinuum und mehreren Linien bestehen. Man verringert diesen Nachteil manchmal durch den Einsatz mehrerer Detektoren und einer elektronischen Zeitauswahl zwischen den Impulsen in ihnen. Allerdings treten dabei Lichtstärkeverluste auf. Die wichtigsten Arten der γ-Spektrometer aus mehreren Detektoren sind die Compton-, Anticompton- und Paarspektrometer. In allen Fällen trifft der gut kollimierte Strahl der γ-Quanten in einen Zentraldetektor, dessen Impulse nur dann zur Spektrenbildung zugelassen werden, wenn eine Zusatzbedingung erfüllt ist. Im Compton-Spektrometer erfolgt die Einschreibung nur, wenn das gestreute Compton-Quant in einen zweiten, seitlich unter einem bestimmten Winkel aufgestellten Detektor gleichzeitig registriert wird. Beim Anticompton-Spektrometer wird der Zentraldetektor möglichst vollständig vom Anticompton-Detektor umgeben. Die Impulse des Zentraldetektors werden nur dann zur Bildung des γ-Spektrums zugelassen, wenn gleichzeitig im Anticompton-Detektor kein Impuls registriert wird. Im Paarspektrometer wird die Einschreibung eines γ-Quants nur zugelassen, wenn in zwei unter einem Winkel von 90° zur Achse des Zentraldetektors und von 180° zueinander aufgestellten Detektoren die beiden Annihilationsquanten von je 511 keV gleichzeitig registriert werden.

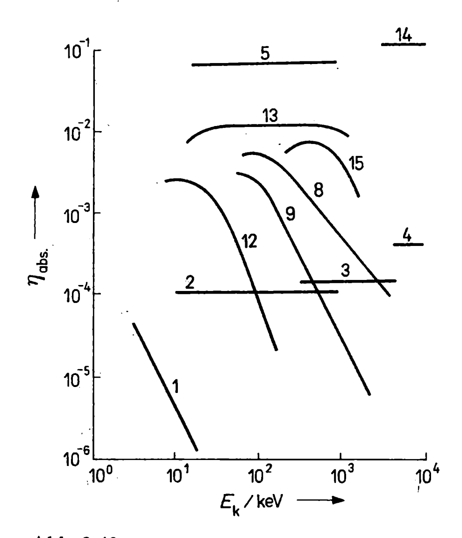


Abb. 9.48
Effektivität η einiger konkreter Spektrometer
1 Kristall-Diffraktionsspektrometer nach DuMond, 2 Danysh-Spektrometer, $\Delta p/p = 0{,}04$, (0,01 %); 3 $\pi\sqrt{2}$-Spektrometer $\Delta p/p = 0{,}2\,\%$ (0,015 %); 4 magnetischer α-Spektrograph $\pi\sqrt{2}$, $\Delta p/p = 0{,}04\,\%$, (0,04 %); 5 eisenfreies Toroidspektrometer $\Delta p/p = 0{,}4\,\%$, (7 %); 6 NaJ(Tl); 7 Grenzauflösung von Ge bei Fano-Faktor $F = 0{,}14$; 8 Ge(Li), 37 cm³, (1,5 %); 9 Ge(Li), 1,3 cm³ für X- und γ-Strahlen; 10 Ge(Li), 200 mm² × 5 mm für X- und γ-Strahlen; 11 Ge, 25 mm² × 5 mm für X-Strahlen; 12 Si(Li), 80 mm² × 4 mm, (1 %) für X-Strahlen; 13 Si(Li), 80 mm² × 4 mm für Elektronen; 14 Si(Au), 80 mm² × 0,5 mm für α-Teilchen; 15 entspricht 12, aber im homogenen Magnetfeld. In Klammern ist der Raumwinkel angegeben

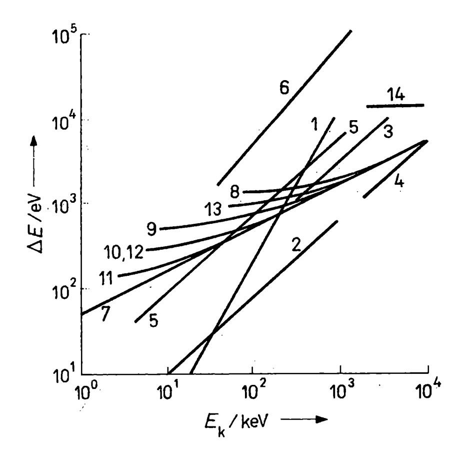


Abb. 9.49
Absolute energetische Auflösung einiger konkreter Spektrometer. Bezeichnungen wie in Abb. 9.48

5. Die aufgeführten Spektrometer haben alle ihre artspezifischen Vor- und Nachteile. Die Auswahl richtet sich nach dem konkreten Anwendungsfall. Die wichtigsten Auswahlkriterien sind die Effektivität η und die energetische Auflösung ΔE oder $\Delta E/E$ und beim Einsatz in der volkswirtschaftlichen Praxis die Höhe des Aufwandes und die Zuverlässigkeit. Zum Vergleich sind in Abb. 9.48 und 9.49 die Effektivität und die energetische Auflösung einiger Spektrometer gegenübergestellt. Das Kristall-Diffraktionsspektrometer hat bis zu 200 keV die beste energetische Auflösung, aber die geringste Effektivität. Die Szintillationsdetektoren haben die größte Effektivität. Ihre Energieauflösung befriedigt aber am wenigsten. Die Halbleiterdetektoren zeichnen sich durch eine etwa zehnmal kleinere Effektivität, aber dafür in weiten Bereichen durch eine 10 bis hundert mal bessere Energieauflösung aus. Auch hinsichtlich der Lichtstärke bieten sie Vorteile. Zur Kollimierung des γ-Strahls in Koinzidenz- und Antikoinzidenzanordnungen genügen 1 bis 2,5 Grad, so daß $\Lambda = (0{,}7 \text{ bis } 5) \cdot 10^{-4}\eta$ wird, also einige Zehnerpotenzen größer ist als bei den magnetischen und Kristall-Diffraktions-Spektrometern. Sie nehmen damit einen besonderen Platz ein, und wir sind gegenwärtig Zeugen der Verdrängung der magnetischen γ-Spektrometer aus einigen Anwendungsbereichen. Der wesentlichste Nachteil der Halbleiterspektrometer besteht in der komplizierten Ansprechfunktion sowie in der Notwendigkeit ihrer Kühlung. Im Falle des Ge(Li)-Detektors kühlt man mit flüssiger Luft ab, d. h. auf 77 K.

6. Um ein anschauliches Bild der Ansprechfunktionen der Szintillations- und Halbleiterdetektoren zu vermitteln, sollen einige Beispiele betrachtet werden.

Das Spektrum des Nuklids ^{137}Cs, dessen Zerfallsschema die Abb. 9.17a zeigt, ist in Abb. 9.50 dargestellt. Neben der Vollabsorptionslinie, der Compton-Kante und der Rückstreulinie treten bei niedrigen Energien zwei weitere Linien auf. Bei 76,6 keV entsteht durch Wechselwirkung der γ-Strahlung mit der oft erforderlichen Bleiabschirmung des Detektors infolge Photoeffekts die sogenannte Blei-KX-Linie. Bei 32 keV erzeugt die KX-Strahlung des ^{137}Ba, die bei der inneren Konversion des isomeren Zustandes mit 662 keV entsteht, die zweite Linie.

Das in Abb. 9.32 dargestellte Zerfallsschema des ^{60}Co ist eine einfache Variante. Tatsächlich gibt es noch einen zweiten 2^+-Zustand bei 2159 keV, der sowohl vom 4^+-Zustand über γ-Abregung als auch durch β-Zerfall angeregt wird. Die Abregung erfolgt auf den Grund- und

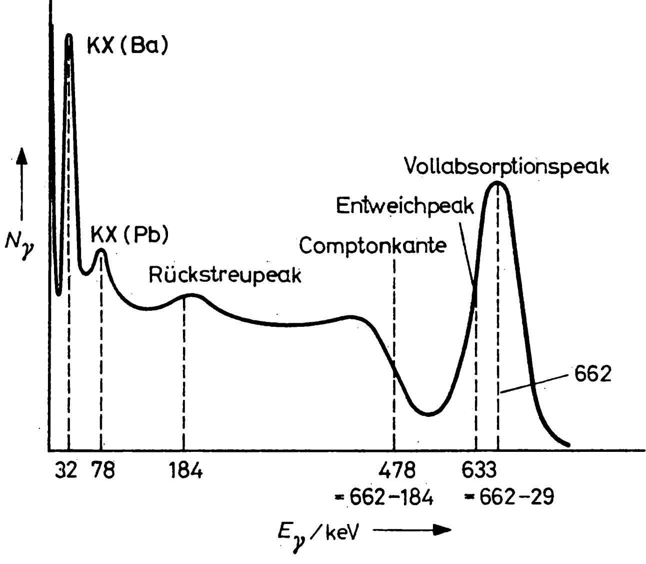


Abb. 9.50
γ-Spektrum von ^{137}Cs

auf den ersten 2^+-Zustand. Die Intensitäten der Übergänge sind aber sehr gering; sie liegen bei 10^{-3} %. Darüber hinaus existiert noch ein direkter Übergang vom 4^+- in den 0^+-Grundzustand. Seine Intensität liegt zwischen 10^{-5} und 10^{-6} %. Ihn zu beobachten ist besonders schwer, weil eine bestimmte, mit dem Detektorradius und dem Quadrat der Zählrate zunehmende Wahrscheinlichkeit besteht, daß zufällig ein 1,332- und ein 1,173-MeV-Quant gleichzeitig absorbiert werden und bei 2,5 MeV eine Summenlinie ergeben. Solche Summenlinien treten auch in anderen Fällen auf. In Abb. 9.51 ist das mit einem 37-cm³-Ge(Li)-Detektor im Abstand von 7 cm aufgenommene γ-Spektrum von ^{60}Co abgebildet.

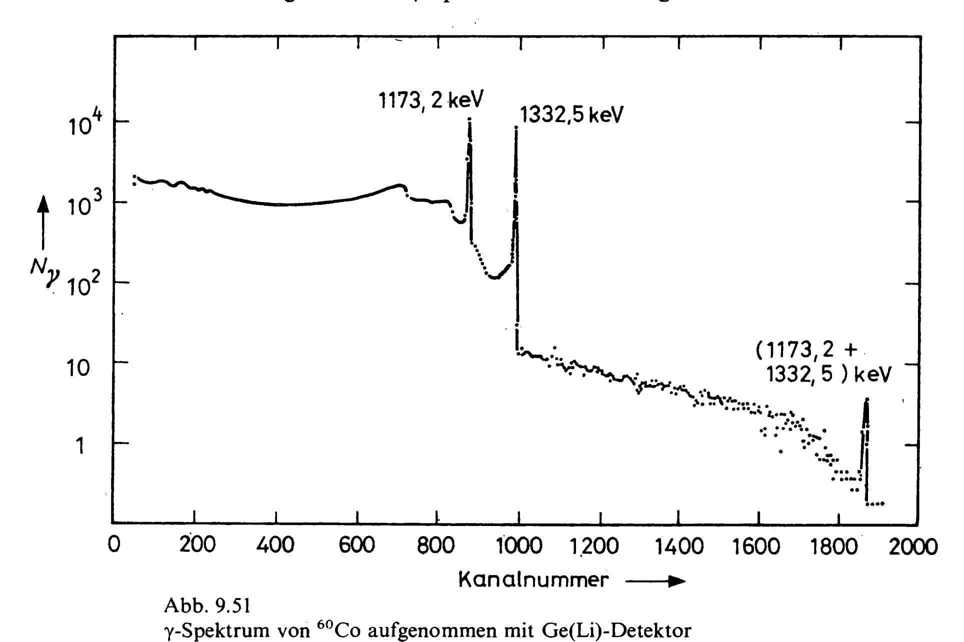


Abb. 9.51
γ-Spektrum von ^{60}Co aufgenommen mit Ge(Li)-Detektor

Wenn das Mutternuklid ein β^+-Strahler ist, dann annihilieren die Positronen im Detektor oder in der ihn umgebenden Materie. Die dabei entstehenden 511-keV-Quanten verursachen die Annihilationslinie bei 511 keV und eine Summenlinie bei 1022 keV. Der Zerfall von ^{22}Na ist ein typisches Beispiel dafür. Das Zerfallsschema zeigt die Abb. 9.17b. Damit die Summation deutlich zu sehen ist, wurde das Spektrum in 4π-Geometrie aufgenommen (Abb. 9.52), d. h., die Quelle wurde zwischen zwei sich unmittelbar gegenüberstehenden und einander berührenden Detektoren angeordnet. Außer der Annihilations-, der 1,022-MeV-Summen- und der 1,277-MeV-Vollabsorptionslinie sieht man bei 1,790 MeV und 2,300 MeV je eine Linie, die sich durch Summierung der 1,277-MeV-Quanten mit einem bzw. zwei gleichzeitig registrierten Annihilationsquanten ergeben.

Mit wachsender Energie rufen γ-Quanten Paarbildungseffekt hervor (siehe Abb. 4.18). In der Kernreaktion $^{53}Cr(n, \gamma)^{54}Cr$ entstehen z. B. neben anderen auch γ-Quanten mit einer Energie von 9,717 und 8,885 MeV. Jeder dieser Übergänge ist im hochenergetischen Teil des Spektrums mindestens durch drei Linien vertreten. Es sind dies die Vollabsorptionslinie mit E_γ, eine Linie bei E_γ — 1,022 MeV und eine bei E_γ — 0,511 MeV. Die letzten beiden Linien entstehen durch Entweichen eines der bei der Annihilation eines Positrons entstehenden 511-keV-Quants aus dem Detektor. Man spricht daher auch von einfacher und doppelter Entweichlinie. Das mit einem Ge(Li)-Detektor aufgenommene Spektrum zeigt die Abb. 9.53.

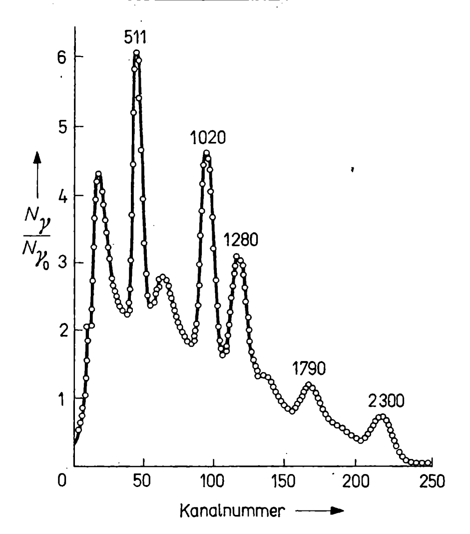


Abb. 9.52
γ-Spektrum von ^{22}Na in 4π-Geometrie mit 2 NaJ(Tl)-Detektoren 120 × 100 mm^3

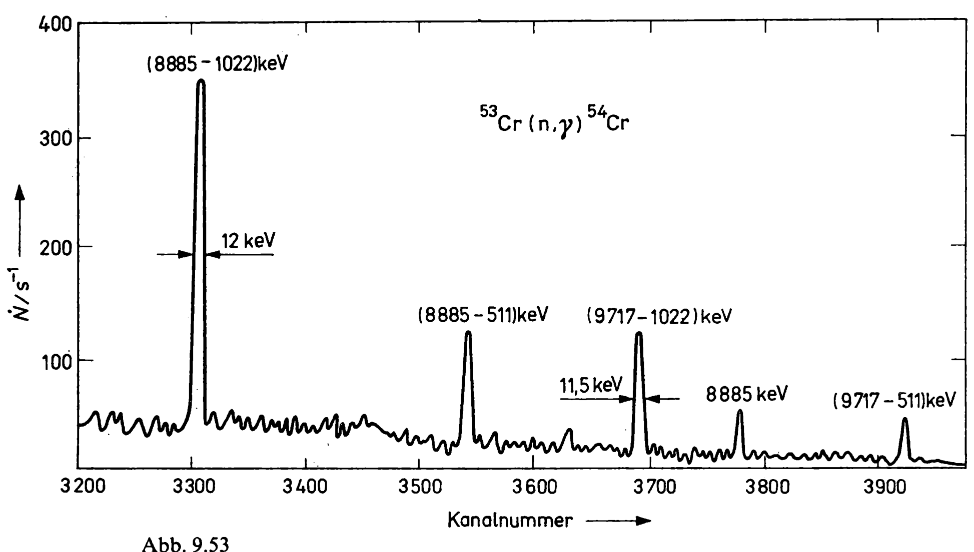


Abb. 9.53
Hochenergetischer Teil des γ-Spektrums der Reaktion ^{53}Cr(n, γ) ^{54}Cr, aufgenommen mit Ge(Li)-Detektor

7. Die Entschlüsselung der γ-Spektren ist um so komplizierter, je mehr Linien enthalten sind. Hinzu kommen zwei weitere Komplikationen. Erstens überlappen die Linien oft einander, da die energetische Auflösung in vielen Fällen nicht ausreicht. Ihre Trennung ist auf Grund der Kenntnis der Ansprechfunktionen möglich, besonders wenn die Überlappung geringfügig ist. Zweitens enthält die Ansprechfunktion für einen Übergang vorgegebener Energie neben der

Vollabsorptionslinie und dem Kontinuum nicht selten mehrere Linien, wie das in Punkt 6 erörtert wurde. Heute stehen in den Laboratorien Rechenprogramme zur Verfügung, mit deren Hilfe die Energien und Intensitäten der Übergänge unter Berücksichtigung von Korrekturen auf verschiedene Einflußgrößen am Ausgang von elektronischen Rechenmaschinen ausgegeben werden können.

9.6.2.4. Lebensdauer von Kernzuständen

1. Zur Erforschung der Kernstruktur genügt die Messung der Energie der Übergänge und die Einordnung in Zustandsschemata unter Berücksichtigung ihrer Intensitäten allein nicht. Da die γ-Quanten Drehimpuls tragen, sich auch durch ihre Parität auszeichnen, enthalten sie Informationen über Drehimpulse und Paritäten der Zustände. Wie in 9.6.3.2. gezeigt wird, hängen die Übergangswahrscheinlichkeiten, und damit die Lebensdauern der Kernzustände, von der Energie-, Drehimpuls- und Paritätsänderung ab. Diese wiederum lassen sich auf der Grundlage von Modellen berechnen und können mit den experimentellen Werten verglichen werden. Die Untersuchung der Lebensdauern der Kernzustände liefert somit einen Zugang zur Kernstruktur. Da sich die Lebensdauern über viele Zehnerpotenzen erstrecken, ist ein weites Spektrum von Methoden zu ihrer Messung erforderlich. In Abb. 9.54 wird ein Überblick gegeben. Die meisten Methoden beruhen auf der Registrierung der γ-Strahlung.

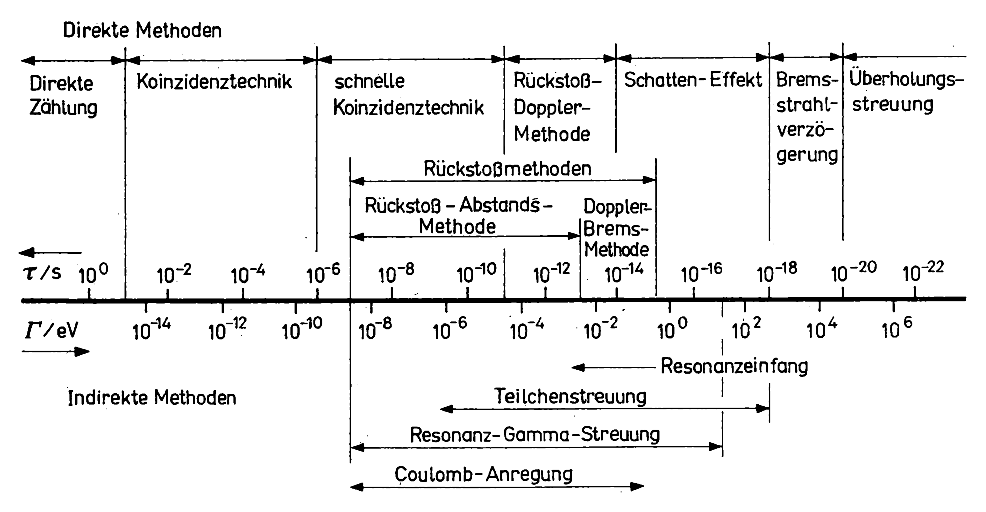


Abb. 9.54
Methoden zur Messung der Lebensdauer von Kernzuständen und deren Einsatzgebiete

2. In 9.2.1. wurden in Punkt 4 die verbreitetsten Methoden zur Halbwertszeit- bzw. Lebensdauerbestimmung erläutert. Im folgenden besprechen wir Methoden, die besonders für sehr kleine Zeiten geeignet sind.

Im Gebiet zwischen 10^{-7} bis 10^{-15} s läßt sich der Kernrückstoß zur Lebensdauerbestimmung nutzen. Man unterscheidet dabei drei grundsätzlich verschiedene Methoden. Wenn der angeregte Kern aus einem dünnen Präparat ins Vakuum gelangen kann, dann ist erstens seine Geschwindigkeit aus der Kinematik berechenbar und zweitens kann die Rate der γ-Quanten oder der Elektronen der inneren Konversion als Funktion vom Präparatabstand gemessen werden. Daraus läßt sich die Lebensdauer berechnen. Man

spricht von der Rückstoß-Abstandsmethode. Eine untere Grenze ist durch solche Werte, wie $v = 3 \cdot 10^9$ cm/s und $s = 10^{-13}$ cm zu $3 \cdot 10^{-13}$ s abschätzbar. In diesem Falle des freien Austritts der Rückstoßkerne in das Vakuum kann man auch vom Doppler-Effekt Gebrauch machen. Da sich die Energie der γ-Quanten, die unter dem Winkel $\vartheta > 90°$ zur Richtung der sich mit der Geschwindigkeit v bewegenden Rückstoßkerne gemäß

$$E_\gamma = E_{\gamma 0}\left(1 + \frac{v}{c}\cos\vartheta\right); \qquad \Delta E = \frac{v}{c}\cos\vartheta \tag{9.160}$$

von der Energie der aus ruhenden Rückstoßkernen emittierten γ-Quanten unterscheiden, sind die entsprechenden Linien verschoben. Das gilt auch für die Impulse der Konversionselektronen. Die Verschiebungen lassen sich für die γ-Quanten mit Hilfe von Ge(Li)-Detektoren messen. Die nichtverschobene Linie erhält man von einem Auffänger, in der die Rückstoßkerne gestoppt werden. Wenn der Abstand zwischen Auffänger und Target s ist und die Zählrate für $E_{\gamma 0}$ und E_γ mit $\dot{N}_0$ bzw. $\dot{N}$ bezeichnet wird, dann gilt

$$\frac{\dot{N}_0}{\dot{N}_0 + \dot{N}} = e^{-\frac{s}{vt}}. \tag{9.161}$$

Mit dieser Doppler-Rückstoßmethode kommt man bis zu Lebensdauern von 10^{-14} s hinab. Eine schematische Darstellung der Anordnung zeigt die Abb. 9.55.

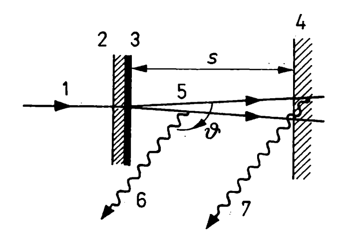


Abb. 9.55
Anordnung zur Doppler-Rückstoßmethode
1 Inzidenzteilchenstrom, 2 Haltefolie, 3 Target, 4 Auffänger, 5 Rückstoßkerne, 6, 7 γ-Quanten von bewegten (6) und gestoppten (7) Rückstoßkernen

Einen weiteren Schritt in das Gebiet zwischen 10^{-13} s und 10^{-15} s erlaubt die Doppler-Bremsmethode. Die Rückstoßkerne werden hierbei in einem dicken Target oder Präparat gestoppt. Wenn die Abbremszeiten in dem betreffenden Medium bekannt sind und in der Größenordnung der zu bestimmenden Lebensdauer liegen, dann kann man ebenfalls vom Doppler-Effekt ausgehen. Am Beginn des Bremsweges liefern die Rückstoßkerne eine verschobene, am Ende eine unverschobene Linie. Da alle Geschwindigkeiten zwischen v_{max} und 0 vorkommen, wird ein Kontinuum beobachtet, genauer eine Linienverbreiterung mit gleichzeitiger Schwerpunktverschiebung. Die Zeitskala läßt sich aus dem Bremsweg, der gleich der mittleren Reichweite R ist und der Geschwindigkeit über $\tau = R/v$ angeben. Im gleichen Zeitgebiet ist auch die Resonanzstreumethode verwendbar, die in 9.7.1., Punkt 3, beschrieben wird.

In das Gebiet zwischen 10^{-14} bis 10^{-18} s gelangt man mit Hilfe des Schatten- oder Tulinov-Effekts (siehe 4.2.5.). Bei noch kleineren Zeiten zwischen 10^{-18} bis 10^{-20} s nutzt man die Bremsstrahlverzögerung. Die Methode beruht darauf, daß die elektromagnetische Strahlung im Vakuum eine andere Geschwindigkeit hat als im Targetmedium. Aus der Interferenz eines das Target und eines nur Vakuum durchlaufenden Quants kann man auf die Lebensdauer schließen. Zur Messung der allerkleinsten Zeiten von 10^{-20} s und weniger eignet sich die Methode der Überholstreuung. Die tritt auf, wenn zwei Teilchen aus einem Kern in die gleiche Richtung so schnell nacheinander und mit derartigen Geschwindigkeiten emittiert werden, daß das erste vom zweiten überholt werden kann. Die Zeit des Überhol-, also Streuvorganges, läßt sich aus

$$\tau = \frac{D}{v_1} - \frac{D}{v_2} \tag{9.162}$$

berechnen. Dabei sind v_1 und v_2 die Geschwindigkeiten des ersten und des zweiten Teilchens und D der Abstand des Einholpunktes vom Kern.

3. Bei den indirekten Methoden wird nicht die Lebensdauer, sondern die Zerfallsbreite oder die reduzierte Übergangswahrscheinlichkeit $B(\sigma, l)$ ermittelt. Die Lebensdauer kann über (2.3) oder (9.185) berechnet werden. In Tabelle 9.8 sind τ- und Γ-Werte gegenübergestellt. Eine Methode zur Bestimmung des $B(\sigma, l)$-Wertes ist die Coulomb-Anregung. Der Mechanismus wurde in 8.4.3., Punkt 1, an Hand der Abb. 8.26 erläutert. Für den Wirkungsquerschnitt der Anregung von El-Multipolen (die Anregung von Ml-Multipolen hat praktisch keine Bedeutung) gilt

$$\sigma_l = \left(\frac{Z_1 Z_2 e^2}{\hbar v_i}\right)^2 \left(\frac{A_{1,2} m v_i v_f}{Z_1 Z_2 e^2}\right)^{2l-2} \frac{B(El)}{(Z_2 e)^2} f_l \left(\frac{Z_1 Z_2 e^2}{\hbar} \frac{v_i - v_f}{v_i v_f}\right). \tag{9.163}$$

Tabelle 9.8
Natürliche Linienbreiten und Zustandslebensdauern

τ/s	10^{-15}	10^{-12}	10^{-9}	10^{-6}	10^{-3}	10^{0}
Γ/eV	$6{,}57 \cdot 10^{-1}$	$6{,}57 \cdot 10^{-4}$	$6{,}57 \cdot 10^{-7}$	$6{,}57 \cdot 10^{-10}$	$6{,}57 \cdot 10^{-13}$	$6{,}57 \cdot 10^{-16}$

Hier bedeuten m die Nukleonenmasse, v_i und v_f Anfangs- und Endgeschwindigkeit des Geschoßteilchens und $A_{1,2} = A_1 A_2/(A_1 + A_2)$ die reduzierte Massenzahl. Die Funktion f_l ist tabelliert worden; sie geht bei festen Werten der Größen im Argument als Proportionalitätsfaktor ein. Wegen der Proportionalität zu Z_1 ist die Methode besonders für große Werte von Z_1 geeignet, d. h. für schwere Ionen. Das γ-Spektrum wird meist mit einem Ge(Li)-Detektor in Koinzidenz mit dem rückgestreuten Geschoßteilchen gemessen. Die Lebensdauer der Zustände hängt von einer Reihe von Größen ab. Gemäß (9.185) geht die Energie mit hoher Potenz ein. Es sind auch der Mischungsparameter der Multipolstrahlung δ (9.193), der Koeffizient der inneren Konversion α (9.242), ein Faktor f, der die Verzweigungsverhältnisse bei der Abregung in einen direkten und in Kaskadenübergänge enthält, zu berücksichtigen. Dazu kommt noch der statistische Faktor $g = (2I + 1)/(2I_0 + 1)$ gemäß (6.123). Für $E2$-Anregungen erhält man z. B.

$$T_{1/2} = 56{,}3 \left(1 + \frac{1}{\delta^2}\right)^{-1} (1 + \alpha)^{-1} (1 + f)^{-1} E^{-5} \cdot g \cdot B(E2). \tag{9.164}$$

Das Anwendungsintervall liegt zwischen $B(E2)$-Werten von 10^{-5} bis 10^1 e^2barn^2.

Die Methode der γ-Resonanzstreuung beruht auf der Anregung von Zuständen mit der Energie E_0 durch γ-Strahlen mit der Resonanzenergie E_r. Im Absorptionsspektrum muß dann bei der Resonanzenergie ein Minimum der durchgelassenen γ-Quanten zu beobachten sein. In Analogie zu (10.181) ist der Wirkungsquerschnitt der Resonanzstreuung mit der Strahlungsbreite Γ über

$$\sigma(E) = \frac{\Gamma^2}{4} \sigma_0 \frac{f_a}{(E - E_r)^2 + \Gamma^2/4}; \qquad \sigma_0 = \frac{2{,}44 \cdot 10^{-15}}{E_\gamma^2/\text{keV}^2} \frac{(1 + 2I)}{(1 + 2I_0)} \frac{1}{1 + \alpha} \tag{9.165}$$

verbunden. Dabei ist f_a die Absorptionswahrscheinlichkeit der Resonanzquanten. Die γ-Quanten der Abregung des gleichen Zustandes in einem Nachbarkern unterscheiden sich von E_r wegen der Rückstoßenergie. Durch geeignete Maßnahmen kann man dafür sorgen, daß die Resonanzenergie aufgebracht wird. Darüber wird ausführlich in 9.7 gesprochen. Zu den kleinen Zeiten von 10^{-17} s gelangt man mit Hilfe der Mößbauer-Spektrometrie.

Bei der unelastischen Streuung von Teilchen werden oft gut aufgelöste Resonanzkurven im Wirkungsquerschnitt der Reaktion beobachtet. Beispiele sind die unelastische Elektronen- und Neutronenstreuung. Nach dem Anbringen von Korrekturen kann man die Lebensdauer aus der Resonanzbreite mit Hilfe von (2.3) oder (9.11) bestimmen. Der Wertebereich für die $B(E2)$-Werte liegt zwischen 10^{-4} und 1 e^2barn^2. Bei der Anregung mit Elektronen von einigen hundert MeV können Zustände bei einigen MeV angeregt werden. Die Genauigkeit der Bestimmung von τ ist aber nicht groß, da die Annahmen über die Ladungsverteilung im Kern eingehen, die noch recht unsicher sind. Die (n, n')-, (p, p')-, (d, d')- und (α, α')-Prozesse haben den Vorteil, daß die Anregung nicht über die elektromagne-

tische, sondern über die starke Wechselwirkung erfolgt, so daß Interferenzen mit der Coulomb-Anregung gering sind. Den gleichen Vorteil haben auch die Resonanz-Einfangsreaktionen, wie z. B. (n, γ) oder (n, π).

9.6.3. Multipolcharakter der Gammastrahlung

9.6.3.1. Multipolfeld von Kern und Gammastrahlung

1. Wie bereits in 9.6.2., Punkt 1, festgestellt wurde, handelt es sich bei der Emission von γ-Quanten um einen Prozeß der elektromagnetischen Wechselwirkung. Der Kern ist im Anregungszustand ein System aus schwingenden Ladungs- und Stromverteilungen, das durch die Abregung eine definierte Änderung erfährt. Anders ausgedrückt wird ein elektromagnetisches Feld mit zeitlich veränderlicher elektrischer und magnetischer Feldstärke durch Wegführung eines zweiten solchen Feldes in der Form des γ-Quants in ein neues elektromagnetisches Feld überführt. Die einfachsten Formen sind Dipol-, Quadrupol- und Oktupolfelder, d. h., sie gehen von schwingenden Dipolen, Quadrupolen und Oktupolen aus. Allgemein spricht man von Multipolen oder 2^l-Polen, wobei l die Multipolordnung ist und den Drehimpuls des Strahlungsfeldes angibt. Die drei genannten Multipole haben die Ordnung 1 bis 3. Da der Kern ein quantenmechanisches System ist, treten diese Felder gequantelt auf, d. h., sie haben definierte Werte von Energie, Drehimpuls, Parität, und bei der Abregung sind als Folge der Gültigkeit von Erhaltungssätzen Auswahlregeln zu erfüllen. In der Atomhülle treten praktisch nur Dipolstrahlungen auf, weil höhere Multipolordnungen nicht nur meist verboten sind, sondern prinzipiell wesentlich geringere Intensitäten aufweisen würden, auch wenn sie erlaubt wären. Man beobachtet sie daher auch dann nicht, wenn die Dipolstrahlung verboten ist. Die Abregung erfolgt dann auf andere Weise, z. B. in Stoßprozessen. Atomkerne haben mit der Umgebung weniger Wechselwirkungsmöglichkeiten als die Hülle. Daher kann die Abregung eines gebundenen Zustandes, wenn man von α- und β-Zerfall absieht, denn sie tragen nur ganz selten zur Abregung bei, nur über einen der beiden am meisten verbreiteten elektromagnetischen Prozesse erfolgen, über die Emission von γ-Quanten oder die innere Konversion. In diesen Fällen treten in Übereinstimmung mit den Auswahlregeln auch Strahlungen höherer Multipolordnung auf, also Oktupol- und Hexadekapol-Strahlungen. Die Aufgabe der theoretischen Beschreibung muß daher darin bestehen, die experimentell meßbaren Größen mit den drei Multipolfeldern von Anfangs- und Endzustand sowie γ-Quant zu verbinden. Ein einfacher Lösungsweg besteht darin, als ersten Schritt die allgemeine Lösung der Maxwellschen Gleichungen für ein Feld von schwingenden klassischen Ladungs- und Stromverteilungen in der Form von Eigenfunktionen des Drehimpulses zu suchen. Diese Lösungen entsprechen gerade dem Strahlungsfeld eines schwingenden klassischen 2^l-Pols. Man hat dabei elektrische und magnetische Multipolstrahlungen zu unterscheiden, je nachdem ob es sich um schwingende elektrische oder magnetische Multipole handelt. So ist die Quelle der elektrischen Dipolstrahlung ein elektrischer Dipol, die einer magnetischen Dipolstrahlung ein magnetischer Dipol, also z. B. eine Leiterschleife mit periodisch veränderlichem Strom. Der Unterschied zwischen beiden Feldern besteht, von der Beschreibung her betrachtet, darin, daß elektrische und magnetische Vektoren miteinander vertauscht sind. Daher treten z. B. bei der elektrischen Dipolstrahlung keine Radialkomponenten des magnetischen Feldes, bei der magnetischen keine des elektrischen Feldes auf. Die Charakterisierung der Art des Multipols erfolgt durch die Buchstaben E und M. Ein schwingender elektrischer Multipol ist durch das Symbol El, ein magnetischer durch Ml gekennzeichnet. Das gilt ebenso für die Multipolstrahlungen. Die einfachsten sind die E1- und M1-Strahlungen, d. h. die elektrische und magnetische Dipolstrahlung.

2. Die Lösung des Strahlungsproblems mit elektrischen und magnetischen Multipolen, deren Felder mit $\exp(-i\omega t)$ variieren, werden durch den Ansatz der Maxwellschen Gleichungen für den quellenfreien Raum gesucht. In Abhängigkeit davon, ob man $\boldsymbol{E}$ oder $\boldsymbol{B}$ eliminiert, ergibt sich

$$(\triangle + k^2)\,\boldsymbol{B} = 0\,; \quad \boldsymbol{E} = \frac{i}{k}\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{B}\,, \tag{9.166E}$$

$$(\triangle + k^2)\,\boldsymbol{E} = 0\,; \quad \boldsymbol{B} = -\frac{i}{k}\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E}\,. \tag{9.166M}$$

Allgemein haben die Lösungen der skalaren Wellengleichung für ein kugelsymmetrisches Problem die Form

$$\Phi_l^m = f_l(kr)\,Y_l^m(\vartheta, \varphi)\,. \tag{9.167}$$

Dabei ist $f_l(kr)$ eine Radialfunktion, die einer sphärischen Bessel-Funktion entspricht, und $Y_l^m(\vartheta, \varphi)$ sind Kugelfunktionen. Wendet man gemäß (A.1) den Impulsoperator $\boldsymbol{l}$ an, dann lassen sich die gesuchten Multipolfelder folgendermaßen darstellen:

$$\boldsymbol{B}_l^m = f_l \boldsymbol{l} Y_l^m; \quad \boldsymbol{E}_l^m = \frac{i}{k}\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{B}_l^m\,, \tag{9.168E}$$

$$\boldsymbol{E}_l^m = f_l \boldsymbol{l} Y_l^m; \quad \boldsymbol{B}_l^m = -\frac{i}{k}\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E}_l^m\,. \tag{9.168M}$$

Zur Abkürzung führt man oft die normierten vektoriellen Winkelfunktionen

$$\boldsymbol{X}_l^m = \frac{1}{\sqrt{l(l+1)}}\,\boldsymbol{l} Y_l^m \tag{9.169}$$

ein. Sie bilden ein vollständiges System, nach dem jedes beliebige, den Maxwellschen Gleichungen genügende Feld entwickelt werden kann. Für ein beliebiges Magnetfeld ergibt sich

$$\boldsymbol{B} = \sum_{l,m} a(l, m)\, f_l \boldsymbol{X}_l^m - b(l, m)\,\frac{i}{k}\,\mathrm{rot}\, f_l \boldsymbol{X}_l^m\,. \tag{9.170}$$

Mit den Koeffizienten a und b wird die Amplitude der zum Feld beitragenden Multipolstrahlung angegeben.

3. Im Rahmen einer quantenmechanischen Betrachtung kommt man zu der gleichen Entwicklung nach Multipolen. Zusätzlich ergibt sich jedoch die Quantelung der Drehimpulse und neben der Erhaltung des Drehimpulses auch die Erhaltung der Parität. Aus der Quantelung des Strahlungsfeldes folgen im Verein mit der Erhaltung des Drehimpulses die Auswahlregeln

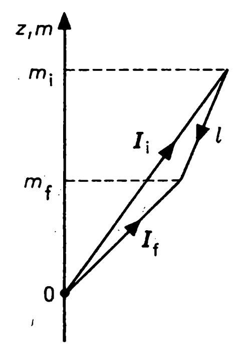


Abb. 9.56
Drehimpulsänderung bei γ-Emission

des Drehimpulses. Jeder γ-Quant der Multipolordnung l hat einen Drehimpuls der Größe $\sqrt{l(l+1)}\,\hbar$ mit der z-Komponente $m\hbar$. Das entspricht auch der Tatsache, daß den Lösungen (9.168) Eigenfunktionen des Drehimpulses zugrunde liegen. Der Fall $l = 0$ kann nicht vorkommen, da die γ-Quanten transversale Natur haben, d. h., es ist immer $\operatorname{div} \boldsymbol{E} = \operatorname{div} \boldsymbol{B} = 0$. Somit tragen γ-Quanten einen Drehimpuls von mindestens $\hbar$, im allgemeinen ein ganzzahliges Vielfaches davon. Drehimpulserhaltung und Drehimpulsquantelung führen auf die Auswahlregel (Dreiecksregel)

$$l = I_i - I_f; \quad m = m_i - m_f; \quad |I_i - I_f| \leqq l \leqq I_i + I_f. \tag{9.171}$$

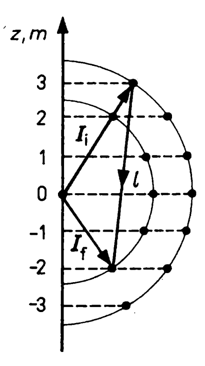


Abb. 9.57
Drehimpulsänderung bei $I_i = 3\hbar$, $I_f = 2\hbar$

Geometrisch betrachtet bedeutet diese Regel, daß I_i, I_f, l und m stets ein Dreieck bilden, wie es die Abb. 9.56 zeigt. Da zu jedem l-Wert $(2l + 1)$-Projektionen m gehören, sind stets mehrere Varianten möglich. In Abb. 9.57 ist der Fall $I_i = 3\hbar$ und $I_f = 2\hbar$ dargestellt. Die Vektorspitzen können sich auf einem Kreis mit dem Radius $\sqrt{I(I+1)}\,\hbar$ in Punkten befinden, denen eine ganzzahlige Projektion m auf der z-Achse entspricht. Das ergibt insgesamt

$$n = (2I_i + 1)(2I_f + 1) \tag{9.172}$$

Übergangsmöglichkeiten. Wie später mit (9.182) gezeigt wird, ist die Übergangswahrscheinlichkeit proportional zu einem Faktor $(R/\lambda\!\!\!^{-})^{2l}$, wobei R der Kernradius und $\lambda\!\!\!^{-}$ die durch 2π geteilte Wellenlänge der γ-Strahlung sind. Daher werden hauptsächlich Übergänge mit dem minimalsten

a) $I_i = 3$, $m_i = +3$ → $I_f = 2$, $m_f = +2$ + $l = 1$; $|I_i - I_f| = l = 1$; $m_i - m_f = 1$

b) $I_i = 2$, $m_i = +2$ → $I_f = 3$, $m_f = -3$ + $l = 5$; $l = I_i + I_f = 5$; $m = 5$

Abb. 9.58
Grenzfälle der Drehimpulsänderung bei $I_i = 3\hbar$, $I_f = 2\hbar$

l-Wert beobachtet, denn in den meisten Fällen ist $R/\lambda \ll 1$, um so mehr die Potenz mit $2l$. Die Auswahlregel lautet dann

$$l = |I_i - I_f|\,. \tag{9.173}$$

Aus diesem Grund zeichnet man meist nur die beiden Grenzfälle, etwa in der Art der Abb. 9.58.

Ein wichtiger Sonderfall liegt vor, wenn einer der beiden Zustände den Wert 0 hat. Dann ist nur ein reiner Übergang mit einer einzigen Multipolordnung möglich. Wenn die Drehimpulse beider Zustände $I_i = I_f = 0$ sind, ist eine Abregung durch γ-Strahlung nicht möglich, da diese immer $l \geqq 1$ wegtragen muß. In Abb. 9.59 sind diese beiden Fälle neben anderen dargestellt.

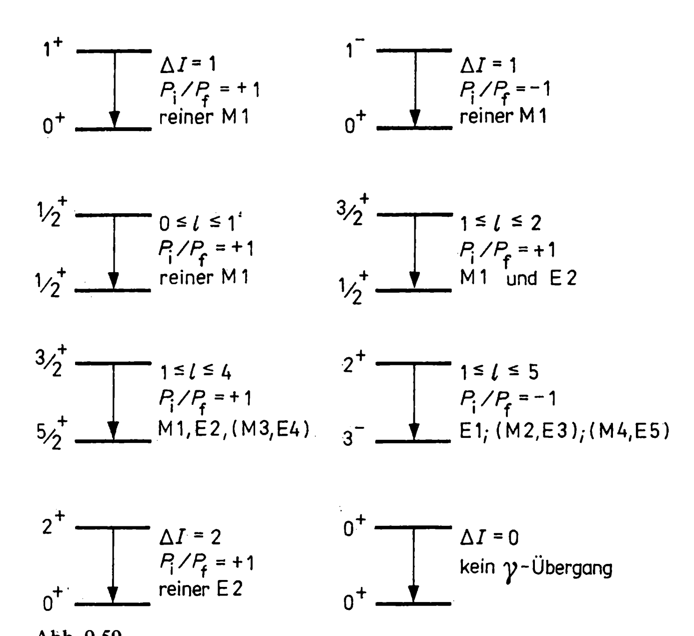


Abb. 9.59
Multipolübergänge bei verschiedenen Kombinationen der Spin- und Paritätsquantenzahlen von Anfangs- und Endzustand

4. Eine zweite Auswahlregel folgt aus der Paritätserhaltung. Führt man in (9.168) den Übergang von $\boldsymbol{r}$ zu $-\boldsymbol{r}$ durch, dann zeigt sich, daß die elektrische Multipolstrahlung die Parität $(-1)^l$ und die magnetische $(-1)^{l+1}$ haben muß. Das hängt damit zusammen, daß der Vektor der elektrischen Feldstärke gerade innere Parität hat, während sich das magnetische Feld durch einen axialen Vektor mit ungerader innerer Parität auszeichnet. Ein elektrischer Dipol kehrt daher bei Inversion das Vorzeichen um, während es beim magnetischen dabei erhalten bleibt. Ein elektrischer Quadrupol kehrt seine Richtung bei Inversion nicht um, ein magnetischer kehrt sie dabei um. Die Auswahlregel lautet somit

$$P_{\mathrm{E}} = (-1)^l\,; \qquad P_i = (-1)^l\, P_f\,, \tag{9.174E}$$

$$P_{\mathrm{M}} = (-1)^{l+1}\,; \quad P_i = (-1)^{l+1}\, P_f\,. \tag{9.174M}$$

Vergleicht man dieses Ergebnis mit der Regel (6.149) für Teilchen, so sieht man, daß ein γ-Quant der Multipolordnung l bei der Emission die gleiche Paritätsänderung verursacht, wie

ein Teilchen mit dem Bahndrehimpuls l. Wegen (9.174) kann bei einem Übergang zwischen den Zuständen i und f E- und M-Strahlung gleicher Multipolordnung nicht gleichzeitig emittiert werden.

5. Weitere Auswahlregeln folgen aus der Isospinerhaltung. Wenn man einem γ-Quant auch keinen Isospin zuschreiben kann, so steht doch fest, daß bei seiner Emission keine Änderung der Kernladung möglich ist. Darauf gründet sich die Auswahlregel des γ-Zerfalls gemäß (9.156)

$$\Delta T_z = 0 . \qquad (9.175\text{a})$$

Eine Analyse der γ-Übergänge zeigt, daß alle Fälle mit $|\Delta T| > 1$ verboten sind. Daraus folgt für die γ-Quanten die Auswahlregel

$$\Delta T = 0, \pm 1 . \qquad (9.175\text{b})$$

9.6.3.2. Übergangswahrscheinlichkeiten

1. Bei der Berechnung der Übergangswahrscheinlichkeit geht man wie beim β-Zerfall in 9.5.4. von der „Goldenen Regel" der Quantenmechanik aus und erhält in Analogie zu (9.71 bis 9.74) über $\lambda(\sigma, l, m) = \lambda_\sigma(l, m) = 1/\tau$ den Zugang zur meßbaren Lebensdauer der Zustände, wobei für σ entweder E oder M einzusetzen ist. Das Matrixelement des Übergangs $M_{l,m}$ berechnet man aus den Wellenfunktionen der beteiligten Zustände und einem Multipoloperator. Die quantenmechanische Berechnung des Matrixelements ist sehr aufwendig. Ergebnisse liegen für viele Übergänge vor. Oft liefern sie jedoch nur Orientierungswerte. In Kapitel 8 wurde bereits deutlich, daß die Natur der Zustände sehr unterschiedlich sein kann und daß sich auch die Kernstruktur in den einzelnen Nuklidgebieten stark unterscheiden kann. Man denke nur an die Teilchen-, Quasiteilchen- und Kollektivzustände und daß im Prinzip zwischen allen diesen Zustandsarten Übergänge möglich sind. Hinzu kommt, daß es die unterschiedlichsten Deformationen gibt und daß in den Anregungszuständen eines Kerns durchaus verschiedene Formen auftreten können. Daher ist verständlich, daß die Herleitung einer Formel, mit der alle Zustände und die Übergänge zwischen ihnen numerisch richtig berechnet werden können, nicht möglich ist. Trotzdem ist es wichtig, dem Gang der Rechnung in einem wichtigen Spezialfall zu folgen und die Ergebnisse mit den experimentellen zu vergleichen.

2. Im Rahmen des Einteilchen-Schalenmodells ist die Berechnung der Übergangswahrscheinlichkeit zwischen zwei Einteilchenzuständen erstmals von V. F. Weisskopf durchgeführt worden. Dabei wurde in Übereinstimmung mit 8.3.3. angenommen, daß sich das betrachtete Teilchen in einem mittleren, von allen anderen Teilchen geschaffenen Felde bewegt und daß die Restwechselwirkung zwischen den Nukleonen vernachlässigt werden kann. Von V. F. Weisskopf wurde die spezielle Annahme gemacht, daß sich bei dem Übergang der Quantenzustand nur eines ungepaarten Nukleons gemäß

$$I_i = j_i = l_i + 1/2 \rightarrow I_f = j_f = 1/2 \qquad (9.176)$$

ändert und daß aufgrund der verschwindenden Restwechselwirkung der Quantenzustand keines anderen Nukleons Änderungen erfährt. Dadurch vereinfacht sich die Berechnung des Matrixelements wesentlich. Es kann nun durch zwei Faktoren dargestellt werden. Der eine stellt einen statistischen Faktor $S(I_i, l, I_f)$ dar, der durch Integration über die in den Wellenfunktionen enthaltenen Kugelfunktionen entsteht und durch die Clebsch-Gordan- oder Racah-Koeffizienten ausgedrückt wird (siehe Anhang A.4). Dabei wird über alle magnetischen Unterzustände m gemittelt. Dieser Faktor kann näherungsweise 1 gesetzt werden. Der zweite Faktor, ein Matrixelement $M_\sigma(l)$, hängt dadurch nur noch von den Radialanteilen der Wellenfunktion ab.

Nimmt man an, daß sie über dem Kernvolumen näherungsweise konstant ist, dann kommt man zu den folgenden Ausdrücken:

$$\lambda_{\mathrm{E}}(l) = \frac{1}{\tau_{\mathrm{E}}} \approx \frac{2(l+1)}{l[(2l+1)!!]^2}\, \frac{\alpha c}{\bar{\lambda}} \left(\frac{R}{\bar{\lambda}}\right)^{2l} S M_{\mathrm{E}}^2(l)\,, \tag{9.177a}$$

$$M_{\mathrm{E}}(l) \approx \frac{3}{3+l}\,, \tag{9.177b}$$

$$\lambda_{\mathrm{M}}(l) = \frac{1}{\tau_{\mathrm{M}}} \approx \frac{\alpha c}{\bar{\lambda}} \left(\frac{R}{\bar{\lambda}}\right)^{2l} S M_{\mathrm{M}}^2(l)\,, \tag{9.178a}$$

$$M_{\mathrm{M}}(l) \approx \frac{\sqrt{10}\,\hbar}{m_{\mathrm{N}} c R} \left(\frac{3}{3+l}\right), \tag{9.178b}$$

$$\lambda_{\mathrm{M}}(l) \approx \left(\frac{\sqrt{10}\,\hbar}{m_{\mathrm{N}} c R}\right)^2 \lambda_{\mathrm{E}}(l)\,, \tag{9.179a}$$

$$S = S(I_i, l, I_f) = (2I_f + 1) \left\langle I_i, I_f, \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \,\middle|\, l0 \right\rangle^2. \tag{9.179b}$$

Dabei sind $R = r_0 A^{-1/3}$ der Kernradius, $\alpha = 1/137$ die Feinstrukturkonstante, und m_{N} die Nukleonenmasse. Je nachdem, ob $(2l + 1)$ eine gerade oder ungerade Zahl ist, gilt

$$(2l+1)!! = 2\ 4\ 6 \ldots (2l+1) \quad \text{bzw.} \quad (2l+1)!!\ 1\ 3\ 5 \ldots (2l+1)\,. \tag{9.180}$$

Für numerische Rechnungen sind die folgenden, aus (9.177a) und (9.178a) hergeleiteten Gleichungen sehr praktisch:

$$\lambda_{\mathrm{E}}(l)/\mathrm{s}^{-1} \approx \frac{4{,}4(l+1)\,10^{21}}{l[(2l+1)!!]^2} \left(\frac{3}{3+l}\right) \left(\frac{E_\gamma/\mathrm{MeV}}{197}\right)^{2l+1} (R/\mathrm{fm})^{2l} \tag{9.181E}$$

$$\lambda_{\mathrm{M}}(l)/\mathrm{s}^{-1} \approx \frac{1{,}9(l+1)\,10^{21}}{l[(2l+1)!!]^2} \left(\frac{3}{3+l}\right) \left(\frac{E_\gamma/\mathrm{MeV}}{197}\right)^{2l+1} (R/\mathrm{fm})^{2l-2}\,. \tag{9.181M}$$

Die auf diese Weise erhaltenen Übergangswahrscheinlichkeiten, die grobe Schätzwerte darstellen, werden Weißkopf-Werte genannt oder, da man oft die gemessenen oder berechneten Übergangswahrscheinlichkeiten in diesen Werten als Einheit angibt, spricht man auch von Weißkopf-Einheiten. Aus den Gleichungen (9.181) kann man zwei sehr übersichtliche Proportionalitäten ablesen:

$$\lambda_{\mathrm{E}}(l) \sim E_\gamma^{2l+1} A^{2/3}\,, \tag{9.182E}$$

$$\lambda_{\mathrm{M}}(l) \sim E_\gamma^{2l+1} A^{(l-1)2/3}\,. \tag{9.182M}$$

3. Die Ergebnisse (9.181) sind in Abb. 9.60 und 9.61 als Zustands-Halbwertszeit über der Energie der γ-Quanten dargestellt. Es fällt auf, daß die Halbwertszeit mit zwischen 1 und 5 wachsendem l um viele Zehnerpotenzen zunimmt. Die Ursache ist der steile Abfall des ersten Faktors in (9.177a, 178a) und von $(R/\bar{\lambda})^{2l}$ beim Übergang von l auf $l + 1$. Für 1-MeV-γ-Quanten ergibt sich eine Zunahme der Zustands-Halbwertszeit um vier bis fünf Zehnerpotenzen. Das ist die Ursache für die im Zusammenhang mit (9.173) formulierte Reduzierung der Übergangsmöglichkeiten auf kleine l-Werte. Für einen Kern mit $A = 125$, also $R = 6$ fm, der durch eine γ-Strahlung von 1 MeV abgeregt wird, also mit $\bar{\lambda} = 200$ fm, nimmt die Halbwertszeit zwischen

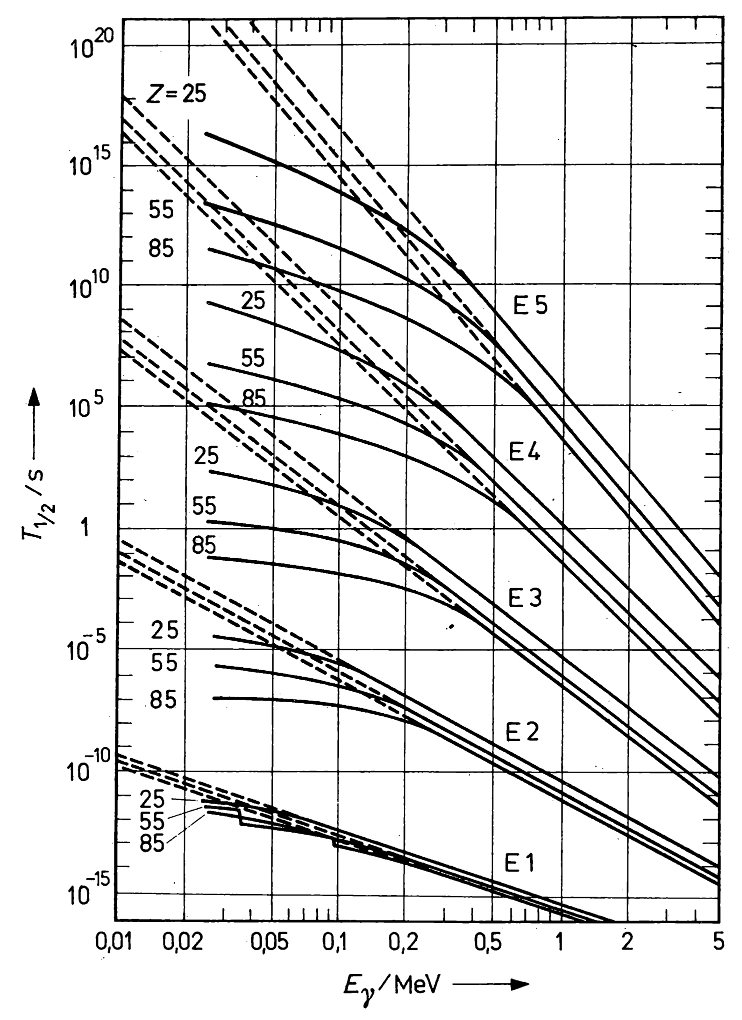


Abb. 9.60
Partielle Zustandshalbwertszeiten für elektrische Multipolstrahlung als Funktion der Übergangsenergie berechnet gemäß (9.181E) mit $R = 1{,}2A^{1/3}$. Die durchgezogenen Kurven erhält man bei Berücksichtigung der inneren Konversion

benachbarten Multipolordnungen jeweils um einen Faktor von mindestens $9 \cdot 10^{-4}$ zu. In der Atomhülle ist $R \approx 10^{-10}$ m und $\lambda \approx 800 \cdot 10^{-10}$ m, so daß dort $(R/\lambda)^2 \approx 10^{-6}$ wird, also 100 mal kleiner. Man sieht aus den Kurven auch, und das ist in (9.179) explizit festgehalten, daß die magnetischen Übergänge etwa 10^3mal langsamer sind, als die elektrischen mit gleicher Multipolarität und gleicher Energie.

Als Folge der Auswahlregeln und der unterschiedlichen Möglichkeiten der Abregung der Zustände mit γ-Quanten treten Mischungen von Multipolstrahlungen auf. In Tabelle 9.9 sind die wahrscheinlichsten und in Klammern die mit der nächstgeringeren Wahrscheinlichkeit auftretenden Übergänge zusammengestellt. Man sieht, daß E- und M-Strahlung gleicher Multipol-

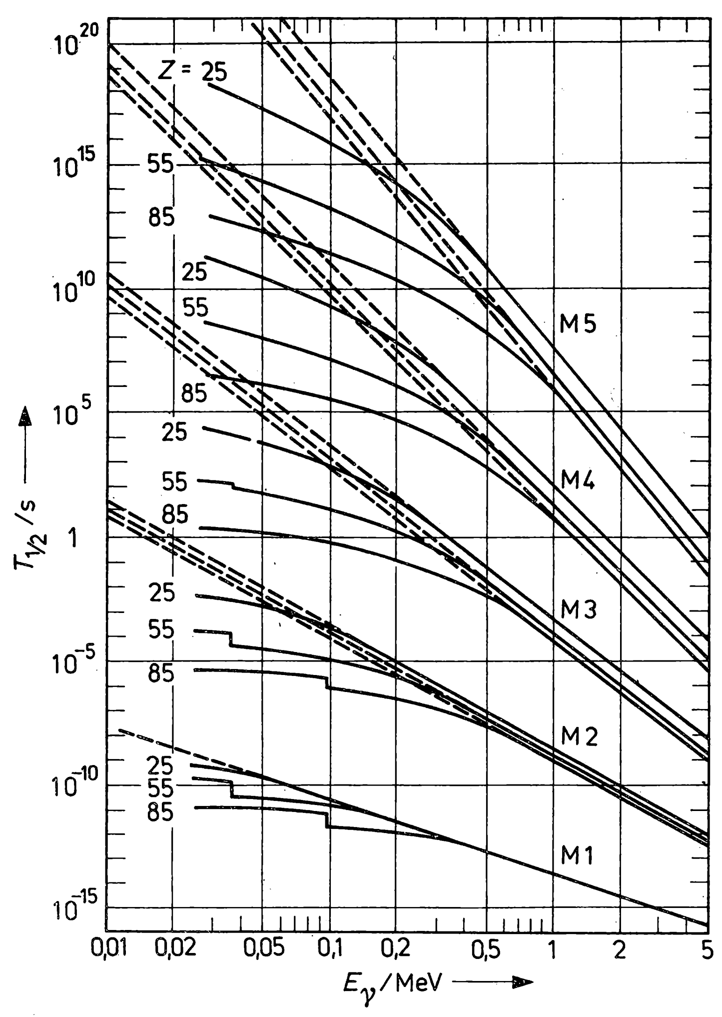


Abb. 9.61
Partielle Zustandshalbwertszeiten für magnetische Multipolstrahlung als Funktion von der Energie der Übergangsenergie, berechnet gemäß (9.181 M) mit $R = 1{,}2A^{1/3}$. Die durchgezogenen Kurven erhält man bei Berücksichtigung der inneren Konversion

ordnung niemals gemeinsam emittiert werden können, bezogen auf einen bestimmten Übergang mit E_γ, I_i, I_f. Das ist eine Auswirkung der Paritätsauswahlregel. Da die magnetische Übergangswahrscheinlichkeit um einige Zehnerpotenzen kleiner ist als die elektrische, kann letztere in die gleiche Größenordnung wie die magnetische mit einer um 1 größeren Multipolordnung gelangen. In Abb. 6.59 sind noch einige Beispiele für Multipolübergänge angegeben, darunter reine und gemischte. In allen betrachteten Fällen ist zu beachten, daß die Gesamtübergangswahrscheinlichkeit gemäß (9.156) gebildet wird. Wenn die Abregung nicht nur durch γ-Quanten, sondern auch durch innere Konversion erfolgt, dann wird der Anteil der letzteren an der Übergangswahrscheinlichkeit durch die Koeffizienten der inneren Konversion festgelegt.

Tabelle 9.9
Wahrscheinlichste Multipolordnung der γ-Strahlungen als Funktion der Drehimpuls- und Paritätsänderung der Zustände

Spinänderung $\|\Delta I\|$		0, kein $0 \to 0$	1	2	3	4	5
Paritätsänderung	ja	E1 (M2)	E1 (M2)	M2 E3	E3 (M4)	M4 E5	E5 (M6)
	nein	M1 E2	M1 E2	E2 (M3)	M3 E4	E4 (M5)	M5 E6

9.6.3.3. Gammastrahlung und Kernstruktur

1. Durch Vergleich der Weisskopf- mit den experimentellen Werten wurde der Einfluß der Kernstruktur auf die Wahrscheinlichkeit der Abregung offenkundig. Wie auf Grund der groben Näherung nicht anders zu erwarten ist, gibt es auch, ganz abgesehen von der Kernstruktur, große Abweichungen im konkreten Falle. Ganz allgemein sind die E1-Übergänge bei kleinen Energien um einen Faktor 10^3 bis 10^7 langsamer als berechnet oder werden gar nicht beobachtet. Umgekehrt sind die meisten E2-Übergänge schneller, als die Weisskopf-Einheit angibt. Die Lebensdauern der anderen 1-Übergänge weichen im allgemeinen nicht so stark ab, sind allerdings in einigen Fällen auch um einige Zehnerpotenzen größer. Man erfaßt die Abweichungen durch den Faktor F in

$$\lambda_{\text{exp}} = F\lambda_{\text{theor}} \tag{9.183}$$

und spricht bei $F < 1$ von verzögerten und behinderten, bei $F > 1$ von beschleunigten Übergängen.

Die Ursachen für die Abweichungen sind unterschiedlicher Natur. Meist handelt es sich nicht um reine Einteilchen-Übergänge. Vielmehr stellen die an den Übergängen beteiligten Zustände oft Mischungen unterschiedlicher Zustandskonfigurationen dar. In Kapitel 8 wurde bereits davon gesprochen. Charakteristische Beispiele für solche Mischungen sind die kollektiven Zustände, an denen viele Nukleonen beteiligt sind. Auf dieser Grundlage läßt sich z. B. die mehrere Zehnerpotenzen große Verzögerung der eben erwähnten E1-Übergänge bei kleinen Energien erklären. Gerade sie müssen zwischen sehr komplizierten Konfigurationen erfolgen. Einer elektrischen Dipolschwingung entspricht, wie in 10.5.4.1. gezeigt wird, eine Bewegung der Protonen gegen die Neutronen. Die dazu erforderliche Anregungsenergie liegt zwischen 14 und 25 MeV. In (p, γ)-Reaktionen werden solche Anregungen als Riesenresonanzen beobachtet. Bei kleinen Energien können sie jedoch nur als geringe Konfigurationsmischung vorkommen. Auch aus einer ganzen Reihe von Schalenmodell-Zuständen ist diese E1-Strahlung nicht möglich, denn ihr entspricht eine Änderung der Parität. Zustände einer Schale, d. h. Zustände mit gleichem N, haben jedoch die gleiche Parität. Es kommen somit nur Zustandsmischungen in Frage, deren Anregungsenergie nicht zu hoch ist. Solche Mischungen sind wie in 8.6.3.1. und 8.6.4.3. erläutert wurde, durchaus möglich. Mit ihrer Hilfe lassen sich die kleinen Werte des Faktors F erklären, d. h. mit der Kernstruktur.

Eine ähnliche Ursache läßt sich auch für die Beschleunigung der E2-Übergänge anführen, die besonders bei den deformierten Kernen groß ist. E2-Übergänge gehen oft von Quadrupolschwingungen aus, die in Flüssigkeitstropfen leicht angeregt, d. h. im Rahmen des hydrodynamischen Modells beschrieben werden können. Somit sind es wieder kollektive Zustände, d. h. Konfigurationsmischungen, die den Ausgangspunkt bilden. Daß sie besonders intensiv bei den deformierten Kernen auftreten, ist auch insofern verständlich, als hier bereits der Grundzustand durch ein großes Quadrupolmoment ausgezeichnet ist.

2. Zur rechnerischen Erfassung der kollektiven Übergänge zwischen Konfigurationsmischungen wird das Matrixelement in (9.177, 178) durch die sogenannte reduzierte Übergangswahrscheinlichkeit $B(\sigma, l)$ ersetzt. Damit umgeht man die Aufgabe, für alle Übergänge $(I_i, m_i \to I_f, m_f)$ mit $|m| \leq l$, deren Wellenfunktionen meist nicht bekannt sind, die Matrixelemente zu berechnen. In den Messungen werden die magnetischen Unterzustände mit m_i und m_f sowieso nur ganz selten beobachtet (siehe 9.6.4.1.,

Punkt 1). Daher mittelt man über die Anfangszustände und summiert über die Endzustände. Die Abhängigkeit von den Richtungsquantenzahlen verschwindet, und man erhält

$$B(\sigma, l, I_i \to I_f) = \frac{1}{2I_i + 1} \sum_{m_i} \sum_{m_f} \sum_{m} |\langle I_f, m_f| Q^m_{\sigma,l} | I_i, m_i\rangle|^2 \,. \tag{9.184}$$

Die Summation berücksichtigt alle Einteilchen-Matrixelemente der beteiligten Nukleonen und erfolgt über alle m_i, m_f und m, die dem Drehimpulserhaltungssatz genügen. Mit $Q^m_{\sigma,l}$ ist der Multipoloperator bezeichnet. Seine Form ist modellabhängig. Die Übergangswahrscheinlichkeit ergibt sich zu

$$\lambda_E(l, I_i \to I_f) = \frac{1}{\tau_E} = \frac{4\pi}{\hbar} \left(\frac{E_\gamma}{\hbar c}\right)^{2l+1} SB(El, I_i \to I_f)\,, \tag{9.185E}$$

$$\lambda_M(l, I_i \to I_f) = \frac{1}{\tau_M} = \frac{4\pi}{\hbar} \left(\frac{E_\gamma}{\hbar c}\right)^{2l+1} SB(Ml, I_i \to I_f)\,. \tag{9.185M}$$

3. In einigen Fällen kollektiver Übergänge haben sich einfache Näherungsformeln für die B-Werte herleiten lassen. Als Beispiel betrachten wir zuerst Übergänge zwischen Zuständen innerhalb einer Rotationsbande, zwischen denen M1- und E2-Übergänge möglich sind, aber auch ihre Mischungen. Wenn $|\Delta I| = 2$, gibt es nur E2-Übergänge, für $|\Delta I| = 1$ können beide auftreten. Zunächst sind in (9.184) die m_ν durch die K_ν zu ersetzen, weil in deformierten Kernen die K_ν Erhaltungsgrößen sind. Dann stellt man den B(E2)-Wert als Produkt des inneren Quadrupolmoments, gemessen im kernfesten System, also Q_0, der Bande mit dem Clebsch-Gordan-Koeffizienten dar. Zwischen den Quadrupolmomenten Q und Q_0 besteht der Zusammenhang (8.212, 213). In gg-Kernen erfolgen die Rotationsbandenübergänge zwischen Zuständen mit den Charakteristika 0^+, 2^+, 4^+, 6^+, ... in Übereinstimmung mit (8.129), d. h. zwischen Zuständen mit $I + 2$ und I sowie bevorzugt mit $\Delta K = 0$ gemäß (8.136). Man erhält auf diese Weise

$$B(\text{E2}, I + 2 \to I) = \frac{15}{32\pi} e^2 Q_0^2 \frac{(I + 1)(I + 2)}{(2I + 3)(2I + 5)}\,. \tag{9.186}$$

In den uA-Kernen lauten die Charakteristika der Rotationsglieder gemäß (8.136) $I = K$, $K + 1$, $K + 2$, $K + 3$, ... Hier erhält man unter Ausschluß von $K = 1/2$ für die Übergänge vom Typ $I + 1 \to I$

$$B(\text{E2}, I + 1 \to I) = \frac{15}{16\pi} e^2 Q_0^2 \frac{K^2(I + 1 + K)(I + 1 - K)}{I(I + 1)(I + 2)(I + 3)}\,, \tag{9.187}$$

$$B(\text{M1}, I + 1 \to I) = \frac{3}{4\pi} \left(\frac{e\hbar}{2m_N c}\right)^2 (g_\Omega - g_R)^2 \frac{\Omega^2(I + 1 - K)(I + 1 + K)}{(I + 1)(2I + 3)} \tag{9.188}$$

und für die Übergänge vom Typ $I + 2 \to I$

$$B(\text{E2}, I + 2 \to I) = \frac{15}{32\pi} e^2 Q_0^2 \frac{(I + 1 - K)(I + 1 + K)(I + 2 - K)(I + 2 + K)}{(I + 1)(I + 2)(2I + 3)(2I + 5)} \tag{9.189}$$

Die Größen g_Ω und g_R sind wie in (6.86) und (8.197) die gyromagnetischen Verhältnisse. Sie beziehen sich auf die Rotation der äußeren Teilchen (Ω) und die Rumpfrotation (R). Zwischen dem magnetischen Dipolmoment des Kerns μ_0 im Grundzustand der Bande und dem Spin dieses Zustandes I_0 besteht für $I_0 > 1/2$ die Beziehung (8.202). Auch hier sind g_Ω und g_R enthalten.

Die Gleichungen (9.186 bis 9.189) stehen über (9.185) mit der Übergangswahrscheinlichkeit zwischen den Zuständen einer Rotationsbande in einem direkten Zusammenhang. Wenn man letztere experimentell ermittelt, können das innere Quadrupolmoment Q_0 und daraus über (8.211) der Deformationsparameter bestimmt werden.

4. Bei den uA-Kernen, bei denen zwischen den Zuständen der Rotationsbanden M1- und E2-Übergänge auftreten, kann man das Verhältnis $B(\text{M1})/B(\text{E2})$ bestimmen, in dem im Falle $K = 0$ die drei Parameter Q_0, g_Ω und g_R enthalten sind. Man kann sie somit durch Messung des magnetischen Moments μ

und der beiden Übergangswahrscheinlichkeiten ermitteln. Um das zu zeigen, drücken wir den Zusammenhang zwischen λ und B numerisch aus. Setzt man in (9.185) die $B(\sigma, l)$-Werte ein, so ergibt sich

$$\lambda(\mathrm{M1}, I_i \to I_f)/\mathrm{s}^{-1} = 1{,}71 \cdot 10^{13}(E_\gamma/\mathrm{MeV})^3\, B(\mathrm{M1}, I_i \to I_f)\,, \tag{9.190}$$

$$\lambda(\mathrm{E2}, I_i \to I_f)/\mathrm{s}^{-1} = 1{,}23 \cdot 10^{13}(E_\gamma/\mathrm{MeV})^5\, B(\mathrm{E2}, I_i \to I_f)\,. \tag{9.191}$$

Die Gesamtübergangswahrscheinlichkeit berechnet man aus

$$\lambda(\mathrm{M1} + \mathrm{E2}, I_i \to I_f) = \lambda(\mathrm{M1}, I_i \to I_f) + \lambda(\mathrm{E2}, I_i \to I_f) \tag{9.192}$$

oder durch Einführung des Multipolmischungsverhältnisses

$$\delta^2 = \frac{\lambda(\mathrm{E2})}{\lambda(\mathrm{M1})} \tag{9.193}$$

zu

$$\lambda(\mathrm{M1} + \mathrm{E2}, I_i \to I_f) = \frac{1 + \delta^2}{\delta^2}\,\lambda(\mathrm{E2}, I_i \to I_f)\,. \tag{9.194}$$

Für das Verhältnis der B-Werte folgt daraus

$$B(\mathrm{M1}, I_i \to I_f) = \frac{0{,}697}{\delta^2}\,(E_\gamma/\mathrm{MeV})^2\, B(\mathrm{E2}, I_i \to I_f)\,. \tag{9.195}$$

Berücksichtigt man die noch zu besprechende innere Konversion, so erhält man mit dem Koeffizienten der inneren Konversion α gemäß (9.242)

$$\lambda(\mathrm{M1} + \mathrm{E2}, I_i \to I_f) = (1 + \alpha)\left(\frac{1 + \delta^2}{\delta^2}\right)\lambda(\mathrm{E2}, I_i \to I_f)\,. \tag{9.196}$$

5. Die zusätzliche Auswahlregel, die im Falle der Rotationsbanden-Übergänge wirksam wird, läßt sich durch

$$|K_i - K_f| = \Delta K \leqq l \tag{9.197}$$

formulieren. Nur in diesem Falle sind die in (9.184) eingehenden Clebsch-Gordan-Koeffizienten von 0 verschieden. Der K-Verbotenheitsgrad wird durch

$$\nu = |K_i - K_f| - l \tag{9.198}$$

bestimmt. K-verbotene Übergänge sind um einen Faktor von nahezu 100 für jede Einheit behindert. Sie laufen über Konfigurationsmischungen in den Zuständen ab.

9.6.3.4. Kernisomerie

1. Die Erscheinung der Kernisomerie, d. h. das Auftreten langlebiger Anregungszustände, wurde zuerst auf der Grundlage der Spinabhängigkeit der Übergangswahrscheinlichkeit der γ-Strahlung erklärt. Aus den Abbildungen 9.60 und 9.61 erkennt man, daß die Lebensdauern für γ-Strahlung und innere Konversion zwischen 10^{-16} und 10^{20} s liegen. Die großen Werte treten für große Spinunterschiede und kleine Energieunterschiede zwischen Anfangs- und Endzustand auf. Für Abregungsenergien von mehr als 10 keV muß $|\Delta I| \geqq 3$ sein, damit $\tau \gtrsim 10^{-2}$ s wird. Solche Verzögerungen können auch durch andere Verbote bewirkt werden, d. h. durch andere Erhaltungssätze. Die Auswahlregeln gelten dann für die entsprechenden Quantenzahlen. Man hat dafür den Begriff der Isomerie beibehalten und spricht z. B. von K- und von Formisomerie.

2. Das erste Kernisomerenpaar wurde 1921 von O. Hahn durch den Nachweis entdeckt, das das Tochternuklid des $^{234}_{90}\mathrm{Th}$ über zwei verschiedene Aktivitäten, d. h. mit zwei verschiedenen Halbwertszeiten, also über zwei Zustände, jetzt als $^{m234}_{91}\mathrm{Pa}$ und $^{234}_{91}\mathrm{Pa}$ bekannt, in den Tochterkern $^{234}_{92}\mathrm{U}$ zerfällt (siehe Abb. 9.62). Das Isomer ist der Zustand mit der Energie 69,8 keV. Der

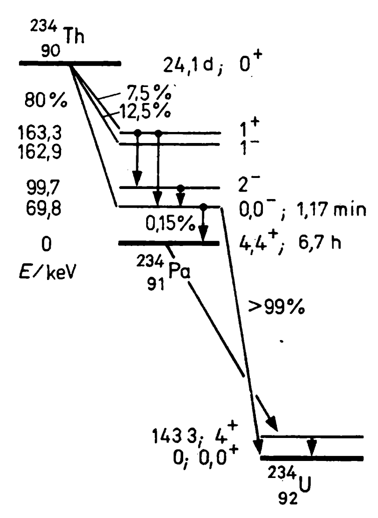


Abb. 9.62
Zerfallsschema des $^{234}_{90}$Th und des $^{234}_{91}$Pa mit Isomerenpaar

isomere und der Grundzustand bilden das Isomerenpaar. Der Begriff des Isomerenpaares wird so lange verwendet, als nicht geklärt ist, welcher von zwei dicht beieinander liegenden Zuständen das Isomer ist. Danach spricht man nur noch vom Isomer. Im betrachteten Falle erwies sich der 69,8-keV-Zustand als das Isomer. Die Behinderung tritt wegen $\Delta I = 4$ und Paritätsänderung ein. Der zweite Fall eines Isomers wurde 1935 von I. V. KURČATOV u. a. entdeckt, als sie im Ergebnis der Reaktion $^{79}_{35}$Br(n, γ)^{80}Br nicht eine, sondern zwei Aktivitäten mit den Halbwertszeiten 18 min und 4,4 h fanden. In Abb. 9.63 ist das Zustands- und Zerfallsschema abgebildet. Das Isomer ist der Zustand des ^{80}Br mit einer Halbwertszeit von 4,37 h. Der Spinunterschied beträgt $\Delta I = 3$, der Energieunterschied 47,4 keV.

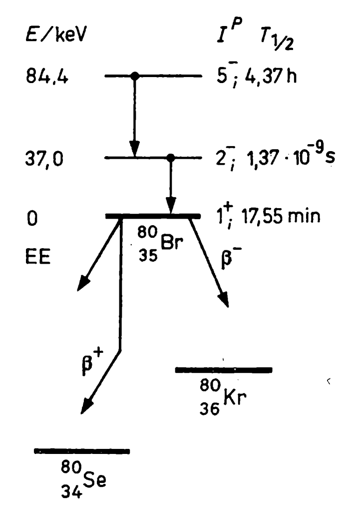


Abb. 9.63
Zerfallsschema des Isomerenpaares ^{80m}Br und ^{80}Br

3. Die Abregung isomerer Zustände kann prinzipiell auf zweierlei Art erfolgen, durch γ-Strahlung oder innere Konversion einerseits, oder durch α- oder β-Zerfall andererseits. Ein Beispiel für die erste Möglichkeit ist die Abregung des Isomers ^{80m}Br über den 2^--Zustand. Sie bewirkt allerdings, daß zwei β-Aktivitäten mit zwei Halbwertszeiten beobachtet werden. Da das ^{80}Br-Isotop im Gefolge der (n, γ)-Reaktion sowohl im Grund-, als auch in Anregungszuständen erzeugt wird, darunter in dem isomeren, gibt es den β-Zerfall aus dem Grundzustand mit $T_{1/2} = 17{,}55$ min, der auch von den kurzlebigen Zuständen während der Bestrahlung besiedelt wird, und zweitens einen β-Zerfall mit $T_{1/2} = 4{,}37$ h, ebenfalls aus dem Grundzustand. Er rührt von der Abregung des Isomers, die infolge der wesentlich größeren Halbwertszeit der Mutteraktivität des ^{80m}Br gemäß (9.18a) zu einem dynamischen Gleichgewicht führt. Für die zweite Art der Abregung liefert der Zerfall von $^{234m}_{91}$Pa in Abb. 9.62 ein Beispiel. Hier ist die Wahrscheinlichkeit des β-Zerfalls mit der des M4-γ-Übergangs vergleichbar, so daß beide Wege der Abregung beobachtet werden können. Ähnliche Verhältnisse liegen beim Zerfall des Isomers ^{152m}Eu vor, wie man aus Abb. 9.43 erkennen kann.

4. Die Grundlage der K-Isomerie ist das K-Verbot (9.198). Als Beispiel kann man den Zerfall des Isomers ^{180m}Hf mit I^π, $K = 8^-$, 0 bei $E^* = 1142$ keV mit $T_{1/2} = 5{,}5$ h anführen. Die Abregung erfolgt auf die Zustände bei 1085 und 641 keV mit $I^\pi = 8^+$ und 6^+, die zur Rotationsbande des Grundzustandes von ^{180}Hf mit $K = 0$ gehören. Der E1-Übergang hat den Verbotenheitsgrad $\nu = 1$ und ist um den Faktor 10^{15} behindert, verglichen mit dem Weisskopf-Wert.

5. Die Kernisomerie auf Grund eines großen Spinunterschiedes zwischen zwei Kernzuständen wird im einfachsten, dem von V. F. Weisskopf betrachteten Falle, als Übergang zwischen zwei Zuständen eines Nukleons behandelt. Das K-Verbot tritt für deformierte Kerne mit festem Wert der Deformation beim Übergang zwischen verschiedenen Rotationszuständen unterschiedlicher Projektion des Kernspins I auf die ausgezeichnete Achse z auf, d. h. für $|\Delta K| \neq 0$. Von einem derartigen Übergang können einige wenige Nukleonen betroffen sein. Von Formisomerie spricht man, wenn die Übergänge zwischen zwei Zuständen eines Kerns auftreten, die durch unterschiedliche Deformation gekennzeichnet sind. Die Abb. 9.64 zeigt die Abhängigkeit der potentiellen Energie des Kerns von der Deformation. Es gibt zwei relative Minima, wobei eins für den Grundzustand mit einer Vielzahl von Ein- und Mehrteilchen- sowie Rotations- und Vibrationszustände charakteristisch ist, das andere für eben solche Zustände mit einer ganz anderen Deformation. Für das Nuklid ^{242}Am z. B. betragen die Deformationen $\delta_0 = 0{,}24$ im Grundzustand und $\delta_1 = 0{,}32$ im Deformationszustand. An Übergängen dieser Art nehmen offensichtlich viele Nukleonen teil. Ihre Untersuchung ist gegenwärtig im Gange; eine bestimmende Rolle spielen sie bei der spontanen Spaltung, wo die Spaltung aus dem isomeren Zustand auftritt (siehe auch 10.8.3.).

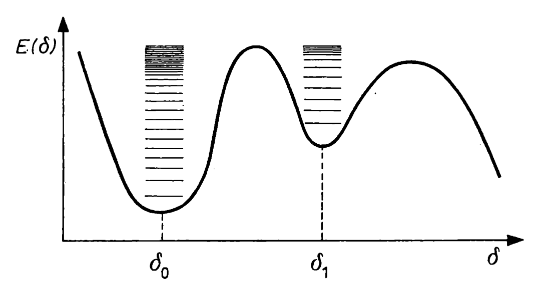


Abb. 9.64
Potentielle Energie eines Kerns als Funktion der Deformation

9.6.4. Richtungs- und Polarisationskorrelationen

9.6.4.1. Richtungs-Winkelkorrelationen

1. In 9.6.3. wurde besprochen, daß die Abregung eines Anregungszustandes durch Emission eines γ-Quants die Abstrahlung eines Multipolfeldes bedeutet. In Bezug auf eine physikalisch ausgezeichnete z-Achse liefert die Rechnung eine für die Multipolordnung l und die magnetische Quantenzahl m charakteristische Richtungsverteilung der γ-Strahlung, aus deren Lage auf die Polarisation geschlossen werden kann. Bekanntlich ist die Strahlungsintensität proportional zum Pointing-Vektor, der aus dem Produkt von $\boldsymbol{E}$ und $\boldsymbol{B}$ gebildet wird. Laut (9.168) sind beide ihrerseits proportional zur vektoriellen Winkelfunktion $\boldsymbol{X}_l^m$, so daß die Intensität der Multipolstrahlung proportional ist zu $F_l^m(\vartheta) = |\boldsymbol{X}_l^m(\vartheta)|^2$. Mit den Kugelfunktionen $Y_l^m(\cos\vartheta)$ ergibt sich

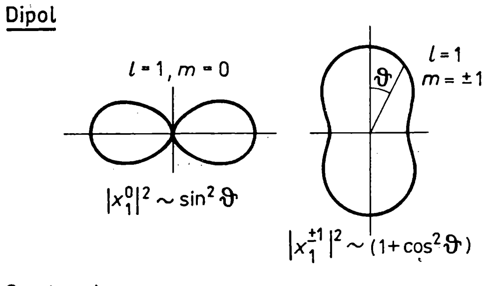
$$F_l^m(\vartheta) = \frac{1}{2l(l+1)} \{[l(l+1) - m(m+1)]\,|Y_l^{m+1}|^2 + [l(l+1) - m(m-1)]\,|Y_l^{m-1}|^2 + 2m^2\,|Y_l^m|^2\} \tag{9.199}$$

Das Ergebnis ist unabhängig davon, ob es sich um elektrische oder magnetische Multipole handelt. Für Dipol- und Quadrupolstrahlungen erhält man

$$F_1^0 = \frac{3}{8\pi}\sin^2\vartheta\,; \qquad F_1^{\pm 1} = \frac{3}{16\pi}(1 + \cos^2\vartheta)\,, \tag{9.200}$$

$$F_2^0 = \frac{15}{8\pi}\sin^2\vartheta\cos^2\vartheta\,; \qquad F_2^{\pm 2} = \frac{5}{16\pi}(1 - \cos^4\vartheta)\,;$$

$$F_2^{\pm 1} = \frac{5}{16\pi}(1 - 3\cos^2\vartheta + 4\cos^4\vartheta)\,. \tag{9.201}$$



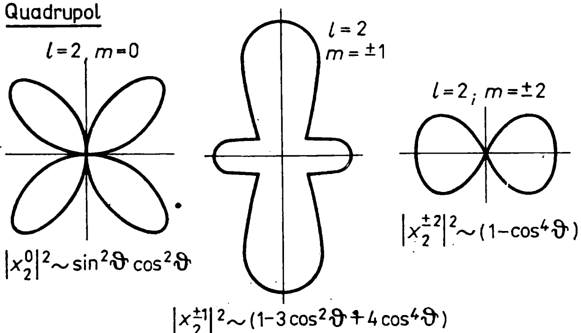


Abb. 9.65
Richtungs-Winkelverteilungen der γ-Strahlung für Dipole und Quadrupole

In Abb. 9.65 sind diese Winkelverteilungen graphisch dargestellt. Da nur geradzahlige Potenzen von cos ϑ enthalten sind, ist $F_l^m(\vartheta)$ symmetrisch zu 90°. Bei Messungen braucht man also nur einen Winkelbereich $\pi/2$ zu erfassen; meist wählt man $90° \leqq \vartheta \leqq 180°$. Diese Symmetrie ergibt sich aus der Tatsache, daß die Parität bei der elektromagnetischen Wechselwirkung eine Erhaltungsgröße ist. In Übereinstimmung mit (6.5.1.) ist daher

$$F(\vartheta) = F(\pi - \vartheta)\,. \tag{9.202}$$

Als Besonderheit der Gleichungen (9.199) bis (9.201) ist noch hervorzuheben, daß Potenzen von mehr als $2l$ in cos ϑ nicht vorkommen.

Betrachtet man in einem Ensemble von Kernen Zustände mit dem Drehimpuls $\boldsymbol{I}$, dann wird die Zahl der möglichen Übergänge zwar sehr stark durch die Auswahlregel (9.171) eingeengt, aber die $(2I + 1)$ Möglichkeiten bleiben. In einem Magnetfeld spalten die Zustände auf, so daß gemäß (9.172) insgesamt $(2I_i + 1)(2I_f + 1)$ Übergänge möglich sind. In der Atomhülle ist die Aufspaltung der Zustände mit den Mitteln der optischen Spektroskopie leicht nachweisbar. Bei den Kernen liegt sie für die üblichen Werte der magnetischen Induktion B jedoch in der Größenordnung 10^{-8} eV. Sie ist daher nur noch mit Hilfe der Mößbauer-Spektroskopie, nicht aber mit der klassischen γ-Spektroskopie nachweisbar. In dem in Abb. 9.66 dargestellten Beispiel ist die Aufspaltung übertrieben groß gezeichnet. Mit den gewöhnlichen γ-Spektrometern wird daher die unaufgelöste Summe der Multipolstrahlung mit n verschiedenen Übergängen der möglichen Kombinationen von m_i und m_f gemessen. Man kann zeigen, daß sie für gegebenen Satz von Drehimpuls-Quantenzahlen konstant ist und durch einen Drehimpuls-Kopplungsfaktor, im einfachsten Falle einen Clebsch-Gordan-Koeffizienten

$$\Phi(m_i, m_f) = (\boldsymbol{I}_i, m_i;\ \boldsymbol{I}_f, m_f \mid l, m)^2 \tag{9.203}$$

zu berücksichtigen ist. Außerdem können infolge Kernpolarisation die Zustände m_i ein statistisches Gewicht $W(m_i)$ haben, das von m abhängt und als statistischer Faktor in die Richtungs-Winkelverteilung $W(\vartheta)$ eingeht:

$$W(\vartheta) = \sum_{m,\,m_i} W(m_i)\,\Phi(m_i, m_f)\,F_l^m(\vartheta)\,. \tag{9.204}$$

Für den Fall, daß $W(m_i)$ unabhängig ist von m, muß $W(\vartheta)$ eine Konstante sein, d. h., die Verteilung ist isotrop. An einem Beispiel läßt sich das leicht demonstrieren. Es sei $I_i = 1$, $I_f = 0$,

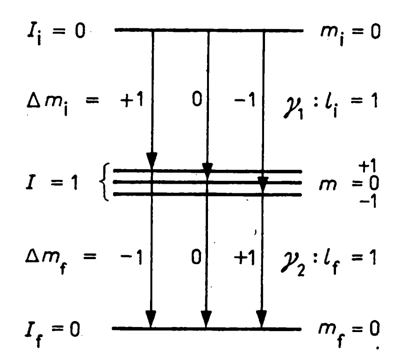


Abb. 9.66
γ-Kaskade bei magnetischer Aufspaltung der Zustände. Der Energiemaßstab der Aufspaltung ist unverhältnismäßig groß gezeichnet

$l = 1$, also F_1 entspricht dem Fall (9.200). Die Clebsch-Gordan-Koeffizienten sind $(1, \pm 1; 0{,}0\ 1, \pm 1)^2 = 1$ und $(1{,}0; 0{,}0\ 1{,}0)^2$, so daß

$$W(\vartheta) = \frac{3}{8\pi}\sin^2\vartheta + \frac{3}{16\pi}(1 + \cos^2\vartheta) + \frac{3}{16\pi}(1 + \cos^2\vartheta)$$
$$= \frac{3}{8\pi}[1 + \sin^2\vartheta + \cos^2\vartheta] = \frac{3}{4\pi}. \qquad (9.205)$$

Im Unterschied dazu ist die Beobachtung einer Anisotropie der Winkel-Verteilung ein Anzeichen für die Orientierung der Kerne. Dieser Fall ist jedoch nur möglich, wenn $W(m_i) \neq$ const ist, da Φ ein konstanter Faktor für gegebene Drehimpuls-Quantenzahlen ist und $F_l^m(\vartheta)$ nur die Form der Anisotropie beschreibt, nicht aber ihren absoluten Wert. Ein praktisches Beispiel sind die im Wu-Experiment (siehe 9.5.7., Punkt 3) orientierten ^{60}Co-Kerne. Darauf kommen wir noch am Ende von Punkt 4 zu sprechen.

2. Richtungs-Winkelkorrelationen gibt es nicht nur an Quellen mit polarisierten Kernen. In 6.4.4.3 wurde darauf hingewiesen, daß bei Kernumwandlungen eine Orientierung der Kerne vor sich gehen kann. So wird bei der Emission eines γ-Quants γ_1 mit gegebenem E_i, l_i und m_i der Restkern in einem ausgerichteten Zustand hinterlassen. Wenn bei der Abregung des dabei angeregten Zwischenzustandes ein zweites γ-Quant γ_2 mit E_f, l_f, m_f emittiert wird, so kann sein Multipolcharakter ermittelt werden, falls die Richtung von γ_1 als physikalisch ausgezeichnete Achse genutzt wird. In Abb. 9.66 ist eine passende γ-Kaskade und in Abb. 9.67 die Anordnung der Detektoren zur Messung der Winkelkorrelation dargestellt. Die Detektoren sind in Koinzidenz geschaltet, so daß die Gleichzeitigkeit der beiden Quanten innerhalb der Koinzidenzauflösungszeit festgestellt und nicht miteinander korrelierte Ereignisse ausgesondert werden können. Durch eine Energieauswahl der γ-Quanten kann die Aussonderung verschärft werden.

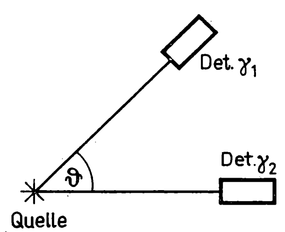


Abb. 9.67
Detektoranordnung zur Messung der Winkelkorrelation der γ-Quanten

Als Beispiel betrachten wir die Spinfolge $I_i = I_f = 0$, $I = 1$ von Abb. 9.66. Für den ersten Übergang von I_i auf I sind alle Werte $m = I, I - 1, \ldots, -(I - 1), -I$ gleichwahrscheinlich. Nehmen wir an, es wird der Wert m_i realisiert. Wegen Drehimpulserhaltung hat der Zwischenzustand dann die Einstellung $m = -m$, und da im Endzustand $m_f = 0$ ist, muß der zweite Übergang ebenfalls wegen Drehimpulserhaltung die Bedingung $m_f = m = -m_i$ erfüllen. Mit dem Detektor 1 sollten nur γ-Quanten mit E_i registriert werden, so daß diese die Richtung z vorgeben und der Winkel $\vartheta = 0$ festgelegt wird. Daraus folgt, daß nicht alle Multipolstrahlungen zu Koinzidenzen führen. In dem betrachteten Falle sind es nur die mit $F_1^{\pm 1}$ in (9.200). Man kann sich auch an Hand von Abb. 9.65 davon überzeugen. Die beiden Strahlungen mit $m = \pm 1$ sind gleich wahrscheinlich. Daher lautet die Winkelfunktion, die zu Koinzidenzen führt mit $W(m_i) = W(m_f)$ und dem Wert 1 des Clebsch-Gordan-Koeffizienten gemäß (9.205)

$$W(\vartheta) \sim |Y_1^0|^2 + |Y_1^1|^2 \sim 1 + \cos^2\vartheta. \qquad (9.206)$$

Die Funktion (9.206) ist in Abb. 9.68 dargestellt. Teil a) ist eine Polarkoordinaten-Darstellung, in der die Länge des Vektors γ_2 ein Maß für die Intensität der Emission in den Einheitsraumwinkel Ω bei dem Winkel ϑ zur Emissionsrichtung von γ_1 ist. Teil b) zeigt die Spektralverteilung als Funktion von ϑ. Die für unpolarisierte γ-Quanten immer zu beobachtende Symmetrie zu $\vartheta = 90°$ ist deutlich zu erkennen.

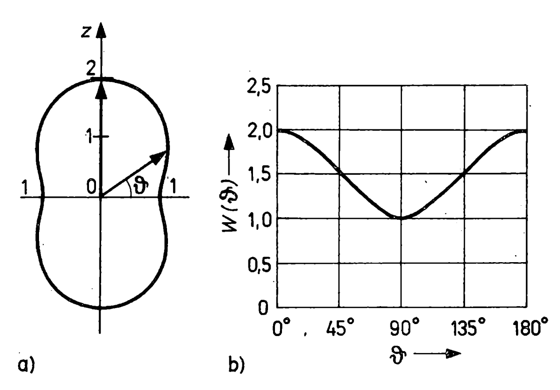


Abb. 9.68
Richtungs-Winkelkorrelation für γ_2-Strahlung bezüglich γ_1-Strahlung für eine Dipol-Dipol-Kaskade
a) in Polarkoordinatendarstellung, b) als Spektralfunktion von ϑ

3. Im allgemeinsten Falle ist $W(m)$ nicht konstant. Hinsichtlich der z-Achse mit $\vartheta = 0$ gilt

$$W(m) = \Sigma\, \Phi(m_i, m)\, F_l^m(\vartheta = 0)\,, \tag{9.207}$$

wobei

$$\Phi(m_i, m) = (l_i, m_i;\, l, m/l_i, m_i)^2 \tag{9.208}$$

der Clebsch-Gordan-Koeffizient ist. Die Winkelkorrelation zwischen γ_1 und γ_2 mit l_i, m_i und l_2, m_2 ergibt sich aus der Orientierung des Zwischenzustandes mit

$$W(m) = \sum_{m_i} \Phi(m_i, m)\, F_{l_1}^{m_1}(0) \tag{9.209}$$

und der Winkelverteilung von γ_2

$$F_{l_1}(\vartheta) = \sum_{m, m_f} W(m)\, \Phi(m, m_f)\, F_{l_2}^{m_2}(\vartheta)\,, \tag{9.210}$$

wobei

$$\Phi(m, m_f) = (l, m;\, l_f, m_f/l_2, m_2)^2 \tag{9.211}$$

wieder der Clebsch-Gordan-Koeffizient ist, zu

$$W(\vartheta) = \sum_{m_i, m, m_f} \Phi(m_i, m)\, F_{l_1}^{m_1}(0)\, \Phi(m, m_f)\, F_{l_2}^{m_2}(\vartheta)\,. \tag{9.212}$$

In dem betrachteten Beispiel mit $I_i = I_f = 0$, $I = 1$ und den zugelassenen Übergängen vom Typ $(I, m) = 0, 0 \rightleftarrows 1, \pm 1$ sind $\Phi(m_i, m) = \Phi(m, m_f) = 1$, und man erhält

$$W(\vartheta) = F_1^{\pm 1}(0)\, [F_1^1(\vartheta) + F_1^{-1}(\vartheta)] = 1 + \cos^2 \vartheta\,. \tag{9.213}$$

4. Die hier dargelegte einfache Theorie der γ-γ-Richtungskorrelationen reicht zum Verständnis vieler praktischer Fälle aus. Im Rahmen der exakten quantenmechanischen Theorie werden auch die Mischungsverhältnisse verschiedener Multipolordnungen über den Mischungsparameter δ_i^2 berechnet.

Gemäß (9.193) sind die δ_i^2 die Verhältnisse der Intensitäten der 2^{l+1}- zur 2^l-Polstrahlung. Daher ist die Messung der γ-γ-Winkelkorrelationen nicht nur eine der wichtigsten Methoden zur experimentellen Bestimmung der Spins der angeregten Kernzustände, sondern auch der Mischungsparameter der Multipolstrahlung. Für die praktische Arbeit bringt man die Winkelverteilungsfunktion $W(\vartheta)$ in eine einfache Form, indem man davon ausgeht, daß sie über die Funktion $F_l^m(\vartheta)$ gemäß (9.199) bis (9.201) aus Legendre-Polynomen gerader Ordnung mit konstanten Koeffizienten aufgebaut ist. Daher kann man schreiben

$$W(\vartheta) = \sum_{n=0}^{l} A_{2n} P_{2n}(\cos\vartheta) = \text{const.} \sum_{n=0}^{l} B_{2n} \cos^{2n}\vartheta \tag{9.214a}$$

wobei

$$A_0 = B_0 = 1 \tag{9.214b}$$

und

$$P_{2n}(\cos\vartheta) = \sqrt{\frac{4\pi}{4n+1}}\, Y_{2n,0}(\vartheta) \tag{9.214c}$$

ist. Die Koeffizienten A_{2n} können als Produkt zweier Faktoren dargestellt werden, die jeweils nur den einen der zwei Übergänge als Clebsch-Gordan-Koeffizienten beschreiben. Da immer nur die beiden niedrigsten Multipolordnungen einen merklichen Beitrag liefern, genügt es, sich auf diese zu beschränken. Praktisch kommen somit nur Glieder mit $n = 2$ vor. Wenn Multipolmischungen auftreten, dann ist der Mischungsparameter in den Koeffizienten A_{2n} enthalten. Eine prinzipielle Schwierigkeit, die Spins der Kernzustände und die Mischungsparameter aus den experimentellen Ergebnissen der γ-γ-Winkelkorrelationsmessungen zu ermitteln besteht darin, daß diese Größen von drei Spins einer Kaskade und von zwei Multipolmischungen abhängen, aber nur durch zwei Zahlenwerte A_2 und A_4 beschrieben werden. Die Lösung ist somit unterbestimmt. Zu eindeutigen Spin- und Multipolzuordnungen kommt man meist erst durch Kombination mehrerer Winkelkorrelationsmessungen.

5. Als konkreten Fall betrachten wir die 4^+-2^+-0^+-Kaskade in ^{60}Ni, die durch β-Zerfall von ^{60}Co angeregt wird. Das Zerfallsschema ist in Abb. 9.32 gezeigt. Für die Auswertung hat diese Kaskade zwei Vorteile. Erstens werden die γ-Quanten innerhalb kürzester Zeit nacheinander emittiert, weil die Lebensdauer des Zwischenzustandes kleiner als 10^{-11} s ist. Zweitens handelt es sich beim zweiten Übergang wegen des Spins 0 im Grundzustand um einen reinen E2-Übergang und, wie gezeigt werden konnte, ist auch der Übergang $4^+ - 2^+$ ein reiner E2-Übergang. Die berechnete Winkelverteilungsfunktion lautet

$$W(\vartheta) = 1 + 0{,}1020 P_2(\cos\vartheta) + 0{,}0091 P_4(\cos\vartheta)\,. \tag{9.215}$$

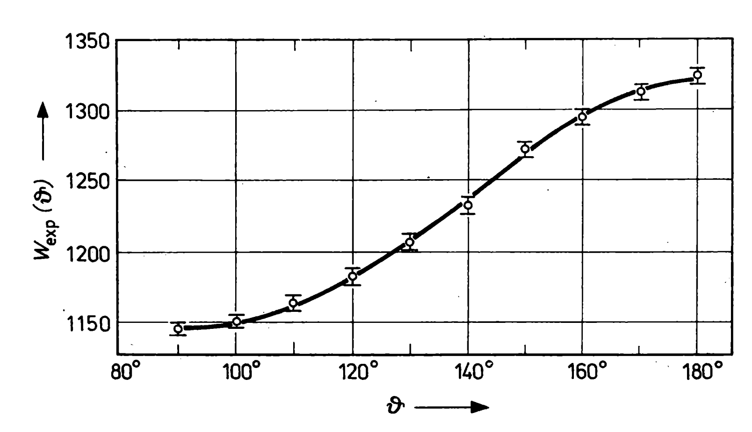


Abb. 9.69
Richtungs-Winkelkorrelation $W(\vartheta)$ für eine Kaskade mit $I = 4, 2, 0$ in ^{60}Co

Die experimentellen Werte liegen, wie Abb. 9.69 zeigt, sehr gut auf der berechneten Kurve. Als praktisches Maß für die Asymmetrie der Winkelkorrelation benutzt man oft die Anisotropie

$$A_\gamma = \frac{W(90°) - W(180°)}{W(180°)} = \sum_{n=1}^{n_{max}} B_{2n} . \tag{9.216}$$

Im Falle der ^{60}Ni-Kaskade beträgt der berechnete Wert 0,1667, der experimentelle 0,167 $\pm$ 0,001.

6. Richtungs-Winkelkorrelationen gibt es nicht nur zwischen orientierten Kernen und γ-Quanten oder zwischen korrelierten γ-Quanten. Ebenso wichtig sind derartige Korrelationen ganz allgemein zwischen ein- und auslaufenden Teilchen in Kernreaktionen, wo γ-Quanten als Spezialfälle von Teilchen mit gemeint sind. Man kann die Funktion $W(\vartheta)$ in der Form

$$W(\vartheta) = A'_{kk} P_k(\cos\vartheta) = \sum_k A'_k(1)\, A'_k(2)\, P_k(\cos\vartheta) \tag{9.217}$$

darstellen. Für die γ-γ-Richtungs-Winkelkorrelationen erhält man mit zwei möglichen und miteinander konkurrierenden Multipolordnungen l_v und l'_v zwischen zwei Zuständen

$$W(\vartheta) = \sum_k (-1)^{l_1 - l_2} A'_k(l_1, l'_1, I_i, I)\, A'_k(l_2, l'_2, I_f, I)\, P_k(\cos\vartheta) , \tag{9.218}$$

wobei k eine gerade Zahl ist, die zu einem Maximalwert $2n$ laufen kann, der durch den kleinsten Wert von l_1, j oder l_2 bestimmt wird. Für Teilchen im Ein- und Ausgangskanal mit dem Spin der Targetkerne I_T, der Endkerne I_f, der Inzidenzteilchen s_i und der auslaufenden Teilchen s_f sowie mit dem Eingangs- und Ausgangskanalspin $S_1 = I_T + s_i$ und $S_2 = I_f + s_f$ erhält man

$$W(\vartheta) = \sum_k (-1)^{S_1 - S_2} A_k(l_1, l'_1, S_1 k)\, A_k(l_2, l'_2, S_2 k)\, P_k(\cos\vartheta) . \tag{9.219}$$

Die Richtungs-Winkelkorrelation zwischen Teilchen im Ein- und Ausgangskanal und γ-Quanten im Ausgangskanal genügen der Gleichung

$$W(\vartheta) = \sum_k (-1)^{S-I} A_k(l_1, l'_1, S_1 k)\, A'_k(l_2, l'_2, Ik)\, P_k(\cos\vartheta) . \tag{9.220}$$

Die praktische Arbeit mit diesen Formeln wird dadurch erleichtert, daß die verwendeten Koeffizienten alle tabelliert sind.

9.6.4.2. Polarisations-Winkelkorrelationen

Mit den in Punkt 2 und 4 von 9.6.4.1. beschriebenen Richtungs-Winkelkorrelationen der γ-Strahlung kann man den Drehimpuls der Strahlung und damit der Zustände bestimmen, nicht jedoch die Parität der Strahlung und damit auch nicht der Zustände. Die Parität legt fest, ob es sich um elektrische oder magnetische Multipole der Ordnung l handelt, aber diese haben unabhängig davon, ob sie elektrisch oder magnetisch sind, die gleiche Richtungs-Winkelverteilung. Wenn jedoch die Polarisation der γ-Strahlung bekannt ist, dann kann man wegen (9.174) den Charakter der Multipolstrahlung angeben.

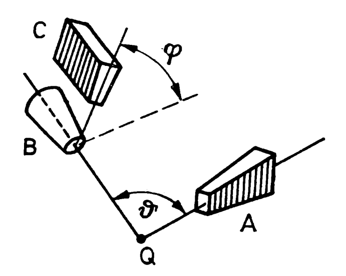


Abb. 9.70
Anordnung der Detektoren A, B, C und des Streuers B zur Messung von Polarisations-Winkel-Korrelationen mit Hilfe der Compton-Streuung

Zur Messung der Polarisations-Winkelverteilung kann man als Analysator der Polarisation Effekte nutzen, bei denen die Winkelverteilung der Quanten oder Teilchen von der Richtung des Vektors der elektrischen Feldstärke $\boldsymbol{E}$ der Strahlung abhängt. Zu ihnen gehört der Compton-Effekt. Eine Meßanordnung ist in Abb. 9.70 dargestellt. Die drei Detektoren A, B und C sind in Koinzidenz geschaltet. Mit A wird der erste zweier in Kaskade emittierter γ-Quanten registriert. In B findet die Compton-Streuung statt, und gleichzeitig löst das Compton-Elektron ein Signal aus. In C wird der gestreute Quant detektiert. Der Wirkungsquerschnitt der Compton-Streuung wird durch die Klein-Nishina-Formel

$$\left(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\right)_{\varphi} = \frac{r_e^2}{2}\,\frac{E_{\gamma'}^2}{E_\gamma^2}\left[\frac{E_\gamma}{E_{\gamma'}} + \frac{E_{\gamma'}}{E_\gamma} - 2\sin^2\vartheta\cos^2\varphi\right] \tag{9.221}$$

beschrieben, in der mit $r_e = e^2/mc^2$ der klassische Elektronenradius und mit E_γ und $E_{\gamma'}$ die Energie des inzidenten bzw. gestreuten γ-Quants bezeichnet sind. Die Bedeutung der Winkel φ und ϑ erkennt man aus Abb. 9.71. Zwischen E_γ und $E_{\gamma'}$ besteht die Beziehung (4.53). In Abb. 9.72 ist ein Polardiagramm von (9.221) für zwei Energien E_γ mit den dazugehörigen Punkten für $E_{\gamma'}$ gezeichnet.

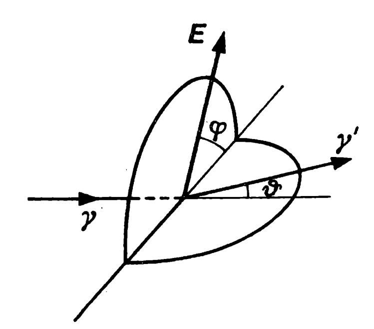


Abb. 9.71
Winkelbezeichnungen bei der Compton-Streuung

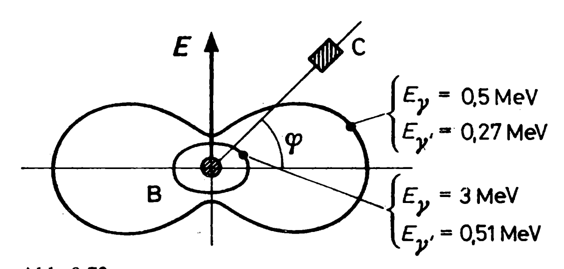


Abb. 9.72
Polardiagramm des Compton-Wirkungsquerschnitts bezüglich der Polarisationsrichtung der inzidenten γ-Quanten und bei Streuwinkel $\vartheta = 80°$

Zur Beschreibung der Polarisations-Winkelkorrelation wird zunächst die Richtung des Vektors $\boldsymbol{E}$ durch den Einheitsvektor $\boldsymbol{c}_{\mathrm{E}}$ so festgelegt, daß er in der Ebene $Q - B$, $\vartheta = 0$ liegt. Die Richtung des Detektors C gibt der Einheitsvektor $\boldsymbol{c}_{\mathrm{C}}$ an. Wenn der Polarisationsgrad mit P bezeichnet wird und die Richtungs-Winkelkorrelation $W(\vartheta)$ der Gleichung (9.214a) genügt, dann ergibt sich als neue Verteilungsfunktion

$$W(\vartheta, \boldsymbol{c}_{\mathrm{C}}) = \frac{1}{2}\,W(\vartheta)\,(1 + P\boldsymbol{c}_{\mathrm{E}}\boldsymbol{c}_{\mathrm{C}})\,. \tag{9.222}$$

Für den zweiten Term, der die gesuchte Information enthält, ergeben sich komplizierte Ausdrücke. Es ist aber verständlich, daß für jeden Term mit l_2, l'_2 und k die Funktion $P_k(\cos \vartheta)$ zu ersetzen ist durch

$$P_k(\cos \vartheta)\,(\pm 1)_{l_2} \cos 2\varphi K_k(l_2, l'_2)\, P_k^{(2)}(\cos \vartheta)\,. \tag{9.223}$$

Der Faktor $K_k(l_2, l'_2)$ ist ein Quotient aus zwei Clebsch-Gordan-Koeffizienten, die nur die Multipolarität enthalten. Bezeichnet man die Strahlungsintensitäten bei $\varphi = 0°$ und $90°$, wo $\cos 2\varphi = 1$ wird mit N_0 und N_{90}, dann erhält man

$$PW(\vartheta) = N_0 - N_{90} = (\pm 1)_{l_2}\, A_k K_k P_k^{(2)}(\cos \vartheta)\,. \tag{9.224}$$

Durch das Vorzeichen kann die Parität eindeutig festgestellt werden. Für elektrische 2^{l_2}-Pole gilt das Pluszeichen, für magnetische das Minuszeichen.

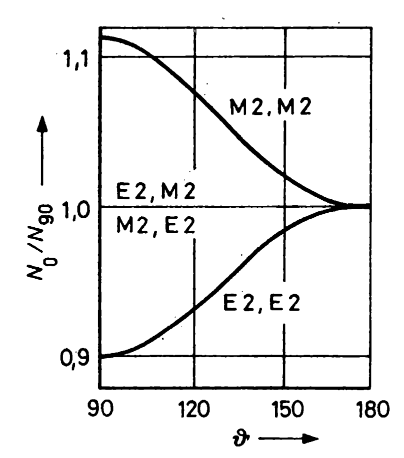


Abb. 9.73
Verhältnis der Dreifach-Koinzidenzraten N_0/N_{90} bei $\varphi = 0$ und $\vartheta = 90°$ als Funktion von ϑ für drei Kombinationen der Multipolstrahlung bei der Abregung der Zustände 4^+-2^+-0^+ in ^{46}Ti

In Abb. 9.73 sind die berechneten Kurven N_0/N_{90} für eine 4^+-2^+-0^+-Zustandsfolge bei der Abregung durch zwei γ-Übergänge mit l_i und l_f als Funktion von ϑ für drei Kombinationen (M2, M2)-oben, (M2, E2) oder (E2, M2)-Mitte sowie (E2, E2)-unten dargestellt. Diese Kaskade tritt z. B. beim Zerfall von ^{60}Co auf, dessen Zerfallsschema die Abb. 9.32 zeigt. Auch in ^{46}Ti ist so eine Kaskade vermessen worden. Die experimentellen Werte liegen eindeutig auf der unteren Kurve.

9.7. Rückstoßfreie Gammaspektroskopie

Aus der Physik der Atomhülle ist bekannt, daß die Atome eines Elements die von Atomen des gleichen Elements emittierte Strahlung intensiv absorbieren, da die Resonanzbedingung erfüllt ist. Der Effekt wurde von J. W. Rayleigh vorausgesagt und 1904 von R. W. Wood entdeckt. In der Kernphysik hat die Resonanzabsorption der optischen Strahlung beim optischen Pumpen zur Kernorientierung Anwendung gefunden. W. Kuhn vermutete 1927, daß für die Atomkerne der analoge Effekt zu erwarten sei, d. h., die von angeregten Kernen eines Nuklids emittierte γ-Strahlung sollte von anderen Kernen des gleichen Nuklids ebenfalls intensiv absorbiert werden. Trotz zahlreicher Bemühungen gelang es erst 1951 P. B. Moon, die Kernresonanzabsorption nachzuweisen. Die Ursache für die Resonanzverstimmung ist der Rückstoß, den die Kerne bei der Emission und Absorption der γ-Strahlung erhalten. 1957 entdeckte R. L. Mössbauer, daß es in Festkörpern auch zu einer rückstoßfreien Emission oder Absorption kommen kann.

9.7.1. Kernresonanzabsorption

1. Wenn die Lebensdauer der Anregungszustände hinsichtlich γ-Zerfall sehr groß ist, sind die natürlichen Linienbreiten wegen (2.3) sehr klein. An Hand von Tabelle 9.8 kann man sich davon überzeugen. Bereits geringste energetische Verschiebungen können daher die Resonanzbedingung stören. Solche Effekte sind der Rückstoß bei der Emission und Absorption der γ-Quanten sowie die Vergrößerung der Linienbreiten infolge thermischer Bewegung, d. h. infolge Doppler-Effekts. Die γ-Quanten werden von Kernen emittiert oder absorbiert, die sich gerade mit einer bestimmten Geschwindigkeit, z. B. der Rückstoßgeschwindigkeit $\boldsymbol{v}$ bewegen. Energie- und Impulserhaltung beim γ-Zerfall mit der Anregungsenergie ΔE^*, der γ- und Rückstoßenergie E_γ und E_R sowie dem γ- und Rückstoßimpuls führen auf

$$\Delta E^* = E_\gamma + E_R\,; \qquad \boldsymbol{p}_\gamma + \boldsymbol{p}_R = 0\,. \tag{9.225}$$

Für die Rückstoßenergie ergibt sich daraus mit der Ruhmasse und Ruhenergie m_0, E_0 des Rückstoßkerns

$$E_R = \frac{p_R^2}{2m_0} = \frac{p_\gamma^2}{2m_0} = \frac{E_\gamma^2}{2E_0}\,. \tag{9.226}$$

Da $E_R \ll E_\gamma$ ist, kann man anstelle von E_γ auch ΔE^* einsetzen, und da nicht nur der emittierende, sondern auch der absorbierende Kern die gleiche Rückstoßenergie E_R aufnimmt, beträgt die Resonanzverstimmung

$$\Delta E = 2E_R = \frac{E_\gamma^2}{E_0} \approx \frac{\Delta E^{*2}}{E_0}\,. \tag{9.227}$$

Resonanzabsorption kann nur erwartet werden, wenn die Emissions- und Absorptionslinien einander überlappen, wenn also die Bedingung

$$2E_R \leqq l \tag{9.228}$$

erfüllt ist. In Abb. 9.74 und Abb. 9.75a, b sind die Energie- und Impulsverhältnisse dargestellt. Für die optischen Übergänge ist (9.228) wegen der kleinen Werte von ΔE^* und E_R immer erfüllt. Ganz anders ist das bei den γ-Übergängen. Für die Übergänge, die für die Mößbauer-Spektrometrie von Interesse sind, d. h. mit $\Delta E^* \lesssim 100$ keV, liegt die natürliche Linienbreite in dem Intervall zwischen 10^{-12} und 10^{-5} eV und die Rückstoßenergien zwischen $5 \cdot 10^{-5}$ und 10^{-1} eV. Die Resonanzbedingung (9.228) ist also nicht erfüllt.

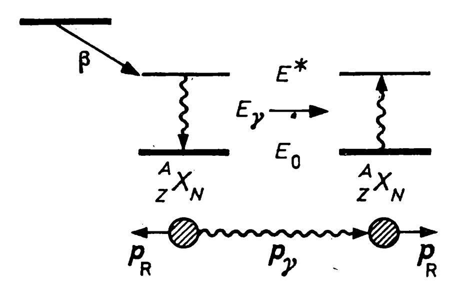


Abb. 9.74
Energie- und Impulsverhältnisse bei der Emission und Absorption von γ-Quanten

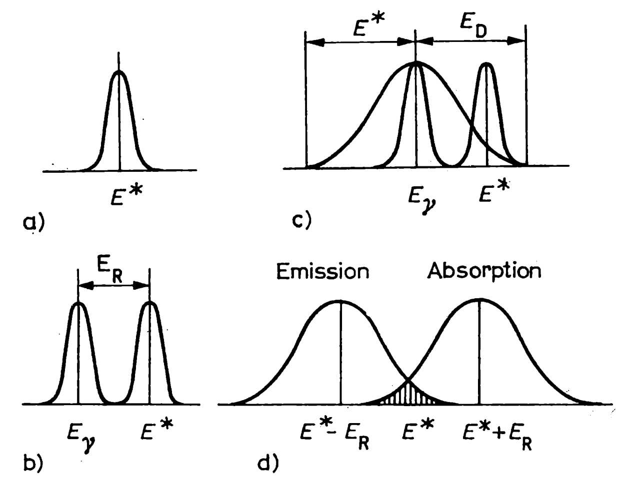


Abb. 9.75
Überlappung von Emissions- und Absorptionslinien von γ-Quanten
a) Vollständige Überlappung bei der Resonanzenergie E^*
b) Rückstoßverschiebung der γ-Linie E_γ relativ zur Resonanzlinie E^*
c) Linienverbreiterung infolge thermischer Emitterbewegung und gleichzeitiger Rückstoßverschiebung wie in b)
d) Überlappung der dopplerverbreiterten Emitter- und Absorptionslinien

2. Wenn die emittierenden und absorbierenden Kerne, verursacht durch thermische Bewegung, einen Anfangsimpuls $\boldsymbol{p}_{\text{th}}$ haben, dann ist die Linienbreite, abgesehen vom Gebiet niedrigster Temperaturen, viel größer als Γ. Geht man von der Maxwell-Verteilung aus, dann entspricht die Breite bei der relativen Höhe $1/e$ einer Energiespreizung von

$$E_{\text{th}} = 2\,\Delta E^* \sqrt{\frac{2kT}{E_0}}\,. \tag{9.229}$$

Man kann die Linienverbreiterung auch ausgehend vom Impuls- und Energiesatz berechnen. Für einen mit dem Anfangsimpuls $\boldsymbol{p}_{\text{th}}$ bewegten Kern gilt

$$\boldsymbol{p}_{\text{th}} = \boldsymbol{p}_{\text{R}} + \boldsymbol{p}_\gamma \tag{9.230}$$

und

$$\Delta E^* + \frac{p_{\text{th}}^2}{2m_0} = E_0 + \frac{p_{\text{R}}^2}{2m_0} + E_\gamma\,. \tag{9.231}$$

Daraus ergibt sich

$$E_\gamma = E_0 + \frac{\boldsymbol{p}_{\text{th}} \cdot \boldsymbol{p}_\gamma}{m_0} - \frac{p_\gamma^2}{2m_0} \tag{9.232}$$

oder, wenn man das Skalarprodukt mit dem zwischen $\boldsymbol{p}_{\text{th}}$ und $\boldsymbol{p}_\gamma$ eingeschlossenen Winkel darstellt,

$$E_\gamma = E_0 - E_{\text{R}} + E_{\text{D}} \cos \vartheta\,. \tag{9.233}$$

Der Ausdruck

$$E_{\text{D}} = \frac{1}{m_0}\,|\boldsymbol{p}_{\text{th}}|\,|\boldsymbol{p}_\gamma| = 2\sqrt{E_{\text{th}} \cdot E_{\text{R}}} \tag{9.234}$$

wird Doppler-Faktor genannt. Für E_{th} ist ein Mittelwert $\langle E_{th} \rangle$ einzusetzen, weil die beiden Impulse in alle Richtungen zwischen 0 und 2π weisen können, so daß sich auch für E_D ein Mittelwert $\langle E_D \rangle$ ergibt. Die neuen Überlappungsverhältnisse sind in Abb. 9.75c, d schematisch dargestellt.

3. Zur Kompensation der Resonanzverstimmung gibt es verschiedene Methoden. P. B. MOON benutzte 1951 den Doppler-Effekt, um die Resonanzabsorption des 411-keV-Übergangs in ^{198}Hg nachzuweisen. Dieser Übergang entsteht durch Abregung des 411-keV-Zustandes, der seinerseits im Gefolge des β-Zerfalls von ^{198}Au besiedelt wird. Das Schema der experimentellen Anordnung zeigt Abb. 9.76. Die ^{198}Au-Quelle wurde mit einer Ultrazentrifuge auf Geschwindigkeiten von bis zu 800 m/s gebracht. Bei 700 m/s wurde das Maximum der Intensität der Resonanzabsorption beobachtet. Man kann leicht zeigen, daß sich die Kompensationsgeschwindigkeit zu

$$2v \approx v_R \approx \frac{\Delta E^*}{m_0 c} \tag{9.235}$$

ergibt, was in diesem Fall 670 m/s liefert. Die Breite des Zustandes konnte zu $(2,1 \pm 0,4)\ 10^{-5}$ eV ermittelt werden. Das entspricht einer Lebensdauer von $(3,1 \pm 0,5)\ 10^{-11}$ s. Die Rückstoßverluste entsprachen etwa 0,8 eV.

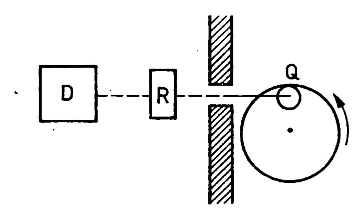


Abb. 9.76
Kompensation der Resonanzverstimmung mit Hilfe einer Ultrazentrifuge

Als zweite Möglichkeit wurde die Erhitzung der Quelle auf hohe Temperaturen von bis zu über 1000 °C genutzt. Ein Beispiel war die Abregung des 161-keV-Zustandes in ^{117}Sn, der beim Zerfall von ^{117}Sb angeregt wird. Bei einer Erhitzung auf 700 °C wurde ein Anstieg der Resonanzabsorption auf 1 % registriert. Die Lebensdauer des Zustandes konnte auf diese Weise ebenfalls über (9.11) bestimmt werden.

Eine dritte wichtige Methode zur Kompensation der Rückstoßverluste ist die Ausnutzung der Reaktionskinematik. Die Zustandsanregung erfolgt z. B. durch elastische Streuung, die Resonanzstreuung, in einer Probe aus dem gleichen Material, wie das Target. Für einen Teil der von den Rückstoßkernen der Reaktion emittierten γ-Quanten kann wegen der Doppler-Verschiebung (9.160) die Energie gerade in dem Maße geändert werden, das notwendig ist, um die Rückstoßverluste zu kompensieren. Auf diese Weise können Zustandslebensdauern in dem in Abb. 9.54 angegebenen Bereich über die Linienbreite bestimmt werden.

9.7.2. Mößbauer-Effekt

1. In einem Experiment, ähnlich dem von Abb. 9.76, untersuchte 1958 R. L. MÖSSBAUER das Temperaturverhalten der γ-Resonanzabsorption. Die Quelle wurde dabei zunächst nicht bewegt. Als Radionuklid kam $^{191}_{76}$Os zum Einsatz, dessen Zerfallsschema in Abb. 9.77 gezeigt ist, als Absorber Iridium und im Kontrollversuch Platin. Zur Resonanzabsorption wurde der 129-keV-

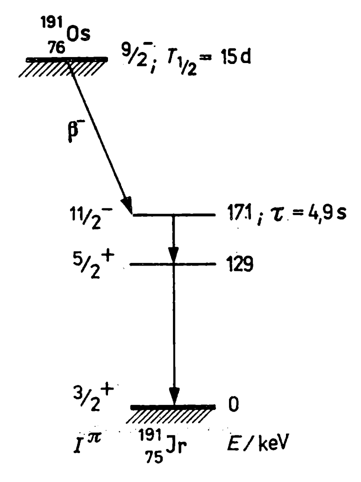


Abb. 9.77
Zerfallsschema $^{191}_{76}$Os

Übergang in ^{191}Ir genutzt. Die Linienbreite des 129-keV-Übergangs ist $5{,}1 \cdot 10^{-6}$ eV, die Rückstoßenergie beträgt 0,047 eV, und die Doppler-Verschiebung kann für Zimmertemperatur zu 0,1 eV abgeschätzt werden. Um das Abnehmen der Resonanzabsorption zu niedrigen Temperaturen hin beobachten zu können, wurde der Absorber auf die Temperatur der flüssigen Luft, d. h. auf 88 K gehalten, während die Messungen als Funktion von der Quelltemperatur durchgeführt wurden. Aus Abb. 9.78 sieht man jedoch, daß mit der Absenkung der Quelltemperatur keine Abnahme, sondern eine Zunahme der Resonanzabsorption zu verzeichnen ist. In einem zweiten Versuch mit bewegter Quelle wurde die Resoanzabsorptionskurve bei 88 K aufgenommen. Das Ergebnis zeigt Abb. 9.79. Unerwarteter Weise ergab sich ein Minimum bei $v = 0$, d. h. bei ruhender Quelle. Die Absorption erfolgte somit rückstoßfrei. Außerdem ist die Absorptionskurve eine äußerst schmale Linie, die jetzt Mößbauer-Linie genannt wird.

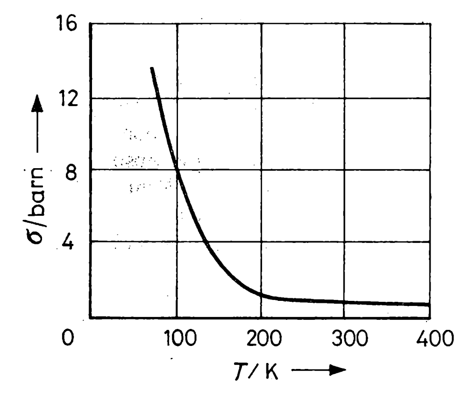


Abb. 9.78
Resonanz-Absorptionsquerschnitt für ^{191}Ir-Kerne als Funktion der Quellentemperatur

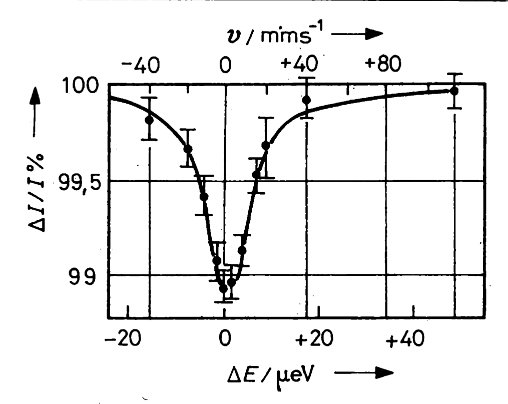


Abb. 9.79
γ-Resonanzabsorption in ^{191}Ir als Funktion von der Geschwindigkeit der Quelle und der Doppler-Verschiebung

Ihre Breite betrug nur 2 cm/s. Daraus kann man unter Berücksichtigung des Doppler-Effekts über (9.160) für $\vartheta = 0$

$$\Delta E = \frac{\Delta v}{c} \Delta E^* \tag{9.236}$$

die Linienbreite berechnen. Sie ergab sich zu $(9{,}2 \pm 1{,}2) \cdot 10^{-6}$ eV. Für die Lebensdauer des 129-keV-Zustandes erhielt MÖSSBAUER den Wert $(1{,}4^{+0{,}2}_{-0{,}1})\ 10^{-10}$ s.

2. Zur Erklärung der beiden überraschenden Ergebnisse ging MÖSSBAUER von der Lambschen Theorie des Resonanzeinfangs thermischer Neutronen aus. Dort wird angenommen, daß die Targetatome so fest im Gitter gebunden sind, daß sie hinsichtlich des Rückstoßes nicht einzeln wirksam werden, sondern das Gitter als Ganzes oder zu großen Teilen. So kommt es zwar zu einer Impuls-, nicht aber zu einer Energieübertragung. Die Analogie der klassischen Mechanik dazu ist die Reflexion eines Teilchens an einer Wand beim Stoßprozeß. Bei der γ-Resonanzstrahlung hat man sich vorzustellen, daß den Rückstoß nicht der freie Kern, sondern ein Gitterabschnitt mit ca. 10^5 bis 10^9 Kernen aufnimmt. In (9.227) geht dann E_0 gegen einen sehr großen Wert.

Im Prinzip war die analoge Erscheinung auch von der elastischen Streuung thermischer Neutronen und von den Röntgenstrahlen her bekannt. Bei letzteren äußert sie sich darin, daß ein Teil der Röntgenstrahlen trotz Streuung unverminderte Energie aufweist. Dieser Teil wird durch den Debye-Waller-Faktor erfaßt. Die von MÖSSBAUER für die γ-Strahlung entdeckte Zunahme der Resonanzabsorption mit abnehmender Temperatur heißt Mößbauer-Effekt. In Analogie zum Debye-Waller-Faktor wird hier der Anteil der rückstoßfrei absorbierten γ-Quanten als Funktion von der Temperatur Lamb-Mößbauer-Faktor genannt. Wenn die Gitterschwingungen durch ein kontinuierliches Phononenspektrum beschrieben werden können, indem die Zustandsdichte proportional ist zu ω^2 und das bei der Debye-Frequenz ω_D abbricht, dann ergibt sich dieser Anteil mit der Debye-Temperatur

$$T_D = \frac{\hbar}{k}\omega_D \tag{9.237}$$

zu

$$f = f(T) \approx \exp\left\{-\frac{3}{2}\frac{E_R}{2kT_D}\left[1 + \frac{2}{3}\pi^2\left(\frac{T}{T_D}\right)^2\right]\right\}. \tag{9.238}$$

Für $T_D = 316$ K erhält man in guter Übereinstimmung mit dem experimentellen Ergebnis für $T = 88$ K einen Absorptionsquerschnitt von (10,0 ± 0,5) barn. Aus (9.238) folgt, daß der rückstoßfreie Anteil der Kernresonanzabsorption mit wachsender Debye-Temperatur, abnehmender Temperatur und abnehmender Rückstoßenergie wächst. Im allgemeinen erreicht f die Größenordnung von 1 %.

3. Der Mößbauer-Effekt ist wie kaum ein anderer physikalischer Effekt innerhalb kürzester Zeit in einer Vielzahl von Anwendungen eingesetzt worden. Die dabei entstandene Mößbauer- oder oft auch γ-Resonanz-Spektroskopie zeichnet sich durch höchste Genauigkeit aus. Ein Maß für die Genauigkeit ist das Verhältnis $\Gamma/\Delta E^*$. Es erreicht z. B. für den 14,4-keV-Übergang in ^{57}Fe den Wert $3 \cdot 10^{-13}$ und für den 93-keV-Übergang in ^{67}Zn sogar $5 \cdot 10^{-16}$. Die natürlichen Linienbreiten betragen in diesen beiden Fällen $5 \cdot 10^{-9}$ eV und $5 \cdot 10^{-11}$ eV. Die Einsatzmöglichkeiten der beiden Strahler sind aber sehr unterschiedlich. Das hängt besonders mit der Debye-Temperatur zusammen. Für ^{57}Fe ist sie mit $T_D = 467$ K sehr groß. Der Faktor f ist daher sogar noch bei 300 K größer als 0,6 %. Umgekehrt ist sie für ^{67}Zn mit $T_D = 305$ K sehr klein, so daß selbst bei der Temperatur des flüssigen Heliums von ca. 4 K f nur 0,3 % ausmacht. In Tabelle 9.10 sind einige Mößbauer-Nuklide aufgeführt. Neben möglichst kleinen Werten von $\Gamma/\Delta E^*$, aber großem ΔE^* und kleinem τ soll f möglichst groß sein. Das wiederum erfordert nicht zu großes ΔE^*, damit E_R klein bleibt. Letzteres erreicht man auch durch große Werte von E_0. Außerdem sollen neben dem Mößbauer-Übergang möglichst keine konkurrierenden γ- und Konversionsübergänge vorhanden sein. Aus Tabelle 9.10 sieht man aber, daß die Konversionskoeffizienten zum Teil recht große Werte erreichen. Die Folge ist gemäß (9.165) ein kleinerer Wirkungsquerschnitt und gemäß (9.241) eine größere partielle Lebensdauer τ_γ. Schließlich soll der Mößbauer-Übergang keine Feinstrukturaufspaltung haben.

4. In den meisten Anwendungen des Mößbauer-Effekts wird die natürliche Linienbreite der γ-Linien genutzt, weil sie die Möglichkeit bietet, kleinste Energiedifferenzen zu spektrometrieren. Die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten von Resonanzen hängt sehr stark von kleinsten Änderungen der Resonanzenergie ab. Diese können durch Hyperfein-Wechselwirkungen der elektrischen und magnetischen Momente des Kerns mit den elektrischen und magnetischen Feldern, die den Kern umgeben, verursacht werden. Solche Wechselwirkungen führen zu Energieverschiebungen und Energieaufspaltungen der Kernzustände und damit zu Änderungen des Mößbauer-Spektrums. Die dabei meßbaren Hyperfeinstrukturen der Mößbauer-Spektren enthalten Informationen über Kern und Hülle und sind damit Grundlage für vielfältige Anwendungen in der Kern- und Festkörperphysik sowie in der Chemie. Eine wichtige Anwendung der Kernphysik ist die bereits besprochene Bestimmung der Lebensdauer von Zuständen. Weitere Anwendungen in der Kernphysik sind die Bestimmung magnetischer Dipol- und elektrischer Quadrupolmomente sowie die Ermittlung der relativen Radiusänderung beim Übergang aus einem Anregungszustand in einen anderen oder den Grundzustand. Den Anwendungen des Mößbauer-Effekts ist 12.3.9. gewidmet.

9.8. Innere Konversion und innere Paarbildung

1. In Konkurrenz zur γ-Emission erfolgt die Abregung der Kernzustände auch durch innere Konversion und bei Anregungsenergien von mehr als zwei Elektronen-Ruhenergien auch durch innere Paarbildung. Beide Effekte sind jedoch von grundverschiedener Natur. Während der inneren Konversion ein Wechselwirkungsprozeß zwischen Hüllenelektronen und angeregten Kern zugrunde liegt, handelt es sich bei der inneren Paarbildung um eine Wechselwirkung des elektromagnetischen Kernanregungsfeldes mit dem Kern, bei der ein Elektron-Positron-Paar erzeugt wird. Die Entdeckung der inneren Konversion gelang durch die Beobachtung monoenergetischer Elektronenlinien auf dem Kontinuum der β-Spektren. Je nach dem Verhältnis von β-Zerfallsenergie und der bei der Abregung abzugebenden Energie liegen die Linien vor oder nach der Grenzenergie des β-Spektrums. Abbildung 9.80 zeigt das Elektronenspektrum für den Zerfall von ^{141}Ce mit $\Delta E^* < E_{\beta,\max}$ sowie das Elektronenspektrum für den Zerfall von ^{137}Cs mit $\Delta E \approx E_{\beta,\max}$. Es war bald gefunden worden, daß die Differenz zwischen den Linien,

Tabelle 9.10 Eigenschaften von Mößbauer-Nukliden

Absorbernuklid	Natürl. Isotopenhäufigkeit %	E_γ/keV	$T_{1/2}$/s	Koeff. d. inn. Konv. α	Γ/keV	2Γ/mm s^{-1}	Γ/E^*	E_R/keV	$\sigma = \sigma_0(1+\alpha)$/ µb	Mutternuklid	$T_{1/2}$ d. Mutternuklids
^{67}Zn	4,11	93,31	$9{,}3 \cdot 10^{-6}$	0,54	$4{,}85 \cdot 10^{-14}$	$3{,}129 \cdot 10^{-4}$	$5{,}19 \cdot 10^{-16}$	69,77	0,187	^{67}Ga	78,3 h
^{181}Ta	99,99	6,23	$6{,}8 \cdot 10^{-6}$	46	$6{,}7 \cdot 10^{-14}$	$6{,}439 \cdot 10^{-3}$	$1{,}07 \cdot 10^{-14}$	0,11	47,48	^{181}W	121,2 d
^{237}Np	—	59,5	$6{,}67 \cdot 10^{-8}$	1,12	$6{,}84 \cdot 10^{-12}$	$6{,}888 \cdot 10^{-2}$	$1{,}15 \cdot 10^{-13}$	8,03	0,69	^{237}U	6,75 d
^{57}Fe	2,19	14,41	$0{,}98 \cdot 10^{-7}$	8,18	$4{,}67 \cdot 10^{-12}$	0,194	$3{,}2 \cdot 10^{-13}$	1,95	23,63	^{57}Co	270 d
^{119}Sn	8,58	23,83	$1{,}77 \cdot 10^{-7}$	5,12	$2{,}57 \cdot 10^{-11}$	0,647	$1{,}08 \cdot 10^{-12}$	2,57	8,51	^{119m}Sn	250 d
^{170}Yb	3,03	84,3	$1{,}59 \cdot 10^{-9}$	1,9	$2{,}85 \cdot 10^{-10}$	2,029	$3{,}38 \cdot 10^{-12}$	22,42	1,72	^{170}Tm	128,6 d
^{169}Tm	100	8,42	$3{,}9 \cdot 10^{-9}$	220	$1{,}17 \cdot 10^{-10}$	8,330	$1{,}38 \cdot 10^{-12}$	0,22	69,0	^{169}Yb	31 d
^{191}Ir	37,4	129,4	$8{,}9 \cdot 10^{-11}$	2,4	$5{,}19 \cdot 10^{-10}$	23,75	$4{,}01 \cdot 10^{-12}$	47,06	2,19	^{191}Os	15,4 d

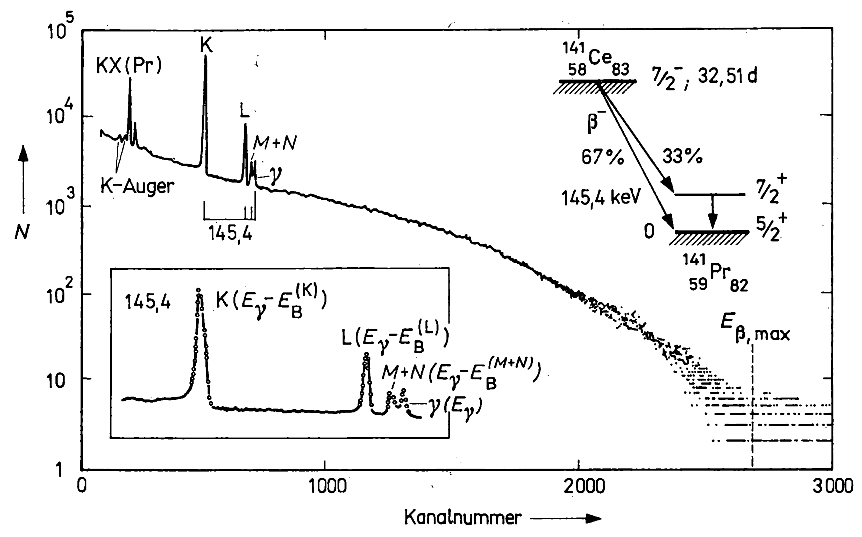


Abb. 9.80
β- und Konversionselektronenspektren
a) Zerfallsschema und Elektronenspektrum von ^{141}Ce, aufgenommen mit 80 mm^2 × 4 mm-Si(Li)-Detektor

die für einen Abregungsübergang auftreten, durch die Bindungsenergie der Elektronen in den K-, L-, ... Zuständen der Hülle der Tochteratome des zerfallenden β-Mutternuklids bestimmt wird, weil es eine eindeutige Z-Abhängigkeit gibt. Es gilt für die Energie der Konversionselektronenlinien

$$E_k(e) = \Delta E^* - E_B^{(e)} = E_\gamma - E_B^{(e)}. \tag{9.239}$$

Lise Meitner zog daraus den Schluß, daß sich die Elektronenhülle nach dem β-Zerfall innerhalb kürzester Zeit auf die Kernladungszahl Z des Tochterkerns umstellt und daß die bei der Ab-

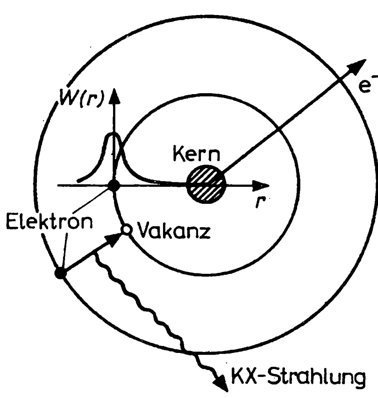


Abb. 9.81
Schematische Darstellung der inneren Konversion

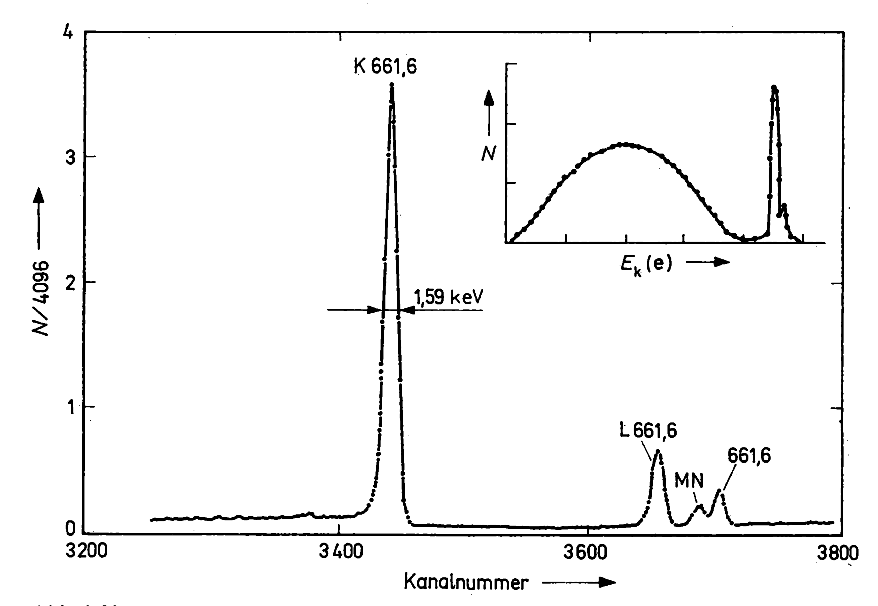


Abb. 9.80
β- und Konversionselektronenspektren
b) Elektronenspektrum von ^{137}Cs, aufgenommen mit magnetischem Linsenspektrometer mittlerer energetischer Auflösung sowie mit 80 mm^2 × 5 mm-Si(Li, Au)-Detektor

regung des Tochterkerns weggetragene Anregungsenergie ΔE^* mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit W über γ-Strahlung und mit $1 - W$ über innere Konversion abgegeben wird. Auf diese Weise konnte die in 9.6.2.1. erörterte Frage nach der Herkunft der γ-Strahlen beantwortet werden.

2. Der Mechanismus der inneren Konversion hat eine gewisse Ähnlichkeit mit dem Elektronen-Einfang. Bei beiden Effekten steigt die Wahrscheinlichkeit mit der Größe der Überlappung der Wellenfunktionen von Hüllenelektronen und Kern. Abbildung 9.81 zeigt eine schematische Darstellung des Effekts der inneren Konversion. Das Wesen besteht in der direkten Übertragung der Anregungsenergie auf ein Hüllenelektron, das dabei aus der Hülle gestoßen wird. Da die Überlappung der Wellenfunktionen für die Elektronen der K-Schale am größten ist, hat die innere Konversion der K-Schale, verglichen mit den anderen Schalen, die größte Wahrscheinlichkeit. Die in dem betreffenden Zustand entstehende Vakanz wird entweder strahlungslos, d. h. durch Auger-Effekt aufgefüllt, oder unter Aussendung der für die Schale charakteristischen Röntgenstrahlung. Die Wahrscheinlichkeit der Emission charakteristischer Röntgenstrahlung ist im allgemeinen größer als die für den Auger-Effekt. Daher ist der Effekt der inneren Konversion ebenso wie der des E-Einfangs immer mit dem Auftreten der K-X-, L-X-, M-X-, usw. -Röntgenstrahlung verbunden. Eine ursprünglich versuchte Deutung als Stoßprozeß zwischen einem Hüllenelektron und einem Kern-Abregungsquant, d. h. durch einen inneratomaren Photoeffekt, erwies sich als unzutreffend. Dieser Effekt existiert zwar, aber seine Wahrscheinlichkeit ist viel geringer als die der inneren Konversion.

3. Zur quantitativen Erfassung der Wahrscheinlichkeit der inneren Konversion relativ zur Emission von γ-Quanten wurden die Koeffizienten der inneren Konversion eingeführt. Der

summarische Konversionskoeffizient setzt sich additiv aus den Konversionskoeffizienten der einzelnen Schalen zusammen:

$$\alpha = \frac{\lambda_e}{\lambda_\gamma} = \frac{N_e}{N_\gamma} = \frac{N_K}{N_\gamma} + \frac{N_{L_I}}{N_\gamma} + \frac{N_{L_{II}}}{N_\gamma} + \frac{N_{L_{III}}}{N_\gamma} + \frac{N_{M_I}}{N_\gamma} + \cdots \qquad (9.240\,a)$$

$$\alpha = \sum_\nu \alpha_\nu = \alpha_K + \alpha_{L_I} + \alpha_{L_{II}} + \alpha_{L_{III}} + \alpha_{M_I} + \cdots . \qquad (9.240\,b)$$

Die Zerfallskonstante eines Zustandes, seine Lebensdauer und Zerfallsbreite setzen sich somit gemäß

$$\lambda = \lambda_\gamma + \lambda_e = \lambda_\gamma(1 + \alpha); \qquad \tau = \tau_\gamma(1 + \alpha)^{-1}; \qquad \Gamma = \Gamma_\gamma(1 + \alpha) \qquad (9.241)$$

zusammen.

4. Zur experimentellen Ermittlung der Absolutwerte der Koeffizienten der inneren Konversion sind verschiedene Methoden entwickelt worden. Am häufigsten werden magnetische β-Spektrometer und Halbleiterdetektoren zur Spektrometrierung der Elektronen und NaJ(Tl)- sowie Ge(Li)- und hochreine Ge-Detektoren zur Spektrometrierung der γ- und Röntgenstrahlung eingesetzt. Große Aufmerksamkeit muß dabei einer ausreichenden energetischen Auflösung und der Bestimmung der Nachweiseffektivität für beide Strahlungsarten gewidmet werden.

Wenn der Zustand durch β-Zerfall angeregt wird, überlagern die Konversionslinien das β-Spektrum. Man kann dann die Konversionskoeffizienten aus dem Verhältnis der Linien- zur Kontinuumsintensität bilden. Allgemeiner sind die Messung der Intensitäten der γ- und der charakteristischen Röntgenlinien sowie der Messung der Intensitäten der Konversions- und der γ-Linien. Die letzte der genannten Methoden hat den Nachteil, daß man zwei Spektrometer benötigt. Allen Methoden ist gemein, daß die Korrekturen erheblich sind.

Oft benötigt man nicht den Absolutwert, sondern nur das Verhältnis der Konversionskoeffizienten. In diesen Fällen genügt meist ein Vergleich der Linienintensitäten im Elektronenspektrum. In Abb. 9.82 ist ein Ausschnitt aus dem Spektrum des Zerfalls von ^{155}Ho mit einer Halbwertszeit von 51 min abgebildet. Die drei L-Linien gehören zum Übergang mit 39,5 keV in ^{155}Dy. Das β-Spektrometer mit doppelter Fokussierung hatte eine energetische Auflösung von 0,15%.

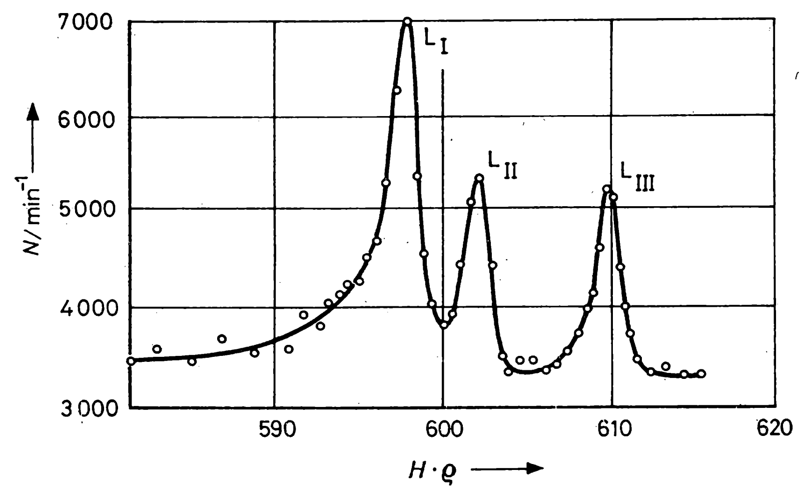


Abb. 9.82
Ausschnitt aus dem Konversionselektronenspektrum von ^{155}Dy mit den L-Linien des 39,5 keV-Übergangs

5. Die Berechnung der Konversionskoeffizienten ist eine ebenso komplizierte Aufgabe, wie die der Berechnung der Übergangswahrscheinlichkeiten der γ-Strahlung. Wichtig ist aber, daß sich bei der Verhältnisbildung der Wahrscheinlichkeiten für innere Konversion und γ-Abregung gemäß (9.240a) die Kernwellenfunktionen in guter Näherung herauskürzen, so daß die Konversionskoeffizienten nicht von der Kernstruktur abhängen. Alle in Frage kommenden Koeffizienten der inneren Konversion sind numerisch berechnet worden und stehen in Tabellenform zur Verfügung. Die wesentlichsten Abhängigkeiten können aus den unter bestimmten vereinfachenden Annahmen, darunter $Ze^2/\hbar c \ll 1$ und $E_B^{(e)} \ll E_\gamma \ll E_0(e)$, abgeleiteten Näherungsformeln für α_K abgelesen werden:

$$\alpha_K(El) \approx \frac{l}{l+1} Z^3 \left(\frac{e^2}{\hbar c}\right)^4 \left[\frac{2E_0(e)}{E_\gamma}\right]^{l+5/2}, \tag{9.242a}$$

$$\alpha_K(Ml) \approx Z^3 \left(\frac{e^2}{\hbar c}\right)^4 \left[\frac{2E_0(e)}{E_\gamma}\right]^{l+3/2}. \tag{9.242b}$$

Man sieht, daß α_K mit der dritten Potenz von Z und mit $l + 5/2$ bzw. $l + 3/2$ zu-, jedoch mit E_γ abnimmt. Daher ist die Wahrscheinlichkeit der inneren Konversion für Kerne mit großem Z und für Übergänge mit großem l und kleinem ΔE^* groß. In Abb. 9.83 ist der Verlauf von α_K als Funktion von E_γ für E1-Übergänge in Kernen mit drei verschiedenen Z-Werten dargestellt. Die Abbn. 9.60 und 9.61 machen den Einfluß der inneren Konversion auf die Halbwertszeit der Anregungszustände deutlich.

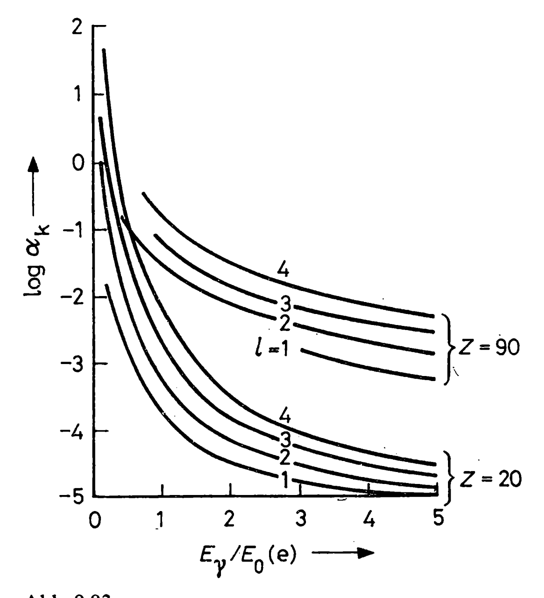


Abb. 9.83
Koeffizient der inneren Konversion $\alpha_K(E, l)$ als Funktion der Übergangsenergie und der Multipolordnung l

In den letzten Jahren wurde der Einfluß der chemischen Bindung auf die Halbwertszeit der Abregung von Kernzuständen durch innere Konversion untersucht. Da die Wahrscheinlichkeit der inneren Konversion von den Elektronen-Wellenfunktionen abhängt, diese aber sogar noch für die innersten Schalen den Einfluß der chemischen Bindung in schwacher Form enthalten, konnten Werte der relativen Änderung $\Delta\lambda/\lambda$ von bis zu 10^{-3} gefunden werden.

6. Die Auswahlregeln der inneren Konversion sind im wesentlichen die gleichen, wie für die γ-Strahlung. Es gilt der Satz von der Erhaltung des Drehimpulses und daher die Auswahlregel (9.171). Da bei der elektromagnetischen Wechselwirkung die Parität eine Erhaltungsgröße ist, gelten auch die Auswahlregeln (9.174). Im Unterschied zur γ-Abregung, für die 0-0-Übergänge streng verboten sind, ist die Wahrscheinlichkeit für E0-Übergänge relativ groß. Als Näherungsformel für die Lebensdauer der K-Konversion vom Typ 0-0 ergab sich für Energien in MeV

$$\tau_K(0-0)/\mathrm{s} \approx \frac{0{,}37}{Z^3 A^{4/3}} \sqrt{\frac{E_0(\mathrm{e})}{E_\gamma - E_B^{(K)}}} . \tag{9.243}$$

Für $Z = 60$, $A = 150$ und $E_\gamma = 1$ MeV erhält man $\tau_K(0\text{-}0) \approx 2 \cdot 10^{-9}$ s. Während M0-Übergänge prinzipiell unmöglich sind, kann man das Auftreten der E0-Strahlung leicht verstehen. Aus $\boldsymbol{l} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}$ folgt für $\boldsymbol{r} = 0$, daß $\boldsymbol{p} \neq 0$ sein kann, d. h. daß es sich um zentrale Emission handelt.

7. Die Konversionskoeffizienten sind eine wichtige Informationsquelle für die Kernstrukturphysik. Da sie kaum von der Kernstruktur abhängen, sind sie auch nicht vom gewählten Kernmodell abhängig. Andererseits hängen sie stark vom Multipolcharakter des Übergangs ab, so daß man mit ihrer Hilfe die Multipolordnung von Übergängen bestimmen kann. Man vergleicht dazu die gemessenen absoluten Konversionskoeffizienten oder die Verhältnisse α_K/α_{L_I}, $\alpha_{L_I}/\alpha_{L_{II}}/\alpha_{L_{III}}$ usw. mit den tabellierten Werten.

In diesem Zusammenhang hat auch die Bestimmung der Mischungsparameter δ^2, die bei der inneren Konversion ebenso auftreten, wie bei der γ-Abregung (siehe 9.6.3.3.), besondere Bedeutung. Für Mischungen der zwei Multipolstrahlungen M1 und E2 gilt

$$\alpha = N_1\alpha(\mathrm{M1}) + N_2\alpha(\mathrm{E2}); \qquad N_1 + N_2 = 1 , \tag{9.244}$$

wobei die N_ν relative Intensitäten der Linien sind. Im Unterschied zu α hängen sie von der Kernstruktur ab. Ein einfaches Verfahren, den Mischungsparameter zu bestimmen, ergibt sich aus den Verhältnissen der Konversionskoeffizienten. Der Abkürzung wegen schreibt man anstelle von α_K/α_L oder $\alpha_{L_I}/\alpha_{L_{III}}$ usw. K/L_I; L_I/L_{III} usw. Als Beispiel betrachten wir den Mischungsparameter (9.196) für das Verhältnis von M1 zu E2. Die Zusammenhänge mit den Linienintensitäten sind für die γ-Strahlen

$$N_\gamma = (1 + \delta^2)\, N_\gamma(\mathrm{M1}); \qquad \delta^2 N_\gamma = (1 + \delta^2)\, N_\gamma(\mathrm{E2}) \tag{9.245}$$

und für die Konversionselektronen

$$(1 + \delta^2)\, N_e = [\alpha_{L_I}(\mathrm{M1}) + \delta^2\alpha_{L_I}(\mathrm{E2})]\, N_\gamma . \tag{9.246}$$

Für α_K, α_{L_I}, usw. lassen sich analoge Ausdrücke aufschreiben. Das Verhältnis L_I/L_{II} ergibt sich damit zu

$$\frac{L_I}{L_{II}} = \frac{\alpha_{L_I}(M1) + \delta^2\alpha_{L_I}(\mathrm{E2})}{\alpha_{L_{II}}(M1) + \delta^2\alpha_{L_{II}}(\mathrm{E2})} \tag{9.247}$$

und nach Auflösung folgt

$$\delta^2 = \frac{\alpha_{L_I}(\mathrm{M1}) - \alpha_{L_{II}}(\mathrm{M1}) \cdot L_{II}/L_I}{\alpha_{L_{II}}(\mathrm{E2}) \cdot L_{II}/L_I - \alpha_{L_I}(\mathrm{E2})} . \tag{9.248}$$

Für das Beispiel aus Abb. 9.82 erhält man ein Intensitätsverhältnis $L_I : L_{II} : L_{III} = 1{,}55 : 0{,}92 : 1$, so daß aus (9.248) folgt $\delta^2 = 0{,}044$.

8. In Punkt 1 wurde bereits darauf hingewiesen, daß sich die Erscheinungen der inneren Konversion und der inneren Paarbildung von ihrer Natur her unterscheiden. Die Theorie beider Prozesse weist allerdings viel Ähnlichkeit auf, da von diesem Standpunkt aus betrachtet der Unterschied lediglich darin besteht, daß das Elektron bei der inneren Konversion von einer Bohrschen Bahn freigesetzt wird, während es bei der inneren Paarbildung von einem Zustand mit negativer Energie kommt. Das Matrixelement ist somit das gleiche wie bei der inneren Konversion, und das Verhältnis der Zahl der Paarbildungen zur Zahl der γ-Abregungen, d. h. der Koeffizient der inneren Paarbildung $\pi(\sigma, l)$ ist wieder unabhängig von

der Kernstruktur. Obgleich die Paarbildung überall innerhalb des Kern-Coulomb-Feldes stattfinden kann, liegt der wahrscheinlichste Abstand vom Kernzentrum etwa bei $(\alpha Z)^2\, r_K$, wobei r_K der Radius der Bohrschen K-Bahn ist. Durch die Lage des Maximums in Kernnähe hängt $\pi(\sigma, l)$ nur wenig von der Elektronendichte, d. h. wenig von Z ab. Aus Abb. 9.84 mit $\pi(E, l)$ als Funktion von E_γ kann man erkennen, daß die Übergangswahrscheinlichkeit mit der Übergangsenergie und mit l stark zunimmt. $\pi(\sigma, l)$ ist somit groß, wenn $\alpha(\sigma, l)$ klein ist, d. h. bei großen Werten von ΔE^* und kleinen Werten von Z und l. Absolut gesehen bleibt der Effekt jedoch klein, da π von der Größenordnung 10^{-4} ist.

Bei den 0-0-Übergängen müssen die Wahrscheinlichkeiten der inneren Konversion und der inneren Paarbildung miteinander verglichen werden. Das Verhältnis beider ist bei kleinem Z und großem ΔE^* proportional zu $(Z/\Delta E^*)^3$. So beobachtet man beim 6,06-MeV-Übergang in ^{16}O hauptsächlich innere Paarbildung, während beim 1,414-MeV-Übergang in ^{214}Po nur Konversionselektronen beobachtet werden. Die von der Theorie vorausgesagten Verhältnisse von $2 \cdot 10^{-5}$ und 170 werden im Experiment bestätigt.

Im Unterschied zur inneren Paarbildung gibt es noch die Paar-Konversion von γ-Strahlen in anderen, als den abgeregten Kernen. Man nennt sie auch äußere Paarbildung. Sie wurde in 4.3.4. behandelt.

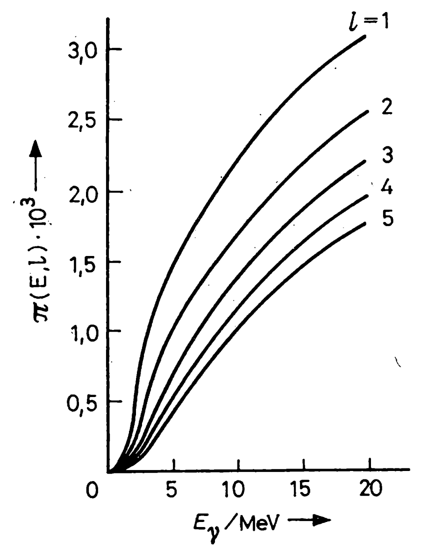


Abb. 9.84
Koeffizient der inneren Paarbildung $\pi_K(E, l)$ als Funktion der Übergangsenergie und der Multipolordnung

9.9. Kernzerfall durch Emission von Nukleonen oder Nukleonengruppen

9.9.1. Nukleonenverdampfung

1. Wenn die Anregungsenergie der Kerne größer ist als die Bindungsenergie der Nukleonen $E_B^{(n,p)}$ oder auch von Nukleonengruppen, wie d. t. ^3He, α usw., d. h., wenn $E^* \gtrsim 10$ MeV ist, dann können Spektren dieser Kernteilchen gemessen werden, die an die Verdampfungsspektren

der Elektronen aus Glühkatoden mit einer Temperatur T erinnern. In Abb. 9.85 ist die prinzipielle Form eines Neutronen- und eines Protonen-Verdampfungsspektrums dargestellt. Die offensichtlichen Unterschiede sind durch den Ladungszustand bedingt. In 10.4.5.3. wird die Nukleonenverdampfung ausführlich behandelt. Einige grundsätzliche Gesetzmäßigkeiten lassen sich im Rahmen des Fermi-Gasmodells verstehen.

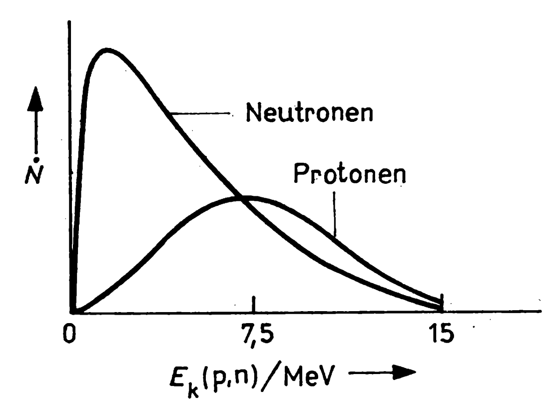


Abb. 9.85
Verdampfungsspektrum für Neutronen und Protonen

Wenn mit $N(E)\,\mathrm{d}E$ die Zahl der in das Energieintervall zwischen E und $E + \mathrm{d}E$ verdampften Neutronen bezeichnet wird, dann ergibt sich die gleiche Verteilungsfunktion, wie für Elektronen aus einer Glühkatode:

$$N(E)\,\mathrm{d}E = CE\,\mathrm{e}^{-E/kT}\,\mathrm{d}E\,. \tag{9.249}$$

Mit C ist eine nicht von der Energie abhängige Größe bezeichnet. Auf diese Weise wurde 1936 der Begriff der Kerntemperatur von J. I. Frenkel, E. Fermi und H. Bethe eingeführt. Daß es sich bei dieser Modellvorstellung nur um eine grobe Näherung handeln kann, ergibt sich bereits aus dem Vergleich der Teilchenzahlen in der Glühkatode und im Kern. Der Begriff der Temperatur ist für außerordentlich große Teilchenzahlen in der Thermodynamik definiert worden. Beim Kern ist sie jedoch kleiner als 250. Eine Folge davon ist z. B., im Unterschied zur Emission eines Elektrons aus der Glühkatode, die beträchtliche Abkühlung des Kerns, wenn nur ein Nukleon emittiert wird. Sie hat unter anderem zur Folge, daß in (9.249) die Temperatur des Restkerns einzusetzen ist, um richtige Ergebnisse zu bekommen. Bei genauerer Beschreibung muß die Coulomb- und die Drehimpuls-Wechselwirkung zwischen Verdampfungsteilchen und Restkern, die zu einer Coulomb- und einer Zentrifugalbarriere führen, berücksichtigt werden. Diese Einflüsse werden mit Hilfe des Durchdringungsfaktors $D(z, Z, l)$ festgehalten, der in Analogie zu (9.28) eingeführt wird. Dabei ist l der Bahndrehimpuls des emittierten Teilchens. In (9.249) geht D multiplikativ gemäß

$$N(E)\,\mathrm{d}E = CD(z, Z, l)\,E\,\mathrm{e}^{-E/kT}\,\mathrm{d}E \tag{9.250}$$

ein. Die wahrscheinlichste Temperatur ist kT, die mittlere $2kT$. Das Neutronenspektrum erhält man für $D(0, 0, l)$, d. h., das Spektrum hängt nicht von Z, sondern von l von der Zentrifugalbarriere (9.44) ab. Für Protonen ist $D(1, Z, l)$ zu nehmen, d. h., es ergibt sich eine zusätzliche Abhängigkeit von der Coulomb-Barriere (9.39). Die gemessenen Verdampfungsspektren können mit (9.250) in guter Näherung reproduziert werden.

2. Auf der Grundlage der Analogie zur Elektronenverdampfung kann man auf einfache Weise die Zerfallskonstante und damit die Lebensdauer von Zuständen ermitteln, wie sie in Kernreaktionen angeregt werden. Bei den Elektronen wird die Verdampfungs-Stromdichte j mit der Richardson-Gleichung

$$j = \frac{2\pi m_e}{h^3} (kT)^2 \, e^{-E_B^{(e)}/kT} \tag{9.251}$$

beschrieben. Setzt man für m_e und $E_B^{(e)}$ die entsprechenden Werte m_n und $E_B^{(n)}$ des Neutrons ein und berücksichtigt man alle in den Raumwinkel 4π von Kernen in eine Kugel um das Target mit dem Radius R verdampften Neutronen, dann ergibt sich

$$\lambda = 4\pi R^2 j_n = \frac{8\pi^2 R^2 m_n}{h^3} (kT)^2 \, e^{-E_B^{(n)}/kT} . \tag{9.252}$$

Die zur Verdampfung erforderlichen sehr hohen Kerntemperaturen werden im allgemeinen nur in den Compoundkernreaktionen erreicht. Als Beispiel seien Uran-Kerne betrachtet, die von 14-MeV-Neutronen getroffen werden. Mit $E_B^{(n)} \approx 6$ MeV berechnet man über (8.29) E^* zu 20 MeV, was einem kT-Wert von 0,9 MeV, d. h. einer Kerntemperatur von 10^{10} K entspricht. Die Zerfallskonstante beträgt dann gemäß (9.252) 10^{18} s^{-1}, d. h., die Lebensdauer des Compoundkernzustandes liegt bei 10^{-18} s.

9.9.2. Verzögerte Nukleonenemission

1. Die Emission von Nukleonen oder Nukleonengruppen ist im Gefolge von β-Zerfall zu beobachten, wenn die Anregungsenergie des Zustandes, auf den der β-Zerfall im Tochterkern führt, größer ist als die Bindungsenergie dieser Kernteilchen im Tochterkern:

$$E^* > E_B^{(x)} . \tag{9.253}$$

In Abb. 9.86 sind die energetischen Verhältnisse dargestellt (siehe auch Abb. 10.83 und 10.8.4.).

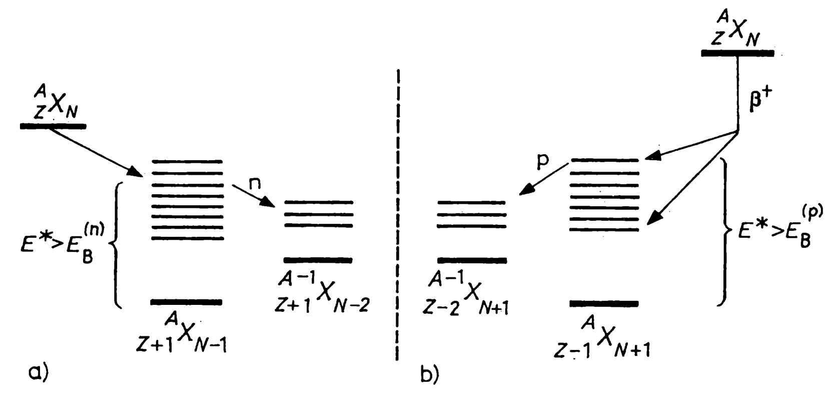


Abb. 9.86
Zerfallsschemata bei verzögerter Emission von Nukleonen

2. Die Erscheinung wurde 1933 von R. B. Roberts, R. C. Mayer und P. Wong entdeckt, als sie nach der Bestrahlung eines Präparats mit spaltbarem ^{235}U eine schwache Neutronenemission bemerkten. Die Erklärung mit (9.253) erfolgte im gleichen Jahr durch N. Bohr und

J. A. WHEELER. Danach muß die Halbwertszeit der Neutronenemission mit der des vorausgehenden β-Zerfalls identisch sein, weil ungebundene Neutronen innerhalb der Kernzeit den Kern verlassen können. Aus (9.16) ergibt sich dann wegen $T_{1/2}(M) \gg T_{1/2}(T)$ der Ausdruck (9.17). Wegen der Emission der Neutronen mit der Halbwertszeit des β-Zerfalls spricht man von verzögertem Zerfall, wobei man den zeitlichen Bezug auf den Spaltprozeß im Auge hat, in dem die zuerst durch Neutronenverdampfung und danach durch β-Umwandlung zerfallenden Spaltprodukte entstehen. Ein Beispiel ist der Zerfall von ^{87}Br mit $T_{1/2} = 54{,}5$ s. Etwa 2% des β-Zerfalls sind auf den 5,8-MeV-Zustand von ^{87}Kr gerichtet. In diesem Kern ist $E_B^{(n)} = 5{,}53$ MeV.

3. Die Emission verzögerter Neutronen ist nur auf der neutronenreichen Seite vom β-Stabilitätsband möglich, d. h. im Gefolge von β^--Zerfall. Die erforderlichen Zerfallsenergien von einigen MeV treten ziemlich weit abseits vom β-Stabilitätsband auf. Gerade deshalb wurden die ersten Beispiele wie ^{87}Br unter den Spaltprodukten, also in der Reaktion (n, f) gefunden, in der die Spaltprodukte mit dem N/Z-Verhältnis entstehen, das für die schweren spaltbaren Kerne charakteristisch ist.
Auf der neutronendefiziten Seite des β-Stabilitätsbandes muß man im Gefolge von β^+-Zerfall ebenfalls hinreichend weit von ihm entfernt die Erscheinung der Emission von Protonen aus Zuständen erwarten, deren Anregungsenergie größer ist als die Bindungsenergie der Protonen im Tochterkern des β^+-Zerfalls. Die ersten Emitter derartiger Protonen, man bezeichnete sie in Analogie zu den verzögerten Neutronen als verzögerte Protonen, wurde 1963 entdeckt. V. A. KARNAUCHOV u. a. identifizierten $^{109}_{52}$Te mit $T_{1/2} = 4{,}3$ s und $^{111}_{52}$Te mit $T_{1/2} = 19{,}5$ s als Produktkerne in den am Dubnaer Schwerionen-Zyklotron U-300 damals ausgelösten Reaktionen $^{96}_{44}$Ru($^{16}_{8}$O,3n) und $^{102}_{46}$Pd($^{12}_{6}$C, 3n) als β^+-Strahler mit nachfolgender Protonenemission. In ähnlichen Reaktionen erzeugte und identifizierte R. D. MACFARLANE ^{108}Te und ^{110}Te als Emitter verzögerter Protonen.

9.9.3. Emission verzögerter Nukleonengruppen

1. Die Emission verzögerter α-Teilchen wurde erstmals 1916 von E. RUTHERFORD und A. B. WOOD beobachtet, als sie anormal langreichweitige α-Teilchen aus einer Thorium-Quelle registrierten. Die richtige Erklärung gab 1930 G. GAMOV. Der Mechanismus ist der gleiche wie bei der Emission verzögerter Nukleonen. In den meisten Fällen haben die α-Teilchen Energien, die kleiner sind als der Coulomb-Wall. Seine Durchtunnelung geht aber so schnell vor sich, daß die beobachtete Halbwertszeit mit der des vorangegangenen β-Zerfalls praktisch identisch ist. Ein typisches Beispiel für die Emission langreichweitiger α-Teilchen ist ^{212}Bi, dessen Zerfallschema in Abb. 9.8 gezeigt ist.

Die energetische Bedingung (9.253) bleibt im Prinzip auch hier richtig. Die Emission verzögerter α-Teilchen erfolgt jedoch erst dann mit merklicher Intensität, wenn die Energie $E_{k,\min}(\alpha)$, bei der die Strahlungsbreiten Γ_α und Γ_γ gleich sind, um den Betrag E_q von 1 bis 2 MeV übertroffen wird. Dann macht die Wahrscheinlichkeit der Emission verzögerter α-Teilchen etwa 10^{-2} bis 10^{-3} % von der des vorausgehenden β-Zerfalls aus. Die Bedingung lautet somit

$$E^* > E_B^{(\alpha)} + E_{k,\min}(\alpha) + E_q\,. \tag{9.254}$$

Heute sind mehr als 20 Strahler verzögerter α-Teilchen im Gebiet zwischen ^{8}Li bis ^{214}Bi bekannt. Bei der vorausgehenden β-Umwandlung handelt es sich in den meisten Fällen um β^+-Zerfall.

In den Gebieten, in denen die Emission verzögerter Protonen wahrscheinlich wird, was bei hinreichend großem Neutronendefizit der Fall ist, tritt diese als Konkurrenzprozeß auf. In der Regel sind dann die Bedingungen für die Emission verzögerter Protonen früher erfüllt als die für die Emission verzögerter α-Teilchen. Als Beispiel sei ^{118}Cs genannt, wo $\Gamma_p/\Gamma_\alpha = 17{,}2 \pm 0{,}3$ beträgt. Die Halbwertszeit des β^+-Zerfalls beträgt hier 16,4 s, die Wahrscheinlichkeit W_a etwa $2{,}4 \cdot 10^{-3}$ %.

2. Für die Emission anderer Nukleonengruppen nach vorausgegangenem β-Zerfall sind die Bedingungen ebenfalls untersucht worden. Experimentell gefunden hat man bisher die verzögerte Emission

von Neutronenpaaren und von Tritonen. So konnte durch Koinzidenzmessungen mit den Neutronen nachgewiesen werden, daß nach dem β^--Zerfall von $^{11}Li^*$ (siehe Abb. 9.88) ein Neutronenpaar mit der Wahrscheinlichkeit $W_{nn} = (3{,}9 \pm 0{,}5)\,\%$ emittiert wird. Mit der Wahrscheinlichkeit von $(1{,}8 \pm 0{,}2)\,\%$ werden sogar drei Neutronen verzögert emittiert. Andere Fälle, in denen die verzögerte Emission zweier Neutronen experimentell festgestellt werden konnte, sind die Nuklide $^{30}_{11}Na$, $^{31}_{11}Na$ und $^{32}_{11}Na$.

3. Im Gebiet der spaltbaren Kerne ist eine weitere Erscheinung der Kernabregung möglich, die verzögerte Kernspaltung. Sie wurde 1966 von V. I. Kusnecov, N. K. Skobeljev und G. N. Flerov am Dubnaer Schwerionenzyklotron U-300 entdeckt. In den Schwerionen-Reaktionen zwischen $^{209}_{83}Bi$- und $^{232}_{90}Th$-Kernen einerseits sowie $^{10}_{5}B$-Ionen andererseits wurden solche Nuklide, wie $^{228}_{93}Np$, mit $T_{1/2} = 1$ min und $^{232}_{95}Am$ mit $T_{1/2} = 1{,}4$ min erzeugt. Sie zerfallen durch K-Einfang und spalten daraufhin spontan. Es konnte gezeigt werden, daß die verzögerte Spaltung sowohl bei neutronendefiziten, als auch bei neutronenangereicherten Kernen möglich ist. Je nachdem, ob der Zustand, auf den der vorausgehende β-Zerfall gerichtet ist oberhalb oder unterhalb der Spaltbarriere liegt, erfolgt die verzögerte Spaltung mit der Halbwertszeit des β-Zerfalls oder mit einer zusätzlichen Verzögerung, die als Folge der Notwendigkeit der Durchtunnelung der Spaltbarriere auftritt. In Abb. 9.87 sind beide Fälle dargestellt. Wenn die Spaltung aus dem zweiten Minimum des Potentials erfolgt, handelt es sich um ein Spaltisomer (siehe auch 10.8.3.).

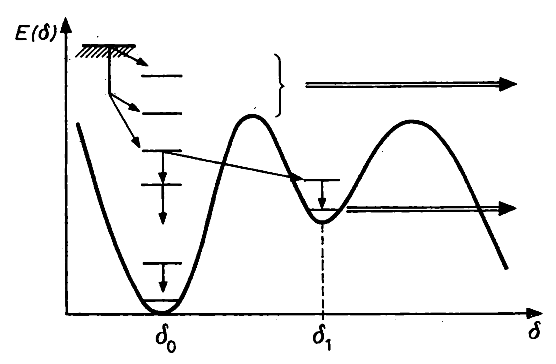


Abb. 9.87
Zerfallsschema bei verzögerter Kernspaltung

9.9.4. Spontaner Nukleonen-Kernzerfall

1. In den letzten Jahren sind einige erste Möglichkeiten zur experimentellen Untersuchung von Nukliden mit sehr großem Neutronendefizit bzw. -überschuß entwickelt worden. Aus Abb. 2.1 erkennt man, daß es sich dabei um Nuklide handelt, die nur in Kernreaktionen erzeugt werden können und daß sie an der Grenze der Kerninstabilität gegen die spontane Emission von Nukleonen bei $E_B^{(p)} = 0$ bzw. $E_B^{(n)} = 0$ liegen. Die energetische Bedingung für solche Zerfälle ist gemäß (6.45, 46) erfüllt, wenn die Bindungsenergie des Nukleons kleiner oder gleich Null ist:

$$E_B^{(p)} \leqq 0 \quad \text{bzw.} \quad E_B^{(n)} \leqq 0\,. \tag{9.255}$$

Für das Proton treten diese Verhältnisse ein, wenn das Neutronendefizit zu groß ist, gemessen am normalen N/Z-Verhältnis auf dem β-Stabilitätsband, beim Neutron, wenn der Neutronenüberschuß zu groß ist. Die Erfüllung von (9.255) kann in unterschiedlichen Situationen eintreten. So sind neben anderen die folgenden zwei Varianten des Protonen-Kernzerfalls möglich: Erstens kann das entsprechende Nuklid im Grund- oder einem niederenergetischen Anregungszustand erzeugt werden. Dann sollte die Protonenemission in Analogie zum α-Zerfall aus dem Grundzustand erfolgen. Da infolge der Verzögerung des Zerfalls durch die Coulomb- und Zentrifugalbarriere eine eigene Halbwertszeit auftritt, spricht man

im Unterschied zur Emission verzögerter Protonen von einem spontanen, also radioaktiven Zerfallsprozeß. Zweitens kann (9.255) auch für isomere Zustände mit der Energie E^{*m} eintreten, wenn

$$E^{*m} \geqq E_{\mathrm{B}}^{(\mathrm{p})} \quad \text{bzw.} \quad E_{\mathrm{B}}^{(\mathrm{n})} \tag{9.256}$$

ist. Auch hier handelt es sich um einen echten radioaktiven Zerfallsprozeß mit einer partiellen Halbwertszeit für p- oder n-Kernzerfall.

2. Die Untersuchung solcher Zerfälle liefert Informationen zu einigen Grundproblemen der Kernphysik, insbesondere zur Erkundung des Gültigkeitsbereichs der in 6.6. und 7.3. behandelten isotopen Invarianz der Kernkräfte, hier bei extremalen N/Z-Verhältnissen. Damit im Zusammenhang steht die Frage nach den Existenzmöglichkeiten der Neutronenmaterie mit $A \approx N$ bei normaler Dichte der Kernmaterie sowie nach den Eigenschaften der schweren Kerne mit $N = Z$. Neue Möglichkeiten bieten sich auch hinsichtlich der Untersuchung des Mechanismus des Kernzerfalls durch Nukleonenemission sowie des Einflusses der Kernstruktur dabei. Der beim α-Zerfall nur indirekt zugängliche Faktor W_{B} in (9.26), der die Bildungswahrscheinlichkeit der α-Teilchen im Kern beschreibt, entfällt beim Nukleonen-Kernzerfall. Dadurch kann der Faktor f in (9.26), der als Stoßfrequenz der Zerfallsteilchen gegen die Innenwände des Potentialwalls gedeutet wird, direkt untersucht werden.

Wenn für den Protonen-Kernzerfall infolge der Coulomb-Barriere in Abhängigkeit von der Zerfallsenergie $E_Q(\mathrm{p})$ Halbwertszeiten von meist weniger, oft sogar nur viele Größenordnungen weniger als 1 s erwartet werden können, so liegen die Verhältnisse beim Neutronen-Kernzerfall ganz anders. Als einziger Hinderungsfaktor kommt hier die Zentrifugalbarriere in Betracht. Daher sind hier noch kleinere Halbwertszeiten zu erwarten.

3. Zur Erzeugung von Nukliden mit extremalem N/Z-Verhältnis werden Spallations-, Schwerionensynthese und Schwerionen-Austausch-Reaktionen eingesetzt. Mit der Kernspaltungsreaktion lassen sich besonders neutronenangereicherte Nuklide erzeugen. Stark neutronenangereicherte Nuklide werden mit Vorteil in Neutronen-Austauschreaktionen erzeugt. So sind viele der in Abb. 9.88 angegebenen leichten Nuklide mit extrem großem N/Z-Verhältnis zuerst am

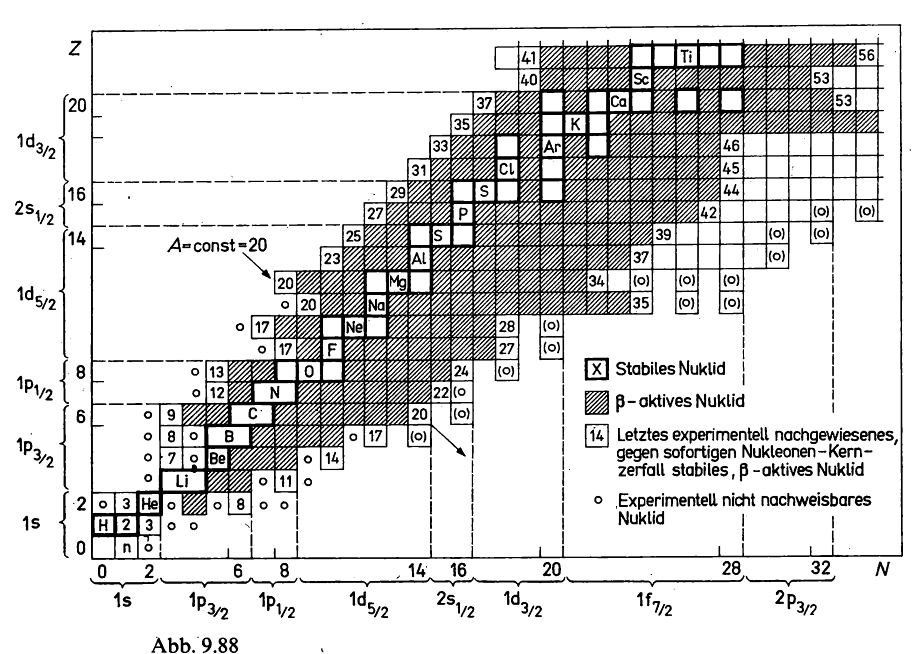


Abb. 9.88
Ausschnitt aus der Nuklidkarte bei leichten Kernen; Stand 1984

Schwerionen-FF-Zyklotron U-310 des VIK Dubna über die Reaktion $^{22}_{10}Ne + ^{232}_{90}Th$ erzeugt und untersucht worden. Es ist aber noch nicht gelungen, den theoretisch vorausgesagten echten radioaktiven Nukleonen-Kernzerfall zu untersuchen. Aus den Betrachtungen von Punkt 1 und 2 ergibt sich, daß dies am ehesten für den Protonen-Kernzerfall der Fall sein sollte. Ein weiteres Argument dafür ist die größere Entfernung der Linie $E_B^{(n)}$ vom β-Stabilitätsband als die Linie $E_B^{(p)}$. Im Gebiet der leichtesten Nuklide ist es gelungen, auf beiden Seiten des β-Stabilitätsbandes bis zur Grenze der Instabilität gegen Nukleonen-Kernzerfall vorzustoßen. Die Abb. 9.88 zeigt den entsprechenden Ausschnitt aus dem Z- über N-Diagramm der Nuklide. Die stabilen Nuklide sind in Abb. 2.1 durch weiße Quadrate gekennzeichnet, die β-aktiven durch schraffierte. Mit der Massenzahl ist das jeweils letzte gegen Nukleonen-Kernzerfall stabile, jedoch β-aktive Isotop eines Elements ausgezeichnet. Kreise geben Nuklide an, deren Instabilität gegen Nukleonen-Kernzerfall experimentell bestätigt ist. In diesem Fall ist aber die Lebensdauer so kurz, daß die betreffenden Kerne den Detektor nicht erreichen.

Die Grenzwerte der Bindungsenergie $E_B^{(p)} = E_B^{(n)} = 0$ werden mit den verschiedensten Formeln für die Kernruh- und Kernbindungsenergie, von denen (8.117) nur eine einfache Variante ist, für unterschiedliche Werte von N und Z erhalten. Unabhängig davon hat die Grenzlinie aber keinen glatten Verlauf, weil die gg-Kerne infolge der Paarenergie stabiler sind als die uA-Kerne.

4. Gemäß (9.258) ist der Protonen-Kernzerfall auch möglich, wenn die Anregungsenergie eines Isomers größer ist als die Bindungsenergie des Protons. Diese Bedingung wird nur von Hochspin-Mehrnukleonen-Zuständen, deren Anregungsenergie zwischen 2 bis 4,5 MeV liegt, in den stark neutronendefiziten Kernen erfüllt. Ein Fall ist das protonenaktive Isomer ^{53m}Co, das in der Reaktion $^{54}Fe(p, 2n)$ angeregt werden kann. Im Protonenspektrum wird eine scharfe Linie bei $E_k(p) = 1{,}59$ MeV beobachtet, die dem p-Zerfall in den Grundzustand von ^{52}Fe entspricht. Die Halbwertszeit des Isomers beträgt 247 ms. Aus dem Vergleich der Protonenaktivität und der Abregung des Isomers ^{53m}Fe, das in der Reaktion $^{54}Fe(p, pn)$ gebildet wird, konnte ermittelt werden, daß ^{53m}Co in 1,5 % der Fälle durch Protonenzerfall abgeregt wird. Die partielle Lebensdauer des Protonenzerfalls beträgt somit ca. 17 s. Der Isomerenursprung der Protonenstrahlung wurde durch Koinzidenzmessungen mit den Positronen sichergestellt. Derartige Koinzidenzen wurden nicht gefunden.

5. Eine ebenfalls theoretisch vorausgesagte Erscheinung ist der Zweinukleonen-Zerfall in der Form zweier Protonen oder zweier Neutronen. Die Grundlage für beide Effekte ist die Paarungsenergie. Der Zweineutronen-Kernzerfall sollte sich vom Zweiprotonen-Kernzerfall auch wieder nur dadurch unterscheiden, daß bei den Neutronen die Coulomb-Barriere entfällt und die Zerfallsbreite nur noch durch die Zentrifugalbarriere bestimmt wird.

Zur Herleitung der energetischen Bedingung des Zweiprotonen-Kernzerfalls betrachten wir einen Kern mit geradem Z, also $^{A}_{gZ}X$. Die Bindungsenergie des Protons sei $E_B^{(gp)}$. Die Bindungsenergie des nächsten ungeraden Protons im Kern $^{A-1}_{Z-1}X$ sei $E_B^{(up)}$. Wegen der Paarungsenergie E_p ist im allgemeinen $E_B^{(gp)} > E_B^{(up)}$. In erster Näherung gilt in Übereinstimmung mit (6.50)

$$E_B^{(gp)} - E_B^{(up)} \approx E_P^{(p)} . \tag{9.257}$$

Die Bindungsenergie zweier Protonen im Kern $^{A}_{Z}X$ ist

$$E_B^{(2p)} = E_B^{(gp)} + E_B^{(up)} = 2E_B^{(up)} + E_P^{(p)} = 2E_B^{(gp)} - E_P^{(p)} . \tag{9.258}$$

Wenn $E_B^{(gp)} < (1/2)\, E_P^{(p)}$ oder $-E_B^{(up)} > (1/2)\, E_P^{(p)}$ ist, dann ist der Zweiprotonen-Kernzerfall möglich, d. h., es muß gelten

$$E_B^{(2p)} < 0 . \tag{9.259}$$

Man sieht, daß die Stabilität eines Nuklids gegen Protonenzerfall nicht bedeutet, daß es auch gegen Zweiprotonen-Kernzerfall stabil sein muß. Dem Intervall $(1/2)\, E_P^{(p)} > E_B^{(gp)} > 0$ entspricht ein Energie-

intervall des Zweiprotonen-Kernzerfalls mit $E_Q^{(2p)} = -E_B^{(2p)}$ von 0 bis $E_P^{(p)}$. Für den Zweineutronen-Kernzerfall eines Nuklids mit ${}^A_Z X_{gN}$ muß analog die Bedingung

$$E_B^{(2n)} < 0 \tag{9.260}$$

erfüllt sein.

Literaturhinweise zu Kapitel 9

Ban 78, Bar 80, Ben 64, Ber 72, Bla 52, Bod 72/78, Boh 69/75, Dav 58, Dav 67, Dör 79, Dže 81, Dže 80, Fer 50, Fle 70, Fle 81, Fra 74, Gop 80, Her 60/66, Hyd 64, Jae 74, Kar 81, Ked 73, Kim 71, Kir 80, Kon 66, Mar 71, Mai 69, Mei 84, May 79, Muc 74, Per 57, Pre 62, Ros 78, Šir 72, Sch 75, Sch 83, Seg 53, Sie 66, Sto 76/78, Tri 74, Wei 71, Wu 66

Nuklidzuordnungen zu früheren Bezeichnungen radioaktiver Strahler in den natürlichen Zerfallsreihen

Bezeichnung	Nuklid	Zerfallsreihe	Bezeichnung	Nuklid	Zerfallsreihe
Ac	^{227}Ac	Ac	RaE″	^{206}Tl	U
AcA	^{215}Po	Ac	Ra Em	^{222}Rn	U
AcB	^{211}Pb	Ac	RaF	^{210}Po	U
AcC	^{211}Bi	Ac	RaG	^{206}Pb	U
AcC′	^{211}Po	Ac	Rd Ac[5])	^{227}Th	Ac
AcC″	^{207}Tl	Ac	Rd Th	^{228}Th	Th
AcD	^{207}Pb	Ac	Rn	^{222}Rn	U
Ac Em[1])	^{219}Rn	Ac	Th	^{232}Th	Th
AcK	^{223}Fr	Ac	ThA	^{216}Po	Th
AcU	^{235}U	Ac	ThB	^{212}Pb	Th
AcX	^{223}Ra	Ac	ThC	^{212}Bi	Th
An[2])	^{219}Rn	Ac	ThC′	^{212}Po	Th
Io[3])	^{230}Th	U	ThC″	^{208}Tl	Th
Ms ThI[4])	^{228}Ra	Th	ThD	^{208}Pb	Th
Ms ThII	^{228}Ac	Th	Th Em	^{220}Rn	Th
Pa	^{231}Pa	Ac	ThX	^{224}Ra	Th
Ra	^{226}Ra	U	Tn[6])	^{220}Rn	Th
RaA	^{218}Po	U	U I	^{238}U	U
RaB	^{214}Pb	U	U II	^{234}U	U
RaC	^{214}Bi	U	UX_1	^{234}Th	U
RaC′	^{214}Po	U	UX_2	^{234m}Pa	U
RaC″	^{210}Tl	U	UY	^{231}Th	Ac
RaD	^{210}Pb	U	UZ	^{234}Pa	U
RaE	^{210}Bi	U			

Während die Elementbezeichnungen der Norm entsprechen, haben eine Reihe von Abkürzungen spezielle Bedeutung: [1]) Em = Emanation; [2]) An = Actinon; = AcEm; [3]) Io = Ionium; [4]) Meso-; [5]) Rd = Radio-; [6]) Tn = Thoron.

10. Kernreaktionen

10.1. Grundlegende Begriffe, Zusammenhänge und Gesetzmäßigkeiten

10.1.1. Einführung

1. Die Behandlung des Stoffes der bisherigen Kapitel machte es erforderlich, auf Begriffe und Zusammenhänge aus dem Gebiet der Kernreaktionen bereits einzugehen, ohne vorher dieses systematisch besprochen zu haben. Dies geschah z. B. in den Kapiteln 2, 3, 4, 6 und 9 sowie im Anhang B. Im vorliegenden Kapitel sollen nun Kernreaktionen geschlossen und zwar primär unter dem Aspekt ihres Mechanismus behandelt werden, wobei auf dem Bekannten aufgebaut wird. Wenn dabei gelegentlich auf bereits besprochene Zusammenhänge nochmals kurz eingegangen wird, so soll dies dem Leser helfen, den Stoff zu festigen und physikalische Zusammenhänge zu den bereits behandelten Kapiteln sichtbar zu machen.

2. Unter Kernreaktionen im weitesten Sinne versteht man alle physikalischen Prozesse, die bei ausreichender Annäherung zweier Kernteilchen X_1 und X_2, in sehr seltenen Fällen von mehr als zwei Teilchen, im Bereich einer sogenannten Wechselwirkungszone als Folge des Wirkens von Wechselwirkungskräften (in erster Linie starker oder/und elektro-magnetischer) stattfinden. Dies kann z. B. ein elastischer Stoß, aber auch der Austausch von Energie, Impuls oder Drehimpuls zwischen den Reaktionspartnern oder der Austausch bzw. die Erzeugung von Kernteilchen sein. Unter ‚ausreichender Annäherung' ist dabei zu verstehen, daß der Teilchenabstand kleiner als die Reichweite der Kernkräfte, d. h. kleiner als etwa 10^{-14} m, wird, bzw. die Stärke der Coulomb-Wechselwirkung zwischen geladenen Teilchen so groß wird, daß eine spürbare Beeinflussung der Teilchenbahnen eintritt oder sogar Kernanregungen oder -umwandlungen stattfinden können. Schwache Wechselwirkungen spielen eine dominierende Rolle bei Kern- und Elementarteilchenzerfällen, bei den bedeutend schneller ablaufenden Kernreaktionen hingegen liefern sie nur einen Beitrag in der Größenordnung 10^{-4} oder weniger zur gesamten Wechselwirkungsenergie und können daher in der Regel vernachlässigt werden.

(Es sei hier vermerkt, daß in den letzten Jahren der sehr kleine Beitrag von schwachen Wechselwirkungen in Kernreaktionen auch experimentell nachgewiesen werden konnte.)

Die allgemeine Reaktionsgleichung wird in der bereits bekannten Form (siehe Anhang B)

$$X_1 + X_2 \rightarrow X_3 + X_4 + \cdots + X_n \tag{10.1}$$

bzw.

$$X_2(X_1, X_4, \ldots, X_n)\, X_3 \tag{10.2}$$

geschrieben.

Als erster Prozeß der Teilchenerzeugung setzt bei Beschuß von Kernen mit Protonen oberhalb 300 MeV Einschußenergie die Bildung freier Pionen ein, während die Nukleonenerzeugung erst oberhalb von 2 GeV beginnt (vgl. 3.1.). (Da die Wechselwirkung bei diesen Energien an im wesentlichen als frei beweglich zu betrachtenden Kernnukleonen erfolgt, entsprechen die Energien denen für den p + p-Stoß.)

Im vorliegenden Kapitel werden wir grundsätzlich Kernreaktionen unterhalb der Schwelle der Teilchenerzeugung behandeln, so daß hier im weiteren unter dem Begriff der Kernreaktion etwas enger als oben definiert, die Wechselwirkung von einfallenden Kernteilchen (Gamma-

quanten, Pionen, Protonen, Neutronen, Deuteronen, Tritonen, Alphateilchen, ... Schwerionen) mit den sogenannten Targetkernen (Wasserstoff, ..., Uran, ...) unterhalb der Schwellen der Teilchenerzeugung verstanden werden soll. Diese Definition beinhaltet somit auch die Kern-Kern-Wechselwirkung und auch den Sonderfall, daß beide Reaktionspartner vor der Wechselwirkung kinetische Energie im Laborsystem besitzen.

Für den spezielleren Fall, bei dem neben den relativ schwereren Target- und Produktkernen A und B an der Reaktion je ein Inzidenz- und ein Produktteilchen beteiligt sind, lauten die den Beziehungen (10.1) und (10.2) analogen Reaktionsgleichungen

$$\mathrm{A(a;b)\,B}\,, \tag{10.3}$$

bzw.

$$\mathrm{A(a;b)\,B}\,, \tag{10.4}$$

auf die wir immer dann, wenn es vom physikalischen Sachverhalt gegeben ist, zurückgreifen werden. Die in den Reaktionsgleichungen (10.1) bis (10.4) auftretenden Nuklide werden, wie üblich, durch das Elementsymbol, die Massenzahl und Ordnungszahl bezeichnet, so wie das bereits im Kapitel 4 eingeführt wurde.

3. Häufig auftretende Typen von Kernreaktionen sind

— die elastische Streuung:

$$\mathrm{a + A \to A + a}\,, \tag{10.5}$$

— die unelastische Streuung (an die englischsprachige Literatur angelehnt auch als ‚inelastische' Streuung bezeichnet):

$$\mathrm{a + A \to A^* + a'}\,; \tag{10.6}$$

— Umwandlungsreaktionen:

$$\mathrm{a + A \to B + b} \quad (\text{mit } \mathrm{a} \neq \mathrm{b})\,, \tag{10.7}$$

— Strahlungseinfang:

$$\mathrm{a + A \to B} + \gamma\,, \tag{10.8}$$

— Mehrteilchenreaktionen:

$$\mathrm{a + A \to B + b_1 + b_2} + \cdots\,, \tag{10.9}$$

— und Kernspaltung:

$$\mathrm{a + A \to B_1 + B_2} + \cdots\,. \tag{10.10}$$

Die Vielfalt auftretender Reaktionstypen sei am Beispiel der Wechselwirkung von Protonen mit $^7_3\mathrm{Li}$ belegt. Bereits bei einigen MeV Einschußenergie finden folgende Prozesse statt:

$$\mathrm{p} + {}^7_3\mathrm{Li} \to \begin{cases} {}^7_3\mathrm{Li} + \mathrm{p}\,, \\ {}^7_3\mathrm{Li} + \mathrm{p}'\,, \\ {}^7_4\mathrm{Be} + \mathrm{n}\,, \\ \alpha + \alpha\,, \\ \alpha + \alpha + \gamma\,, \\ \alpha + \mathrm{t} + \mathrm{p}\,. \end{cases} \tag{10.11 a}$$

Der in (10.11) aufgeführte Prozeß $^7_3\mathrm{Li(p,n)}^7_4\mathrm{Be}$ wird sehr häufig als Reaktion zur Erzeugung monoenergetischer Neutronen an Van-de-Graaff-Beschleunigern (siehe Kapitel 3) genutzt.

4. Jedes in der Reaktion entstehende Teilchenpaar B + b ist durch einen Satz von Quantenzahlen (Energie, Impuls, Bahndrehimpuls, Spins, Parität u. a.) charakterisiert. Ist bei zwei Reaktionsereignissen auch nur eine dieser Größen unterschiedlich, so handelt es sich streng genommen nicht mehr um identische Prozesse.

Um dies zu berücksichtigen, wurde der Begriff Reaktionskanal eingeführt, der jeweils eine in der Reaktion auftretende Kombination von Quantenzahlen der Reaktionsprodukte umfaßt. Die Anzahl der für einen bestimmten ‚Eingangskanal' A + a offenen ‚Ausgangskanäle' B + b ist somit in der Regel größer als die Anzahl unterschiedlicher Reaktionstypen. Ein einfaches Beispiel soll dies verdeutlichen: Auf Abb. 6.40 ist das Niveauschema von $^{238}_{92}$U abgebildet. Werden an diesen Kern Neutronen mit $E_n = 1$ MeV unelastisch gestreut, so kann sich der Endkern in mehr als sieben unterschiedlichen angeregten Zuständen befinden. Es handelt sich bei dem Prozeß

$$n + {}^{238}_{92}\mathrm{U} \rightarrow {}^{238}_{92}\mathrm{U} + n' \qquad (10.11\,b)$$

folglich nicht um einen einzigen, sondern um viele Reaktionskanäle.

Wächst die Einschußenergie, so steigt die Anzahl offener Kanäle infolge der erhöhten Anzahl erreichbarer Endzustände sehr schnell an. (Hinzu kommt, daß dabei auch immer neue Reaktionstypen möglich werden.)

Im Falle der elastischen Streuung (10.5) entsprechen die Quantenzahlen der Reaktionsprodukte denen des Eingangskanals; man sagt daher, die Reaktion „verläuft im Eingangskanal". Mit dem Begriff Reaktionskanal ist zugleich eine räumliche Vorstellung verbunden: Im Gebiet der Ein- und Ausgangskanäle der Reaktion ist das Wechselwirkungspotential zwischen den Reaktionspartnern gleich Null; diese bewegen sich ungestört relativ zueinander. Dagegen existiert im Bereich $0 < r < R$, d. h. in der Wechselwirkungszone, ein von Null verschiedenes Wechselwirkungspotential V (siehe Abb. 10.1).

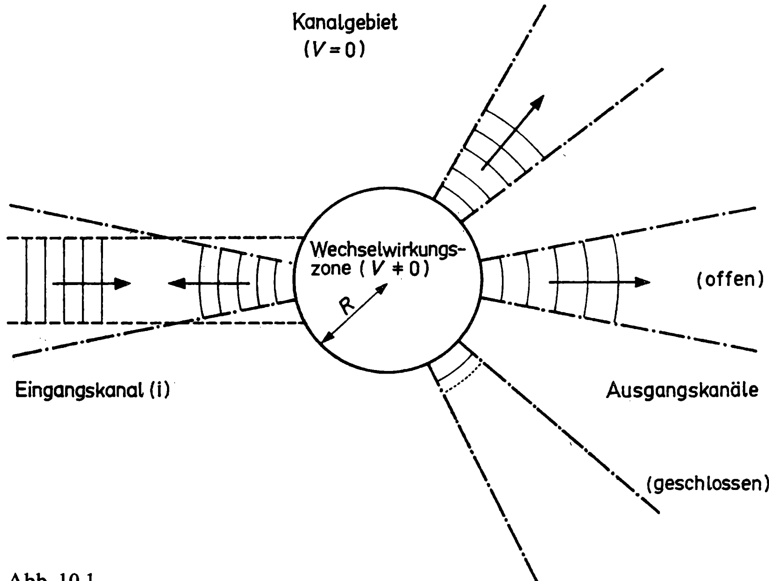


Abb. 10.1
Skizze zur Erläuterung des Begriffs Reaktionskanal; alle auslaufenden Kugelwellen erstrecken sich in Wirklichkeit über den gesamten Raumwinkelbereich 4π; die Wellenfunktion im geschlossenen Ausgangskanal nimmt exponentiell ab

5. Wichtigste Größe zur Beschreibung von Kernreaktionen ist der in 2.6. eingeführte Wirkungsquerschnitt, der die mittlere Reaktionsrate pro Einheit der Flächendichte der Targetkerne und des Teilchenflusses (bzw. pro Targetkern und Flußdichteeinheit der einfallenden Teilchen) angibt. Bezogen auf die Kernreaktion (10.3) lautet die zu (2.55) analoge Beziehung für den integralen Wirkungsquerschnitt (siehe hierzu Abb. 10.2) im Falle konstanter Flächendichte der Targetkerne N_S^A/m^{-2}:

$$\sigma_{\mathrm{ab}} = \frac{\dot{N}^{\mathrm{b}}}{N_S^A \cdot \dot{N}_0^{\mathrm{a}}} . \tag{10.12}$$

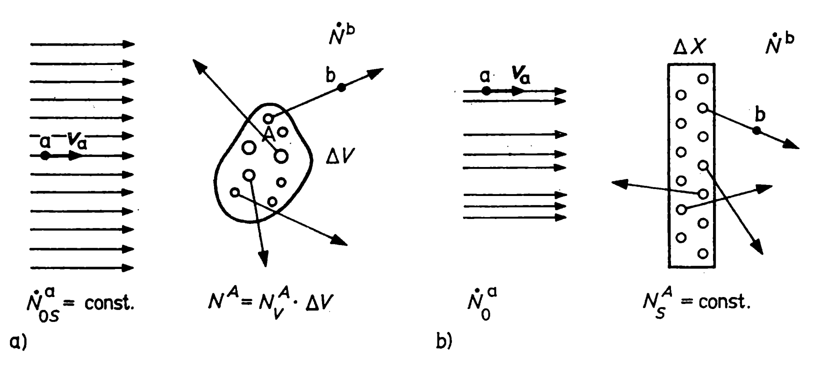


Abb. 10.2
Zur Definition des integralen Wirkungsquerschnitts
a) konstante Teilchenflußdichte $N_{0S}^{\mathrm{a}} = N_{0V}^{\mathrm{a}} \cdot v_{\mathrm{a}}$ = const., $N_{0V}^{\mathrm{a}}/\mathrm{m}^{-3}$ — Volumendichte im Teilchenstrahl a
b) konstante Flächendichte der Targetkerne $N_S^A = N_V^A \cdot \Delta X$, N_V^A/m^{-3} — Volumendichte der Kerne A in der Targetschicht $\Delta X/\mathrm{m}$

Für konstante Teilchenstromdichte $\dot{N}_{0S}^{\mathrm{a}}/\mathrm{s}^{-1}\,\mathrm{m}^{-2}$ gilt:

$$\sigma_{\mathrm{ab}} = \frac{\dot{N}^{\mathrm{b}}}{N^A \cdot \dot{N}_{0S}^{\mathrm{a}}} . \tag{10.13}$$

Weitere Bezeichnungen bedeuten:

$\dot{N}^{\mathrm{b}}/\mathrm{s}^{-1}$ — Rate der im Target erzeugten Teilchen b,
$\dot{N}_0^{\mathrm{a}}/\mathrm{s}^{-1}$ — gesamter Teilchenstrom a auf das Target,
N^A — Gesamtzahl der Targetkerne A.

Für den differentiellen Querschnitt gilt analog

$$\left(\frac{\partial\sigma}{\partial\Omega}\right)_{\mathrm{ab}} = \frac{\dfrac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}\Omega}}{N^A N_{0S}^{\mathrm{a}}} , \tag{10.14}$$

mit der Rate der pro Raumwinkelelement $\mathrm{d}\Omega$ erzeugten Teilchen $\dfrac{\mathrm{d}\dot{N}^{\mathrm{b}}}{\mathrm{d}\Omega}/\mathrm{sr}^{-1}\,\mathrm{s}^{-1}$ vom Typ b.

Die im Anhang B.4 beschriebene quantenmechanische Deutung des Wirkungsquerschnitts mittels Stromdichtevektoren j_a bzw. j_b lautet für diesen Fall:

$$\mathrm{d}\dot{N}^{\mathrm{b}} = N^A j_{\mathrm{b}}(r)\,\mathrm{d}S\,, \tag{10.15}$$

$$\dot{N}^{\mathrm{a}}_{0S} = j_{\mathrm{a}} = \frac{\hbar k_{\mathrm{a}}}{m_{\mathrm{a}}} = v_{\mathrm{a}}\,, \tag{10.16}$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\right)_{\mathrm{ab}} = \frac{j_{\mathrm{b}} r^2}{v_{\mathrm{a}}}\,, \tag{10.17}$$

mit der Teilchengeschwindigkeit v/m s^{-1} und dem Flächenelement $\mathrm{d}S$/m^2 (siehe Abb. 10.3).

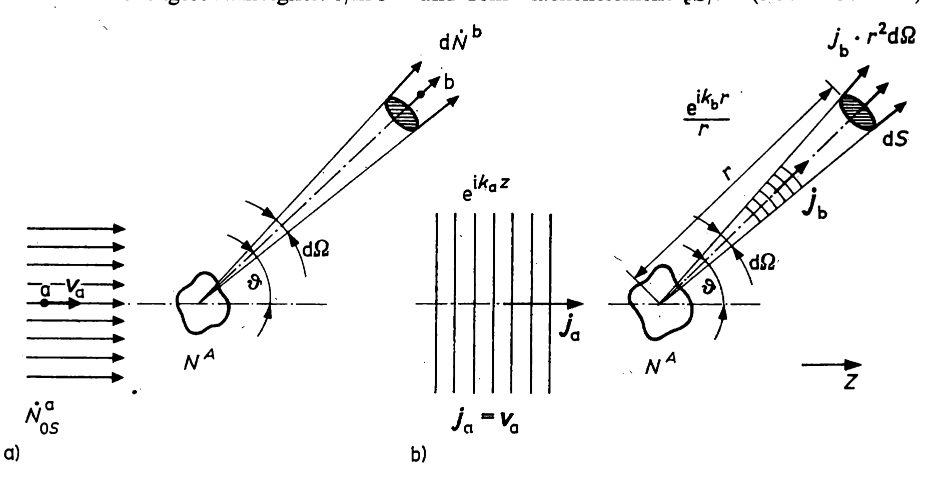


Abb. 10.3
Skizze zur Definition des differentiellen Wirkungsquerschnitts
a) Teilchenbild
b) Wellenbild; j_a und j_b bezeichnen die quantenmechanischen Flußdichtevektoren; sonstige Bezeichnungen wie auf Abb. 12.2.

Für den speziellen Fall der elastischen Streuung konnte die Gültigkeit des einfachen Zusammenhangs

$$\left(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\right)_{\mathrm{aa}} \equiv \left(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\right)_{\mathrm{el}} = |f(\vartheta)|^2 \tag{10.18}$$

zwischen Wirkungsquerschnitt und Streuamplitude $f(\vartheta)$ gezeigt werden.

Die hier angeführten Beziehungen für die Wirkungsquerschnitte gelten nur für „dünne" Targets, d. h., wenn der einfallende Teilchenstrom im Target nur unwesentlich geschwächt wird und damit die Wechselwirkungswahrscheinlichkeit für jeden Kern konstant und völlig unabhängig vom Vorhandensein weiterer $N^A - 1$ Targetkerne ist. Im Falle konstanter Flächendichte (10.12) ist das unter der Bedingung $\sigma_{\mathrm{ab}} \cdot N_S^A \ll 1$ (exakter, da im allgemeinen weitere Reaktionen mögliche sind, für $\sigma_{\mathrm{t}} \cdot N_S^A \ll 1$) erfüllt.

6. Als Anregungsfunktion einer Kernreaktion A(a, b) B wird die funktionelle Abhängigkeit des integralen Wirkungsquerschnitts $\sigma_{\mathrm{ab}}(E_{\mathrm{a}})$ von der Einschußenergie bezeichnet. Auf Abb. 10.4 sind zwei praktisch sehr bedeutsame Beispiele, die Anregungsfunktionen der Fusions- und Neutronenproduktionsreaktionen $^3_1$H(d, n)$^4_2$He bzw. $^2_1$H(d, n)$^3_2$He dargestellt. Im Querschnitts-

verlauf der ersten Reaktion dominiert eine resonanzartige Erhöhung des Wirkungsquerschnitts bei $E_d = 100$ keV, welche eine hohe Neutronenausbeute bewirkt, die in den sogenannten DT-Generatoren genutzt wird. Weitere Beispiele für Anregungsfunktionen unterschiedlichster Reaktionen sind auf den Abb. 4.22 bis 4.26 dargestellt.

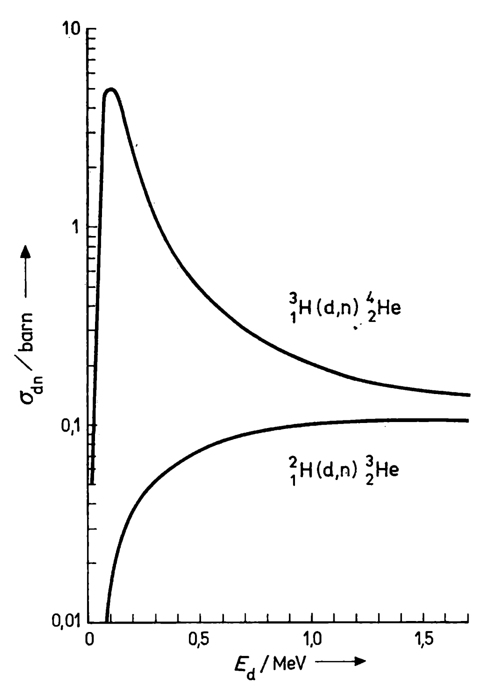


Abb. 10.4
Anregungsfunktionen der Neutronenproduktionsreaktionen
$^3_1$H(d, n) $^4_2$He und $^2_1$H(d, n) $^3_2$He

Das Vorhandensein unterschiedlich scharfer Strukturen in den Anregungsfunktionen deutet bereits auf die Vielfalt der physikalischen Mechanismen dieser Prozesse hin. Andererseits ist für ihre experimentelle Untersuchung eine ausreichend kleine Energieunschärfe $\Delta E_a/E_a \ll 1$ erforderlich. Hieraus erwächst für geladene Teilchen eine zusätzliche Forderung hinsichtlich zulässiger Targetstärken, da die Energieunschärfe durch den Energieverlust der Geschoßteilchen im Target infolge der Ionisationsbremsung (siehe 4.2.2.)

$$\Delta E_a = \int\limits_0^{\Delta x} \left(\frac{dE}{dx}\right) dx \cong \left|\frac{dE}{dx}(E_a)\right| \Delta x \tag{10.19}$$

nach unten begrenzt ist. Die hieraus resultierende Forderung an die „Dünnheit" der Targets ist für geladene Teilchen in der Regel stärker als die Forderung $\sigma_t \cdot N_S^A \ll 1$.

Wir betrachten hierzu ein Beispiel: Für die Wechselwirkung von Neutronen mit $E = 1$ MeV an $^{208}_{82}$Pb ist $\sigma_t = 6$ barn.

Die Bedingung $\sigma_t N_S^{Pb} = 10^{-2}$ ergibt

$$N_S^{Pb} = \frac{10^{-2}}{6 \cdot 10^{-28}} = 0{,}167 \cdot 10^{+26}/\mathrm{m}^{-2} = 5{,}76/\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^{-2}\,.$$

Für Protonen der gleichen Energie liegen die spezifischen Ionisationsverluste bei 10/MeV $\times\,\mathrm{kg}^{-1} \cdot \mathrm{m}^2$ (siehe Abb. 4.3). Die Forderung $\Delta E_p/E_p = 10^{-2}$ führt zu einer zulässigen Flächenmasse von nur

$$\frac{10^{-2}}{10} = 10^{-3}/\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^{-2} = 100/\mu\mathrm{g} \cdot \mathrm{cm}^{-2}\,.$$

7. Für dünne Targets ist die Ausbeute Y der Reaktion A(a, b)B (siehe 2.6.) gegeben durch

$$Y = \frac{\dot{N}^b}{\dot{N}_0^a} = N_S^A \cdot \sigma_{ab} \tag{10.20}$$

und damit stets $\ll 1$.

Gelegentlich geht die Aufgabe, mit einem gegebenen Teilchenfluß $\dot{N}_0^a$ eine möglichst hohe Teilchenrate von b zu erzeugen.

Dies trifft z. B. in bestimmten Fällen der Neutronenproduktion an Teilchenbeschleunigern zu. Hierfür wird ein dickes Target genommen, in dem der Strahl völlig abgebremst wird, so daß die Reaktion A(a, b)B im gesamten Energiebereich E_a ... 0 stattfindet.

Für ein homogenes Target ermittelt sich die Ausbeute in diesem Fall nach der Beziehung

$$Y = \frac{\dot{N}^n}{\dot{N}_0^a} = \int_{E_a}^{0} \frac{\sigma_{an}(E)}{-\left(\frac{dE}{dx}(E)\right)}\, dE = \int_{0}^{E_a} \frac{\sigma_{an}(E)}{\left|\frac{dE}{dx}(E)\right|}\, dE\,, \tag{10.21}$$

mit dem spezifischen Energieverlust durch Ionisationsbremsung (dE/dx) (siehe 4.2.2.).

Tragen zur Neutronenproduktion $i = 1, \ldots, M$ unterschiedliche Reaktionstypen bei, in denen jeweils ν_i Neutronen erzeugt werden ($\nu_{n,2n} = 2$, $\nu_{n,3n} = 3$, $\nu_{n,xnyp} = x, \ldots$), so kann die Ausbeute aus

$$Y = \sum_{i=1}^{M} \nu_i \int_{E_a}^{0} \frac{\sigma_{a,n..}^{i}(E)}{\left|\frac{dE}{dx}(E)\right|}\, dE \tag{10.22}$$

ermittelt werden.

Für geladene Reaktionsprodukte b ist die Anwendung der Gl. (10.21) insofern problematisch, als diese Teilchen ebenfalls Ionisationsverluste erleiden und dadurch, zumindest teilweise, im Target steckenbleiben. Sie gibt jedoch die Möglichkeit, die Bildung von Produktkernen B abzuschätzen, was für die Erzeugung radioaktiver Nuklide von Interesse ist.

Handelt es sich bei den Geschoßteilchen a um Neutronen, so wird die Ausbeuteberechnung für ein dickes Target $\sigma_t N_S^A \geqq 1$ auf einer völlig anderen Grundlage durchgeführt: Einschuß- und ungeladene Produktteilchen erleiden vielfache Kernstöße, die in der Regel nur über eine Monte-Carlo-Modellierung zu erfassen sind.

8. Die Wirkungsquerschnitte können bezüglich der Verteilungen der Produktteilchen weiter spezifiziert werden. So gibt der sogenannte doppelt differentielle Querschnitt $\partial^2\sigma_{ab}/\partial\Omega\,\partial E_b$ die Wahrscheinlichkeit der Teilchenemission in den Raumwinkelbereich $d\Omega$ und Energiebereich E_b ... $E_b + dE_b$ an.

Tabelle 10.1
Normale und verkürzte Schreibweise von Querschnitten

Bezeichnung	verwend. Symbol		Dimension (1 b = 10^{-28} m²)
	normal	vereinfacht	
Anregungsfunktion	$\sigma_{ab}(E_a)$	$\sigma_{ab}(E_a)$	b
differentieller W.querschnitt	$\left(\frac{d\sigma(E_a)}{d\Omega}\right)_{ab}$	$\sigma_{ab}(E_a;\, \vartheta)$	$b \cdot sr^{-1}$
absolutes Teilchenspektrum	$\left(\frac{d\sigma(E_a)}{dE_b}\right)_{ab}$	$\sigma_{ab}(E_a;\, E_b)$	$b \cdot MeV^{-1}$
doppelt-Diff. W.querschnitt	$\left(\frac{\partial^2\sigma(E_a)}{\partial\Omega\, \partial E_b}\right)_{ab,}$	$\sigma_{ab}(E_a;\, E_b,\, \vartheta)$	$b \cdot MeV^{-1} \cdot sr^{-1}$
vierfach-diff. W.querschnitt usw.	$\frac{\partial^4\sigma(E_a)}{\partial\Omega_1\, \partial E_{b1}\, \partial\Omega_2\, \partial E_{b2}}$	$\sigma_{ab}(E_a;\, E_{b1},\, \vartheta_1,\, E_{b2},\, \vartheta_2)$	$b\,(MeV \cdot sr)\, 1^{-1} \cdot (MeV \cdot sr)\, 2^{-1}$

Zur weiteren Vereinfachung wird gelegentlich auf die Angabe von E_a verzichtet.

Um die dann immer komplizierter werdende Symbolik zu vereinfachen, wird häufig von der in Tabelle 10.1 gezeigten Schreibweise Gebrauch gemacht.

10.1.2. Erhaltungssätze in Kernreaktionen

Da von den Erhaltungssätzen bereits vielfach geschrieben und Gebrauch gemacht worden ist, begnügen wir uns hier mit der Aufzählung und wenigen Erläuterungen zu den Erhaltungssätzen der Reaktion A(a, b)B.

1. *Erhaltung der Baryonenzahl B.* Unterhalb der Teilchenerzeugungsschwelle sind die B-Werte stets positiv und gleich der Anzahl von Nukleonen im System, da $B_n = B_p = +1$ und $B_\gamma = B_e = B_\pi = 0$ sind. Die Anzahl der Nukleonen $N + Z$ bleibt folglich erhalten:

$$(N + Z)_{a+A} = (N + Z)_{B+b}\,. \tag{10.23}$$

2. *Erhaltung der elektrischen Ladung Q.* Die Summe der Ordnungszahlen von Teilchen und Kern im Eingangs- und Ausgangskanal ist konstant:

$$z_a + Z_A = Z_B + z_b\,. \tag{10.24}$$

3. *Energierhaltungssatz.* Wegen der großen Abstände zwischen den Targetkernen (etwa 10^{-10} m) im Vergleich zur Reichweite der Kernkräfte (etwa 10^{-14} m) und ihrer relativ schwachen Bindung untereinander über die Coulomb-Felder der Atomhülle, kann der Energieerhaltungssatz mit sehr guter Näherung auch für jedes isolierte Teilchen-Kern-System angewandt werden (eine Ausnahme bilden hier z. B. Prozesse bei sehr geringen Energien, bei denen die atomaren Bindungen nicht mehr zu vernachlässigen sind):

$$E(a + A) = E_a + E_A + E_0(a + \mathrm{A}) = E_B + E_b + E_0(\mathrm{B} + \mathrm{b}) = E(\mathrm{B} + \mathrm{b})\,. \tag{10.25}$$

4. *Impulserhaltungssatz.* In gleicher Näherung kann der Impulserhaltungssatz für jedes isolierte Teilchen-Kern-Paar formuliert werden:

$$\boldsymbol{P}(\mathrm{a} + \mathrm{A}) = \boldsymbol{p}_a + \boldsymbol{p}_A = \boldsymbol{p}_B + \boldsymbol{p}_b = \boldsymbol{P}(\mathrm{B} + \mathrm{b})\,. \tag{10.26}$$

Aus Energie- und Impulserhaltungssatz läßt sich leicht der Schwellwert einer endothermen Reaktion mit $E_Q = E_0(\mathrm{a} + \mathrm{A}) - E_0(\mathrm{B} + \mathrm{b}) < 0$ bestimmen:
Im L-System gilt $\boldsymbol{p} = 0$; $\boldsymbol{p}_\mathrm{a} = \boldsymbol{P}(\mathrm{a} + \mathrm{A})$, an der Energieschwelle $E_\mathrm{a} = E_\mathrm{Schw}$ besitzt das Teilchen den zur Auslösung der Reaktion erforderlichen minimalen Impuls $\boldsymbol{p}_\mathrm{a}^\mathrm{min}$, durch welchen die Schwellenergie nichtrelativistisch als

$$E_\mathrm{Schw} = \frac{|\boldsymbol{p}_\mathrm{a}^\mathrm{min}|^2}{2m_\mathrm{a}}$$

ausgedrückt werden kann. Anderseits muß durch die Einschußenergie der Q-Wert plus die Energie der Schwerpunktsbewegung aufgebracht werden:

$$E_\mathrm{Schw} = E_\mathrm{Q} + \frac{|\boldsymbol{P}(\mathrm{a} + \mathrm{A})|^2}{2(m_\mathrm{a} + m_\mathrm{A})} = E_\mathrm{Q} + \frac{|\boldsymbol{p}_\mathrm{a}^\mathrm{min}|^2}{2(m_\mathrm{a} + m_\mathrm{A})}\,.$$

Wird $\boldsymbol{p}_\mathrm{a}^\mathrm{min}$ eliminiert, so ergibt sich für den Schwellwert

$$E_\mathrm{Schw} = E_\mathrm{Q}\left(1 + \frac{m_\mathrm{a}}{m_\mathrm{A}}\right). \tag{10.27}$$

Für Kernreaktionen an leichten Targetkernen kann E_Schw beträchtlich über dem Wert für E_Q liegen. So beträgt für ${}^4_2\mathrm{He}(\alpha, \mathrm{p}){}^7_3\mathrm{Li}$ mit $E_Q = -17$ MeV der Schwellwert $E_\mathrm{Schw} = 17\left(1 + \frac{4}{4}\right) = 34$ MeV, d. h. das Doppelte der Reaktionsenergie. Für die Anregung des ersten Niveaus ($E_Q = 0{,}87$ MeV) in Eisen über unelastische Neutronenstreuung liegt der Schwellwert dagegen nur bei

$$E_\mathrm{Schw} = 0.87\left(1 + \frac{1}{56}\right) = 0.88\ \mathrm{MeV}\,.$$

5. *Drehimpulserhaltungssatz.* Der Drehimpulserhaltungssatz für die Reaktion A(a, b)B besagt, daß der Gesamtdrehimpuls $\boldsymbol{I}$ und seine $(2I + 1)$ Projektionen m_I erhalten bleiben:

$$\boldsymbol{I}(\mathrm{a} + \mathrm{A}) = \boldsymbol{I}_\mathrm{a} + \boldsymbol{I}_\mathrm{A} + \boldsymbol{l}_\mathrm{aA} = \boldsymbol{I}_\mathrm{B} + \boldsymbol{I}_\mathrm{b} + \boldsymbol{l}_\mathrm{Bb} = \boldsymbol{I}(\mathrm{B} + \mathrm{b})\,, \tag{10.28}$$

$$m_I(\mathrm{a} + \mathrm{A}) = m_I(\mathrm{B} + \mathrm{b}) \quad \text{mit} \quad -I \leqq m_I \leqq +I\,. \tag{10.29}$$

Eigenschaften und Werte der Kern- und Teilchenspins $\boldsymbol{I}_\mathrm{A}$, $\boldsymbol{I}_\mathrm{B}$, $\boldsymbol{I}_\mathrm{a}$ und $\boldsymbol{I}_\mathrm{b}$ wurden in 6.4. ausführlich behandelt. Ihre Kopplung ergibt den sogenannten Kanalspin $\boldsymbol{S}$ für Ein- und Ausgangskanal (siehe Anhang A4).

$$\boldsymbol{S}_\mathrm{aA} = \boldsymbol{I}_\mathrm{a} + \boldsymbol{I}_\mathrm{A}\,, \qquad |I_\mathrm{A} - I_\mathrm{a}| \leqq S_\mathrm{aA} \leqq I_\mathrm{a} + I_\mathrm{A} \tag{10.30a}$$

bzw.

$$S_\mathrm{Bb} = I_\mathrm{B} + I_\mathrm{b}\,, \qquad |I_\mathrm{B} - I_\mathrm{b}| \leqq S_\mathrm{Bb} \leqq I_\mathrm{B} + I_\mathrm{b}\,. \tag{10.30b}$$

Die Vektoren $\boldsymbol{S}_\mathrm{aA}$ und $\boldsymbol{l}_\mathrm{aA}$ sowie $\boldsymbol{S}_\mathrm{Bb}$ und $\boldsymbol{l}_\mathrm{Bb}$ koppeln zu $\boldsymbol{I} = \boldsymbol{I}_\mathrm{aA} = \boldsymbol{I}_\mathrm{Bb}$, so daß weiterhin folgende Dreieckregeln gelten:

$$|I - l_\mathrm{aA}| \leqq S_\mathrm{aA} \leqq I + l_\mathrm{aA} \tag{10.31a}$$

bzw.

$$|I - l_\mathrm{Bb}| \leqq S_\mathrm{Bb} \leqq I + l_\mathrm{Bb}\,. \tag{10.31b}$$

Sind die S-Werte vorgegeben, so liegen die Bahndrehimpulse l im Variationsbereich

$$|I - S_{aA}| \leqq l_{aA} \leqq I + S_{aA}, \tag{10.32a}$$

$$|I - S_{Bb}| \leqq l_{Bb} \leqq I + S_{Bb}. \tag{10.32b}$$

Diese Regeln (10.30) bis (10.32) ergeben eine sehr starke Eingrenzung der Zahl offener Reaktionskanäle, die bei der Analyse von Kernreaktionen unbedingt zu beachten sind und diese oft wesentlich vereinfachen.

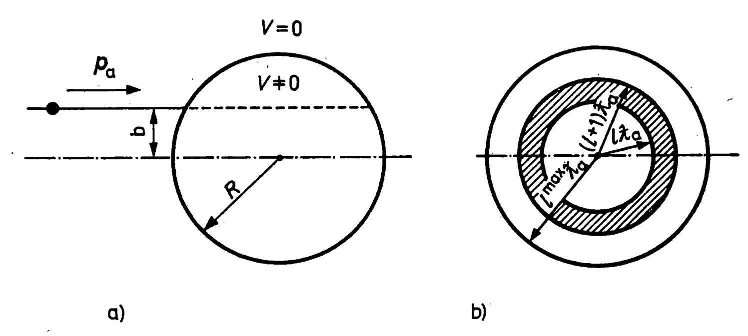


Abb. 10.5
Halbklassische Bestimmung des Bahndrehimpulses
a) Stoßparameter b
b) Ringzonenzerlegung

Hinzu kommt als weitere Einschränkung, daß für eine gegebene Einschußenergie nicht beliebig große Bahndrehimpulse realisiert werden können. Die maximalen Bahndrehimpulse lassen sich leicht halbklassisch abschätzen (siehe Abb. 10.5a). Beim Eindringen des Teilchens a in die Wechselwirkungszone $V(r) \neq 0$ ist der klassische Bahndrehimpuls $L = p_a \cdot b = \frac{\hbar}{\lambda_a} \cdot b$ (mit dem Stoßparameter b), dieser wird dem quantenmechanischen Bahndrehimpuls $\hbar(l(l+1))^{1/2} \approx \hbar l$ gleichgesetzt:

$$\frac{\hbar}{\lambda_a} \cdot b = \hbar l. \tag{10.33}$$

Der maximal mögliche Bahndrehimpuls wird bei $b = R$ realisiert,

$$l^{max} = \frac{R}{\lambda_a}. \tag{10.34}$$

Für ein Kastenpotential erfolgt in klassischer Näherung bei $l > l^{max}$ keine Reaktion mehr. Durch Verwaschung des Randgebietes der Wechselwirkungszone und quantenmechanische Effekte (Unschärfe) bleibt auch dann die Wechselwirkungswahrscheinlichkeit endlich, verringert sich aber mit steigendem l sehr schnell.

Betrachten wir die Konsequenzen aus (10.34) für die Nukleon-Nukleon-Streuung. Hierbei ist $R = 10^{-15}$ m und

$$l^{max} = \frac{10^{-15}}{4{,}55 \cdot 10^{-15}} (E_N)^{1/2} = \begin{matrix} 0{,}22 \text{ für } E_N \\ 0{,}69 \text{ für } E_N \end{matrix} = \begin{matrix} 1 \text{ MeV} \\ 10 \text{ MeV}. \end{matrix}$$

Die Streuung verläuft bis 10 MeV hauptsächlich mit $l = 0$, dies ist die Ursache für die Isotropie der Nukleon-Nukleon-Streuung im M-System. Handelt es sich hingegen um die Wechselwirkung eines Nukleons mit $^{208}_{92}Pb$, so ist $R = r_0 \cdot A^{1/3}$ und für $E_N = 10$ MeV

$$l^{max} = \frac{1{,}3 \cdot 10^{-15}(208)^{1/3}}{4{,}55 \cdot 10^{-15}}(10)^{1/2} = 5{,}35\,.$$

Tatsächlich treten hierbei Reaktionsanteile noch bis zu $l = 8$ auf.

6. *Erhaltung der Parität.* Die Parität der Wellenfunktion des Anfangs- und Endzustandes der Kernreaktion A(a, b)B ist gleich:

$$P_{a+A} = P_a \cdot P_A \cdot (-1)^{l_{aA}} = P_B \cdot P_b \cdot (-1)^{l_{Bb}} = P_{B+b} \tag{10.35}$$

mit P_a, P_A, P_b, P_B — den inneren Paritäten der beteiligten Teilchen und Kerne (siehe 6.5.).

Als Anwendungsbeispiel betrachten wir die elastische Streuung A(a, a)A von Nukleonen ($I_a = I_N = 1/2$), für die wegen der Identität der inneren Paritäten im Ein- und Ausgangskanal gelten muß

$$(-1)^{l_{aA}} = (-1)^{l_{Bb}}\,.$$

Dies ist nur gegeben, wenn die Änderung des Bahndrehimpulses

$$\Delta l = l_{aA} - l_{Bb} = 0, 2, 4, \ldots$$

geradzahlige Werte annimmt. Der sogenannte Spinflipprozeß, d. h. das Umklappen der Spinorientierung, führt zu $l_{Bb} = l_{aA} \pm 1$, ist also paritätsverboten. Weitere Beispiele sind in 6.5.3. zu finden.

7. *Erhaltung des Isospins.* Bei Prozessen der starken Wechselwirkung bleibt der Isospin $\boldsymbol{T}$ erhalten

$$\boldsymbol{T}(a + A) = \boldsymbol{T}_a + \boldsymbol{T}_A = \boldsymbol{T}_B + \boldsymbol{T}_b = \boldsymbol{T}(B + b)\,, \tag{10.36}$$

ebenso wie seine Projektionen $T_z = \frac{1}{2}(Z - N)$. In Prozessen der elektromagnetischen Wechselwirkungen ist nur noch die Projektion T_z Erhaltungsgröße (siehe 6.6.5).

Als Beispiele seien die Reaktionen $^{14}_{7}N(d, d')^{14}_{7}N^+$ und $^{14}_{7}N(\alpha, \alpha')^{14}_{7}N$ genannt. Da der Isospin des Kernes $^{14}_{7}N$ im Grundzustand gleich $\boldsymbol{T}(^{14}_{7}N) = 0$ ist und ebenso die Teilchenisospins $\boldsymbol{T}_d = 0$ und $\boldsymbol{T}_\alpha = 0$ sind, können Zustände mit $\boldsymbol{T} = 1$ im Restkern nicht angeregt werden, dies wird experimentell bestätigt.

Zusammenfassend läßt sich einschätzen, daß die Erhaltungssätze eine starke Eingrenzung der Zahl offener Reaktionskanäle bewirken und damit in vielen Fällen ihre Anwendung die theoretische Analyse der Reaktionen erst ermöglicht. Andererseits ist die Konsistenz eines theoretischen Modells mit den Erhaltungssätzen ein entscheidendes Kriterium für die Güte des Modells bzw. Verletzung der Erhaltungssätze deuten auf Schwächen des Modells hin.

10.1.3. Verlauf der Wirkungsquerschnitte

10.1.3.1. Maximale Querschnittswerte

Die in Gl. (10.33) vorgenommene Zuordnung eines l-Wertes zu einem bestimmten Stoßparameter entspricht der Zerlegung des Wechselwirkungsgebietes $r < R$ in konzentrische Ringzonen mit den Radien $r_l = l\lambda\!\!\!^{-}_a$ ($l = 0, 1, 2, \ldots$). Tatsächlich ergibt das Einsetzen von $b = l\lambda\!\!\!^{-}_a$ in (10.33)

$$\frac{\hbar}{\lambda\!\!\!^{-}_a} \cdot l\lambda\!\!\!^{-}_a = l \cdot \hbar \,,$$

d. h., die Wechselwirkung mit dem klassischen Bahndrehimpuls im Bereich $l\hbar \ldots (l+1)\hbar$ findet in der Ringzone $\Delta r_l = (l+1)\,\lambda\!\!\!^{-}_a - l\lambda\!\!\!^{-}_a$ statt (siehe Abb. 10.5b).

Die geometrische Fläche dieser Zone ist gleich

$$\sigma_l^+ = \pi(l+1)^2\,\lambda\!\!\!^{-}{}_a^2 - \pi l^2 \lambda\!\!\!^{-}{}_a^2 = (2l+1)\,\pi\lambda\!\!\!^{-}{}_a^2\,, \tag{10.37}$$

und die Summe über alle Ringzonen ergibt (mit $l^{\max} = R/\lambda\!\!\!^{-}_a$)

$$\sigma^+ = \sum_{l=0}^{l_{\max}} (2l+1)\,\pi\lambda\!\!\!^{-}{}_a^2 = \pi(R + \lambda\!\!\!^{-}_a)^2\,. \tag{10.38}$$

Dies ist eine effektive Fläche, welche der Kern für die Wechselwirkung mit dem Teilchen der Wellenlänge $\lambda\!\!\!^{-}_a$ bietet. Im Grenzfall hoher Energien $\lambda\!\!\!^{-}_a \ll R$ geht σ^+ zur geometrischen Fläche des Kernes πR^2 über (siehe 2.6.).

Nimmt man an, daß jedes in den Kern eindringende Teilchen a eine Reaktion mit b $\neq$ a auslöst (sogenannter „schwarzer Kern"), so ist der Reaktionsquerschnitt

$$\sigma_R = \sum_{b \neq a} \sigma_{ab}$$

gleich dem effektiven Querschnitt σ^+ und kann, ebenso wie letzterer, in Anteile mit bestimmtem Bahndrehimpuls σ_l aufgeteilt werden:

$$\sigma_{R,l} = \pi\lambda\!\!\!^{-}{}_a^2(2l+1)\,, \tag{10.39}$$

$$\sigma_R = \pi(\lambda\!\!\!^{-}_a + R)^2 \xrightarrow[\lambda\!\!\!^{-}_a \ll R]{} \pi R^2\,. \tag{10.40}$$

Da bei hohen Einschußenergien in der Regel viele Reaktionskanäle b $\neq$ a geöffnet sind, ist der gemessene Reaktionsquerschnitt tatsächlich etwa gleich dem Kernquerschnitt πR^2. Der elastische Streuquerschnitt ist auch in diesem nicht gleich Null. Infolge der Diffraktion der Wellen am Rand des total absorbierenden Kernes werden die Teilchen a gebeugt, d. h. elastisch gestreut. Der Wirkungsquerschnitt hierfür ist gleich dem Reaktionsquerschnitt

$$\sigma_{R,l} = \sigma_{el,l}\,; \qquad \sigma_R = \sigma_{el}\,, \tag{10.41}$$

so daß der totale Wirkungsquerschnitt

$$\sigma_t \equiv \sigma_{el} + \sigma_R = 2\pi(\lambda\!\!\!^{-}_a + R)^2 \xrightarrow[\lambda\!\!\!^{-}_a \ll R]{} 2\pi R^2 \tag{10.42}$$

für hohe Energien dem doppelten geometrischen Kernquerschnitt nahekommt.

Der andere Grenzfall liegt vor, wenn die Absorption der Einschußteilchen völlig fehlt. Es kommt zur Interferenz der im Kernpotential gestreuten und der am Kernrand gebeugten Wellen, die den Streuquerschnitt nochmals um den Faktor 2 erhöht:

$$\sigma_t = \sigma_{el} = 4\pi(\lambda\!\!\!^{-}_a + R)^2\,; \qquad \sigma_R = 0\,. \tag{10.43}$$

Dies ist der theoretisch maximal mögliche Wirkungsquerschnitt der elastischen Streuung und einer Kernreaktion überhaupt. Die einfachen Beziehungen (10.39) bis (10.43) auf halbklassischer Basis gestatten eine sinnvolle Abschätzung der elastischen, Reaktions- und totalen Querschnitte im Energiebereich $\lambda\!\!\!^{-}_a \leqq R$. Infolge der meist größeren Anzahl offener Kanäle sind die Wirkungsquerschnitte bestimmter Prozesse σ_{ab} teilweise wesentlich geringer als σ_R und ohne weitergehende physikalische Modelle nicht vorhersagbar. Im Gebiet $\lambda\!\!\!^{-}_a \gg R$ sind halbklassische Näherungen zu ungenau, und hier ergeben diese Beziehungen mit

$$\sigma_R = \sigma_{el} \xrightarrow[\lambda\!\!\!^{-}_a \gg R]{} \pi \lambda\!\!\!^{-2}_a \tag{10.44}$$

auch stark überhöhte Werte und eine falsche Energieabhängigkeit. Die quantenmechanisch exaktere Partialwellenmethode (siehe Anhang B.4) beruht letztlich ebenfalls auf der Ringzonenzerlegung, indem sowohl die einfallende ebene Welle wie auch die auslaufenden Kugelwellen nach den Eigenfunktionen des Bahndrehimpulses zerlegt werden. Die entsprechenden Ergebnisse lauten (Gl. (B.127) und (B.128)):

$$\sigma_{el,l} = \pi(2l + 1)\, \lambda\!\!\!^{-2}_a\, |1 - S_l|^2 \tag{10.45}$$

$$\sigma_{R,l} = \pi(2l + 1)\, \lambda\!\!\!^{-2}_a (1 - |S_l|^2)\,. \tag{10.46}$$

Unterschiede zum halbklassischen Fall treten nur im letzten Glied auf. Die Streufunktion S_l liegt im Wertebereich $0 \leqq |S_l| \leqq 1$. Für $S_l = 0$ liegt wiederum der Fall des absolut schwarzen Kernes vor, die Gl. (10.45) und (10.46) werden identisch mit (10.39) bzw. (10.41). Für $S_l = -1$ tritt nur elastische Streuung auf und (10.43) wird bestätigt.

Die Ursache für die Diskrepanzen bei $\lambda\!\!\!^{-}_a \gg R$ sind offenbar darin zu sehen, daß S_0 mit sinkender Energie nicht konstant ist, sondern sich immer mehr dem Wert $+1$ nähert, so daß $\sigma_{el,0}$ einem endlichen Wert zustrebt (siehe Anhang B.6):

$$\sigma_{el} = \sigma_{el,0} = 4\pi[a(E_a = 0)]^2\,, \tag{10.47}$$

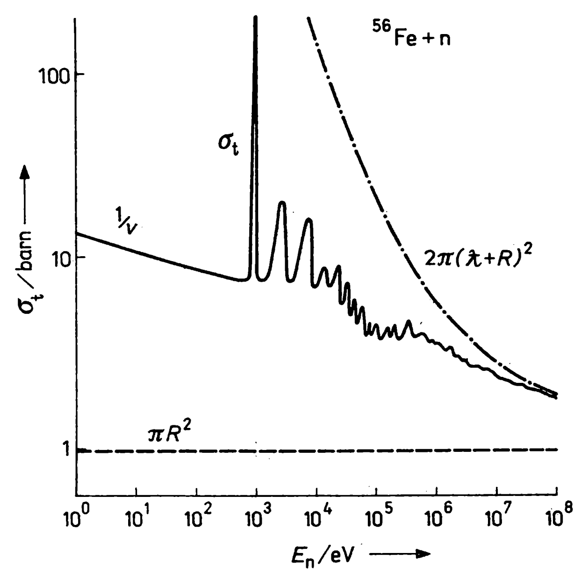


Abb. 10.6
Totaler Wirkungsquerschnitt für $^{56}_{26}$Fe im Vergleich mit der halbklassischen Formel (10.42)

mit der Streulänge $a(E_a = 0)$, die meist in der Größenordnung des Kernradius liegt, mit diesem aber nicht identisch ist. Ihre genaue Größe hängt von der Wellenfunktion des einlaufenden Teilchens in der Wechselwirkungszone, d. h. letztlich von den Feinheiten seiner Wechselwirkung mit den Kernnukleonen ab.

Das Verhalten des Reaktionsquerschnitts für $\lambda_a \gg R$ weicht von dem des Streuquerschnitts ab und wird in 10.1.3.2. besprochen. Um die hier erhaltenen Ergebnisse zu illustrieren, werden auf der Abb. 10.6 experimentelle Ergebnisse für den totalen Streuquerschnitt der Wechselwirkung von Neutronen mit $^{56}_{26}Fe$ mit ersteren verglichen. In diesen Fällen sind $R = 5 \cdot 10^{-15}$ m, $\pi R^2 = 780$ mb und $a(0) = 10^{-15}$ m für Eisen. Die nach (10.43) berechneten oberen Grenzen werden in keinem Fall überschritten. Bei hohen Energien beschreiben die halbklassischen Formeln (10.41) und (10.42) das mittlere Verhalten befriedigend. Die experimentelle Kurve zeigt jedoch bereits in der hier gewählten relativ groben Darstellung viele Details, die ohne tieferes Eindringen in die Kernwechselwirkung nicht zu erklären sind.

10.1.3.2. Asymptotisches Verhalten

1. Um das asymptotische Verhalten der Wirkungsquerschnitte zu beschreiben, erinnern wir uns an die Darstellung der elastischen Querschnitte in Bornscher Näherung (Gl. B.140, Anhang B.6.). Für die Reaktion A(a, b)B liefert die Streutheorie (siehe 10.3.) einen sehr ähnlichen Ausdruck:

$$\sigma_{ab}(E_a, \vartheta) = \frac{2\pi}{\hbar} |\langle M_{ab}\rangle|^2 \varrho_f = (2I_b + 1)(2I_B + 1) \frac{m_b^2}{(2\pi\hbar^2)^2} \frac{v_b}{v_a} |\langle \Phi_b | V | \Psi_a^{(+)}\rangle|^2 , \tag{10.48}$$

mit $\Psi_a^{(+)}$ — der Wellenfunktion des Reaktionsproblems, die sich aus dem Eingangskanal entwickelt und Φ_b — der Wellenfunktion des Ausgangskanals. Die Faktoren $(2I_b + 1)$ und $(2I_B + 1)$ berücksichtigen die Vergrößerung des Phasenraumes im Ausgangskanal infolge unterschiedlicher Spinorientierungen von b und B, d. h., der Ausdruck (10.48) stellt bereits eine Summe über alle Kanäle dar, die sich nur in der Spinorientierung im Ausgangskanal voneinander unterscheiden.

2. Im Falle der elastischen Streuung mit $v_b/v_a = 1$ für spinlose, neutrale Teilchen wird aus (10.48) ein der Gl. (B.140) sehr ähnlicher Ausdruck

$$\sigma_{nn}(E_a, \vartheta) = \frac{m_a^2}{(2\pi\hbar^2)^2} |\langle \Phi_a | V | \Psi_a^{(+)}\rangle|^2 , \tag{10.49}$$

in dem allerdings die ebenen Wellen durch realistischere Wellenfunktionen der Reaktionskanäle ersetzt sind. Die Konstanz des elastischen Streuquerschnitts (10.47) für $v_a \to 0$ bedeutet, daß

$$\frac{m_a^2}{(2\pi\hbar^2)^2} \int_{4\pi} |\langle \Phi_a | V | \Psi_a^{(+)}\rangle|^2 \, d\Omega = 4\pi a(0)^2 = \text{const} .$$

gilt und damit auch das Matrixelement $|\langle M_{ab}\rangle|^2$ in diesem Bereich konstant sein muß.

3. Die Konstanz des Matrixelements bei $v_a \to 0$ trifft offenbar auch für Reaktionen vom Typ A(a, b)B zu, da es keinen physikalischen Grund für die starke Änderung von Φ_b bei geringer Änderung von E_a gibt. Damit folgt aus (10.48)

$$\sigma_{nb} \sim \frac{(2I_b + 1)(2I_B + 1)}{v_a} |\langle M_{ab}\rangle|^2 \sim \frac{1}{v_a} , \tag{10.50}$$

das bekannte und den Querschnittsverlauf der meisten exothermen neutroneninduzierten Reaktionen bestimmende „$1/v$-Gesetz".

Einige Beispiele für das Wirken dieses Gesetzes wurden auf den Abb. 4.24 und 4.26 gezeigt. Bei geringen Energien kann somit der Reaktionsquerschnitt viel größer als der Streuquerschnitt werden und im wesentlichen den totalen Querschnitt ausmachen. Das $1/v$-Gesetz gilt für alle Absorptionsprozesse, also auch den Strahlungseinfang und die Kernspaltung (siehe Abb. 4.22a für ^{235}U), da die Größe v_b völlig beliebig sein kann, wenn sich nur $|\langle M_{ab}\rangle|^2$ bei der geringen Veränderung von E_a ausreichend wenig ändert. Der nach (10.50) erhaltene Querschnittsanstieg bleibt jedoch wesentlich unter dem halbklassisch vorausgesagten (Gl. (10.44))

$$\sigma = \pi\lambda\!\!\!^{-}{}_a^2 \sim 1/v_a^2 .$$

4. Nahe der Schwelle endothermer, neutroneninduzierter Reaktionen kann in einem schmalen Energiebereich ΔE_a wiederum $|\langle M_{ab}\rangle|^2 = \text{const.}$ angenommen werden. Infolge der bereits vorhandenen Schwellenenergie E_{Schw} ändert der Energiezuwachs zu $E_{\text{Schw}} + \Delta E_a$ die Teilchengeschwindigkeit v_a relativ wenig. Der Querschnittsanstieg wird damit durch

$$\sigma_{nb} \sim v_b \tag{10.51a}$$

bestimmt. Im speziellen Falle der unelastischen Streuung mit Anregung eines Niveaus mit der Energie E_i^* gilt $E_b \cong E_a - E_i^*$ (für $A \gg 1$) und somit

$$\sigma_{nn'} \sim (E_a - E_i^*)^{1/2} \simeq (E_a - E^i_{\text{Schw}})^{1/2} . \tag{10.51b}$$

Auf Abb. 10.7 ist dies für den Fall $^{56}_{26}$Fe(n, n')$^{56}_{26}$Fe mit Anregung des ersten Niveaus $E_1^* = 0{,}87$ MeV demonstriert, in dem das mittlere Querschnittsverhalten nahe der Schwelle richtig beschrieben wird.

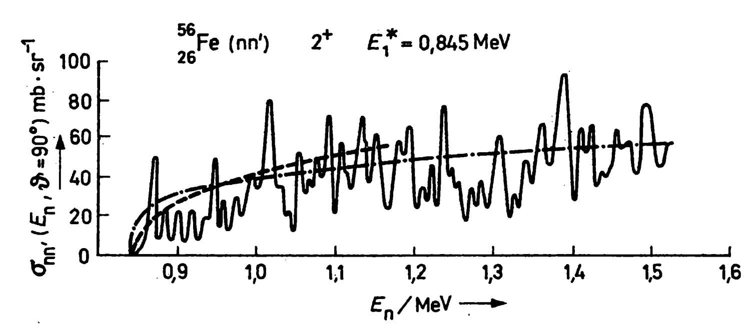


Abb. 10.7
Mittlere Beschreibung der Anregungsfunktion für die Reaktion $^{56}_{26}$Fe(n, n$_1'$) durch den asymptotischen Ansatz (10.51b) (gestrichelte Kurve) sowie einer Hauser-Feshbach-Rechnung (Strich-Punkt-Kurve)

5. Eine wesentliche Veränderung tritt im Verlauf von Kernreaktionen mit geladenen Teilchen im Ein- oder Ausgangskanal infolge des Coulomb-Walls

$$U_C(r) = \frac{z_a Z_A e^2}{4\pi\varepsilon_0 r} \equiv \frac{\alpha}{r} \qquad (\text{bei } r > R) \tag{10.52}$$

ein. Die Durchtunnelungswahrscheinlichkeit dieser Barriere P_a^c ist für $\alpha/\hbar v_a \gg 1$ proportional

$$P_a^c \sim \exp\left(-\frac{2\pi\alpha}{\hbar v_a}\right), \tag{10.53}$$

d. h. außerordentlich stark energieabhängig. Der Wirkungsquerschnitt ist in diesem Fall annähernd durch das Produkt

$$\sigma_{ab}^{Coul}(E_a, \vartheta) = \sigma_{ab}(E_a, \vartheta) \cdot P_a^C \cdot P_b^C \tag{10.54}$$

zu beschreiben. Sein Anstieg wird fast ausschließlich durch $P_a^C P_b^C$ bestimmt. Oberhalb $E_a = 0$ (exotherme R.) bzw. $E_a = E_{Schw}$ (endotherme R.) steigt der Querschnitt, beginnend mit verschwindend kleinen Werten, über mehrere Größenordnungen und erreicht wesentlich über der Coulomb-Barriere

$$E_a > E_C = \frac{\alpha}{(R_A + R_a)}$$

den durch die Kernwechselwirkung bestimmten Wert. Ein Beispiel hierfür ist die exotherme Reaktion ${}_1^2H(d, n){}_2^3He$, die auf der Abb. 10.4 dargestellt ist.

10.1.3.3. Prinzip des detaillierten Gleichgewichts

Gestattet ein bekannter Wirkungsquerschnitt σ_{ab} Aussagen über den Umkehrprozeß B(b, a)A? In Analogie zu (10.48), kann σ_{ba} durch das Matrixelement $|\langle M_{ba}\rangle|^2$ ausgedrückt werden:

$$\sigma_{ba}(E_b, \vartheta) = (2I_a + 1)(2I_A + 1) \frac{m_a^2}{(2\pi\hbar^2)^2} \frac{v_a}{v_b} \cdot |\langle M_{ba}\rangle|^2 . \tag{10.55}$$

Aus der Invarianz der Übergangsmatrix bei Zeitumkehr folgt nach den Gesetzen der Quantenmechanik

$$|\langle M_{ab}\rangle|^2 = |\langle M_{ba}\rangle|^2 . \tag{10.56}$$

Damit erhalten wir für das Verhältnis der Querschnitte σ_{ab} zu σ_{ba}

$$\frac{\sigma_{ab}}{\sigma_{ba}} = \frac{v_b^2}{v_a^2} \frac{(2I_b + 1)(2I_B + 1)}{(2I_a + 1)(2I_A + 1)} = \left(\frac{\lambda_a}{\lambda_b}\right)^2 \frac{(2I_b + 1)(2I_B + 1)}{(2I_a + 1)(2I_A + 1)}, \tag{10.57}$$

das sogenannte Prinzip des detaillierten Gleichgewichts. Bei dessen Anwendung ist Vorsicht geboten: Die nach (10.48) und (10.55) berechneten Querschnitte gelten für bestimmte Reaktionskanäle, lediglich über die Spinprojektionen der Ausgangsteilchen ist bereits summiert worden. Treten mehrere Energiezustände im Endkern auf, so ist die Beziehung (10.57) nur auf die entsprechenden partiellen Querschnitte anwendbar. So ist der Umkehrprozeß für ${}_{26}^{56}Fe(n, n'){}_{26}^{56}Fe_1^*$ die praktisch nicht meßbare Reaktion

$$n(E_n = E_a - E_1^*) + {}_{26}^{56}Fe_1^* \rightarrow {}_{29}^{56}Fe_{g.s.} + n(E_n = E_a) . \tag{10.58}$$

Die Querschnitte der inversen Reaktion werden häufig mit σ_{inv} bezeichnet.

10.1.4. Reaktionsmechanismen und -modelle

1. Die exakte theoretische Beschreibung von Kernreaktionen erfordert die Lösung der zeitabhängigen Schrödinger-Gleichung

$$i\hbar \frac{\partial\psi}{\partial t} = H\psi \tag{10.59}$$

mit dem Hamilton-Operator

$$H = H_a + H_A + T_a + V_{aA} = H_b + H_B + T_b + V_{bB} . \tag{10.60}$$

Hierzu ist die Kenntnis der Kern- und Teilchenwellenfunktionen ψ_a, ψ_A, ψ_b, ψ_B aus den vier Gleichungen

$$H_i\psi_i = E_i\psi_i \qquad (i = \text{a, A, b, B}) \tag{10.61}$$

sowie der reaktionsbewirkenden Wechselpotentiale V_{aA} und V_{bB} erforderlich, die im allgemeinen Fall Funktionen der Teilchen- und aller Nukleonenkoordinaten der Kerne (r_a bzw. ξ) sind:

$$V_{aA} = V_{aA}(r_a, \xi)\,; \qquad V_{bB} = V_{bB}(r_b, \xi)\,.$$

(Auch Abhängigkeiten von weiteren Koordinaten der Teilchen a und b, wie deren Spinorientierung, sind möglich.) Die Relativbewegung der Teilchen ist dabei in Form von Wellenpaketen

$$\varphi_a = \frac{1}{\sqrt[4]{2\pi}\,\sqrt{\delta z}} \exp\left[ik_a z - \frac{z^2}{2(\delta Z)^2}\right]$$

mit der Aufenthaltswahrscheinlichkeit

$$|\varphi_a|^2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi\delta z}} \exp\left[-\frac{z^2}{2(\delta z)^2}\right] \tag{10.62}$$

anzusetzen. Aus den ermittelten Wellenfunktionen des Systems vor und nach der Reaktion, $\psi(t = -\infty)$ bzw. $\psi(t = +\infty)$, sind die Wirkungsquerschnitte für alle Kanäle zu bestimmen. Dieses Herangehen schließt die Betrachtung des Zeitablaufs und der Dynamik der Prozesse in der Wechselwirkungszone, d. h. die kontinuierliche zeitliche Veränderung der Wellenfunktion während der Wechselwirkung mit ein. Dieses Vorhaben ist aber wegen der Unkenntnis genauer Wellenfunktionen, noch dazu bei hohen Anregungsenergien der Wechselwirkungskräfte V und mathematischer Schwierigkeiten nicht durchführbar. Vielmehr sind eine ganze Reihe von Vereinfachungen und Modellvorstellungen einzuführen.

Die erste ist der Übergang zur stationären Beschreibung. Infolge der Unschärferelation

$$\delta_z \delta p_z \geqq \frac{\hbar}{2}$$

ist für monoenergetische Teilchen das Wellenpaket in einem großen Gebiet δz verschmiert; das einfallende Teilchen hat die Form einer ebenen Welle

$$\varphi_a = \exp(ik_a z)\,.$$

Das Reaktionsproblem (10.59) wird damit stationär. Durch den Ansatz

$$\psi(\boldsymbol{r}, t) = \psi(\boldsymbol{r}) \exp(-iEt/\hbar)$$

gelingt die Separation der Zeit in der Schrödinger-Gleichung:

$$(H - E)\,\psi(\boldsymbol{r}) = 0\,. \tag{10.63}$$

Deren asymptotische Lösungen $\psi^{(+)}$, bestehend aus der einlaufenden ebenen Welle a und auslaufenden Kugelwellen in allen offenen Reaktionskanälen b

$$\Psi \xrightarrow[r\to\infty]{} \Psi^{(+)} \sim \psi_A\psi_a\, e^{ik_a r_a} + \sum_b A_{ab}\psi_b\psi_B \frac{e^{ik_b r_b}}{r_b} \tag{10.64}$$

gestattet die Querschnittsberechnung. Mit dieser Näherung wird die Zeitabhängigkeit des Prozesses vollkommen vernachlässigt, die Dynamik der Wechselwirkung geht verloren oder erscheint in einem Nebeneinander der Anregung von Anteilen unterschiedlicher Komplexität in

den Wellenfunktionen. Der Mechanismus der Wechselwirkung verbirgt sich in den Streuamplituden A_{ab}, deren Bestimmung Hauptanliegen der Reaktionstheorie ist.

2. Die unterschiedlichen Kernmodelle (siehe Kapitel 8) betonen mehr oder weniger stark den Einteilchencharakter (Fermigas-Modell, Schalenmodell) oder Vielteilchencharakter (Tröpfchenmodell, Kollektivmodell) der Nukleonenbewegung im Kern bzw. stellen eine Synthese (verallgemeinertes Schalenmodell) beider dar. Damit lassen sich immer nur bestimmte Aspekte der Kernstruktur richtig erfassen.

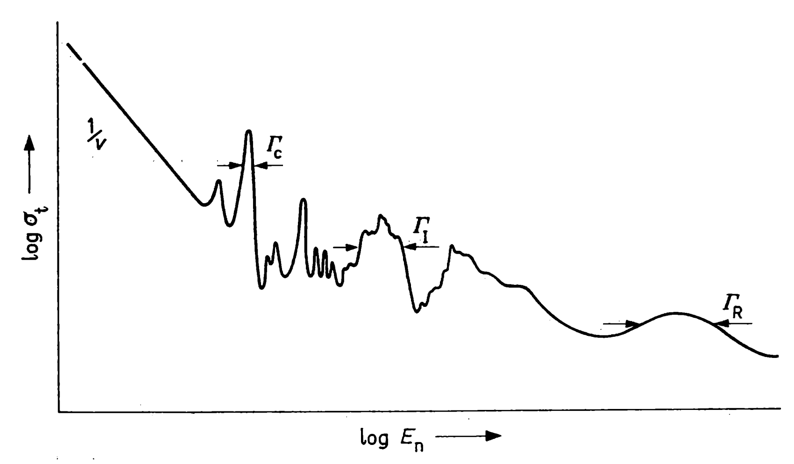


Abb. 10.8
Typischer Verlauf des totalen Wirkungsquerschnitts über einen weiten Energiebereich

Auch die Modellvorstellungen über den Prozeßablauf müssen zwangsläufig unterschiedlich sein. Um dies zu erkennen, wenden wir uns nochmals dem Verlauf des totalen Wirkungsquerschnitts über der Energie zu (siehe Abb. 10.6 sowie Abb. 4.22), der auf der Abb. 10.8 stilisiert für einen typischen Fall dargestellt ist. Es treten resonanzartige Strukturen völlig unterschiedlicher Breite Γ auf, sogenannte Riesenresonanzen, intermediäre Resonanzen und Compoundkernresonanzen. Die diesen Resonanzen entsprechenden typischen Lebensdauern τ des Systems a + A (bzw. B + b) lassen sich aus der Unschärferelation

$$\Gamma \cdot \tau \simeq \hbar$$

abschätzen:

$$\Gamma_R = 1 \dots 10\,\text{MeV}\,, \qquad \tau_R = 10^{-21} \dots 10^{-22}\,\text{s}\,,$$
$$\Gamma_I = 1 \dots 10\,\text{keV}\,, \qquad \tau_I = 10^{-13} \dots 10^{-19}\,\text{s}\,,$$
$$\Gamma_C = 0{,}1 \dots 1\,\text{eV}\,, \qquad \tau_C = 10^{-14} \dots 10^{-15}\,\text{s}\,,$$

während τ_R in der Größenordnung der Durchlaufzeit τ_D eines Teilchens durch den Kern ($A = 200$; $R = 7{,}6 \cdot 10^{-15}/\text{m}$; $v_N = 10^8/\text{m}\,\text{s}^{-1}$)

$$\tau_D = \frac{2 \cdot 7{,}6 \cdot 10^{-15}}{10^8} = 1{,}5 \cdot 10^{-22}\,\text{s}$$

liegt, der Prozeß also sehr schnell erfolgt, ist die Wechselwirkungszeit im Bereich der Compoundkernresonanzen um 7 ... 8 Größenordnungen langsamer. Dies erfordert völlig unterschied-

liche Reaktionsmodelle, deren Grundideen hier kurz erläutert und die in den folgenden Punkten dieses Kapitels ausführlicher behandelt werden.

3. Für das Gebiet der Riesenresonanzen $\Gamma = \Gamma_R$ sagt das Modell des absolut schwarzen Kernes einen glatten Verlauf von σ_t voraus (siehe Gl. (10.42)). Die beobachteten wellenförmigen Schwankungen stehen hierzu im Widerspruch. Sie lassen sich nur erklären in der Annahme, daß sich das eingeschossene Teilchen im Kern wie in einer Potentialmulde relativ frei bewegen kann und es dadurch bei bestimmten Energien zur Ausbildung stehender Wellen, d. h. der Anregung quasistationärer Einteilchenzustände im Kernpotential, kommt. Für gebundene Einteilchenzustände war dies auch im Rahmen des erfolgreichen Schalenmodells (siehe Kapitel 8) angenommen und als Folge des Wirkens des Pauli-Prinzips im Kern erkannt worden. Das optische Modell der Kernreaktionen basiert praktisch auf den gleichen Vorstellungen (siehe 10.5.): Die in die Wechselwirkungszone eintretenden Teilchen bewegen sich in einem mittleren, komplexen Einteilchenpotential V

$$V_{aA}(\boldsymbol{r}_a, \xi) \rightarrow V(\boldsymbol{r}_a) = U(\boldsymbol{r}_a) + \mathrm{i}W(\boldsymbol{r}_a) \qquad (\text{mit } |W| \ll |U|) \tag{10.65}$$

und werden dabei gestreut bzw. teilweise absorbiert. Die Schrödinger-Gleichung (10.63) vereinfacht sich zu einer Gleichung für die Einteilchenbewegung im komplexen Potentialtopf

$$(T_a + V(\boldsymbol{r}_a))\,\psi(\boldsymbol{r}_a) = E\psi(\boldsymbol{r}_a)\,, \tag{10.66}$$

deren Lösungen in den Bereichen $r < R$ und $r \gg R$ die Streuamplitude $A_{aa} \equiv f(\vartheta)$ bestimmen. Neben der elatischen Streuung kann auf diese Weise das „Verschwinden" der einfallenden Welle aus dem Eingangskanal, d. h. der Reaktionsquerschnitt σ_R, und damit auch σ_t bestimmt werden.

4. Interessiert ein bestimmter Reaktionskanal b ≠ a, so wird der spezifische Anteil dieses Kanals am Wechselwirkungspotential abgespalten und als Restwechselwirkung V_{ab} gesondert ausgewiesen:

$$H = T_a + V'(\boldsymbol{r}_a) + V_{ab}\,. \tag{10.67}$$

Es wird weiterhin ein Kernstrukturmodell gewählt, in dem sich Anfangs- und Endzustand des Kernes ψ_A und ψ_B beschreiben lassen. In unterschiedlichen Näherungen lassen sich auch für diesen Fall aus (10.63) und (10.67) die Wellenfunktionen (10.64) bestimmen. Charakteristisch ist dabei stets das Auftreten von Matrixelementen der Art

$$\langle\psi_B|\, V_{ab}\, |\psi_A\rangle\,, \tag{10.68}$$

für den direkten quantenmechanischen Übergang vom Anfangs- zum Endzustand, dessen Quadrat proportional dem Wirkungsquerschnitt σ_{ab} ist.

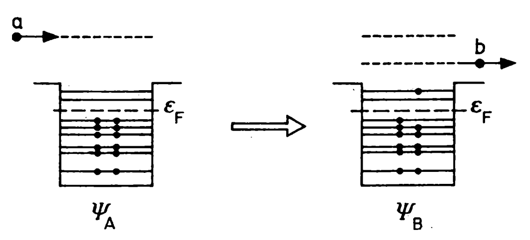


Abb. 10.9
Modellbild einer direkten Einteilchenanregung mit Schalenmodell-Wellenfunktionen des Anfangs- und Endkernes ψ_A bzw. ψ_B

Diese sogenannten Theorien direkter Kernprozesse (ausführlicher siehe 10.5.) beschreiben somit ebenfalls sehr schnell ablaufende Kernprozesse. Die Abb. 10.9 zeigt ein Modellbild direkter Reaktionen bei Verwendung von Einteilchenschalenmodell-Wellenfunktionen.

5. Die Ausbildung schmaler Neutronenresonanzen mit $\Gamma = \Gamma_C$ führte zu einer völlig entgegengesetzten Hypothese (N. BOHR, 1936) über den Ablauf von Kernreaktionen: Nach der sehr schnell erfolgenden vollständigen Absorption des eingeschossenen Teilchens im Kern existiert ein relativ langlebiger, hochangeregter Zwischenkern C* (Compoundkern) dessen Zerfall in die geöffneten Kanäle unabhängig von der Art seiner Bildung erfolgt

$$\mathrm{a} + \mathrm{A} \to \mathrm{C}^* \to \mathrm{B} + \mathrm{b}\,. \qquad (10.69)$$

Die vom Teilchen eingebrachte Anregungsenergie $E^* = E_a + E_B^{(a)}$ verteilt sich auf viele Freiheitsgrade des Compoundkernes statistisch. Zur Emission eines Teilchens b kommt es nur dann, wenn sich ‚zufällig' ausreichend Energie auf dem Teilchen b konzentriert.

Der Wirkungsquerschnitt σ_{ab} ist dann faktorisierbar in dem Wirkungsquerschnitt für die Compoundkernbildung (Absorption des Teilchens a) σ_a^C und dessen Zerfallswahrscheinlichkeit in den Kanal b,

$$\sigma_{ab} = \sigma_a^C \cdot P_b\,. \qquad (10.70)$$

Letztere ist gegeben durch das Verhältnis von partieller Breite Γ_b für den Zerfall C* → B + b zur totalen Breite Γ für alle offenen Kanäle:

$$P_b = \frac{\Gamma_b}{\Gamma} \quad \text{mit} \qquad (10.71)$$

$$\Gamma = \sum_i \Gamma_i \qquad (i = \mathrm{a}, \dots \mathrm{b}, \dots \mathrm{N})\,. \qquad (10.72)$$

Eine quantenmechanische Behandlung dieses Reaktionsablaufs würde die Lösung einer Kette von Übergangswahrscheinlichkeiten zwischen hochangeregten Kernzuständen bedeuten, an deren äußeren Enden sich ψ_A und ψ_B befinden. Eine solche Aufgabe ist undurchführbar, nicht zuletzt da die Wellenfunktion solcher Zustände nicht bekannt sind. Dennoch gelingt im Rahmen von Compoundkernmodellen die Beschreibung vieler Aspekte von Kernreaktionen (siehe 10.6).

6. Es ist offensichtlich, daß es zwischen Prozessen mit direktem Übergang vom Eingangs- zum Ausgangskanal und Prozessen, die über die sehr komplizierten Compoundkernzustände ablaufen, einfachere Zwischenstufen geben sollte. Diese werden intermediäre Zustände genannt. Ihre Lebensdauer Γ_I ist wesentlich kürzer als die der Compoundkernzustände. In günstigen Fällen sind die auftretenden Matrixelemente in der Form

$$\langle\psi_B|\, V_{Ib}\, |\psi_I^*\rangle\, \langle\psi_I^*|\, V_{aI}\, |\psi_A\rangle$$

lösbar. Das Modellbild einer unelastischen Streuung über einen intermediären Schalenmodell-Zustand ist in Abb. 10.10 dargestellt. (Näheres siehe 10.7.)

7. In bestimmten Fällen genügen (oder sind bisher allein zu bewältigen) grobe, halbklassiche oder makroskopische Modellvorstellungen. Dies ist z. B. für die Kernspaltung gegeben, bei welcher die Energiebilanz eine entscheidende Rolle spielt. Das einfache Tröpfchenmodell (siehe 8.3.3.) liefert bereits befriedigende Resultate, wenngleich auch für diesen Prozeß die Tendenz zur immer stärkeren Einbeziehung mikroskopischer Modelle gilt (siehe 10.8.). Ähnliche Tendenzen sind für die Beschreibung von Schwerionenreaktionen zu erkennen (siehe 10.9.).

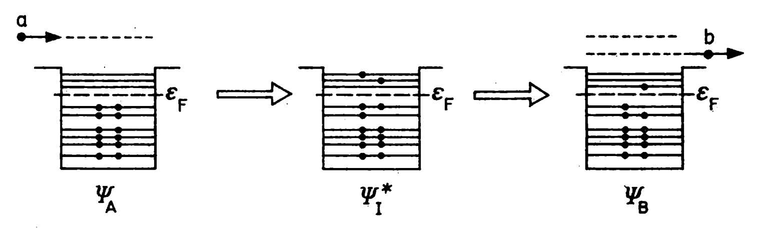


Abb. 10.10
Modellbild einer zweistufigen Kernreaktion mit Ausbildung eines hochangeregten intermediären Zustandes ψ_I^*

8. Die bisherigen Ausführungen bedeuten nicht, daß die unterschiedlichen Mechanismen völlig getrennt voneinander in den verschiedenen Energiebereichen dominieren. Im Gegenteil: Nach Absorption des im optischen Potential frei beweglichen Teilchens kann es sowohl zur direkten Anregung des Endzustandes ψ_B als auch zur Ausbildung eines Compoundkernes kommen, aus dem gleiche Teilchen b emittiert werden können. Die Reaktion A(a, b)B weist dann Anteile beider Mechanismen auf, und das ist die Regel. Umgekehrt werden selbst die über viele Compoundkernresonanzen gemittelten Streuquerschnitte gut mit dem optischen Modell beschrieben!

Am ehesten läßt sich dieses Verhalten mit Hilfe des sogenannten Weißkopf-Bildes der Kernreaktionen (siehe Abb. 10.11) darstellen, welches auf einer Einteilung der Reaktionen nach der Kernwechselwirkungszeit beruht.

Das Weißkopf-Bild enthält in komprimierter Form unsere gegenwärtigen Vorstellungen vom Ablauf der Kernreaktionen: Jede Kernreaktion beginnt mit einer Phase (I) der freien Bewegung des Teilchens a im mittleren Wechselwirkungspotential. Es kommt zur Reflexion, Brechung und Beugung der einlaufenden Welle, wenn diese in das mittlere Kernfeld eintritt. Die Folge ist die sogenannte ‚formelastische' Streuung, welche eine bestimmte Ähnlichkeit mit der Lichtstreuung an einer Glaskugel besitzt. (Näheres siehe 10.5). Mit einer bestimmten

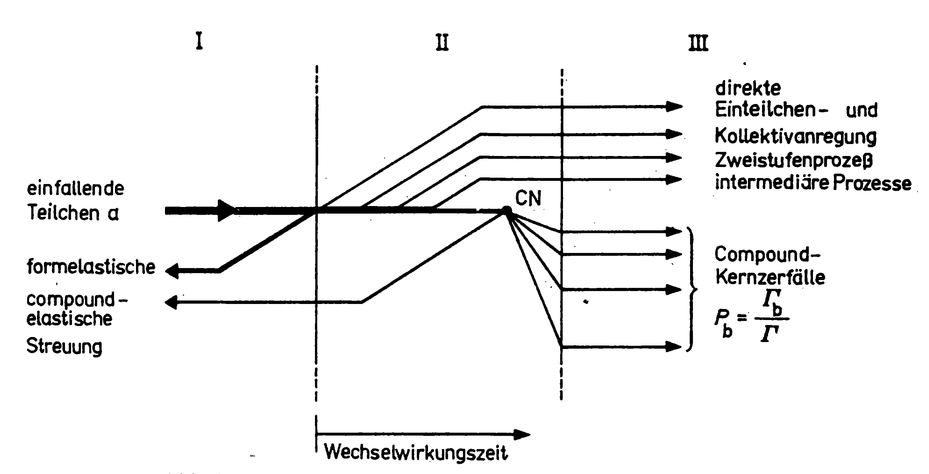


Abb. 10.11
Schematische Darstellung des Ablaufs von Kernreaktionen (sog. Weißkopf-Bild)
I und II — Stadien der freien Einteilchenbewegung im Eingangs- und Ausgangskanal,
II — Wechselwirkungsstadium mit Prozessen wachsender Komplexität

Wahrscheinlichkeit treten jedoch auch Restwechselwirkungen mit einzelnen Kernnukleonen oder den kollektiven Rotations- bzw. Vibrationsfreiheitsgraden (siehe 8.4) des Kernes auf, die zur Absorption des Teilchens a aus dem Eingangskanal führen. Der einfachste und damit schnellste Prozeß dieser Art ist die Anregung eines Teilchen-Loch-Paares im Kern durch Stoß mit einem Kernnukleon und nachfolgender Emission eines Kernteilchens b. Es können jedoch auch wesentlich mehr Wechselwirkungsprozesse im System II stattfinden, die zu immer komplizierteren Konfigurationen des angeregten Systems und schließlich zur Bildung des Compoundkernzustandes CN — einer völlig statistischen Verteilung der Anregungsenergie auf die Freiheitsgrade des Systems II — führen. Letzterer kann sowohl über den Eingangskanal — in diesem Falle sprechen wir von compoundelastischer Streuung — als auch in einen der offenen Reaktionskanäle b zerfallen, wobei P_b ein Maß für die Wahrscheinlichkeit bezeichnet. Den Abschluß der Reaktion bildet wiederum eine Phase der relativ freien Bewegung der Reaktionsprodukte im mittleren Wechselwirkungspotential des Systems b + B.

10.2. Experimentelle Methoden der Untersuchung von Kernreaktionen

1. Seit dem Nachweis der ersten künstlichen Kernreaktion $^{14}_{7}N(\alpha, p)^{17}_{8}O$ (E. RUTHERFORD, 1919) ist die Anzahl von experimentellen und theoretischen Arbeiten auf diesem Gebiet lawinenartig gestiegen und hat die stattliche Anzahl von einigen Hunderttausend erreicht.

Meilensteine dieser Entwicklung waren (siehe auch Tabelle 1.1):

- Entdeckung von Resonanzreaktionen (POSE, 1928);
- Entdeckung des Neutrons (CHADWICK, 1932);
- Nachweis von Neutronenresonanzen (FERMI, 1934);
- Formulierung der Compoundkernhypothese (N. BOHR, 1936);
- Entdeckung der Kernspaltung (HAHN und STRASSMANN, 1939);
- Formulierung des optischen Modells (FESHBACH, PORTER, WEISSKOPF, 1954);
- Formulierung statistischer Modelle (BETHE, WEISSKOPF, u. a. 1937);
- Nachweis und Analyse von Fluktuationen, Isobaranalogresonanzen, Nichtgleichgewichtsprozessen, tiefunelastischen Schwerionenstößen u. a. m.

Wichtige Impulse kamen hierfür aus der Entwicklung experimenteller Methoden, der Nachweisgeräte, Spektrometer, Elektronik und Beschleuniger. So entstanden jeweils neue Qualitäten der Experimente durch die Einführung

- von Szintillations- und Halbleiterdetektoren (siehe Kapitel 5);
- rauscharmer Vorverstärker mit hoher Ladungsempfindlichkeit, von Methoden der Teilchendiskriminierung, Nanosekunden-Analogelektronik, Speicher- und Rechentechnik;
- die Entwicklung von Beschleunigern mit hoher Energieschärfe wie Van-de-Graaff-Generator, Tandembeschleuniger und Isochronzyklotron (siehe Kapitel 3).

Traditionelle Methoden wie Nebelkammer, Fotoemulsionstechnik und Aktivationsmessungen gingen in ihrer relativen Bedeutung zurück. Weder aus historischer noch aus systematischer Sicht können hier die heute angewandten vielfältigen Methoden und Verfahren auch nur annähernd vollständig behandelt werden. Vielmehr sollen anhand einer Reihe typischer Anordnungen die für viele Experimente wesentlichen Merkmale dargestellt werden.

2. Am einfachsten und genauesten meßbar ist der totale Wirkungsquerschnitt σ_t für Neutronen. Aus (10.12) ergibt sich für

$$\sigma_t \equiv \sum_{i}^{N} \sigma_{ai} \qquad (i = a, \dots b \dots N)$$

und wenn die Zahl der insgesamt entstehenden Teilchen durch die Zahl der aus dem einfallenden Strahl im Schichtbereich $x \dots x + \mathrm{d}x$ verschwindenden Teilchen $\mathrm{d}\dot{N}^{\mathrm{n}}$ ersetzt wird

$$\sum_{\mathrm{i}}^{\mathrm{N}} \dot{N}^{\mathrm{i}} = -\mathrm{d}\dot{N}_{\mathrm{n}} \,,$$

daß die Transmission T durch das Target der Stärke Δx eine einfache Funktion von σ_{t} ist:

$$T = \frac{\dot{N}^{\mathrm{n}}(\Delta x)}{\dot{N}_0^{\mathrm{n}}} = \exp\left(-N_V^A \sigma_{\mathrm{t}} \, \Delta x\right). \tag{10.73}$$

In Relativmessungen der Zählrate mit und ohne Target kann σ_{t} mit hoher Genauigkeit für die gegebene Einschußenergie bestimmt werden. Wichtig ist die Einhaltung einer guten Geometrie, d. h. die Vermeidung systematischer Fehler durch Nachweis unter kleinen Winkeln gestreuter Neutronen. Erreicht wird dies durch gute Kollimierung, großen Quell-Detektor-Abstand und Platzierung des Targets auf halbem Abstand zwischen beiden (siehe Abb. 10.12).

Abb. 10.12
Transmissionsexperiment mit langsamen Neutronen zur Bestimmung von σ_{t}
R — thermische Säule eines Reaktors; T — zu untersuchendes Targetmaterial, D — BF_3-Zählrohr; Z — Zählgerät, K — Kollimator

Wird dieses Verfahren an einer weißen gepulsten Quelle betrieben, so kann mit Hilfe der Flugzeitspektrometrie (siehe 5.8.2.) der Verlauf $\sigma_{\mathrm{t}}(E_{\mathrm{n}})$ mit hoher Präzision in einem breiten Energiegebiet bestimmt werden. Ein Beispiel hierfür ist auf der Abb. 10.6 zu sehen.

3. Die Messung differentieller elastischer Streuquerschnitte erfordert die Bestimmung der Streurate $\mathrm{d}\dot{N}^{\mathrm{b}}/\mathrm{d}\Omega$ und der einfallenden Teilchenflußdichte $\dot{N}_{0\mathrm{S}}^{\mathrm{a}}$ (vgl. (10.14) und Abb. 10.3a). Beide können mit dem gleichen Detektor gemessen werden, der einmal die gezeigte und zum anderen die Position des Streuers einnimmt (siehe Abb. 10.13a). Der Wirkungsquerschnitt ist dann gegeben durch

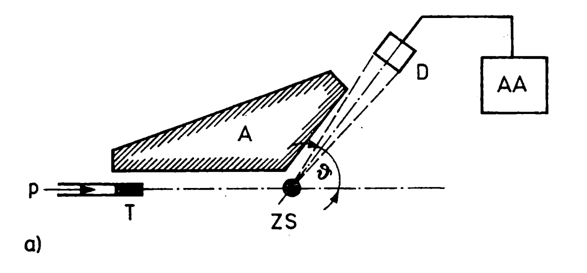
$$\left(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\right)_{\mathrm{el}} = \frac{\dot{N}_{\mathrm{r}}^{\mathrm{a}}(\vartheta)}{\dot{N}_{\mathrm{or}}^{\mathrm{a}}}, \quad \frac{R_{\mathrm{SD}}^2}{N^A} \tag{10.74}$$

mit den Bezeichnungen

$\dot{N}_{\mathrm{r}}^{\mathrm{a}}(\vartheta)$ — registrierte effektive Streurate unter dem Winkel ϑ (aus der Differenz je einer Messung mit und ohne Streuer);
$\dot{N}_{\mathrm{or}}^{\mathrm{a}}$ — registrierte Zählrate am Streuerort;
R_{SD} — Abstand Streuer-Detektor.

Die scharfen Strukturen der Winkelverteilung erfordern beträchtliche Abstände Target-Streuer-Detektor, um die Unschärfe $\Delta\vartheta$ ausreichend klein zu halten. Dadurch muß ein Kompromiß hinsichtlich verwendeter Streuergröße N^A getroffen werden, um die Meßzeiten in vertretbaren Grenzen zu halten. Gute Streuexperimente zeichnen sich dadurch aus, daß der Streuerdurchmesser D_{S} kleiner als 1/4 der freien Weglänge der Neutronen im Streuermaterial ist, d. h.

$$D_{\mathrm{S}} = \Delta x^{\max} \leqq \frac{1}{4} N_V^A \sigma_{\mathrm{t}} \,.$$



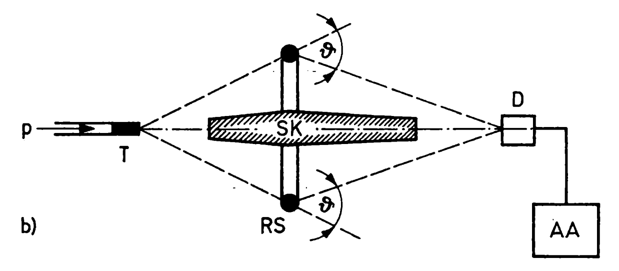


Abb. 10.13
Experimente zur Messung des differentiellen elastischen Streuquerschnitts $\sigma(E_n, \vartheta)$ mittels Rückstoßprotonen-Spektrometer
a) Zylindergeometrie, b) Ringgeometrie
T — Tritium-Gastarget zur Neutronenproduktion nach ${}^3_1H(p, n)\,{}^3_2He$, A — Abschirmung, ZS u. RS — Zylinder- u. Ringstreuer; SK — Schattenkonus; D — Rückstoß-Szintillationszähler; AA — Amplitudenanalysator

In diesem Fall können Mehrfachstreueffekte analytisch korrigiert werden. Durch Anwendung der Ringgeometrie (Abb. 10.13b) kann bei gleichem D_S die Streuermasse N^A wesentlich vergrößert und damit die erforderliche Meßzeit beträchtlich verringert werden.

Zur Separation unelastisch gestreuter Neutronen ist ein spektrometrischer Detektor, im gezeigten Fall ein Rückstoß-Spektrometer (siehe 4.4.3. und 5.3.2.) zu verwenden.

4. Höheren Aufwand erfordert die Messung doppelt-differentieller Wirkungsquerschnitte für Neutronen (Abb. 10.14) und geladene Teilchen (Abb. 10.15).

Im ersten Fall kommt meist die Flugzeitspektrometrie schneller Neutronen (siehe 5.8.2.) zum Einsatz, wozu ein gepulster Teilchenstrahl des Beschleunigers, die Flugstrecke L und ein schneller Detektor erforderlich sind. Die Energieauflösung wird durch Flugstrecke und Zeitunschärfe Δt bestimmt:

$$\frac{\Delta E^n}{E^n}\Big/\% = \frac{2{,}8(E^n/\text{MeV})^{1/2}}{L/\text{m}}\,\Delta t/\text{ns}\,, \tag{10.75}$$

Für $\Delta t = 2$ ns; $L = 5$ m und $E_n = 1$ MeV erhält man $\Delta E_n/E_n = 1{,}1\,\%$. Neben einer hohen Zeitschärfe der Messung, der Reduzierung des Untergrundes, wird die Optimierung von L und N^A wesentlich. Methoden der Neutronen-Gamma-Diskriminierung auf der Grundlage unterschiedlicher Abklingzeiten der Szintillatorsignale (siehe 5.5.1.) sind unerläßlich. Ein Beispiel von Meßergebnissen zeigt die Abb. 10.71.

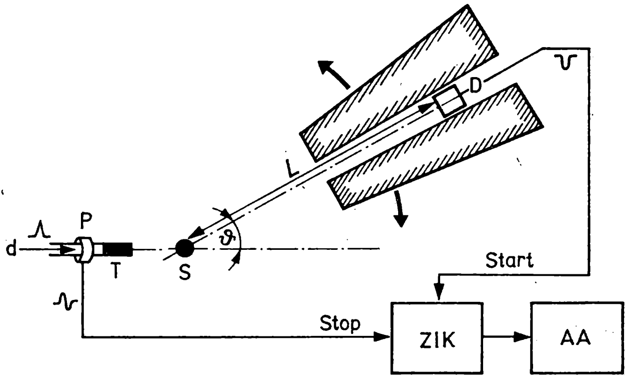


Abb. 10.14
Experiment zur Bestimmung des doppelt differentiellen Wirkungsquerschnitts $\sigma_{nn'}(E_n, E_{n'}, \vartheta)$ nach der Flugzeitmethode
d — gepulster Deutronenstrahl des Beschleunigers; T — Deuteriumgastarget $^2_1H(d, n)\,^3_2He$; P — pick-up-Zylinder zur Zeitnahme; D — organischer Szintilationszähler; ZIK-Zeit-Impulshöhe-Konverter; AA — Amplitudenanalysator

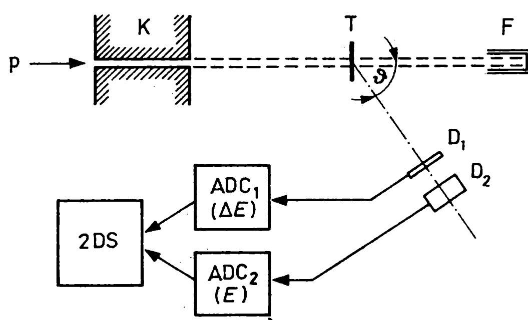


Abb. 10.15.
Experiment zur Bestimmung des doppelt differentiellen Wq. $\sigma_{pb}(E_p, E_b, \vartheta)$ für unterschiedliche geladene Teilchen b = p, d, t, ...
p — Protonenstrahl, K — Kollimator
T — dünnes Reaktionstarget, F — Faradaybecher, D_1 — ΔE-Halbleiterdetektor, D_2 — E-Halbleiterdetektor, ADC — Amplitude-Digital-Konverter, 2DS — Zweidimensionaler Speicher

In Experimenten mit geladenen Teilchen muß wegen der Ionisationsbremsung die Targetstärke extrem gering gehalten werden, so daß bereits die Targetherstellung ein nicht einfaches Problem ist. Die Messung des Flusses N_{0a} übernimmt gewöhnlich ein Strahlauffänger in Form eines Faraday-Bechers. Für die Teilchenspektrometrie werden meist Si-Halbleiterdetektoren (siehe 5.4.) eingesetzt, die in einer Vakuumkammer kreisförmig verschiebbar um das Target angeordnet sind. Dünne Durchschußdetektoren vor dem spektroskopischen Detektor ermöglichen die Identifizierung der Teilchensorte b, da deren Signalamplitude proportional dem Energieverlust ΔE_a mit

$$\Delta E \sim z^2/v^2 \qquad (4.5)$$

stark ladungsabhängig ist.

Der Einsatz von Beschleunigern mit hoher Energieschärfe (Tandemgenerator, Isochronzyklotron) gestattet in derartigen Experimenten die Messung von Anregungsfunktionen mit höchster Präzision und Energieschärfe ($\Delta E_a \leqq 1 ... 2$ keV).

5. Die Untersuchung von Neutronenresonanzen im eV-Gebiet erfolgt heute fast ausschließlich nach der Flugzeitspektrometrie. Hierzu werden sehr intensive Impulsneutronenquellen ($\Delta t_i \lessapprox 1$ µs) in Form von Elektronenbeschleunigern (Erzeugung von Fotoneutronen aus Bremsstrahlung; siehe 4.2.3. und 4.3.1.), Protonenbeschleunigern hoher Energie (Spallationsneutronen; siehe 4.4.1.) oder Impulsreaktoren (vgl. 5.8.2.) benötigt. Auf Abb. 10.16 ist eine experimentelle Anordnung zur gleichzeitigen Messung der Transmission sowie der Neutronen- und Gammaemission aus Compoundkernresonanzen dargestellt. Im gleichen Bild

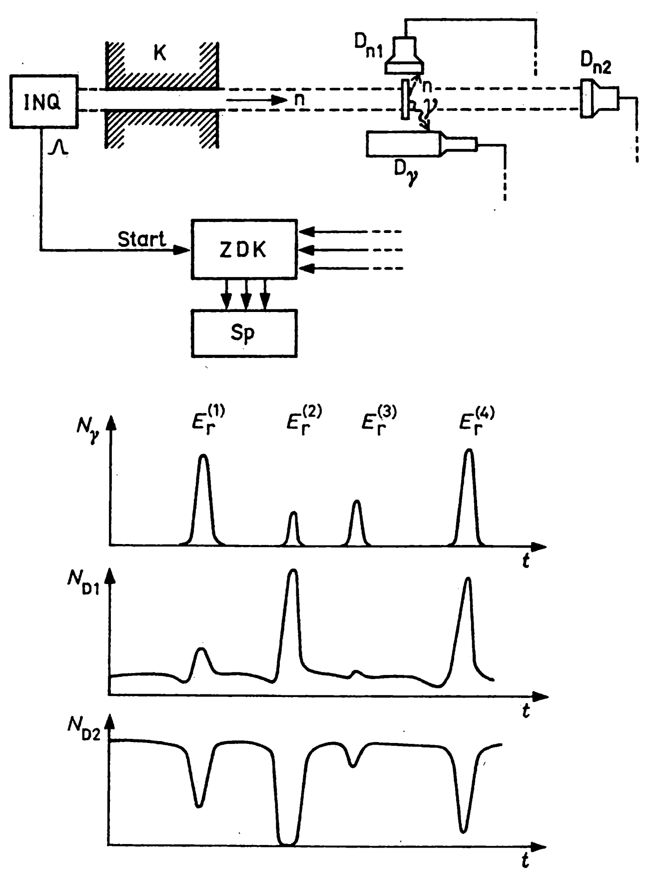


Abb. 10.16
Experiment zur Bestimmung partieller und totaler Breiten von Neutronenresonanzen nach der Flugzeitmethode
INQ — Impulsneutronenquelle; D_{n1} — ^{6}Li-Glas-Szintillationsdetektor; D_{n2} — borierter Flüssigkeitsszintillator; D_γ — großvolumiger Flüssigkeitsszintillator; ZDK — Zeit-Digital-Konverter; Sp — Speicher; N_{D1}, N_{D2}, N_γ — mit den jeweiligen Detektoren gemessene Zeitspektren; $E_r^{(i)}$ — Lage der beobachteten Neutronenresonanzen

ist der typische Zählratenverlauf der drei Detektoren über der Flugzeit dargestellt. Die Flächen A unter bzw. über den Resonanzkurven sind proportional

$$A_t \sim g \frac{\Gamma_n}{\Gamma} \qquad A_n \sim g \frac{\Gamma_n^2}{\Gamma^2} \qquad A_\gamma \sim g \frac{\Gamma_n \Gamma_\gamma}{\Gamma^2}$$

und gestatten damit eine eindeutige Bestimmung der Resonanzparameter $E_r^{(i)}$, $g(I^C)$, Γ, Γ_γ und Γ_n (vgl. Formeln (10.244) bis (10.248)).

6. Die Polarisation der Teilchen bei elastischer Streuung liefert Informationen über die Spin-Bahn-Wechselwirkung (siehe 7.2.3.). Ein typisches Experiment zur Messung der Polarisation von Protonen ist auf Abb. 10.17 dargestellt. Gemessen wird die sogenannte Rechts-Links-Asymmetrie AS, die das Produkt aus dem Polarisationsgrad des Strahls P_a und dem gesuchten Polarisationsvermögen P_A der Streukerne darstellt:

$$AS = \frac{\dot{N}_{rL} - \dot{N}_{rR}}{\dot{N}_{rL} + \dot{N}_{rR}} = P_a \cdot P_A\,, \tag{10.76}$$

mit

$$P_a = \frac{\dot{N}_0^a - \dot{N}_0^a}{\dot{N}_0^a + \dot{N}_0^a}\,. \tag{10.77}$$

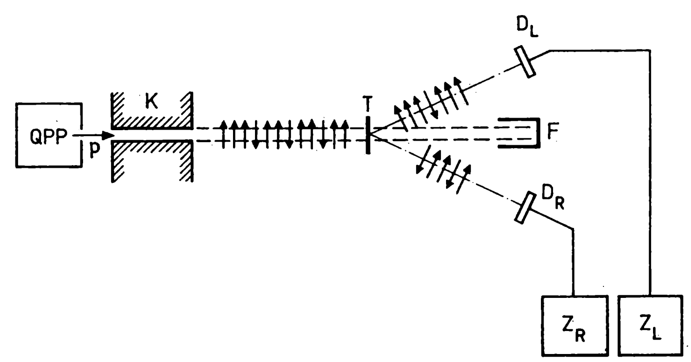


Abb. 10.17
Experiment zur Untersuchung der Rechts-Links-Asymmetrie bei der Streuung teilweise polarisierter Protonen
QPP — Quelle polarisierter Protonen; D_L, D_R — Halbleiterdetektoren Links und Rechts; Z_L, Z_R — Zähler Links und Rechts; T — Streutarget (Analysator)

Im dargestellten Beispiel ist

$$P_a = \frac{9-3}{9+3} = \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad P_A = \frac{AS}{P_a} = 2 \cdot \frac{7-5}{12} = \frac{1}{3}\,.$$

Da die Asymmetrie als Verhältnis einer meist kleinen Differenz zur großen Summe aus statischen Zählraten gebildet wird, sind große Meßzeiten zur Erzielung ausreichender statistischer Genauigkeit erforderlich (vgl. 5.2.). Hinzu kommen extreme Forderungen an die Identität beider Meßanordnungen, denen gewöhnlich durch regelmäßigen Austausch beider Apparaturen während des Experiments Rechnung getragen wird.

7. Im Zusammenhang mit den Anforderungen der Kernenergetik werden Wirkungsquerschnitte und andere Charakteristika der Kernspaltung besonders intensiv und mit hoher Präzision untersucht. Stellvertretend für viele unterschiedliche Anordnungen ist auf Abb. 10.18 ein Experiment zur Messung von σ_{nf} für Neutronen der Reaktion ${}^3_1H(d, n){}^4_2He$ gezeigt. Die „assoziierten" Alphateilchen dieser Reaktion werden mit einem schnellen Szintillationsdetektor registriert, der einen Koinzidenzimpuls für jedes einzelne, in den Raumwinkelbereich $d\Omega$ emittierte Neutron liefert und damit zugleich den Fluß $\dot{N}_0^n$ absolut mißt. Mit einer Spalt-Ionisationskammer (5.3.2.), in der eine dünne Schicht des zu untersuchenden Spaltmaterials auf der Kathode aufgetragen ist, werden die entsprechenden Spaltbruchstücke mit nahezu 100%iger Effektivität registriert (siehe auch 12.3.5., Punkt 5).

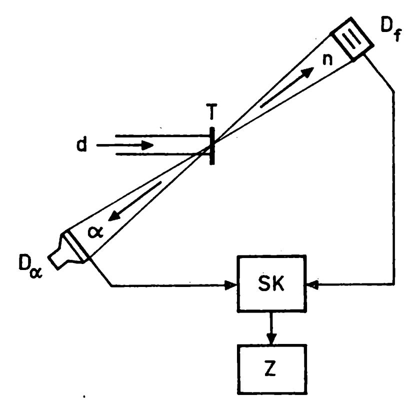


Abb. 10.18
Experiment zur Messung von Spaltquerschnitten nach der Methode der zeitkorrelierten assoziierten Teilchen (MEZKAT)
T — Tritium-Target für die Reaktion T(d, α) ${}^4_2He$; D_f — Spaltkammer, D_α — Szintillationsdetektor, SK — Schnelle Koinzidenz; Z — Zähler

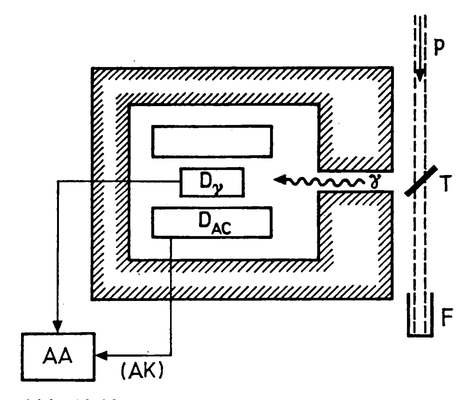


Abb. 10.19
Experiment zur Messung von γ-Spektren aus der Reaktion (p, p'γ)
D_γ-Ge(Li)-Gammadetektor; DAC — Anticompton — Ringdetektor (flüssiger Szintillator); AK — Antikonzidenzsignal; AA — Amplitudenanalysator

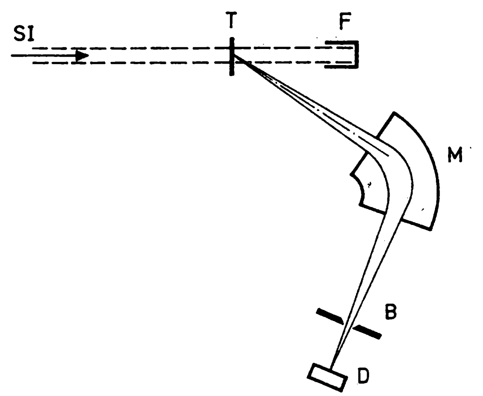


Abb. 10.20
Experiment zur Analyse der Massen- und Energieverteilung von Reaktionsprodukten aus Schwerionenreaktionen
M — Analysiermagnet; B — Blende; D — Halbleiterdetektor; SI — Schwerionenstrahl; T — Target; F — Faradaybecher

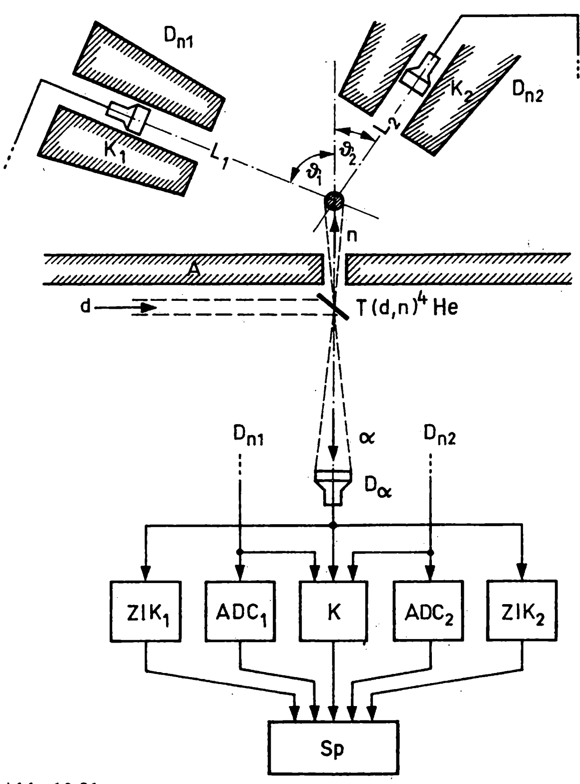


Abb. 10.21
Experimentelle Anordnung zur Messung von $\sigma_{n,2n}(E_n, E_{n1}, \vartheta_1, E_{n2}, \vartheta_2)$ nach der Flugzeitmethode; Bezeichnungen wie auf den vorhergehenden Abbildungen

8. Die Entwicklung von Ge(Li)-Gammaspektrometern (5.4.2.) führte zu qualitativ neuen Möglichkeiten der Untersuchung von Gammaspektren aus Kernreaktionen. Eine Anordnung, in der durch einen ringförmigen Antikoinzidenzdetektor Ereignisse der Compton-Streuung im Germaniumdetektor unterdrückt werden, ist auf Abb. 10.19 dargestellt. Der gewöhnlich hohe Raumuntergrund erfordert eine starke, allseitige Abschirmung.

9. In Schwerionenreaktionen ist die Vielfalt entstehender Reaktionsprodukte meist noch wesentlich höher als in Reaktionen mit leichten Inzidenzteilchen. Zur Unterscheidung kleiner Massendifferenzen großer Massenzahlen ist der Magnetanalysator (5.8.1.) geeignet. Die auf Abb. 10.20 gezeigte kombinierte Impuls- und Energieanalyse gestattet die eindeutige Zuordnung von Energie und Masse der Produktteilchen. Neuerdings wird hierzu auch in wachsendem Maße die Flugzeitspektrometrie für geladene Reaktionsprodukte herangezogen. Zu den nach wie vor wenig untersuchten (weil experimentell sehr schwierigen!) Prozessen gehören vierfach-differentielle Querschnitte und Korrelationen von Produkten aus Mehrteilchenreaktionen im Ausgangskanal. Eine Experimentanordnung für die Messung von $\sigma_{n,2n}(E_n, E_{n1}, \vartheta_1, E_{n2}, \vartheta_2)$ für DT-Neutronen mit Hilfe der Flugzeitmethode zeigt Abb. 10.21. Die Koinzidenz mit den assoziierten Alphateilchen sichert in diesem Fall sowohl eine Untergrundreduzierung als auch die Gewinnung von Zeitmarken für die Flugzeitmessung in beiden Kanälen.

10.3. Grundlagen der Theorie der Kernreaktionen

10.3.1. Allgemeine Betrachtungen zu Stoßprozessen

1. Die allgemeine Theorie der Kernreaktionen beruht auf der nichtrelativistischen Quantenmechanik der Stoßprozesse. Als grundlegende Bewegungsgleichung gilt die zeitabhängige Schrödinger-Gleichung (10.59) für ein Vielteilchensystem, das aus der Gesamtheit der N Projektil- und Targetnukleonen besteht. Bei vorgegebenem Hamilton-Operator H sind die Lösungen $\Psi(1, \dots, N, t)$ der Schrödinger-Gleichung so zu wählen, daß Anfangs- und Randbedingungen erfüllt werden, wie sie der physikalischen Situation entsprechen, die in Reaktionsexperimenten durch die experimentelle Anordnung realisiert ist. Im Grenzübergang $t \to +\infty$ enthält die Wellenfunktion dann alle Informationen über den Zustand des Systems nach der Wechselwirkung, so daß die im Experiment beobachteten Größen wie mehrfach differentielle Wirkungsquerschnitte, Spinorientierungen der Reaktionsprodukte oder Winkelkorrelationen zwischen mehreren auslaufenden Teilchen mit Hilfe der asymptotischen Form der Wellenfunktion berechnet werden können. Das Ergebnis einer Kernreaktion hängt sowohl von den Eigenschaften der beteiligten Kerne als auch von der Wechselwirkung ab, die während des Prozesses für ein endliches Zeitintervall zwischen ihnen einsetzt. Da die Schrödinger-Gleichung für das Vielteilchensystem nicht exakt lösbar ist, liegt eine wesentliche Aufgabe der Stoßtheorie darin, bei vorgegebenem Hamilton-Operator geeignete Näherungsmethoden aufzufinden, die eng mit dem physikalischen Bild, das man sich vom Mechanismus der Reaktion macht, verknüpft sind. Dabei stellt sich heraus, daß ein enger Zusammenhang zwischen dem dominierenden Reaktionsmechanismus und der Struktur der an der Reaktion beteiligten Kerne besteht, so daß die Analyse von Reaktionsdaten auch wichtige Informationen über den Gültigkeitsbereich von Kernstrukturmodellen liefert.

Wir beginnen unsere Betrachtungen mit einigen qualitativen Bemerkungen zu Stoßprozessen.

2. Ein grundlegender Ausgangspunkt für die Formulierung der quantenmechanischen Stoßtheorie sind die experimentellen Bedingungen, unter denen die Messung einer Kernreaktion im Laboratorium erfolgt. Schematisch kann die experimentelle Standardanordnung wie folgt idealisiert dargestellt werden. Eine Quelle (Beschleuniger) liefert einen Strahl monoenergetischer Teilchen, die durch einen Kollimator scharf gebündelt werden. Dieser Strahl trifft in großer Entfernung von der Quelle auf ein Target A, in dem die Reaktion a + A → b + B abläuft. Außerhalb des einfallenden Strahls befindet sich in großem Abstand vom Target ein Detektor. Er registriert die Zahl der Teilchen b, die unter einem bestimmten Reaktionswinkel mit einer bestimmten kinetischen Energie auftreten (vgl. auch Abb. 10.1).

Um diesen Vorgang theoretisch zu beschreiben, wollen wir die grundlegenden Begriffe „Kanal" und „Wechselwirkungsgebiet", die im Abschnitt 10.1.1 bereits eingeführt wurden, strenger fassen.

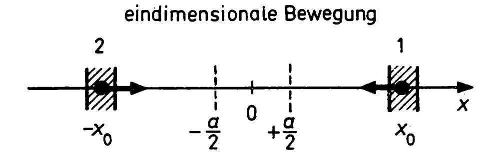
Die Wellenfunktion $\Psi(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \dots, \boldsymbol{r}_N, t)$, die die zeitliche Entwicklung des Systems a + A beschreibt, ist im $3N$-dimensionalen Konfigurationsraum $(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \dots, \boldsymbol{r}_N)$ definiert. Sie ordnet zu jedem Zeitpunkt t dem Punkt $(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \dots, \boldsymbol{r}_N)$, dem eine bestimmte räumliche Anordnung der $N = N_a + N_A$ Nukleonen entspricht, eine komplexe Zahl zu. Zum Zeitpunkt $t = -\infty$ liegt als Anfangszustand einer Reaktion eine Aufteilung λ des Gesamtsystems in zwei Nukleonengruppen $N_1 \equiv N_a$, $N_2 \equiv N_A$ vor, die sich in einem bestimmten inneren Zustand befinden und in großem Abstand voneinander lokalisiert sind. Die inneren Zustände der Kerne N_1, N_2 wollen wir durch den Spin I_1, I_2, die Parität π_1, π_2 und eine zusätzliche Quantenzahl $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ bezeichnen. Diese Anfangssituation charakterisiert einen Kanal der Reaktion, der durch die Angabe eines Kanalindex α festgelegt wird:

$$\alpha \equiv \{\lambda I_1 I_2 \pi_1 \pi_2 \varkappa_1 \varkappa_2\}\,, \qquad \lambda \equiv (N_1, N_2)\,, \qquad N = N_1 + N_2\,. \tag{10.78}$$

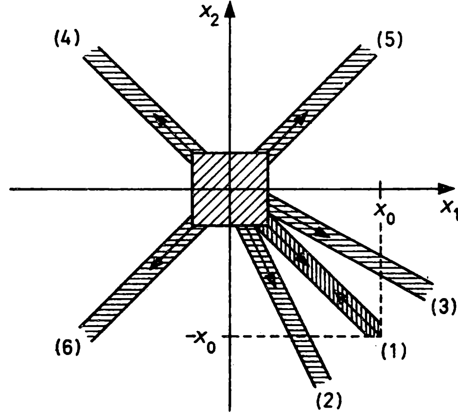
Die zugehörige Wellenfunktion $\Psi(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \dots, \boldsymbol{r}_N, t \to -\infty)$ ist also nur in einem begrenzten Bereich des Konfigurationsraums von Null verschieden, der diesem Anfangszustand entspricht. Im Zeitablauf bewegt sich das System zunächst frei, wobei die Wellenfunktion in anderen Gebieten des Konfigurationsraums von Null verschieden wird, die insgesamt den Kanal α der Reaktion bilden. Für einen gegebenen Kanal α bezeichnet man als Kanalradius R_α den minimalen Abstand der Nukleonengruppe N_1, N_2, bei dem zwischen beiden Kernen noch keine starken Wechselwirkungen auftreten. Es gilt etwa $R_\alpha \approx r_0(N_1^{1/3} + N_2^{1/3})$, $r_0 \approx 1{,}4 \cdot 10^{-15}$ m. Der Bereich des Konfigurationsraums, in dem für alle Aufteilungen λ die Massenmittelpunkte beider Kerne N_1, N_2 einen Abstand $r < R_\alpha$ voneinander besitzen, wird als Wechselwirkungsgebiet bezeichnet. Alle Kanäle einer Reaktion „münden" in das Wechselwirkungsgebiet. Durch die Begriffe „Kanal" und „Wechselwirkungsgebiet" wird also eine Aufteilung des Bereichs des Konfigurationsraumes, in dem die Wellenfunktion Ψ im Reaktionsablauf von Null verschieden wird, vorgenommen; außerhalb dieses Bereiches verschwindet $\Psi(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \dots, \boldsymbol{r}_N, t)$ für alle Zeitpunkte zwischen $t = -\infty$ und $t = +\infty$ identisch.

Als Beispiel verfolgen wir anhand von Abb. 10.22 die eindimensionale Bewegung zweier Teilchen längs der x-Achse, wobei zwischen ihnen eine Kraft mit der endlichen Reichweite a wirkt. Im Anfangszustand sind die Reaktionspartner mit einer gewissen Ortsunschärfe bei $(+x_0, -x_0)$ lokalisiert. Laufen die beiden Teilchen mit gleicher Geschwindigkeit aufeinander zu, dann bewegt sich das System im zweidimensionalen Konfigurationsraum (x_1, x_2) längs der in Abb. 10.22 im rechten unteren Quadranten angegebenen Trajektorie (Eingangskanal). Die Wechselwirkung zwischen beiden Teilchen beginnt am Punkt $(+a/2, -a/2)$, wenn man von der Ortsunschärfe absieht. Sie besteht, solange beide Teilchen relativ zueinander eine Lage einnehmen, die im Konfigurationsraum zu einem Punkt innerhalb eines Quadrates der Kantenlänge a mit dem Koordinatenursprung als Mittelpunkt gehört (Wechselwirkungsgebiet). Die Abb. 10.22 enthält nun verschiedene Ausgangskanäle. Eine elastische Rückstreuung entspricht dem Fall, daß beide Teilchen das Wechselwirkungsgebiet mit gleicher Geschwindigkeit aber umgekehrter Bewegungsrichtung verlassen (elastischer Kanal, Ausgangskanal = Eingangskanal). Die Trajektorie im linken oberen Quadranten wird erreicht, wenn sich im Endzustand das Teilchen 1 nach links, das Teilchen 2 mit gleicher Geschwindigkeit nach rechts bewegt (Austauschreaktion). Bei einer unelastischen Streuung nimmt das System Trajektorien im rechten unteren Quadranten an, die oberhalb

(unterhalb) des elastischen Kanals liegen, je nachdem ob Teilchen 1 schneller (langsamer) ausläuft als Teilchen 2. Bildet sich als Ergebnis der Wechselwirkung ein gebundener Zustand, dann bewegen sich im Endzustand beide Teilchen gemeinsam nach rechts (rechter oberer Quadrant) oder links (linker unterer Quadrant). Die Punkte, in denen der Kanal das Wechselwirkungsgebiet durchstößt, bilden die Oberfläche des Kanals. Wenn im Zeitablauf der Reaktion das System vom Wechselwirkungsgebiet her diese Kanaloberfläche im Konfigurationsraum erreicht hat, liegt der „Ausgang" der Reaktion fest; zu späteren Zeiten bewegen sich die Reaktionsprodukte frei.







||||||| Eingangskanal, ≡ Ausgangskanäle
/// Wechselwirkungsgebiet

Abb. 10.22
Zum Begriff des Reaktionskanals: Eindimensionale Bewegung zweier Teilchen. Die Wellenfunktion ist nur in den schraffierten Bereichen des Konfigurationsraums von Null verschieden. Kanal (1): Eingangskanal, elastische Rückstreuung. Kanal (2): unelastische Streuung, Teilchen 1 läuft mit geringer Geschwindigkeit zurück. Kanal (3): unelastische Streuung, Teilchen 2 läuft mit geringer Geschwindigkeit zurück. Kanal (4): Austauschprozeß. Kanäle (5), (6): beide Teilchen laufen als gebundenes System nach rechts bzw. links aus dem Wechselwirkungsgebiet

3. Eine Kernreaktion ist kein stationärer Prozeß. Die adäquate theoretische Beschreibung muß daher von einer Wellenpaketdarstellung ausgehen (siehe Abb. 10.23). Im Anfangszustand sind Projektil und Target in großem Abstand voneinander lokalisiert. Ihre Relativbewegung im Eingangskanal erfolgt wechselwirkungsfrei. Sie wird durch ein Wellenpaket beschrieben, das eine bestimmte Impulsverteilung um den durch Beschleuniger und Kollimator gegebenen Mittelwert besitzt. Wir nehmen an, daß das Wellenpaket so aufgebaut ist, daß die Verbreiterung der Impulsverteilung im Zeitablauf gering bleibt und von der Impulsänderung durch die eigent-

liche Streuung unterschieden werden kann. Außerdem setzen wir voraus, daß sich die einzelnen Wellenpakete, die den Teilchenstrahl bilden, nicht überlappen, so daß die Reaktion als individuelle Projektil-Target-Wechselwirkung abläuft. Verfolgen wir das Wellenpaket im Konfigurationsraum, dann vollzieht sich eine Änderung seines Zustandes, sobald das Wechselwirkungsgebiet erreicht wird. Im Wechselwirkungsgebiet können sehr komplizierte Zustände des Gesamtsystems angenommen werden, in denen die Ausgangssituation der Reaktion nicht mehr „erkennbar" ist. Zu späteren Zeitpunkten formieren sich dann an der Oberfläche des Wechselwirkungsgebietes wiederum Wellenpakete, die aus auslaufenden Kugelwellen mit winkelabhängigen Amplituden aufgebaut sind. Neben dem Eingangskanal liegen auch in allen anderen offenen, d. h. durch den Energieerhaltungssatz erlaubten Reaktionskanäle auslaufende Wellenpakete vor, die gegenüber dem durchgelassenen Wellenpaket eine Zeitverzögerung besitzen können. Die weitere Ausbreitung der Wellenpakete in den Kanälen erfolgt dann wiederum frei bis zum Teilchennachweis im Detektor. Die Stoßtheorie hat also die Aufgabe, die Beziehungen zwischen den Parametern, die den Zustand der Reaktionsprodukte am Detektorort charakterisieren, und der Dynamik der Nukleonenbewegung im Wechselwirkungsgebiet, wie

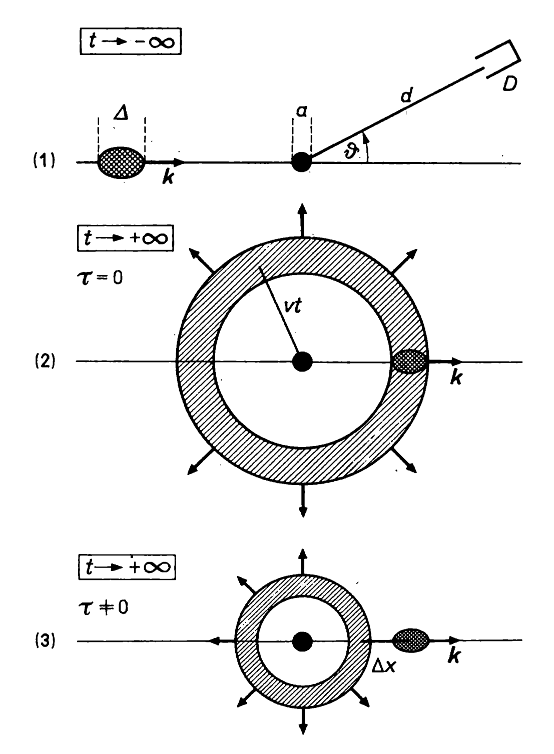


Abb. 10.23
Streuung eines Wellenpakets der Breite Δ mit dem Schwerpunktimpuls $\hbar k$ an einem Potential der Reichweite a. d: Abstand des Streuzentrums vom Detektor D. (1): Anfangszustand zur Zeit $t \to -\infty$. (2): Endzustand zur Zeit $t \to +\infty$, keine zeitliche Verzögerung des gestreuten Wellenpakets ($\tau = 0$). (3): Endzustand bei verzögertem Auslaufen des gestreuten Wellenpakets ($\tau \neq 0$). Δx: Abstand der Schwerpunkte des durchgelassenen und des gestreuten Wellenpakets

sie durch die Matrixelemente der Wechselwirkung gegeben ist, zu bestimmen. Die Zustände des Systems im Wechselwirkungsgebiet sind nicht direkt meßbar.

Wir haben erwähnt, daß gestreute Wellenpakete gegenüber dem durchgelassenen Wellenpaket eine zeitliche Verzögerung besitzen können, die aus der Energieabhängigkeit der Phasenverschiebung abgeschätzt werden soll. Dazu betrachten wir ein Wellenpaket, das durch Überlagerung auslaufender Kugelwellen mit verschiedener Wellenzahl entsteht. Dieses Wellenpaket sei zum Zeitpunkt $t = 0$ an einem kugelsymmetrischen Streuzentrum bei $r = 0$ lokalisiert. Breitet sich dieser Zustand frei aus, dann hat seine Komponente mit der Energie E zur Zeit t die Form

$$\frac{1}{r}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(kr-\frac{E}{\hbar}t\right)}, \qquad E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}. \tag{10.79}$$

Wir nehmen an, daß die Wechselwirkung eine endliche Reichweite R' besitzt. Außerhalb des Wechselwirkungsgebietes $r > R'$ unterscheidet sich die Komponente des gestreuten Wellenpakets zur Energie E von dem Ausdruck (10.79) dann nur durch eine zeitliche konstante Phasenverschiebung δ, die von der Energie abhängt:

$$\frac{1}{r}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(kr+\delta(E)-\frac{E}{\hbar}t\right)}, \qquad r \geqq R'. \tag{10.80}$$

Wir sagen, das Wellenpaket habe die Strecke von $r = 0$ bis $r = R > R'$ durchlaufen, wenn sich die verschiedenen Komponenten (10.80) bei $r = R$ konstruktiv kohärent überlagern, also zwei Komponenten mit den Wellenzahlen k und k' bei $r = R$ die gleiche Phase besitzen,

$$kR + \delta(E) - \frac{E}{\hbar}t = k'R + \delta(E') - \frac{E'}{\hbar}t. \tag{10.81}$$

Betrachten wir zwei in der Energie infinitesimal benachbarte Anteile des Wellenpakets, dann ist diese Bedingung zur Zeit T

$$T = \hbar R\,\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}E} + \hbar\,\frac{\mathrm{d}\delta(E)}{\mathrm{d}E} = \frac{R}{v} + \hbar\,\frac{\mathrm{d}\delta(E)}{\mathrm{d}E} \tag{10.82}$$

erfüllt. Der erste Summand entspricht einer freien Bewegung des Schwerpunktes des Wellenpaketes. Der zweite Summand bedeutet eine Zeitverschiebung infolge der Wechselwirkung, deren Einfluß auf die einfallende Welle durch die Streuphase parametrisiert ist. Da bei einer Kernreaktion die Strecke R zweimal durchlaufen wird, gilt für den Zeitunterschied, mit dem das durchgelassene und das gestreute Wellenpaket das Wechselwirkungsgebiet verlassen

$$\tau = 2\hbar\,\frac{\mathrm{d}\delta(E)}{\mathrm{d}E}. \tag{10.83}$$

Aus Gl. (10.83) ziehen wir den Schluß, daß die Zeitverschiebung τ groß ist, wenn die Streuphase und damit der Wirkungsquerschnitt stark mit der Energie variieren. Diese Beziehung zwischen Reaktionszeit und Energieabhängigkeit der Wirkungsquerschnitte werden wir in zahlreichen Analysen der experimentellen Daten verwenden.

10.3.2. Einführung der S-Matrix

1. Wir gehen nun dazu über, die Überlegungen des vorangegangenen Abschnitts mathematisch zu fassen. Zur Vereinfachung betrachten wir die Streuung eines Teilchens an einem zeitunabhängigen Potential V. Die möglichen Zustände $\psi(t)$ sind Lösungen der zeitabhängigen Schrödinger-Gleichung

$$-\frac{\hbar}{\mathrm{i}}\frac{\partial}{\partial t}\psi(t) = H\psi(t), \qquad H = H_0 + V. \tag{10.84}$$

Bei vorgegebenem Anfangszustand $\psi(t_0)$ besitzt Gl. (10.84) die formale Lösung

$$\psi(t) = e^{-\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)}\,\psi(t_0) \equiv U(t, t_0)\,\psi(t_0)\,. \tag{10.85}$$

Der Zeitentwicklungsoperator

$$U(t, t_0) = e^{-\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)} \tag{10.86}$$

transformiert den Anfangszustand $\psi(t_0)$ zur Zeit $t = t_0$ in den Zustand $\psi(t)$ zur Zeit t. Wenn H ein hermitescher Operator ist, dann wird U unitär

$$U^+(t, t_0) = e^{\frac{i}{\hbar}H^+(t-t_0)} = e^{\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)} = U^{-1}(t, t_0)\,, \tag{10.87}$$

und die Normierung der Wellenfunktion bleibt im Zeitablauf erhalten. Außerdem gelten die Beziehungen

$$\begin{aligned} &U(t, t) = 1,\ U(t, t') = U^{-1}(t', t) \\ &U(t, t'')\,U(t'', t') = U(t, t')\,. \end{aligned} \tag{10.87a}$$

Wir gehen nun von dem Schrödinger-Bild zum Wechselwirkungsbild über:

$$\psi_W(t) = e^{\frac{i}{\hbar}H_0 t}\,\psi(t)\,. \tag{10.88}$$

Dieses Bild ist dadurch ausgezeichnet, daß ein Eigenzustand Φ von H_0, der einer freien Bewegung des Teilchens entspricht, zeitunabhängig wird,

$$\Phi_W(t) = e^{\frac{i}{\hbar}H_0 t}\,\Phi(t) = e^{\frac{i}{\hbar}H_0 t_0}\,\Phi(t_0)\,. \tag{10.89}$$

Für die zeitabhängige Schrödinger-Gleichung erhalten wir im Wechselwirkungsbild

$$-\frac{\hbar}{i}\frac{\partial\psi_W(t)}{\partial t} = V(t)\,\psi_W(t)\,, \tag{10.90}$$

$$V(t) = e^{\frac{i}{\hbar}H_0 t}\,V\,e^{-\frac{i}{\hbar}H_0 t}\,, \qquad \frac{\partial V(t)}{\partial t} = \frac{i}{\hbar}\,[H, V(t)]\,. \tag{10.91}$$

Die Zeitabhängigkeit des Zustandes $\psi_W(t)$ ist vollständig durch das Potential $V(t)$ bestimmt.

Wie im Falle des Schrödinger-Bildes läßt sich auch für das Wechselwirkungsbild ein Evolutionsoperator einführen

$$U_W(t, t_0) = e^{\frac{i}{\hbar}H_0 t}\,e^{-\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)}\,e^{-\frac{i}{\hbar}H_0 t_0}\,. \tag{10.92}$$

Der Operator (10.92) transformiert den Zustand ψ_W zwischen den Zeitpunkten t_0 und t

$$\psi_W(t) = U_W(t, t_0)\,\psi_W(t_0)\,. \tag{10.93}$$

Wir nehmen an, daß das Teilchen zu Beginn des Streuexperiments zum Zeitpunkt $t = -\infty$ durch ein lokalisiertes Wellenpaket Φ_i beschrieben werden kann. Zur Zeit t befindet sich das Teilchen dann im Zustand

$$\psi_W(t) = U_W(t, -\infty)\,\Phi_i\,, \tag{10.94}$$

wobei der Grenzwert des Zeitentwicklungsoperators für $t \to -\infty$ durch

$$U_W(t, -\infty) = \lim_{\varepsilon\to 0}\,\varepsilon\int_{-\infty}^{0} e^{\varepsilon t'}\,U_W(t, t')\,dt' \tag{10.95}$$

definiert wird. Um den Zustand zum Zeitpunkt $t = 0$ zu erhalten, führt man den Møller-Operator $\Omega^{(+)}$,

$$\Omega^{(+)} = U_{\mathrm{W}}(0, -\infty) = \lim_{t \to -\infty} e^{iHt}\, e^{-iH_0 t} = \lim_{\varepsilon \to 0} \left(-\varepsilon \int_0^{-\infty} e^{\varepsilon t}\, e^{iHt}\, e^{-iH_0 t}\, dt \right) \tag{10.96}$$

und analog $\Omega^{(-)} = U_{\mathrm{W}}(0, +\infty)$ mit der Eigenschaft

$$\Omega^{(\pm)+} \gtrless U_{\mathrm{W}}^{+}(0, \mp\infty) = U_{\mathrm{W}}(\mp\infty, 0) \tag{10.97}$$

ein. Für den Zustand zum Zeitpunkt $t = +\infty$, der alle Informationen über den Ausgang des Streuexperiments enthält, gilt dann

$$\lim_{t \to +\infty} \psi_{\mathrm{W}}(t) = U(+\infty, 0)\, U(0, -\infty)\, \Phi_i = \Omega^{(-)+}\Omega^{(+)}\Phi_i\,. \tag{10.98}$$

Das Produkt der Møller-Operatoren $\Omega^{(-)+}\Omega^{(+)}$ bezeichnet man als Streuoperator S

$$S = \Omega^{(-)+}\Omega^{(+)}\,. \tag{10.99}$$

Der Streuoperator S führt den Anfangszustand Φ_i zum Zeitpunkt $t = -\infty$ in den Endzustand zum Zeitpunkt $t = +\infty$ über,

$$\lim_{t \to +\infty} \psi_{\mathrm{W}}(t) = S\Phi_i\,. \tag{10.100}$$

Die Matrixelemente von S in der Darstellung durch die Eigenfunktionen von H_0 können mit Hilfe von (10.99) und (10.97) als Skalarprodukt zweier Gesamtlösungen $\psi_i^{(+)}$, $\psi_f^{(-)}$ mit unterschiedlichem asymptotischen Verhalten geschrieben werden,

$$\begin{aligned} S_{fi} &= \langle \Phi_f |\, S\, | \Phi_i \rangle = \langle \Phi_f |\, \Omega^{(-)+}\Omega^{(+)}\, | \Phi_i \rangle \\ &= \langle \Omega^{(-)}\Phi_f \mid \Omega^{(+)}\Phi_i \rangle = \langle \psi_f^{(-)} \mid \psi_i^{(+)} \rangle\,. \end{aligned} \tag{10.101}$$

Da die Wahrscheinlichkeit W_{fi}, im Endzustand $\psi_i(+\infty)$, der sich aus dem Anfangszustand Φ_i entwickelt, den Eigenzustand Φ_f des ungestörten Systems realisiert zu finden, nach

$$W_{fi} = |\langle \Phi_f \mid \psi_i(+\infty) \rangle|^2 = |\langle \Phi_f, S\Phi_i \rangle|^2 = |S_{fi}|^2 \tag{10.102}$$

berechnet werden kann, bestimmen die Streumatrixelemente S_{fi} die Übergangswahrscheinlichkeit aus dem gegebenen Anfangszustand i in einen möglichen Endzustand f. Die Erhaltung der Norm verlangt, daß die Streumatrix unitär ist,

$$S^+S = 1\,. \tag{10.103}$$

Mit Hilfe der hermetischen Matrix K läßt sich die Streumatrix auch in der Form

$$S = \frac{1 - \frac{i}{2}K}{1 + \frac{i}{2}K}\,, \qquad K^+ = K\,, \tag{10.104}$$

darstellen, die bei der Untersuchung statistischer Eigenschaften von Stoßprozessen oft verwendet wird.

2. Eine Analyse der Bedingungen, unter denen ein Teilchenstrahl durch die experimentelle Anlage (Ionenquelle, Beschleuniger, Kollimator) präpariert wird, zeigt, daß die in kernphysikalischen Experimenten vorliegenden Teilchen durch Wellenpakete zu beschreiben sind, die eine zeitliche Ausdehnung von $\Delta t \approx 10^{-10}$ s und eine Energiebreite von $\Delta E \approx 10^{-7}$ eV besitzen. Diese Abschätzung entspricht einer räumlichen Ausdehnung des Wellenpakets von $\Delta r \approx 10^{-1}$ cm in Länge und Breite. Demgegenüber beträgt die Reichweite R der Kernkräfte

nur $R \approx 10^{-13}$ cm, so daß die Wellenpakete das Streuzentrum weit überdecken und Randeffekte für die Streuung keine Rolle spielen. Auch die räumlichen Abstände Beschleuniger-Target, L_1, und Target-Detektor, L_2, sind um viele Zehnerpotenzen größer als der Wechselwirkungsradius, $L_1 \approx L_2 \approx 10^2$ cm, $R/L_1 \approx 10^{-15}$. Dieses Längenverhältnis hat zur Folge, daß im Prozeßablauf zu sehr frühen (sehr späten) Zeitpunkten mit Sicherheit solche Zustände des Gesamtsystems vorliegen, in denen einlaufende (auslaufende) Teilchen und Targetkern nicht miteinander wechselwirken. Die Abschätzung verdeutlicht außerdem, daß die Zeit für den Streuvorgang $T \approx 2L_1/v$ (v: Teilchengeschwindigkeit) die Wechselwirkungszeit $T_w \approx \Delta r/v$ um viele Größenordnungen übertrifft. Somit haben sich zum Zeitpunkt des Teilchennachweises die beiden Wellenpakete, die durchgelassenen und gestreuten Teilchen entsprechen, bereits völlig getrennt. Selbst das Zerfließen des ungestörten Wellenpakets kann vernachlässigt werden.

Diese Betrachtungen rechtfertigen den Übergang zu einer stationären Behandlung des Streuproblems, die für die beobachtbaren Größen die gleichen Resultate liefert wie eine strenge Formulierung mit Hilfe von Wellenpaketen.

Wir beschränken uns im folgenden auf die stationäre Stoßtheorie. Bei Stoßprozessen an Vielteilchensystemen und bei Stößen mit Umordnung der Nukleonengruppen erweist sich eine integrale Formulierung der Theorie als vorteilhaft, da formale Untersuchungen in Operatorenschreibweise erleichtert werden. Auf diesem Wege hat man die Möglichkeit, die analytischen Betrachtungen, die ohne eine Vielzahl von Koordinaten nicht auskommen, durch übersichtliche und physikalisch transparente algebraische Manipulationen zu ersetzen. Dabei werden wir die Grundgedanken und wesentlichen Ergebnisse der stationären Streutheorie vorwiegend am Beispiel der elastischen Streuung eines spinlosen Teilchens am Zentralpotential abhandeln.

10.3.3. Integralgleichung der Potentialstreuung

10.3.3.1. Lippmann-Schwinger-Gleichung. Greensche Funktion

1. Wir betrachten die elastische Streuung eines spinlosen Teilchens der Masse m und der Einfallsenergie $E > 0$ an einem vorgegebenen Zentralpotential $U(r)$ endlicher Reichweite a($U(r) = 0$ für $r > a$). In einer stationären Beschreibung verlangt die Lösung dieses Streuproblems nach Anhang B.4 das Auffinden einer Lösung $\Psi(\boldsymbol{r})$ der Schrödinger-Gleichung

$$\begin{aligned} &(\mathrm{H} - E)\,\Psi(\boldsymbol{r}) = 0\,, \qquad E > 0\,; \\ &H \;= H_0 + U(r)\,, \qquad H_0 = \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial \boldsymbol{r}^2}\,. \end{aligned} \tag{10.105}$$

mit dem asymptotischen Verhalten

$$\Psi(\boldsymbol{r}) \to \mathrm{e}^{i\boldsymbol{k}\boldsymbol{r}} + f(\boldsymbol{k}', \boldsymbol{k})\,\frac{\mathrm{e}^{ikr}}{r}\,, \qquad k^2 = \frac{2m}{\hbar^2}\,E\,. \tag{10.106}$$

Diese Randbedingung bringt zum Ausdruck, daß die Gesamtwelle für $r \to \infty$ in zwei Komponenten zerfällt, eine in Richtung $\boldsymbol{k}$ einfallende ebene Welle und eine mit der winkelabhängigen Amplitude $f(\boldsymbol{k}', \boldsymbol{k})$ auslaufende Kugelwelle als Streuwelle.

2. Um die formale Behandlung des Streuproblems zu erleichtern, führen wir die Schrödinger-Gleichung (10.105) in eine Integralgleichung über, die die Randbedingung (10.106) explizit enthält. Die allgemeine Lösung der Schrödinger-Gleichung bei verschwindendem Potential ist eine ebene Welle

$$(H_0 - E)\,\Phi_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{r}) = 0\,, \qquad \Phi_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{r}) = \mathrm{e}^{i\boldsymbol{k}\boldsymbol{r}}\,. \tag{10.107}$$

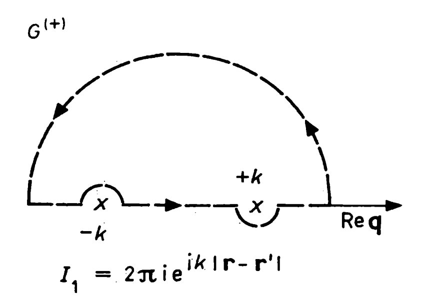
Stellt man (10.105) nach $(E - H_0)\,\Psi(\boldsymbol{r}) = U(r)\,\Psi(\boldsymbol{r})$ um, dann läßt sich $U(r)\,\Psi(\boldsymbol{r})$ als inhomogenes Glied auffassen, und die allgemeine Lösung von (10.105) kann in Form einer Integralgleichung

$$\Psi_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{r}) = \Phi_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{r}) + \int \mathrm{d}\boldsymbol{r}'\, G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')\, U(r')\, \Psi_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{r}') \tag{10.108}$$

geschrieben werden. Bei der Wellenfunktion $\Psi(\boldsymbol{r})$ wurde der Index $\boldsymbol{k}$ angefügt, um so anzudeuten, daß es sich um einen Zustand des Systems handelt, der sich (in zeitabhängiger Betrachtung) aus dem Anfangszustand $\Phi_{\boldsymbol{k}}$ entwickelt. Der erste Summand auf der rechten Seite von (10.108) stellt dann die einfallende ebene Welle dar. Der zweite Summand enthält neben dem Potential $U(r)$ die Greensche Funktion $G^{(+)}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')$, die in Anhang B.6 so berechnet wird, daß das Integral in (10.108) für $r \to \infty$ nur auslaufende Kugelwellen enthält,

$$G^{(+)}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') = -\frac{2m}{4\pi\hbar^2}\,\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} \tag{10.109}$$

(siehe Abb. 10.24).



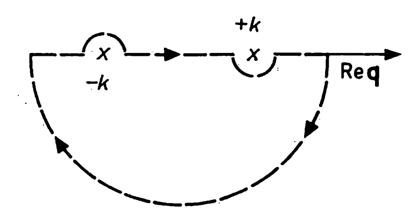


Abb. 10.24
Integrationsweg zur Berechnung der Greenschen Funktionen $G^{(+)}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')$ (vgl. Anhang B.6)

Setzt man diesen Ausdruck in (10.108) ein, dann erhält man

$$\Psi_{\boldsymbol{k}}^{(+)}(\boldsymbol{r}) = \Phi_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{r}) - \frac{2m}{4\pi\hbar^2}\int \mathrm{d}\boldsymbol{r}'\,\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\,U(r')\,\Psi_{\boldsymbol{k}}^{(+)}(\boldsymbol{r}')\,. \tag{10.110}$$

Diese Integralgleichung wird als Lippmann-Schwinger-Gleichung bezeichnet.

Ein Vergleich der Randbedingung (10.106) mit der asymptotischen Form von (10.110), die aus der in (B. 180) angegebenen asymptotischen Form der Greenschen Funktion folgt,

$$\Psi_k^{(+)}(r) \xrightarrow[r\to\infty]{} \Phi_k(r) - \frac{2m}{4\pi\hbar^2}\left[\int dr'\, e^{-ik'r'}\, U(r')\, \Psi_k^{(+)}(r')\right] \frac{e^{ikr}}{r}, \tag{10.111}$$

liefert die Streuamplitude

$$f(k', k) = -\frac{2m}{4\pi\hbar^2}\int dr'\, e^{-ik'r'}\, U(r')\, \Psi_k^{(+)}(r') = -\frac{m}{2\pi\hbar^2}\langle \Phi_{k'} | U | \Psi_k^{(+)}\rangle. \tag{10.112}$$

Das Integral in (10.112) definiert eine T-Matrix mit den Matrixelementen $T_{k'k}$

$$T_{k'k} = \langle \Phi_{k'}(r) | \, U(r) \, | \Psi_k^{(+)}(r)\rangle . \tag{10.113}$$

Zwischen der Streuamplitude und der T-Matrix besteht die Beziehung

$$f(k', k) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2} T_{k'k}. \tag{10.114}$$

Außerdem kann man zeigen, daß die T-Matrix mit der in Abschnitt 10.3.1. eingeführten S-Matrix zusammenhängt:

$$S_{k'k} = \delta_{k'k} - 2\pi i T_{k'k}\delta(E_{k'} - E_k) . \tag{10.115}$$

Während die S-Matrix mit dem Term $\delta_{k'k}$ auch die Wahrscheinlichkeit erfaßt, daß das Inzidenzteilchen den Potentialbereich ohne Impulsänderung durchläuft, beschreibt die T-Matrix die eigentliche Streuung, wobei die Energie erhalten bleibt. Bei der elastischen Streuung ist $k^2 = k'^2$, $E_{k'} = E_k$. Der differentielle Streuquerschnitt läßt sich unmittelbar durch das T-Matrixelement ausdrücken

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{m^2}{(2\pi\hbar^2)^2} |T_{k'k}|^2 . \tag{10.116}$$

Um das T-Matrixelement nach (10.113) berechnen zu können, muß die Gesamtwellenfunktion $\Psi_k^{(+)}(r)$ bekannt sein. Man gelangt zu Approximationen für das Streuproblem, wenn man in (10.113) Näherungslösungen für $\Psi_k^{(+)}(r)$ einsetzt.

4. Mit Hilfe der in (B. 178) angegebenen Greenschen Funktion $G^{(-)}(r, r')$ kann man eine Lippmann-Schwinger-Gleichung in der Form

$$\Psi_k^{(-)}(r) = \Phi_k(r) - \frac{2m}{4\pi\hbar^2}\int dr' \frac{e^{-ik|r-r'|}}{|r - r'|} U(r')\, \Psi_k^{(-)}(r') \tag{10.117}$$

aufstellen. Ihre Lösungen erfüllen dann die Randbedingung: einfallende ebene Welle plus einlaufende Kugelwelle. Solche Zustände sind in Streuexperimenten nicht realisiert. Sie werden nach (10.101) aber benötigt, um die Streumatrixelemente $S_{k'k}$ in der Form

$$S_{k'k} = \langle \Psi_{k'}^{(-)} \,|\, \Psi_k^{(+)}\rangle \tag{10.117a}$$

zu berechnen.

10.3.3.2. Operatorformalismus

Den in der Lippmann-Schwinger-Gleichung auftretenden Integraloperator

$$-\frac{m}{2\pi\hbar^2}\int dr' \frac{e^{\pm ik|r-r'|}}{|r - r'|} \tag{10.118}$$

kürzt man oft in einer formalen Schreibweise ab als

$$G_0^{(\pm)} \doteq \frac{1}{E - H_0 \pm i\varepsilon}. \tag{10.119}$$

Die Lippmann-Schwinger-Gleichung lautet dann

$$\Psi^{(\pm)} = \Phi + \frac{1}{E - H_0 \pm i\varepsilon} U\Psi^{(\pm)} = \Phi + G_0^{(\pm)} U \Psi^{(\pm)}. \tag{10.120}$$

Liegt das vollständige Eigenfunktionssystem von H_0 vor,

$$H_0|\Phi_n\rangle = \varepsilon_n|\Phi_n\rangle, \qquad \sum_n |\Phi_n\rangle\langle\Phi_n| = 1 \tag{10.121}$$

so läßt sich sofort eine spektrale Darstellung von $G_0^{(\pm)}$ angeben,

$$G_0^{(\pm)} = \sum_n \frac{|\Phi_n\rangle\langle\Phi_n|}{E - \varepsilon_n \pm i\varepsilon}, \tag{10.122}$$

da ein Eigenzustand $|\Phi_n\rangle$ von H_0 zum Eigenwert ε_n auch Eigenzustand des inversen Operators $1/H_0$ zum Eigenwert $1/\varepsilon_n$ ist.

Für zwei beliebige Operatoren A und B besteht die Identität

$$\frac{1}{A} - \frac{1}{B} = \frac{1}{B}(B - A)\frac{1}{A}. \tag{10.123}$$

Setzt man für $H = H_0 + U$

$$A \equiv E - H_0 \pm i\varepsilon, \qquad B \equiv E - H \pm i\varepsilon, \tag{10.124}$$

dann ist $B - A = U$, so daß sich nach (10.123)

$$\frac{1}{E - H_0 \pm i\varepsilon} = \frac{1}{E - H \pm i\varepsilon} - \frac{1}{E - H \pm i\varepsilon} U \frac{1}{E - H_0 \pm i\varepsilon} \tag{10.125}$$

ergibt. Wir gehen mit (10.125) in (10.120) ein und eliminieren auf der rechten Seite den Zustand $\Psi^{(\pm)}$:

$$\begin{aligned}\Psi^{(\pm)} &= \Phi + \left[\frac{1}{E - H \pm i\varepsilon} - \frac{1}{E - H \pm i\varepsilon} U \frac{1}{E - H_0 \pm i\varepsilon}\right] U\Psi^{(\pm)} \\ &= \Phi + \frac{1}{E - H \pm i\varepsilon} U\Psi^{(\pm)} - \frac{1}{E - H \pm i\varepsilon} U \frac{1}{E - H_0 \pm i\varepsilon} U\Psi^{(\pm)} \\ &= \Phi + \frac{1}{E - H \pm i\varepsilon} U\Psi^{(\pm)} - \frac{1}{E - H \pm i\varepsilon} U(\Psi^{(\pm)} - \Phi).\end{aligned} \tag{10.126}$$

Die beiden Glieder mit $(E - H \pm i\varepsilon)^{-1} U\Psi^{(\pm)}$ heben sich heraus, so daß sich als formale Lösung der Lippmann-Schwinger-Gleichung der Ausdruck

$$\Psi^{(\pm)} = [1 + G^{(\pm)}U]\,\Phi, \qquad G^{(\pm)} = \frac{1}{E - H \pm i\varepsilon} \tag{10.127}$$

ergibt. Auf der rechten Seite tritt lediglich der bekannte Eingangszustand Φ auf. Andererseits ist der Operator $G^{(\pm)}$ komplizierter als $G_0^{(\pm)}$, da er im Nenner nicht nur den ungestörten Hamilton-Operator H_0, sondern auch das Potential U enthält. Unter Verwendung der Operatorrelation (10.123) kann man zeigen, daß der Operator $G^{(\pm)}$ die Integralgleichung

$$G^{(\pm)} = G_0^{(\pm)} + G_0^{(\pm)} U G^{(\pm)} \tag{10.128}$$

erfüllt.

Bei formalen Umformungen wird verschiedentlich auch der Streuoperator $\Omega^{(\pm)}$ benutzt, der den Anfangszustand Φ in den Streuzustand $\Psi^{(\pm)}$ transformiert

$$\Psi^{(\pm)} = \Omega^{(\pm)}\Phi\,. \tag{10.129}$$

In Ortsdarstellung ist $\Omega^{(\pm)}$ ein nichtlokaler Operator

$$\Psi^{(\pm)}(\boldsymbol{r}) = \int \mathrm{d}\boldsymbol{r}' \langle \boldsymbol{r}|\, \Omega^{(\pm)}\, |\boldsymbol{r}'\rangle\, \Phi(\boldsymbol{r}')\,. \tag{10.130}$$

Der Streuoperator beschreibt die Änderung der Wellenfunktion für die Relativbewegung zweier Teilchen infolge einer Wechselwirkung U. Nach (10.120) gilt die Operatorgleichung

$$\Omega^{(\pm)} = 1 + \frac{1}{E - H_0 \pm \mathrm{i}\varepsilon}\, U\Omega^{(\pm)}\,. \tag{10.131}$$

Die explizite Form von $\Omega^{(\pm)}$ können wir Gl. (10.127) entnehmen

$$\Omega^{(\pm)} = 1 + \frac{1}{E - H \pm \mathrm{i}\varepsilon}\, U\,. \tag{10.132}$$

Im Unterschied zum Operator S, der bei Anwendung auf Φ nur Zustände von H_0 koppelt, die zum gleichen Energieeigenwert gehören, enthält $\Omega^{(\pm)}\Phi$ beliebige Eigenzustände von H_0. In die Darstellung von $\Omega^{(\pm)}$ gehen also auch Prozesse ein, die im Wechselwirkungsgebiet von der Energieschale wegführen.

Faßt man Gl. (10.113) als Impulsdarstellung des Übergangsoperators T auf, dann ergibt sich zwischen T und dem Streuoperator Ω die Beziehung

$$T = U\Omega^{(\pm)}\,. \tag{10.133}$$

Ebenso gilt

$$T\Phi = U\Omega^{(+)}\Phi = U\Psi^{(+)}\,. \tag{10.134}$$

Setzt man in (10.134) den Ausdruck (10.131) für $\Omega^{(\pm)}$ ein, dann findet man für T die Operatorgleichungen

$$T = U + U\frac{1}{E - H_0 + \mathrm{i}\varepsilon}\, T\,, \tag{10.135}$$

$$T = U + U\frac{1}{E - H + \mathrm{i}\varepsilon}\, U\,. \tag{10.136}$$

10.3.3.3. Bornsche Reihe. Zwei-Potential-Formel

1. Die iterative Lösung der Integralgleichung (10.128) für den Greenschen Operator $G^{(\pm)}$ führt auf die Bornsche Reihe

$$\begin{aligned} G^{(\pm)} &= G_0^{(\pm)} + G_0^{(\pm)}UG_0^{(\pm)} + G_0^{(\pm)}UG_0^{(\pm)}UG_0^{(\pm)} + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (G_0^{(\pm)}U)^n\, G_0^{(\pm)} = \sum_{n=0}^{\infty} G_0^{(\pm)}(UG_0^{(\pm)})^n\,. \end{aligned} \tag{10.137}$$

Als formale Lösung der Lippmann-Schwinger-Gleichung (10.127) erhalten wir mit (10.137)

$$\Psi^{(\pm)} = \Phi + G_0^{(\pm)}U\Phi + G_0^{(\pm)}UG_0^{(\pm)}U\Phi + \cdots = \Phi + \sum_{n=1}^{\infty} (G_0^{(\pm)}U)^n\, \Phi. \tag{10.138}$$

In Ortsdarstellung ausgeschrieben lautet diese Gleichung

$$\begin{aligned} \Psi^{(\pm)}(\boldsymbol{r}) = \Phi(\boldsymbol{r}) &+ \int \mathrm{d}\boldsymbol{r}'\, G_0^{(\pm)}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')\, U(\boldsymbol{r}')\, \Phi(\boldsymbol{r}') \\ &+ \int \mathrm{d}\boldsymbol{r}' \int \mathrm{d}\boldsymbol{r}''\, G_0^{(\pm)}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}'')\, U(\boldsymbol{r}'')\, G_0(\boldsymbol{r}'', \boldsymbol{r}')\, U(\boldsymbol{r}')\, \Phi(\boldsymbol{r}') + \cdots\,. \end{aligned} \tag{10.139}$$

Es liegt also eine Mehrfachstreuentwicklung vor. Die Greensche Funktion $G_0(\boldsymbol{r}'', \boldsymbol{r}')$ spielt die Rolle eines Propagators, der die Ausbreitung der Welle zwischen zwei Streuungen bei $\boldsymbol{r}'$ und $\boldsymbol{r}''$ bestimmt. Bricht man die Entwicklung (10.137) nach dem n-ten Glied ab, dann erhält man eine Näherungslösung von $\Psi^{(\pm)}$ in $(n-1)$-ter Ordnung im Potential U. Damit läßt sich auch die T-Matrix (10.113)

$$T_{fi} = \langle \Phi_f | U | \Psi_i^{(\pm)} \rangle = \left\langle \Phi_f \left| U \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} (G_0^{(+)} U)^n \right) \right| \Phi_i \right\rangle \tag{10.140}$$

bzw. die S-Matrix

$$S_{fi} = \delta_{fi} - 2\pi i \, \delta(E_i - E_f) \, \langle \Phi_f | U | \Psi_i^{(+)} \rangle \tag{10.141}$$

in verschiedener Ordnung in U (Bornsche Näherungen) berechnen,

1. Bornsche Näherung $\quad T_{fi}^{(1)} = \langle \Phi_f | U | \Phi_i \rangle \,, \qquad (10.142)$

2. Bornsche Näherung $\quad T_{fi}^{(2)} = \langle \Phi_f | U G_0^{(+)} U | \Phi_i \rangle \,. \qquad (10.143)$

Die in (10.142) und (10.143) enthaltene Approximation bezeichnet man auch als Bornsche Näherung mit ebenen Wellen.

2. Setzt man z. B. für $U(r)$ ein anziehendes Kastenpotential an,

$$U(r) = \begin{cases} -U_0 & \text{für} \quad r \leqq R_0 \,, \\ 0 & \phantom{\text{für}} \quad r > R_0 \,, \end{cases}$$

dann wird nach (10.142)

$$(\Phi_{k'} | U | \Phi_k) = -\frac{4\pi U_0}{q} \int_0^{R_0} \mathrm{d}r \, r \sin(qr) = -\frac{4\pi U_0}{q^3} (\sin(qR_0) - (qR_0) \cos(qR_0))$$

oder mit $q = |\boldsymbol{k}' - \boldsymbol{k}| = 2k \sin \vartheta/2$

$$\sigma(\vartheta) = \frac{4m^2 U_0^2 R_0^6}{\hbar^4} \frac{[\sin(2kR_0 \sin\vartheta/2) - 2kR_0 \sin\vartheta/2 \cos(2kR_0 \sin\vartheta/2)]^2}{(2kR_0 \sin\vartheta/2)^6} \,. \tag{10.144}$$

Als weiteres Beispiel für die Anwendung der ersten Bornschen Näherung betrachten wir noch die elastische Streuung hochenergetischer Elektronen ($E_k \gtrsim 100$ MeV) an Kernen mit der Ladung Ze. In diesem Fall besteht die Wechselwirkung, die in das Matrixelement (B.141) einzusetzen ist, aus der Coulomb-Wechselwirkung V_C des einfallenden Elektrons (Ortsvektor $\boldsymbol{r}_0$) mit allen Protonen (Koordinaten $\boldsymbol{r}_i$, $i = 1, \dots, Z$) des Targets. Unter Berücksichtigung der Abschirmung durch die Elektronenhülle des Atoms kann man ansetzen:

$$V_C = \epsilon \sum_{i=1}^{Z} \frac{1}{|\boldsymbol{r}_0 - \boldsymbol{r}_i|} \mathrm{e}^{-|\boldsymbol{r}_0 - \boldsymbol{r}_i|/a} \,, \qquad \epsilon^2 = e^2/4\pi\varepsilon_0 \,, \tag{10.145}$$

wobei a ein Abschirmparameter ($a \gg R$) ist. Der Ladungszustand des Targets wird durch die Wellenfunktion der Protonen $\Phi_0(\boldsymbol{r}_1, \dots, \boldsymbol{r}_Z)$ beschrieben. Die Wellenfunktion des freien Elektrons ist eine ebene Welle mit den Wellenvektoren $\boldsymbol{k} = \boldsymbol{p}/\hbar$ und $\boldsymbol{k}' = \boldsymbol{p}'/\hbar$ ($|\boldsymbol{k}| = |\boldsymbol{k}'|$) im Anfangs- bzw. Endzustand. Für das Matrixelement der Wechselwirkung ergibt sich

$$\langle \varphi_{k'} \Phi_0 | V_C | \Phi_0 \varphi_k \rangle = \epsilon^2 \int \mathrm{d}\boldsymbol{r}_1 \dots \mathrm{d}\boldsymbol{r}_Z \, \Phi_0^* \Phi_0 \int \mathrm{d}\boldsymbol{r}_0 \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{q}\boldsymbol{r}_0} \sum_{i=1}^{Z} \frac{1}{|\boldsymbol{r}_0 - \boldsymbol{r}_i|} \mathrm{e}^{-|\boldsymbol{r}_0 - \boldsymbol{r}_i|/a} \,.$$

Das Integral über die Koordinate $\boldsymbol{r}_0$ des Elektrons führt mit

$$\boldsymbol{r}_0 = \boldsymbol{r}_i + (\boldsymbol{r}_0 - \boldsymbol{r}_i) \,, \qquad \boldsymbol{r}_0 - \boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{\varrho}$$

auf

$$\sum_{i=1}^{Z} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{q}\boldsymbol{r}_i} \int \mathrm{d}\boldsymbol{\varrho} \, \frac{\mathrm{e}^{-\varrho/a}}{\varrho} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{q}\boldsymbol{\varrho}} = \sum_{i=1}^{Z} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{q}\boldsymbol{r}_i} \cdot \frac{4\pi}{q} \int_0^{\infty} \mathrm{d}\varrho \, \mathrm{e}^{-\varrho/a} \sin(q\varrho) = \sum_{i=1}^{Z} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{q}\boldsymbol{r}_i} \frac{4\pi}{q^2 + 1/a^2} \,.$$

Wegen $1/a \ll q$ folgt für das Übergangsmatrixelement daraus der Näherungsausdruck

$$\langle \varphi_{k'} \Phi_0 | V_C | \Phi_0 \varphi_k \rangle = \frac{4\pi \, e^2}{q^2} \int d\boldsymbol{r}_1 \ldots d\boldsymbol{r}_Z \, \Phi_0^* \Phi_0 \sum_{i=1}^{Z} e^{i\boldsymbol{q}\boldsymbol{r}_i} . \tag{10.147}$$

Berücksichtigt man, daß die Wellenfunktion Φ_0 symmetrisch in den Koordinaten der Protonen ist, dann gilt

$$\sum_i \int d\boldsymbol{r}_1 \ldots d\boldsymbol{r}_Z \, \Phi_0^* \Phi_0 \, e^{i\boldsymbol{q}\boldsymbol{r}_i} = Z \int d\boldsymbol{r} \, \varphi_0^*(\boldsymbol{r}) \, \varphi_0(\boldsymbol{r}) \, e^{i\boldsymbol{q}\boldsymbol{r}} ,$$

wobei $\varphi_0^*(\boldsymbol{r}) \, \varphi_0(\boldsymbol{r}) \, d\boldsymbol{r}$ die Wahrscheinlichkeit darstellt, im Volumenelement $d\boldsymbol{r}$ um $\boldsymbol{r}$ ein Proton zu finden, unabhängig vom Ort der übrigen $Z - 1$ Protonen. Mit Hilfe der Ladungsdichte

$$\varrho(\boldsymbol{r}) = |\varphi_0|^2$$

läßt sich der vom übertragenen Impuls abhängige Formfaktor

$$F(\boldsymbol{q}) = \int d\boldsymbol{r} \varrho(\boldsymbol{r}) \, e^{i\boldsymbol{q}\boldsymbol{r}} \tag{10.148 a}$$

als Fourier-Transformierte der Ladungsdichte definieren. Die Umkehrtransformation liefert dann

$$\varrho(\boldsymbol{r}) = \int e^{-i\boldsymbol{q}\boldsymbol{r}} F(\boldsymbol{q}) \, d\boldsymbol{q} . \tag{10.148 b}$$

Bei kugelsymmetrischer Ladungsverteilung $\varrho(r)$ gilt

$$F(q) = \frac{4\pi}{q} \int_0^\infty dr \sin(qr) \, r\varrho(r) . \tag{10.149}$$

Wir drücken das Matrixelement $\langle | V_c | \rangle$ durch den Formfaktor (10.148) aus,

$$\langle \varphi_{k'} \Phi_0 | V_C | \Phi_0 \varphi_k \rangle = \frac{Z e^2 4\pi}{q^2} F(q) , \tag{10.150}$$

und erhalten nach (10.142) für den differentiellen Wirkungsquerschnitt

$$\sigma(\vartheta) = \left(\frac{Z e^2}{2E_k}\right)^2 \frac{1}{\sin^4 \vartheta/2} |F(q)|^2 . \tag{10.151}$$

Benutzt man die Dichte der Endzustände $d\varrho$ für den relativistischen Fall, dann lautet die Verallgemeinerung von Gl. (10.151)

$$\sigma(\vartheta) = \sigma_M(\vartheta) \, |F(q)|^2 . \tag{10.152}$$

Dabei bedeutet

$$\sigma_M(\vartheta) = \left(\frac{Z e^2}{2E_k}\right)^2 \frac{\cos^2 \vartheta/2}{\sin^4 \vartheta/2} \left[1 + \frac{2E_k}{Mc^2} \sin^2 \vartheta/2\right]^{-1} \tag{10.153}$$

die Mottsche Streuformel, die für den Fall einer Punktladung gilt.

3. In vielen praktischen Fällen setzt sich das Streupotential U aus zwei Anteilen V und W zusammen, $U = V + W$. Für die Gesamtwellenfunktion $\Psi_i^{(\pm)}$ zum Anfangszustand Φ_i gilt die Integralgleichung

$$\Psi_i^{(\pm)} = \Phi_i + \frac{1}{E - H_0 \pm i\varepsilon} (V + W) \, \Psi^{(\pm)} . \tag{10.154}$$

Das T-Matrixelement für den Übergang zum Endzustand Φ_f berechnet man nach (10.113)

$$T_{fi} = \langle \Phi_f | V + W | \Psi_i^{(+)} \rangle = \langle \Phi_f | V | \Psi_i^{(+)} \rangle + \langle \Phi_f | W | \Psi_i^{(+)} \rangle . \tag{10.155}$$

Wir setzen nun voraus, daß das Streuproblem mit dem Potential W exakt lösbar ist, so daß alle Lösungen $\chi^{(\pm)}$ der Integralgleichung

$$\chi_{i(f)}^{(\pm)} = \Phi_{i(f)} + \frac{1}{E - H_0 \pm i\varepsilon} W \chi_{i(f)}^{(\pm)} = \Phi_{i(f)} + \frac{1}{E - H_0 - W \pm i\varepsilon} W \Phi_{i(f)} \tag{10.156}$$

bekannt sind. Diese Gleichung benutzen wir, um die Funktion Φ_f im ersten Summanden von (10.156) durch $\chi_f^{(-)}$ zu ersetzen:

$$\Phi_f = \chi_f^{(-)} - \frac{1}{E - H_0 - W - i\varepsilon} W\Phi_f , \tag{10.157}$$

$$T_{fi} = \langle\chi_f^{(-)}| V |\Psi_i^{(+)}\rangle - \left\langle\Phi_f \middle| W \frac{1}{E - H_0 - W + i\varepsilon} V \middle|\Psi_i^{(+)}\right\rangle + \langle\Phi_f| W |\Psi_i^{(+)}\rangle . \tag{10.158}$$

Nun formen wir die Integralgleichung (10.154) für $\Psi_i^{(+)}$ um, wobei wir wiederum die Operatoridentität (10.123) ($A \equiv E - H_0 \pm i\varepsilon$, $B \equiv E - H_0 - W \pm i\varepsilon$) verwenden:

$$\begin{aligned}
\Psi_i^{(+)} &= \Phi_i + \frac{1}{E - H_0 + i\varepsilon} (V + W)\, \Psi_i^{(+)} \\
&= \Phi_i + \frac{1}{E - H_0 - W + i\varepsilon} (V + W)\, \Psi_i^{(+)} \\
&\quad - \frac{1}{E - H_0 - W + i\varepsilon} W \frac{1}{E - H_0 + i\varepsilon} (V + W)\, \Psi_i^{(+)} \\
&= \Phi_i + \frac{1}{E - H_0 - W + i\varepsilon} (V + W)\, \Psi_i^{(+)} - \frac{1}{E - H_0 - W + i\varepsilon} W(\Psi_i^{(+)} - \Phi_i) \\
&= \chi_i^{(+)} + \frac{1}{E - H_0 - W + i\varepsilon} V\Psi_i^{(+)} .
\end{aligned} \tag{10.159}$$

Wir setzen (10.159) in (10.158) ein und erhalten die Zwei-Potential-Formel

$$T_{fi} = \langle\Phi_f| W |\chi_i^{(+)}\rangle + \langle\chi_f^{(-)}| V |\Psi_i^{(+)}\rangle . \tag{10.160}$$

Der erste Term hängt nur vom Potential W ab; er beschreibt die Streuung für den Fall, daß nur das Potential W wirkt. Der zweite Term enthält das Teilpotential W in den „gestörten Wellen" $\chi_f^{(-)}$ und in der Gesamtlösung $\Psi_i^{(+)}$. Approximiert man $\Psi_i^{(+)}$ nach (10.159) durch die gestörte Welle $\chi_i^{(+)}$, $\Psi_i^{(+)} \approx \chi_i^{(+)}$, dann erhält man für das T-Matrixelement (10.160) in erster Ordnung in V

$$T_{fi} \approx \langle\Phi_f| W |\chi_i^{(+)}\rangle + \langle\chi_f^{(-)}| V |\chi_i^{(+)}\rangle . \tag{10.161}$$

Mit (10.161) haben wir eine Verallgemeinerung der 1. Bornschen Näherung (10.142) erreicht. Das zweite Glied erfaßt die Streuung am Potential V in 1. Ordnung, wenn die einfallende ebene Welle im Potential W gestört wird, wobei diese Störung durch vollständige Lösung des Streuproblems mit dem Störpotential W in Form der Wellenfunktion $\chi_i^{(+)}$, $\chi_f^{(-)}$ exakt berücksichtigt wird.

Als Beispiel betrachten wir die unelastische Streuung eines Protons an einem Kern. Das Wechselwirkungspotential U besteht aus dem Coulomb-Potential W und dem Potential V der starken Wechselwirkung, das den Übergang des Targets in einen angeregten Zustand hervorruft. Die gestörten Wellen sind dann die Coulomb-Wellenfunktionen des Protons im Coulomb-Feld des Kerns. Der erste Term in der Zwei-Potential-Formel (10.160) verschwindet, da das Potential W die Koordinaten des Inzidenzteilchens nicht an die Freiheitsgrade des Kerns koppelt und die in Φ_f und $\chi_i^{(+)}$ auftretenden Kernwellenfunktionen orthogonal sind. Die Anregungswahrscheinlichkeit ist als Übergang zwischen den beiden gestörten Wellen des Eingangs- und Ausgangskanals $\chi_i^{(+)}$, $\chi_f^{(-)}$, der vom Potential V induziert wird, durch den zweiten Summanden von (10.160) gegeben.

Die Zwei-Potential-Formel (10.160) und die 1. Bornsche Näherung mit gestörten Wellen (10.161) bilden den Ausgangspunkt für die Theorie direkter Kernreaktionen, die wir im Abschnitt 10.6 behandeln.

10.3.4. *R*-Matrix-Theorie

Wir betrachten wiederum die elastische Streuung eines spinlosen Teilchens mit der Energie E an einem Zentralpotential U endlicher Reichweite. Dieses Problem wurde in Anhang B.4, durch Entwicklung nach Eigenfunktionen des Bahndrehimpulses, der eine Erhaltungsgröße der Bewegung darstellt, gelöst (Partialwellenmethode). Im folgenden behandeln wir die gleiche Aufgabe in einem R-Matrix-Formalismus, der für die Parametrisierung von Wirkungsquerschnitten mit Resonanzcharakter (Compoundkernreaktionen) geeignet ist.

10.3.4.1. *R*- und *S*-Matrix der Potentialstreuung

Da die Reichweite des Potentials U als begrenzt vorausgesetzt wurde, muß die asymptotische Form der Wellenfunktion $\psi_l(r) = \frac{u_l(r)}{r} Y_l^m(\vartheta, \varphi)$ (l, m: Quantenzahlen des Bahndrehimpulses) eindeutig aus dem Funktionswert und der ersten Ableitung der Radialfunktion u_l bei einem beliebigen Abstand $r > a$ folgen, der größer als der Radius des Wechselwirkungsgebietes ist. Die zweite Ableitung von u_l ergibt sich dann aus der Schrödinger-Gleichung. Als charakteristische Größe führen wir die reziproke logarithmische Ableitung der Radialwellenfunktion bei $r = a$ ein, die man als R-Funktion bezeichnet

$$R_l = \left[\frac{u_l(r)}{r u_l'(r)}\right]_{r=a}. \tag{10.162}$$

Die R-Funktionen für die Partialwellen mit verschiedenem Drehimpuls lassen sich zu einer Kanalmatrix $(R) = (R_l \delta_{ll'})$, der R-Matrix, zusammenfassen.

Andererseits kann die Wellenfunktion für $r \to \infty$ durch die Streumatrix $(S) = (S_l \delta_{ll'}) = e^{2i\delta_l} \delta_{ll'}$ ausgedrückt werden. Es gilt nach (B. 131) und (B. 123)

$$\psi(r) = \sum_{l,m} i^{l+1} \pi(2l+1) \frac{1}{r} (I_l(kr) - S_l O_l(kr)) Y_l^m(\vartheta, \varphi). \tag{10.163}$$

Die Funktionen I_l, O_l sind Lösungen der radialen Schrödinger-Gleichung bei verschwindendem Potential, die asymptotisch aus ein- oder auslaufender Kugelwelle bestehen

$$I_l \to e^{-i(kr - l\pi/2)} \qquad O_l \to e^{+i(kr - l\pi/2)}. \tag{10.164}$$

Das Streumatrixelement S_l bestimmt also die Amplitude der auslaufenden Kugelwelle in der asymptotischen Form der Gesamtwelle. An einem Zentralpotential werden alle Partialwellen l unabhängig voneinander gestreut. In diesem Fall liegen sowohl R- als auch S-Matrix in Diagonalform vor.

Da die Einwirkung des Streuzentrums auf das gestreute Teilchen an der Kanaloberfläche beendet ist, breitet sich die Welle bis $r \to \infty$ frei aus, so daß eine Relation zwischen den Elementen der R- und S-Matrix bestehen muß. Dieser Zusammenhang läßt sich herstellen, wenn man bei $r = a$ Anschlußbedingungen für die Wellenfunktion im Innengebiet $r < a$ und im Kanal formuliert. Aus (10.162) und (10.164) folgt

$$R_l = \left[\frac{u_l}{r u_l'}\right]_{r=a} = \left[\frac{I_l - S_l O_l}{r(I_l' - S_l O_l')}\right]_{r=a}. \tag{10.165}$$

Mit den Abkürzungen

$$\left[\frac{rO_l'}{O_l}\right]_{r=a} = L_l = \tilde{S}_l + \mathrm{i}P_l\,, \qquad \left[\frac{rI_l'}{I_l}\right]_{r=a} = L_l^*\,, \tag{10.166}$$

die rein kinematische, schwach von der Einschußenergie abhängige Funktionen $\tilde{S}_l$ und P_l einführen, ergibt sich durch Auflösung von (10.165) nach S_l die Beziehung

$$S_l = \left[\frac{I_l}{O_l}\right]_{r=a} \frac{1 - L_l^* R_l}{1 - L_l R_l}\,. \tag{10.167}$$

Man erkennt sofort, daß $|S_l| = 1$ wird, weil R_l reell ist. Ersetzt man das Innengebiet $r < a$ durch eine undurchdringlich harte Kugel (unendlich hohes abstoßendes Potential), dann verschwinden alle Funktionen u_l bei $r = a$, da die Aufenthaltswahrscheinlichkeit des Teilchens für $r = a$ identisch Null sein muß. In diesem Fall folgt für die Streuphase $\Phi_l = -(ka - l\pi/2)$, so daß der Faktor $[I_l/O_l]_{r=a} = \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}(ka - l\pi/2)}$ in Gl. (10.167) als Streumatrix für die Hartkugelstreuung interpretiert werden kann. Behält man die Parametrisierung von S_l in der Form $S_l = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\delta_l}$ bei, dann setzt sich nach (10.167) die Streuphase δ_l aus zwei Anteilen zusammen:

$$\delta_l = \Phi_l + \operatorname{arctg} \frac{P_l R_l}{1 - \tilde{S}_l R_l}\,. \tag{10.168}$$

Der erste Summand liefert die Phasenverschiebung, die sich ergeben würde, wenn das einfallende Teilchen am Abstand $r = a$ total reflektiert wird. Der zweite Summand wird über das R-Matrixelement R_l vom Zustand des Teilchens im Potentialbereich abhängig. Alle Größen sind Funktionen der Streuenergie E.

10.3.4.3. Parametrisierung der *R*-Matrix. Reduzierte Einteilchenbreiten

Wir führen jetzt eine geeignete Parametrisierung der R-Matrixelemente ein, wobei wir uns auf die Partialwelle $l = 0$ beschränken. In diesem Fall verschwindet das Zentrifugalpotential und die Radialwellenfunktion $u(r)$ im Innengebiet $r < a$ erfüllt die Schrödinger-Gleichung

$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}r^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(E - U)\,u = 0\,, \qquad r < a\,. \tag{10.169}$$

Sie genügt der Randbedingung $u(0) = 0$. Fordert man zusätzlich

$$\left[\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}\right]_{r=a} = 0\,, \tag{10.170}$$

dann entsteht ein Eigenwertproblem, da (10.170) nur für diskrete Energien $E = \varepsilon_\lambda$ und Eigenfunktion ω_λ erfüllt ist. Die Eigenfunktionen genügen der Gleichung

$$\frac{\mathrm{d}^2 \omega_\lambda}{\mathrm{d}r^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(\varepsilon_\lambda - U)\,\omega_\lambda = 0\,, \qquad r < a\,. \tag{10.171}$$

Sie bilden im Innengebiet ein vollständiges Orthonormalsystem

$$\int_0^a \mathrm{d}r\; \omega_\lambda(r)\, \omega_{\lambda'}(r) = \delta_{\lambda\lambda'}\,. \tag{10.172}$$

Die Randbedingung (10.170) wählt in Abhängigkeit von der Streuenergie E Wellenfunktionen aus, die eine hohe Aufenthaltswahrscheinlichkeit des Teilchens im Potentialbereich liefern (siehe Abb. 10.25). Diese Zustände nennt man Einteilchenresonanzen im mittleren Potential $U(r)$. Bei den Resonanzenergien ε_λ kann in (10.168) die Streuphase der Hartkugelstreuung Φ vernachlässigt werden.

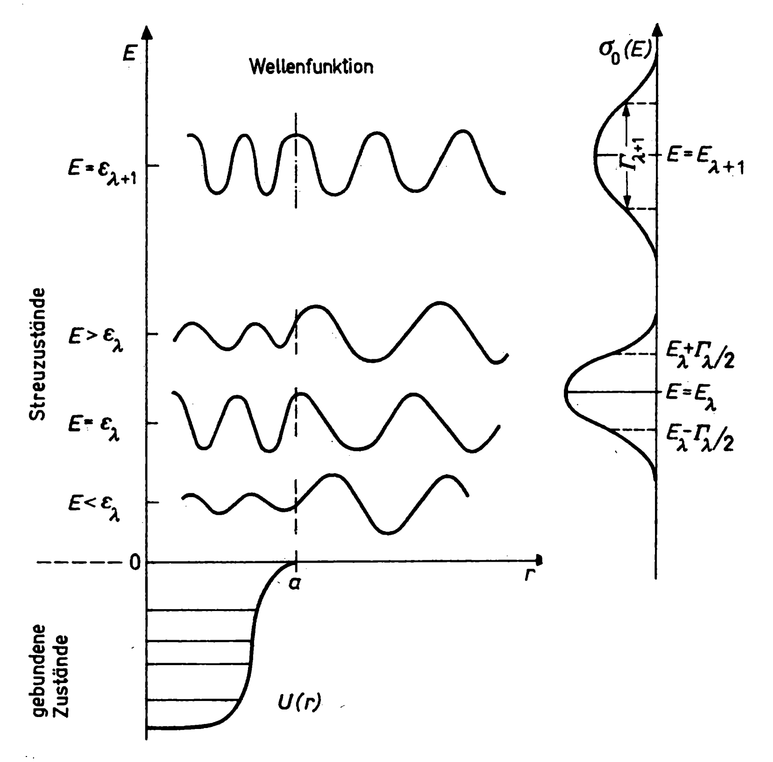


Abb. 10.25
Resonanzbedingung für die Wellenfunktion bei elastischer s-Wellen-Streuung an einem Zentralpotential $U(r)$ mit begrenzter Reichweite a (schematisch). ε_λ: Eigenwert der Energie nach Gl. (10.171). $\sigma_0(E)$: Wirkungsquerschnitt als Funktion der Streuenergie mit Breit-Wigner-Resonanzen der Gesamtbreite Γ_λ (Gl. 10.183) bei den Einschußenergien $E = E_\lambda$ (Gl. (10.182))

Wir können nun jede Radialfunktion $u_E(r)$ zu vorgegebener Energie E im Innengebiet nach den Eigenfunktionen ω_λ entwickeln.

$$u_E(r) = \sum_\lambda c_\lambda \omega_\lambda(r)\,, \qquad c_\lambda = \int_0^a \omega_\lambda u_E \,\mathrm{d}r\,. \tag{10.173}$$

Um die Entwicklungskoeffizienten c_λ zu berechnen, multiplizieren wir die Gln. (10.169) und (10.171) von links mit u_E bzw. ω_λ

$$u_E \frac{\mathrm{d}^2\omega_\lambda}{\mathrm{d}r^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(\varepsilon_\lambda - U)\,u_E\omega_\lambda = \omega_\lambda \frac{\mathrm{d}^2 u_E}{\mathrm{d}r^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(E - U)\,u_E\omega_\lambda = 0\,. \tag{10.174}$$

Daraus erhalten wir durch Integration über das Wechselwirkungsgebiet

$$\int_0^a \left(\omega_\lambda \frac{\mathrm{d}^2 u_E}{\mathrm{d}r^2} - u_E \frac{\mathrm{d}^2\omega_\lambda}{\mathrm{d}r^2}\right)\mathrm{d}r + \frac{2m}{\hbar^2}(E - \varepsilon_\lambda)\int_0^a u_E\omega_\lambda\,\mathrm{d}r = 0 \tag{10.175}$$

bei Beachtung der Randbedingungen bei $r = 0$ und $r = a$ den Entwicklungskoeffizienten

$$c_\lambda = \frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{\varepsilon_\lambda - E} \omega_\lambda(a) \left[\frac{du_E}{dr}\right]_{r=a}. \tag{10.176}$$

Den Ausdruck (10.176) setzen wir in die Entwicklung (10.173) ein:

$$u_E(r) = \frac{\hbar^2}{2ma} a \left[\frac{du_E}{dr}\right]_{r=a} \sum_\lambda \frac{\omega_\lambda(a)\, \omega_\lambda(r)}{\varepsilon_\lambda - E}. \tag{10.177}$$

Für $r = a$ ergibt sich dann daraus für $R_l(E)$

$$R_l(E) = \frac{\hbar^2}{2ma} \sum_\lambda \frac{\omega_\lambda^2(a)}{\varepsilon_\lambda - E} = \sum_\lambda \frac{\gamma_\lambda^2}{\varepsilon_\lambda - E} \tag{10.178}$$

mit

$$\gamma_\lambda^2 = \frac{\hbar^2}{2ma} \omega_\lambda^2(a). \tag{10.179}$$

Die Form (10.178) des R-Matrixelements für die s-Welle zeigt, daß in der Streuung als Funktion der Energie Resonanzerhöhungen (Einteilchenresonanzen) auftreten können, wenn die Einschußenergie E in der Nähe einer Resonanzenergie liegt. Die Größe γ_λ^2 wird als reduzierte Breite der Einteilchenresonanz λ bezeichnet. Sie wird durch die Aufenthaltswahrscheinlichkeit des Teilchens am Rand des Innengebietes bestimmt. Ihre obere Grenze ist $\hbar^2/2ma$.

Setzt man die Parametrisierung von $R(E)$ nach Resonanzenergien ε_λ und reduzierten Breiten γ_λ^2 in den Ausdruck (10.168) für die Streuphase δ ein und berechnet den Streuquerschnitt $\sigma \sim |1 - e^{2i\delta_l}|^2$, dann ergeben sich bei der Energie E Beiträge von verschiedenen Einteilchenresonanzen ε_λ. Vernachlässigt man in der Nähe einer Resonanz λ_0 alle übrigen Summanden in (10.178) sowie die Streuphase Φ, dann folgt aus (10.168) und (10.178)

$$\operatorname{tg} \delta_{l=0}(E) = \frac{\gamma_{\lambda_0}^2 P(E)}{\varepsilon_{\lambda_0} - E - \gamma_{\lambda_0}^2 \tilde{S}(E)}. \tag{10.180}$$

Für den Partialquerschnitt $\sigma_{l=0}^{(\lambda_0)} = \frac{\pi}{k^2} \sin^2 \delta_{l=0}(E)$ ergibt sich mit (10.180) für $\delta_{l=0}$ die Breit-Wigner-Formel

$$\sigma_{l=0}^{(\lambda_0)} = \frac{\pi}{k^2} \frac{\Gamma_{\lambda_0}^2}{(E - E_{\lambda_0})^2 + \left(\frac{1}{2}\Gamma_{\lambda_0}\right)^2}. \tag{10.181}$$

Der Wirkungsquerschnitt (10.181) besitzt bei einer gegenüber dem Eigenwert ε_{λ_0} verschobenen Energie

$$E_{\lambda_0} = \varepsilon_{\lambda_0} - \gamma_{\lambda_0}^2 \tilde{S} \tag{10.182}$$

eine Resonanz der Gesamtbreite

$$\Gamma_\lambda = 2\gamma_\lambda^2 P. \tag{10.183}$$

Die Gesamtbreite unterscheidet sich von der reduzierten Breite γ_λ^2 um einen Faktor P, der die physikalische Bedeutung einer Durchdringungswahrscheinlichkeit hat. P berücksichtigt die Möglichkeit, daß das Teilchen am Rand reflektiert wird, wenn es das Innengebiet verläßt.

Wir erwähnen noch, daß sich sowohl die Lage der Einteilchenresonanzen ε_λ als auch die reduzierten Breiten γ_λ^2 mit dem Bahndrehimpuls l der Partialwelle ändern. Diese Parameter werden auch von der Wahl des Radius a beeinflußt, für den man die Anschlußbedingung für die Wellenfunktionen im Innen- und

Außengebiet formuliert. Es läßt sich aber zeigen, daß die physikalisch relevanten Größen (Wirkungsquerschnitte) von dieser Willkür nicht abhängen, wenn man in der Entwicklung nach den Eigenfunktionen ω_λ alle Glieder mitnimmt. Führt man durch einen Abbruch der Summe in (10.178) Näherungen ein, dann ändern sich die berechneten Wirkungsquerschnitte allerdings in unübersichtlicher Weise mit a. Hierin liegt ein gewisser Nachteil der Resonanzentwicklung.

Die Theorie der Resonanzstreuung kann man auch mit Hilfe der logarithmischen Ableitung der Radialfunktion selbst

$$f \equiv \frac{1}{R} = \left[\frac{ru'}{u}\right]_{r=a} \tag{10.184}$$

formulieren. Die Maxima im Wirkungsquerschnitt hängen dann formal nicht mit den Polen von R, sondern mit den Nullstellen von f zusammen. Wir machen davon im Abschnitt 10.4.2 zusammen mit einer Taylor-Entwicklung von f um die Resonanzenergie Gebrauch. An dieser Stelle schätzen wir auch die Breiten und Abstände der Einteilchenresonanzen der s-Welle in einem Kastenpotential explizit ab.

10.3.4.3. Verallgemeinerung auf beliebige Reaktionen

Der in den vorangegangenen Abschnitten entwickelte Resonanzformalismus der elastischen Streuung läßt sich auf den allgemeinen Fall einer Kernreaktion mit beliebigen Ausgangskanälen verallgemeinern. Die Wellenfunktion X_λ im Wechselwirkungsgebiet ist Eigenfunktion des Hamiltonoperators H für das Gesamtsystem, das aus Target und Inzidenzteilchen besteht

$$HX_\lambda = E_\lambda X_\lambda \,. \tag{10.185}$$

Die Funktionen X_λ beschreiben die stationären Niveaus des Compoundkerns zur Energie E_λ. Der Zustand X_λ kann in die verschiedenen offenen Reaktionskanäle c zerfallen, so daß sich reduzierte Niveaubreiten $\gamma^2_{\lambda c}$ für jeden Zustand λ definieren lassen durch

$$\gamma_{\lambda c} = \left(\frac{\hbar^2}{2\mu_c a_c}\right)^{1/2} \int \mathrm{d}F \; \varphi_c^* X_\lambda \,. \tag{10.186}$$

Dabei ist φ_c die Kanalwellenfunktion; die Integration wird über die Kanaloberfläche ausgeführt. Die Breitenamplitude $\gamma_{\lambda c}$ drückt die Stärke der Kopplung des Compoundkernniveaus λ an den Kanal c aus. Sie wird groß, wenn die Wellenfunktion des Compoundkerns und die Kanalwellenfunktion auf der Oberfläche des Wechselwirkungsgebietes stark überlappen. Der Faktor $(\hbar^2/2\mu_c a_c)^{1/2}$ (μ_c: reduzierte Masse im Kanal c, a_c: Kanalradius) wurde eingeführt, um als obere Grenze für $\gamma_{\lambda c}$ wieder die Einteilchenbreite zu erhalten. Aus den reduzierten Breitenamplituden $\gamma_{\lambda c}$ bildet man die Kanalmatrix

$$R_{c'c} = \sum_\lambda \frac{\gamma_{\lambda c'}\gamma_{\lambda c}}{E_\lambda - E} \,. \tag{10.187}$$

Über eine zu (10.168) analoge Beziehung ergibt sich dann die Streumatrix $S_{c'c}$ und damit der Wirkungsquerschnitt der Reaktion, dessen starke Energieabhängigkeit mit Hilfe von Resonanzenergien und Resonanzbreiten parametrisiert ist, die entsprechend (10.182) und (10.183) mit den Eigenwerten aus (10.185) und den reduzierten Breitenamplituden $\gamma_{\lambda c}$ (10.186) zusammenhängen.

Die R-Matrixtheorie der Kernreaktionen ist allgemeingültig und von ihrem formalen Aufbau her (Entwicklung nach einem vollständigen Funktionssystem für das Innengebiet) auf Prozesse mit beliebigen Wechselwirkungsmechanismus anwendbar. Der praktische Einsatz bleibt jedoch auf die Analyse von Compoundkernreaktionen beschränkt, auf die wir im Abschnitt 10.4. ausführlich eingehen.

10.3.5. Stöße mit Umordnung

Wir geben nun das T-Matrixelement für Reaktionen an, bei denen die beiden wechselwirkenden Nukleonengruppen nach a + A → b + B umgeordnet werden, so daß ein- und auslaufende Teilchen nicht mehr identisch sind (a ≠ b). Bei einem solchen Stoß mit Umordnung liegen folglich im Eingangs- und Ausgangskanal zwei verschiedene Aufteilungen des Hamilton-Operators für das Gesamtsystem aus $N = N_a + N_A = N_b + N_B$ Nukleonen vor,

$$H = H_a + H + T_{aA} + V_{aA} = H_b + H_B + T_{bB} + V_{bB} \,. \tag{10.188}$$

Die Hamilton-Operatoren H_a, H_A, H_b, H_B bestimmen die inneren Zustände ψ_a, ψ_A, ψ_b, ψ_B der Stoßpartner, z. B. $H_a\psi_a = \varepsilon_a\psi_a$. T_{aA} und T_{bB} sind die Operatoren der kinetischen Energie der Relativbewegung in den Kanälen. Die unterschiedlichen Potentiale V_{aA} und V_{bB} erfassen die Wechselwirkung, die eingeschaltet bzw. ausgeschaltet wird, wenn einlaufendes Teilchen a und Targetkern bzw. auslaufendes Teilchen b und Restkern B die Kanaloberfläche erreichen. Man kann diese Terme als Summe über Zweiteilchenwechselwirkungen aufbauen:

$$V_{aA} = \sum_{i=1}^{N_a} \sum_{j=N_a+1}^{N_a+N_A} V(ij) \,, \qquad V_{bB} = \sum_{i=1}^{N_b} \sum_{j=N_b+1}^{N_b+N_B} V(ij) \,. \tag{10.189}$$

Als Anfangszustand setzen wir wiederum an

$$\Phi_i = \psi_a\psi_A \, e^{ik_\alpha r_\alpha} \,. \tag{10.190}$$

Der ungestörte Endzustand ist

$$\Phi_f = \psi_b\psi_B \, e^{ik_\beta r_\beta} \,. \tag{10.191}$$

Für die stationäre Lösung $\Psi^{(\pm)}$ der Schrödinger-Gleichung mit dem totalen Hamilton-Operator H, $H\Psi^{(\pm)} = E\Psi^{(\pm)}$, kann formal eine Lippmann-Schwinger-Gleichung vom Standpunkt des Eingangs- oder des Ausgangskanals aufgestellt werden,

$$\Psi_{aA}^{(\pm)} = \Phi_i + \frac{1}{E - (H_a + H_A + T_{aA}) \pm i\varepsilon} V_{aA}\Psi_{aA}^{(\pm)} \,, \tag{10.192}$$

$$\Psi_{bB}^{(\pm)} = \Phi_f + \frac{1}{E - (H_b + H_B + T_{bB}) \pm i\varepsilon} V_{bB}\Psi_{bB}^{(\pm)} \,. \tag{10.193}$$

Damit erhalten wir das T-Matrixelement für den Übergang in zwei äquivalenten Formen

$$T_{fi} = \langle \Psi_{bB}^{(-)} | \, V_{aA} \, | \psi_a\psi_A \, e^{ik_\alpha r_\alpha} \rangle \text{: prior-Form} \,, \tag{10.194}$$

$$T_{fi} = \langle \psi_b\psi_B \, e^{ik_\beta r_\beta} | \, V_{bB} \, | \Psi_{aA}^{(+)} \rangle \text{: post-Form} \,. \tag{10.195}$$

In der prior-Form wird das T-Matrixelement mit der Wechselwirkung V_{aA} berechnet, die im Eingangskanal eingeschaltet wird. Die post-Form enthält die Wechselwirkung V_{bB}, die im Ausgangskanal ausgeschaltet wird. Beide Formen liefern den gleichen Wirkungsquerschnitt, solange man für die Funktionen $\Psi^{(\pm)}$ keine Näherungslösungen einsetzt.

In erster Bornscher Näherung mit ebenen Wellen ergibt sich für das T-Matrixelement in prior-Form

$$T_{fi}(\text{PWBA}) = \langle \psi_b\psi_B \, e^{ik_\beta r_\beta} | \, V_{aA} \, | \psi_a\psi_A \, e^{ik_\alpha r_\alpha} \rangle \,. \tag{10.196}$$

Man kann in den Kanälen auch ein mittleres Potential U für die Teilchen a und b definieren, das nur von der Kanalkoordinate $\boldsymbol{r}_\alpha$ bzw. $\boldsymbol{r}_\beta$ abhängt

$$V_{aA} = U_a + (V_{aA} - U_a) \,, \qquad V_{bB} = U_b + (V_{bB} - U_b) \,. \tag{10.197}$$

Mit den Funktionen $\chi^{(\pm)}$, die die Störung der ebenen Wellen durch die Potentiale U_a, U_b exakt erfassen

$$[T_{aA} + U_a - E_\alpha] \, \chi_{k_\alpha}^{(\pm)}(r_\alpha) = 0 \,, \qquad E_\alpha = E - \varepsilon_A - \varepsilon_a \,, \tag{10.198}$$

$$[T_{bB} + U_b - E_\beta] \, \chi_{k_\beta}^{(\pm)}(r_\beta) = 0 \,, \qquad E_\beta = E - \varepsilon_B - \varepsilon_b \tag{10.199}$$

läßt sich dann das T-Matrixelement für eine Umordnungsreaktion mit Hilfe der Zwei-Potential-Formel (10.160) in erster Bornscher Näherung mit gestörten Wellen in post-Form wie folgt aufschreiben:

$$T_{fi}(\text{DWBA}) = \langle \psi_b \psi_B \chi^{(-)}_{k_\beta}(r_\beta) | V_{bB} - U_b | \psi_a \psi_A \chi^{(+)}_{k_\alpha}(r_\alpha) \rangle . \tag{10.200}$$

Genau wie bei der unelastischen Streuung verschwindet das zweite Matrixelement von (10.200), da die mittleren Potentiale U_a, U_b nicht auf die inneren Koordinaten wirken.

10.4. Compoundkernreaktionen

10.4.1. Schlußfolgerungen aus der Streutheorie

Ebenso wie das optische Modell und die Theorien direkter Kernreaktionen basiert die Beschreibung der in 10.1.4. eingeführten Compoundkernreaktionen auf den Ergebnissen der Streutheorie, nach der für den Wirkungsquerschnitt der Reaktion A(a, b)B unter Verwendung der Streumatrix S gilt

$$\sigma_{ab} = \pi \lambda_a^2 \sum_{I_c} \sum_{l_a s_{aA}} \sum_{l_b s_{bB}} g_a^{I_c} | \delta_{ab} \delta_{l_a l_b} \delta_{s_{aA} s_{bB}} \delta_{I_A I_B} - S^{I_c}_{aI_A l_a s_{aA}, bI_B l_b s_{bB}} |^2 \tag{10.201}$$

mit dem Gewichtsfaktor

$$g_a^{I_c} = \frac{(I_c + 1)}{(2I_a + 1)(2I_A + 1)}.$$

Die Symbole a und b in der Matrix sichern die Energie- und Paritätserhaltung für den Reaktionskanal, während über die Spinorientierungen des Compoundkerns $(2I_C + 1)$ summiert und über die Spins im Eingangskanal gemittelt wird. Die Spinbezeichnungen in (10.201) entsprechen den in Gl. (10.28) bis (10.32) eingeführten, sie werden aber zur Vereinfachung in den folgenden Gleichungen des Abschnitts 10.4.1. weggelassen, um dadurch den physikalischen Gehalt der Beziehungen leichter verständlich zu machen. Gl. (10.201) lautet dann

$$\sigma_{ab} = \pi \lambda_a^2 |\delta_{ab} - S_{ab}|^2 \tag{10.202}$$

in gleicher Schreibweise stellt sich σ_t als

$$\sigma_t = 2\pi \lambda_a^2 (1 - \text{Re}\, S_{aa}) \tag{10.203}$$

und der differentielle Wirkungsquerschnitt als

$$\sigma_{ab} = \sum_L P_L(\cos \vartheta) \sum_{a'b'} f_{Laa'bb'} \,\text{Re}\, [(\delta_{aa'} - S_{aa'})(\delta_{bb'} - S^*_{bb'})] \tag{10.204}$$

dar, mit $f_{Laa'bb'}$ — den Spin-Kopplungs-Koeffizienten, die Funktionen der Clebsch-Gordan- und Racah-Koeffizienten (siehe Anhang B, und 10.3.) sind. L ist der übertragene Bahndrehimpuls $L = l_b - l_a$.

Die Streumatrix kann als Summe eines schwach energieabhängigen und eines resonanten Anteils verstanden werden:

$$S = S^0 + S^{\text{res}} . \tag{10.205}$$

Einige wichtige Spezialfälle der insgesamt außerordentlich vielfältigen Eigenschaften und Strukturen von S werden im folgenden herausgegriffen und kurz charakterisiert:

1. Bei geringer Einschußenergie und hoher Auflösung der Nachweisapparatur kann die Situation gegeben sein, daß keine Anregung von CN-Zuständen erfolgt, d. h. $S^{\text{res}} = 0$ ist.

Das tritt insbesondere dann ein, wenn für die benachbarten CN-Resonanzen $\Gamma_b \ll \Delta_C$ gilt (Δ_C — bezeichnet den Abstand zwischen den Resonanzen) und im Bereich zwischen den Resonanzen nur der elastische Kanal geöffnet ist (sogenannte Potentialstreuung).

In diesem Fall ist die Energieabhängigkeit von S durch die Anregung von Einteilchenresonanzen im Kernpotential mit der Energie $E_{a_0}^{ER}$ und Breite Γ_a^{ER} geprägt:

$$S_{aa} = S_{aa}^0 = \exp(-i2\Phi_a)\left(1 + i\frac{\Gamma_a^{ER}}{(E_a^{ER} - E_a) - \frac{i}{2}\Gamma_a^{ER}}\right) \tag{10.206}$$

mit der Phase Φ_a, welche für $|E_a - E_a^{ER}| \gg 1$ die Streumatrix allein bestimmt:

$$S_{aa} \xrightarrow[|(E_{aa}^{ER} - E_a)| \gg 1]{} \exp(-i2\Phi_a)\,. \tag{10.207}$$

Wird (10.206) in (10.202) eingesetzt, so erhält der Querschnitt einen typischen resonanzartigen Verlauf mit Interferenz zwischen Resonanz- und energieunabhängigem Anteil. Aus 10.1. und 10.3. geht hervor, daß Potentialstreuung prinzipiell stets vorhanden ist, auch wenn sie in der Regel von komplizierteren CN-Resonanzprozessen überlagert ist. In 10.4.2. wird das Problem reiner Potentialstreuung am Beispiel der S-Wellen Streuung von Neutronen ausführlicher behandelt.

2. Ist im untersuchten Energiegebiet eine einzelne, gut isolierte CN-Resonanz vorhanden, wozu

$$\Gamma \ll \Gamma_a^{ER}\,, \qquad \Delta_C \gg \Gamma \quad \text{und} \quad \Delta E_a \ll \Gamma$$

(ΔE_a-Einschußenergieunschärfe) gegeben sein muß, so nimmt die Streumatrix die Form

$$S_{ab} = S_{ab}^0\left[\delta_{ab} + i\frac{\gamma_{ar}\cdot\gamma_{br}}{(E_r - E_a) - \frac{i}{2}\Gamma}\right] \tag{10.208}$$

an, mit

$$\Gamma = \sum_i \Gamma_i \quad \text{und} \quad \Gamma_b = [\gamma_{br}]^2\,.$$

Diese führt bei Vernachlässigung der viel breiteren Einteilchenresonanzen, d. h. der Energieabhängigkeit von S_{ab}^0, zu der bekannten Breit-Wigner-Formel (siehe 10.3.).

Die Kernstruktureigenschaften stecken in den Resonanzamplituden γ_{br} und bleiben offene Parameter der Theorie.

3. Bereits bei einigen MeV Einschußenergie (Anregungsenergie $E_C^* = E_a + E_B^{(a)}$) ist die Dichte der angeregten Energiezustände in CN so hoch, daß es innerhalb ΔE_a zur gleichzeitigen Anregung sehr vieler Kernzuständen kommt. Hierzu trägt auch der Anstieg der mittleren Breite $\langle\Gamma\rangle$ dieser Zustände mit E_C^* bei. Unter der Bedingung

$$\Gamma \gg \Delta_C \quad \text{und} \quad \Delta E_a \gg \Delta_C$$

wird eine statistische Beschreibung der Streumatrix und damit der Wirkungsquerschnitte erforderlich und möglich.

Die einfachste und zugleich wichtigste statistische Eigenschaft von S_{ab} ist ihr statistischer Mittelwert $\bar{S}_{ab}$. Die Energiemittelung beeinflußt nicht die Symmetrie der Streumatrix, zerstört aber ihre Unitarität (siehe 10.3.) und damit die Flußerhaltung. Die Mittelung kann zu keiner Verstärkung sondern nur zur Abschwächung des Flusses infolge der Teilchenabsorption im Kern führen, da die Reemission aus dem CN in den Kanal b durch $\bar{S}_{ab}$ nicht beschrieben wird.

Folglich muß $|\bar{S}|^2$ kleiner oder gleich eins sein, was bedeutet, daß die Transmissionskoeffizienten

$$T_a \equiv 1 - \sum_b |\bar{S}_{ab}|^2 \tag{10.209}$$

der Bedingung $0 \leqq T_a \leqq 1$ genügen.

Der Fall $T_a = 0$ tritt ein, wenn $\bar{S}_{ab} = S_{ab}$ ist, d. h. die Streumatrix im Mittelungsintervall nicht energieabhängig ist. Der gesamte Teilchenfluß wird dann direkt emittiert, es kommt nicht zur CN-Bildung. Die Streumatrix (10.6) für $\Delta E_a \ll \Gamma_a^{ER}$ ist ein Beispiel dafür.

Bei $T_a = 1$ wird die einlaufende Welle im Kern vollständig absorbiert, d. h. $\bar{S}_{ab} = 0$. Der Transmissionskoeffizient (10.9) bestimmt damit den CN-Bildungsquerschnitt σ_a^C:

$$\sigma_a^C = \pi\lambda_a^2 T_a\,. \tag{10.210}$$

Infolgedessen tragen die beim Einsetzen von $\bar{S}_{ab}$ in (10.2) bis (10.4) berechneten Querschnitte die Bezeichnung „direkte", im Falle $\bar{S}_{aa}$-„formelastische" Wirkungsquerschnitte. Um den vollständigen mittleren Querschnitt $\bar{\sigma}_{ab}$ zu erhalten, muß zu σ_{ab}^{dir} der mittlere CN-Querschnitt, auch Fluktuationsquerschnitt σ_{ab}^{fl} genannt, addiert werden. Dessen Berechnung ist Gegenstand der statistischen Theorien von Kernreaktionen. Es gilt nach dem eben Gesagten

$$S_{ab}^{fl} = S_{ab} - \bar{S}_{ab} \tag{10.211}$$

und

$$\sigma_{ab}^{fl} = \bar{\sigma}_{ab} - \sigma_{ab}^{dir} = \pi\lambda_a^2\, \overline{|S_{ab}^{fl}|^2}\,. \tag{10.212}$$

Der differentielle Fluktuationsquerschnitt lautet

$$\sigma_{ab}^{fl}(\vartheta) = \sum_L P(\cos\vartheta) \sum_{a'b'} f_{laa'bb'} R_e \overline{S_{aa'}^{fl} S_{bb'}^{fl*}}\,. \tag{10.213}$$

Beide Ausdrücke führen unmittelbar zu der häufig verwendeten partiellen statistischen Theorie der Kernreaktionen, auch Hauser-Fehsbach-Theorie genannt (siehe 10.4.).

Die mittlere Streumatrix $\bar{S}_{ab}$ wird aus dem optischen Modell durch Lösung der Schrödinger-Gleichung (10.59) gewonnen (siehe 10.1.4.). Enthält der Hamilton-Operator des optischen Modells auch Wechselwirkungspotentiale, die einen direkten Übergang in die offenen Ausgangskanäle bewirken, so handelt es sich um ein optisches Modell mit gekoppelten Kanälen, dessen Lösungen in 10.6. behandelt werden.

4. Mit steigender Restkernanregung $U = E^* - E_b - E_B^{(b)}$ wächst die Zahl offener Ausgangskanäle exponentiell an, und es wird unmöglich bzw. unnötig, alle Kanäle einzeln zu numerieren und die zugehörigen partiellen Querschnitte $\sigma_{ab}^{(i)}$ einzeln zu berechnen. Vielmehr wird dann der Querschnitt für die Emission in das Energieintervall $E_b \ldots E_b + dE_b$ (sogenanntes absolutes Spektrum $\sigma_{ab}(E_a, E_b)$ — siehe Tabelle 10.1) angegeben, wobei

$$\sigma_{ab}(E_a, E_b) = \sigma_a^c(E_a) \cdot \varrho_b \varrho(U) \tag{10.214}$$

gilt, mit der Zustandsdichte des Restkernes $\varrho(U)$ bei der Restkernanregung U sowie der Zustandsdichte ϱ_b für Teilchen b im Endkanal. Dies führt zu der Weißkopf-Ewing-Theorie, auch vollständig statistische Theorie der Kernreaktionen genannt, die ausführlicher in 10.4.5. behandelt wird.

10.4.2. Resonanzen der Potentialstreuung

1. Wir kommen zunächst zum Fall reiner s-Wellen-Potentialstreuung langsamer Neutronen zurück. In diesem Fall ist (10.202) identisch mit Gl. (B.143)

$$\begin{aligned}\sigma_{aa} &= \pi \lambda_a^2 \,|\delta_{aa} - S_{aa}|^2 \\ &= \pi \lambda_a^2 \,|1 - S_0|^2 .\end{aligned} \tag{10.215}$$

Die Streuamplitude S_0 läßt sich für diesen einfachen Fall aus der bekannten Form der radialen Wellenfunktion $u_0(r)$

$$u_0(r) = e^{-ik_a r} - S_0 \, e^{ik_a r} , \tag{10.216}$$

der aus ihr gebildeten logarithmischen Ableitung der Wellenfunktion an der Kernoberfläche

$$f = R \left\{ \frac{\frac{d}{dr} (u_0(u))}{u_0(r)} \right\}_{r=R} = -ik_a R \, \frac{1 + S_0 \, e^{2ik_a R}}{1 - S_0 \, e^{2ik_a R}} \tag{10.217}$$

sowie der Bedingung ihrer Stetigkeit an der Grenze des Wechselwirkungsbereiches

$$f_{\text{innen}} \stackrel{!}{=} f_{\text{außen}} \tag{10.218}$$

finden.

Zur Vermeidung von Willkür wird R gewöhnlich gleich dem üblichen Kernradius $R = r_0 \cdot A^{-1/3}$ gewählt.

Gleichung (10.217) wird nach S_0 aufgelöst und f als komplexe Größe

$$f = f_0 - ih \tag{10.219}$$

eingeführt, das ergibt

$$S_0 = e^{-2ik_a R} \, \frac{k_a R - h - i f_0}{k_a R + h + i f_0} . \tag{10.220}$$

Nach Einsetzen in (10.215) bzw. (B.128) erhalten wir

$$\sigma_{el} = 4\pi \lambda_a^2 \left| \frac{k_a R}{i(k_a R + h) - f_0} + e^{ik_a R \sin kR} \right|^2 \tag{10.221}$$

und

$$\sigma_R = 4\pi \lambda_a^2 \, \frac{k_a R h}{(k_a R + h)^2 + f_0^2} , \tag{10.222}$$

aus denen hervorgeht, daß für reine Potentialstreuung $h = 0$, d. h. $f = f_0$ sein muß.

2. Eine Einteilchenresonanz liegt vor, wenn bei $E_a = E_a^{ER}$

$$f_0(E_a^{ER}) = 0 \tag{10.223}$$

gilt, da diese Bedingung zur stetigen Ankopplung der äußeren Welle an die maximale Amplitude der Wellenfunktion im Kerninnern führt (siehe Abbn. 10.25 und 10.26). Das entspricht zugleich der Ausbildung einer stehenden Welle im Kern. Das erste Glied der Taylor-Zerlegung von f_0 um E_a^{ER} lautet

$$f_0(E_a) \cong \left(\frac{d f_0}{d E_a} \right)_{E_a^{ER}} (E_a - E_a^{ER}) , \tag{10.224}$$

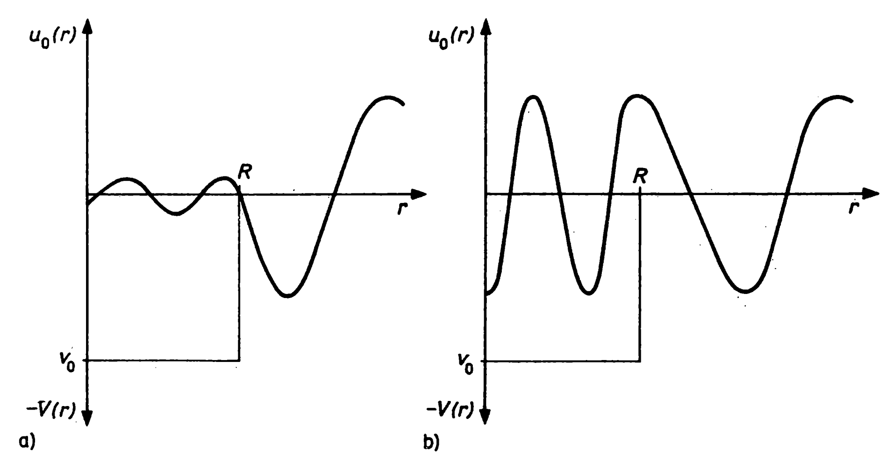


Abb. 10.26
Radiale Wellenfunktion $u_0(r)$ im und außerhalb eines Kastenpotentials im Falle a) $f_0^{(R)} \neq 0$ und b) $f_0^{(R)} = 0$, d. h. in der Einteilchenresonanz

mit der Größe

$$\Gamma_a^{ER} \equiv -\frac{2k_a R}{\left(\frac{\mathrm{d}f_0}{\mathrm{d}E_a}\right)_{E_a^{ER}}} \tag{10.225}$$

ergibt (10.224), eingesetzt in (10.220),

$$S_{aa} = S_0 = \mathrm{e}^{-2ik_aR}\left(1 + \mathrm{i}\,\frac{\Gamma_a^{ER}}{(E_a^{ER} - E_a) - \frac{\mathrm{i}}{2}\,\Gamma_a^{ER}}\right). \tag{10.226}$$

Dieser Ausdruck ist mit (10.206) identisch, wenn in letzterem $\Phi_a = k_a R$ gesetzt wird.

Der Wirkungsquerschnitt der Potentialstreuung

$$\sigma_{el} = 4\pi\lambda_a^2 \left| \mathrm{e}^{ik_aR} \sin k_a R - \frac{\frac{1}{2}\,\Gamma_a^{ER}}{(E_a^{ER} - E_a) - \frac{\mathrm{i}}{2}\,\Gamma_a^{ER}} \right|^2 \tag{10.227}$$

enthält den Resonanzterm

$$\sigma_{el}^{res} = \pi\lambda_a^2 \frac{(\Gamma_a^{ER})^2}{(E_a^{ER} - E_a)^2 + \frac{1}{4}\,(\Gamma_a^{ER})^2}, \tag{10.228}$$

die Potentialstreuung an einer ‚harten Kugel' (die Bezeichnung bringt zum Ausdruck, daß für die nicht eindringenden Wellen $u_0(R) = 0$, d. h. $\Gamma_a^{ER} = 0$ und σ_{el} zu σ_{el}^{hart} wird)

$$\sigma_{el}^{hart} = 4\pi\lambda_a^2 \sin^2 k_a R \approx 4\pi R^2 \tag{10.229}$$

und den Interferenzterm zwischen beiden.

In der Resonanz wird der maximale Streuquerschnitt erreicht (vgl. Formel (10.43)):

$$\sigma_{el}^{max}(E_a^{ER}) = 4\pi(\lambda_a + R)^2 . \tag{10.230}$$

Nach der Definition (10.225) kann Γ_a^{ER} in die beiden Faktoren

$$\Gamma_a^{ER} = 2\gamma_a^2 \cdot k_a \quad \text{mit} \quad \gamma_a^2 \equiv -\frac{1}{\left(\frac{df_0}{dE_a}\right)} \tag{10.231}$$

zerlegt werden, wobei die sogenannte reduzierte Breite γ_a^2 nur von der inneren Struktur des Kernes abhängt, da die Teilchenflußdichte k_a abgetrennt ist. Je größer γ_a^2, desto höher ist die Eindringwahrscheinlichkeit der einfallenden Welle in den Kern.

3. Als konkretes Beispiel betrachten wir die s-Wellen-Streuung an einer reellen Rechteck-Potentialmulde der Tiefe $V_0 = 52$ MeV mit $R = 5$ fm. Die innere Wellenfunktion lautet

$$u_0(v) = \sqrt{\frac{2}{R}} \sin Kr , \qquad r < R , \tag{10.232}$$

mit der inneren Wellenzahl K (für $E_a \ll V_0$):

$$K = \left(\frac{2m_a(V_0 + E_a)}{\hbar^2}\right)^{1/2} = 1{,}58 \cdot 10^{15}/\text{m}^{-1} . \tag{10.233}$$

Eine Resonanz liegt vor bei

$$u_0'(R) \sim \cos KR = 0 ,$$

was für

$$KR = \frac{\pi}{2}(2n - 1) \qquad (n = 1, 2, 3, ...) \tag{10.234}$$

gegeben ist. Nahe $E_a = 0$ befindet sich im Kern $R = 5$ fm eine 3s-Resonanz ($n = 3$).

Die Breite Γ_a^{ER} ist aus (10.231), (10.218) und (10.232) leicht bestimmbar:

$$\Gamma_a^{ER} = 2\frac{\hbar^2}{m_a R} k_a R = 18{,}22 \cdot \frac{(E_a/\text{MeV}) \cdot 1/2}{R/\text{fm}} . \tag{10.235}$$

Bereits bei $E_a = 1$ MeV beträgt die Breite $\Gamma_a^{ER} = 3{,}6$ MeV, sie ändert sich stark innerhalb des Bereiches einer Resonanz. Aus der Resonanzbedingung (10.234) erhalten wir die Energielage der Resonanz

$$E_a^{ER} = \frac{\hbar^2}{2m_a R^2} \pi^2 \left(n - \frac{1}{2}\right)^2 - V_0 , \tag{10.236}$$

so daß der Abstand zwischen zwei Resonanzen mit

$$\Delta_{ER} = \frac{E_a^{ER}(n + 1) - E_a^{ER}(n - 1)}{2} = \frac{\hbar^2}{mR^2} \pi KR \tag{10.237}$$

angegeben werden kann. Die größenordnungsmäßige Übereinstimmung von Breiten und Dichten mit den im 10.1 genannten Riesenresonanzen ist offensichtlich.

Das Verhältnis von Breite zum Abstand heißt Stärkefunktion, sie lautet für Einteilchen-resonanzen

$$\frac{\Gamma_a^{ER}}{\Delta_{ER}} = \frac{2}{\pi} \frac{k_a}{K} = [0{,}088]\,(E_a/\text{MeV})^{1/2} . \tag{10.238}$$

Wegen $K = 1{,}58 \cdot 10^{-15}$ m = const. liefert die Resonanzbedingung (10.234) ein resonanzartiges Verhalten der Stärkefunktion im Gebiet bestimmter Massenzahlen, für $n = 3$ bei $A = 56$ und für $n = 4$ bei $A = 156$.

Das entspricht dem experimentell beobachteten Verhalten der Stärkefunktion für *s*-Wellen-Neutronen über der Massenzahl (siehe Abb. 10.27). Letzteres ist zugleich ein weiterer Beweis für das tatsächliche Vorhandensein einer Anfangsphase der relativ freien Einteilchenbewegung bei Kernreaktionen (vgl. Abb. 10.11). Realistischere Werte für die Einteilcheneigenschaften des Eingangskanals Γ_a^{ER}, E_a^{ER} und $\Gamma_a^{ER}/\Delta_{ER}$ erhält man mit Hilfe des komplexen Potentials des phänomenologischen optischen Modells (siehe 10.5.).

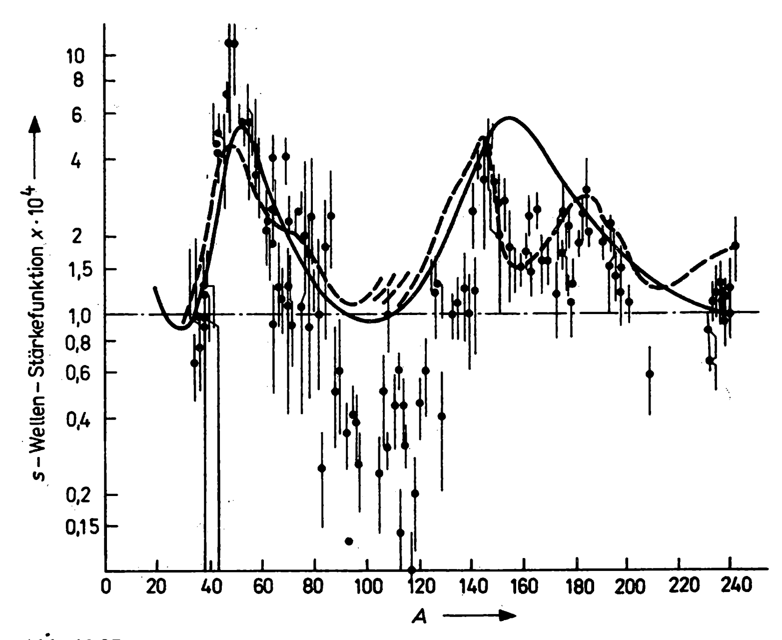


Abb. 10.27
s-Wellen-Stärkefunktion aus experimentellen Neutronenresonanzbreiten im Vergleich mit theoretischen Vorhersagen: Strich-Punkt-Linie — Modell des „schwarzen Kerns"; gestrichelte Linie — deformiertes optisches Potential; ausgezogene Linie — sphärisches optisches Potential

10.4.3. Neutronenresonanzen

1. Die theoretische Beschreibung des Querschnittsverlaufs in der Nähe einer isolierten *s*-Wellen-CN-Neutronenresonanz ($\Gamma \ll \Delta_C$) kann in Analogie zu den Ausführungen in 10.2. erfolgen. Wegen $\Gamma \ll \Gamma_a^{ER}$ kann die Amplitude der Potentialstreuung $S_{pot} = S_{aa}$ (10.206) im interessierenden Energiebereich um E_r als konstant angesehen werden. Die Größen f und S_0 sind in diesem Fall komplex anzusetzen, d. h. $h \neq 0$. Die Streuamplitude S_0 aus (10.220) wird in (10.215) und (B.128)

$$\sigma = 4\pi\lambda_a^2(1 - |S_0|^2) \tag{10.239}$$

eingesetzt, das ergibt

$$\sigma_{el} = 4\pi\lambda_a^2 \left| e^{ik_aR} \sin k_aR + i \frac{\frac{1}{2}\Gamma_a}{(E_a - E_r) + \frac{1}{2}\Gamma} \right|^2 \quad (10.240)$$

sowie

$$\sigma_R = \pi\lambda_a^2 \cdot \frac{\Gamma_a \Gamma_R}{(E_a - E_r)^2 + \frac{\Gamma^2}{4}}, \quad (10.241)$$

mit den Bezeichnungen

$$\Gamma_a = -\frac{2k_aR}{\left(\frac{df_0}{dE_a}\right)_{Er}}; \quad \Gamma_R = -\frac{2h}{\left(\frac{df_0}{dE_a}\right)_{Er}} \quad \text{und} \quad \Gamma = \Gamma_a + \Gamma_R. \quad (10.242)$$

(In den Gl. (10.239) bis (10.242) kann Γ_a durch Γ_n bzw. k_a durch k_n ersetzt werden, was im weiteren Text geschieht.) Da die Amplitude der Potentialstreuung im Bereich der CN-Resonanz nicht unbedingt der für die Streuung am „harten Kern" entspricht, ist es exakter in (10.240) den Ausdruck $e^{ik_aR} \sin k_aR$ durch S_{pot} zu ersetzen, welche aus (10.226) zu berechnen ist.

Die so erhaltenen Streuamplituden sind identisch mit (10.208) bis auf die in letzterem Ausdruck enthaltenen Anteile direkter Reaktionen $S^0_{ab \neq a}$, die hier keine Berücksichtigung fanden.

Es muß allerdings betont werden, daß die hier vorgenommene Ableitung formal ist. In Wirklichkeit erfolgt keine unmittelbare Ankopplung der einlaufenden Welle an die Wellenfunktion der CN-Zustände an der Kernoberfläche, da dessen Bildung, entgegen der Bohrschen Hypothese, nicht sofort geschieht, sondern sukzessive über die Ausbildung einer Reihe von Zwischenzuständen erfolgt. Die Breiten Γ_n und Γ_R sind Eigenschaften der unbekannten Wellenfunktionen der CN-Zustände, sie können also nicht wie Γ_a^{ER} aus dem Einteilchenpotential berechnet werden!

2. Wir wenden nun die Beziehungen (10.240) und (10.241) auf Neutronenresonanzen an:

— In diesem Fall ist neben der elastischen Streuung der Strahleneinfang einziger Reaktionskanal mit großer Breite (das trifft nicht auf die thermisch spaltenden Nuklide $^{235}_{92}U$ und $^{239}_{94}Pu$ zu; die Emission geladener Teilchen über Tunneleffekt führt zu sehr kleinen Breiten $\Gamma_p, \Gamma_\alpha < 10^{-4}\Gamma$, die hier vernachlässigt werden);

$$\Gamma = \Gamma_n + \Gamma_\gamma. \quad (10.243)$$

— Die Abhängigkeit der Neutronenbreite von der Energie (10.231) läßt folgende Substitution zu:

$$\lambda_n \Gamma_n(E_n) = \lambda_r \Gamma_n(E_r).$$

— Der statistische Faktor g_0^{Ic} in (10.201) ist wegen $I_a = 1/2$; $I_a = 0$; $I_C = I_A \pm 1/2$ gleich

$$g = \frac{(2I^c + 1)}{(2I_a + 1)(2I_A + 1)} = \frac{1}{2}\left(1 \pm \frac{1}{2I_A + 1}\right) \quad (10.244)$$

für die beiden möglichen Spinwerte des CN. Damit werden aus (10.240) und (10.241) die bekannten und häufig verwendeten Breit-Wigner-Formeln

$$\sigma_{nn}(E_n) = \pi\lambda_r^2 g \frac{\Gamma_n^2(E_r)}{(E_n - E_r)^2 + \frac{1}{4}\Gamma^2} + 4\pi\lambda_r^2 |S_{pot}|^2 + \frac{4\pi\lambda_r S_{pot} g\Gamma_n(E_n - E_r)}{(E_n - E_r)^2 + \frac{1}{4}\Gamma^2}, \tag{10.245}$$

$$\sigma_{n\gamma}(E_n) = \pi\lambda_n\lambda_r g \frac{\Gamma_n(E_r)\,\Gamma_\gamma}{(E_n - E_r)^2 + \frac{1}{4}\Gamma^2}, \tag{10.246}$$

$$\sigma_t(E_n) = \sigma_{nn} + \sigma_{n\gamma}. \tag{10.247}$$

In der relativen Energieskala $x = (E_a - E_r)/(\Gamma/2)$ sowie unter Verwendung der Beziehungen

$$\begin{aligned} \sigma_{0\gamma} &= 4\pi\lambda_r^2 g\Gamma_n\Gamma_\gamma/\Gamma^2, \\ \sigma_{0n} &= 4\pi\lambda_r^2 g\Gamma_n^2/\Gamma^2, \\ \sigma_0 &= 4\pi\lambda_r^2 g\Gamma_n/\Gamma, \\ \sigma_{int} &= 2\sigma_0 S_{pot}/\lambda_r, \\ \sigma_{pot} &= 4\pi\lambda_r^2 |S_{pot}|^2 \end{aligned} \tag{10.248}$$

und bei der Vernachlässigung der Wellenlängenänderung im Resonanzbereich entstehen die sehr transparenten und einprägsamen Beziehungen

$$\begin{aligned} \sigma_{nn}(x) &= \frac{\sigma_{on}}{1 + x^2} + \frac{\sigma_{int}x}{1 + x^2} + \sigma_{pot}, \\ \sigma_{n\gamma}(x) &= \frac{\sigma_{0\gamma}}{1 + x^2} \\ \sigma_t(x) &= \frac{\sigma_0}{1 + x^2} + \frac{\sigma_{int}x}{1 + x^2} + \sigma_{pot}; \end{aligned} \tag{10.249}$$

die zugehörigen Querschnittsverläufe sind auf Abb. 10.28 dargestellt.

3. Einige Schlußfolgerungen aus (10.248) und (10.249):

— Der Einfangsquerschnitt entspricht in vollem Maße der Bohrschen Hypothese über die Unabhängigkeit von Bildung und Zerfall des CN (10.70), mit

$$\sigma_n^C(x) = 4\pi\lambda_r^2 \frac{g\Gamma_n}{1 + x^2} \quad \text{und} \quad P_\gamma = \frac{\Gamma_\gamma}{\Gamma}. \tag{10.250}$$

— Das Gleiche trifft für den Resonanzanteil der elastischen Streuung zu

$$\sigma_n^C(x) = 4\pi\lambda_r^2 \frac{g\Gamma_n}{1 + x^2} \quad \text{und} \quad P_n = \frac{\Gamma_n}{\Gamma}, \tag{10.251}$$

während die Potentialstreuung dieser Bedingung nicht entspricht.
Physikalisch ist dies gerechtfertigt, da es sich hierbei um einen direkten Prozeß handelt.

— Der Maximalwert des Resonanzquerschnitts

$$\sigma_{nn}^{max}(0) = 4\pi\lambda_r^2 g \tag{10.252}$$

wird für eine reine Streuresonanz $\Gamma_n = \Gamma$ erreicht.

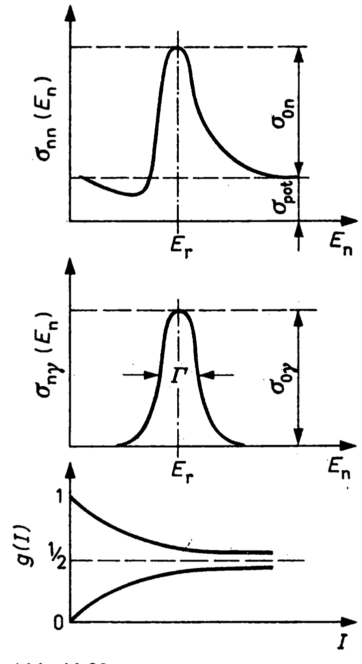


Abb. 10.28
Form der Neutronenresonanzen nach Breit-Wigner (10.244—10.246)

— Der Maximalwert des Reaktionsquerschnitts

$$\sigma_{n\gamma}^{max}(0) = \pi \lambda_r^2 g \tag{10.253}$$

erfordert demgegenüber gleichgroße Partialbreiten $\Gamma_n = \Gamma_\gamma$. Auch dies ist verständlich, ist doch Γ_n ein Maß für die Transparenz der Kernoberfläche, welche auch für die nachfolgende Absorption Voraussetzung ist. Das Verhalten der Resonanzquerschnitte entspricht damit auch, bis auf den Faktor g, genau den halbklassisch gewonnenen Aussagen (siehe 10.1.3.1.).

4. Wenn auch die Theorie des Atomkernes gegenwärtig die Vorhersage individueller Resonanzparameter nicht gestattet, so können doch Aussagen über ihre statistische Verteilung getroffen werden, was bei der großen Anzahl beobachtbarer Resonanzen (siehe Abb. 10.29) ebenfalls von Interesse ist.

Unter der Voraussetzung des Zufallscharakters der Matrixelemente des Hamilton-Operators und bei Mittelung über sehr viele, komplizierte CN-Zustände sind die Resonanzparameter wie folgt verteilt:

Die Verteilung der Resonanzabstände Δ_C wird durch die sogenannte Wigner-Verteilung

$$P(\Delta_c)\,d\Delta_c = \frac{\pi}{2}\,\frac{1}{\langle\Delta_c\rangle}\exp\left[-\frac{\pi}{4}\left(\frac{\Delta_c}{\langle\Delta_c\rangle}\right)^2\right]\Delta_c\,d\Delta_c \tag{10.254}$$

mit dem Mittelwert $\langle\Delta_C\rangle$ beschrieben, welche u. a. die „Abstoßung“ der CN-Zustände, d. h. die geringe Wahrscheinlichkeit extrem kleiner Abstände $P(\Delta_C = 0) = 0$, vorhersagt (siehe Abb. 10.30).

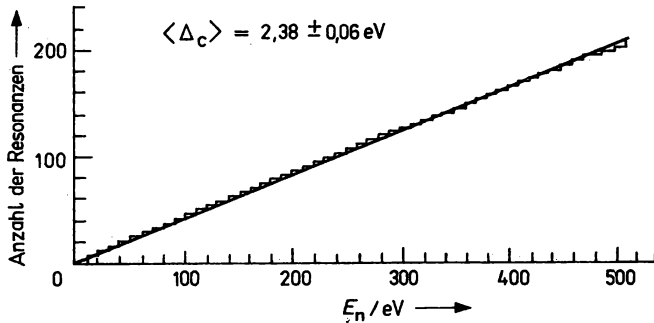


Abb. 10.29
Anzahl der Neutronenresonanzen des Compoundkerns ^{239}Pu + n in Abhängigkeit von der Neutronenenergie; jede Stufe im Histogramm entspricht fünf experimentell beobachteten Resonanzen; der mittlere lineare Anstieg (Gerade) entspricht einem mittleren Resonanzabstand von $\Delta_C = 2{,}38 \pm 0{,}06$ eV, das entspricht einer Zustandsdichte von $\varrho(E = E_B^{(n)}; I \pm 1/2) = 0{,}42 \cdot 10^6\ \text{MeV}^{-1}$

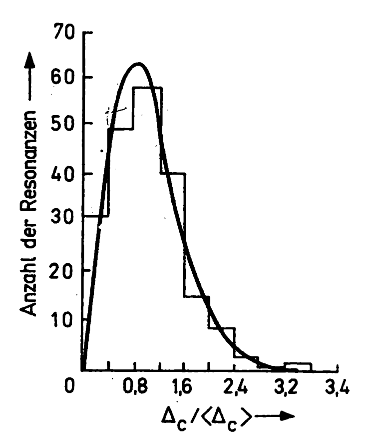


Abb. 10.30
Vergleich der experimentell beobachteten Verteilung der relativen Resonanzabstände $\Delta C/\langle\Delta C\rangle$ (Histogramm) mit der Wigner-Verteilung (10.54) (Kurve) für Compoundkernresonanzen des Systems ^{239}Pu + n

— Die relativen partiellen Breiten $X = \Gamma_i/\langle\Gamma_i\rangle$ unterliegen einer χ^2-Verteilung (siehe Abb. 10.31) mit ν Freiheitsgraden

$$P_\nu(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\nu\cdot}{2\Gamma\left(\frac{1}{2}\nu\right)}\left(\frac{1}{2}\nu x\right)^{\frac{1}{2}\nu-1}\exp\left[-\frac{1}{2}\nu x\right]\mathrm{d}x \tag{10.255}$$

und der bekannten Γ-Funktion

$$\Gamma(Z) = \int_0^\infty \exp(-t)\,t^{Z-1}\,\mathrm{d}t\,. \tag{10.256}$$

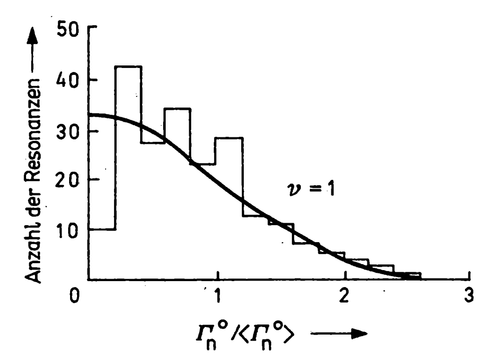


Abb. 10.31
Vergleich der experimentellen, reduzierten Neutronenbreiten (Histogramm) mit der Porter-Thomas-Verteilung (10.57) (Kurve) für ^{239}Pu + n

Die Anzahl der Freiheitsgrade ν ist ein Maß für die Zahl offener Zerfallskanäle des CN. Im Falle des Neutronenzerfalls ist stets der Übergang zum Grundzustand des Restkernes die sofortige Folge und daher $\nu = 1$.

Für die reduzierten Neutronenbreiten (in Analogie zu (10.231)) $\Gamma_n^0 = \Gamma_n E_r^{-1/2}$ gilt somit eine χ^2-Verteilung mit einem Freiheitsgrad, die sogenannte Porter-Thomas-Verteilung

$$P_1\left(\frac{\Gamma_n^0}{\langle\Gamma_n^0\rangle}\right) d\left(\frac{\Gamma_n^0}{\langle\Gamma_n^0\rangle}\right) = \left(2\pi \frac{\Gamma_n^0}{\langle\Gamma_n^0\rangle}\right)^{-1/2} \exp\left[-\frac{1}{2}\frac{\Gamma_n^0}{\langle\Gamma_n^0\rangle}\right] d\left(\frac{\Gamma_n^0}{\langle\Gamma_n^0\rangle}\right). \qquad (10.257)$$

Am Beispiel der Neutronenresonanzen in ^{239}Pu + n ist auf Abb. 10.31 die Übereinstimmung zwischen mittlerer experimenteller und theoretischer Verteilung der Streubreiten gezeigt.

Beim Strahlungseinfang kann der Restkern in einer Vielzahl angeregter Kernzustände mit $U = 0 \ldots E$ verbleiben, so daß die Einfangsbreite Γ_γ in Wirklichkeit die Summe über viele partielle Breiten

$$\Gamma_\gamma = \sum_i \Gamma_{\gamma i} \qquad (10.258)$$

darstellt. Es ist daher verständlich, daß die Verteilung von $\Gamma_\gamma/\langle\Gamma_\gamma\rangle$ durch eine χ^2-Verteilung mit einer großen Anzahl von Freiheitsgraden ($\nu = 60 \ldots 90$) beschrieben wird, d. h. sehr wenig von seinem Mittelwert abweicht.

Für zahlreiche schwere Kerne wurden auf diese Weise jeweils bis zu einigen Hundert CN-Resonanzen statistisch analysiert.

10.4.4. Partielle statistische Theorie nach Hauser und Feshbach

1. Die einfachste Annahme, welche zu einem praktikablen Ausdruck für die Fluktuationsquerschnitte (10.212) bzw. (10.213) führt, besagt, daß sich der „gemittelte Compoundkern" hinsichtlich der Teilchenemission ebenso wie ein isolierter CN-Zustand verhält, aus dem Teilchen in die unterschiedlichen Reaktionskanäle b mit gleicher Wahrscheinlichkeit ausgesandt werden, mit der einlaufende Teilchen der Sorte b absorbiert werden.

Entschlüsseln wir diese Annahme: Aus dem Prinzip des detaillierten Gleichgewichts (10.57) folgt für CN-Reaktionen (10.70) (in der in 10.4.1. verwendeten Schreibweise bzw. für $I_a = I_A = I_b = I_B = 0$)

$$\left(\frac{\lambda_b}{\lambda_a}\right)^2 \frac{\sigma_a^c}{\sigma_b^c} = \frac{\Gamma_a}{\Gamma_b}\,. \tag{10.259}$$

Mit (10.10) besagt folglich diese Annahme, daß

$$\left(\frac{\lambda_b}{\lambda_a}\right)^2 \frac{\sigma_a^c}{\sigma_b^c} = \frac{T_a}{T_b} \doteq \frac{\langle\Gamma_a\rangle}{\langle\Gamma_b\rangle} \tag{10.260}$$

gelten soll, mit den mittleren Zerfallsbreiten $\langle\Gamma_a\rangle$ und $\langle\Gamma_b\rangle$ des CN. Somit erhalten wir sofort den von HAUSER und FESHBACH vorgeschlagenen Ausdruck für den Compoundkernwirkungsquerschnitt

$$\sigma_{ab}^{HF} = \pi\lambda_a^2 T_a \frac{T_b}{\sum_i T_i} \qquad (i = 1,\ldots, N)\,. \tag{10.261}$$

Dieser Ausdruck besagt letztlich, daß sich infolge guter statistischer Mittelung über sehr viele CN-Zustände die Interferenzglieder vollständig herausmitteln (Abweichungen werden in 10.6. diskutiert).

Wird zusätzlich die Bedingung vorausgesetzt, daß der Mittelwert des Produktes unterschiedlicher S-Matrixelemente verschwindet, so erhalten wir den differentiellen Hauser-Feshbach-Querschnitt aus (10.213) mit

$$\text{Re}\, \overline{S_{aa'}^{fl} S_{bb'}^{fl*}} = [\delta_{ab}\delta_{a'b'} + (1 - \delta_{bb'})\, \delta_{ab'}\delta_{a'b}] \frac{T_a T_b}{\sum_i T_i}\,. \tag{10.262}$$

Bei der Mittelung verbleiben dabei nur geradzahlige Werte von L.

2. Im phänomenologischen-sphärischen-optischen Modell mit Spin-Bahn-Kopplung (siehe 10.5.) hängen die Transmissionskoeffizienten T_a nur vom Kanal-Bahndrehimpuls l_a, dem Gesamtdrehimpuls des Projektils $j_a = l_a + I_a$ und der Energie E_a ab. Für Nukleonen ($I_a = 1/2$) lautet dann der HF-Ausdruck (10.261) in expliziter Schreibweise

$$\sigma_{ab}^{HF}(E_a) = \pi\lambda_a^2 \sum_{I_c} \sum_{l_a j_a} \sum_{l_b j_b} \frac{(2I_c + 1)}{\lambda(2I_A + 1)} \frac{T_{\alpha l_a j_a}^{I_c}(E_a)\, T_{\beta l_b j_b}^{I_c}(E_b)}{\sum\limits_{\gamma l_\gamma j_\gamma} T_{\gamma l_\gamma j_\gamma}^{I_c}(E_\gamma)}\,, \tag{10.263}$$

wobei α, β, γ — die weiteren Quantenzahlen der Kanäle (Energie, Ladung, Parität) zum Ausdruck bringen. Durch die Summen in (10.263) wird über alle Spinprojektionen im Eingangskanal gemittelt und über alle Spinwerte I_C sowie die mit $I = I_C$ konsistenten Spinkombinationen im Ausgangskanal summiert. Die Summation im Nenner läuft über alle offenen Reaktionskanäle, d. h. alle Teilchensorten, die angeregten Kernzustände aller Restkerne und erlaubte Spinkombinationen. Die Voraussetzung für die Anwendung von Gl. (10.263) ist daher die Kenntnis der Lage E_i und der I^π-Werte aller besiedelten Restkernzustände, dies können oft sehr viele sein.

Bei der Berechnung der Transmissionskoeffizienten $T_{\gamma l_\gamma j_\gamma}^{I}(E_\gamma)$ mit Hilfe des optischen Modells wird anstelle der echten inversen Reaktion (10.57) die Berechnung für ruhende Kerne durchgeführt.

3. Die hier beschriebene statistische Theorie der Kernreaktionen hat sich bei der Interpretation von Experimenten als außerordentlich erfolgreich erwiesen. Auf Abb. 10.32 und 10.33 sind zwei Beispiele hierfür dargestellt.

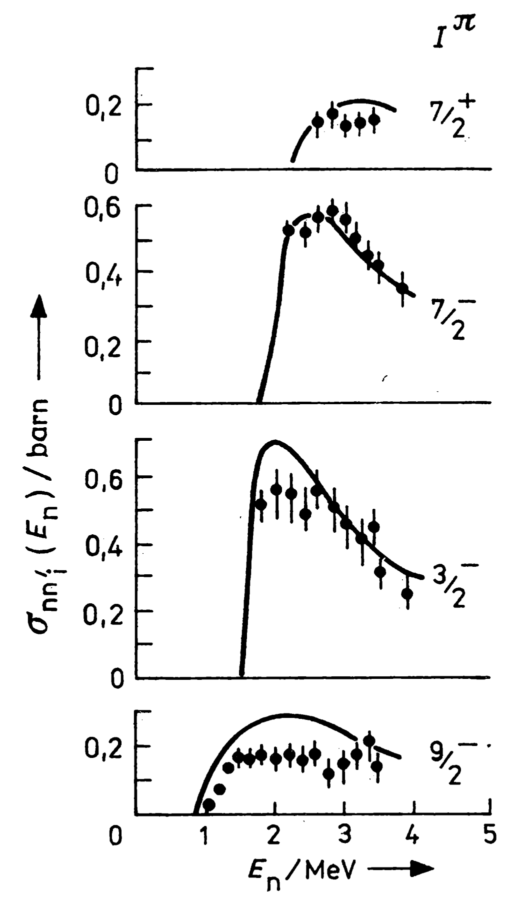


Abb. 10.32
Vergleich experimenteller Anregungsfunktionen von vier Kanälen der Reaktion $^{89}_{39}Y(n, n'_1)$ mit Berechnung nach der Hauser-Fehsbach-Theorie (10.263)

Die berechneten Anregungsfunktionen sind durch einen schnellen Anstieg von $\sigma_{ab}(E_a)$ oberhalb der Schwellenenergie, das Erreichen eines Plateaus mit dem relativen Maximalwert des Querschnitts und nachfolgenden Abfall infolge der Öffnung immer neuer Kanäle gekennzeichnet (siehe Abb. 10.32). Unterhalb der Coulomb-Barriere sind die Zerfallskanäle für geladene Teilchen im Vergleich zu Neutronen stark abgeschwächt, dies wird von der Theorie reproduziert, falls die Transparenz des Coulomb-Walls in die Transmissionskoeffizienten eingeht.

4. Da bei der Mittelwertbildung in (10.262) nur geradzahlige L-Werte übrigbleiben, sagt die HF-Theorie prinzipiell um 90° symmetrische oder isotrope Winkelverteilungen der Reaktionsprodukte voraus. Dies entspricht der Bohrschen Hypothese, da somit keinerlei Korrelationen zwischen den Impulsen p_a und p_b mehr vorhanden sind. Bei Erfüllung der statistischen Voraussetzungen $\Gamma \gg \Delta_C$ und $\Delta E_a \gg \Delta_C$ sind experimentell beobachtete Abweichungen von der Symmetrie um $\vartheta = 90°$ ein klarer Hinweis auf Abweichungen des Reaktionsablaufs vom CN-Mechanismus.

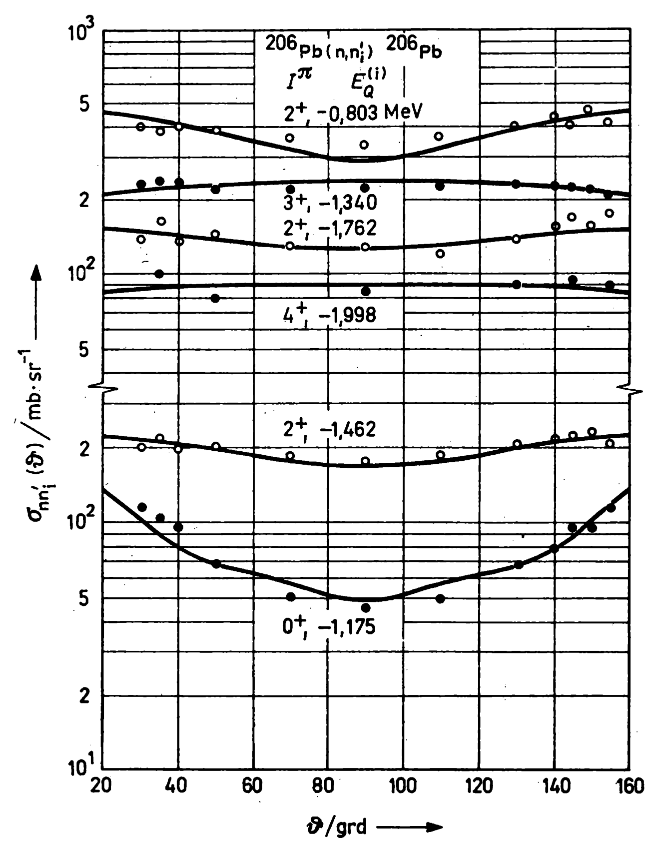


Abb. 10.33
Vergleich experimenteller Winkelverteilungen von sechs Kanälen der Reaktion $^{206}_{82}$Pb(n, n$_i'$) mit Berechnungen der Hauser-Fehsbach-Theorie (10.264)

Bei der letzten Aussage ist allerdings insofern Vorsicht geboten, als eine unzureichende Zustandsdichte im CN auch zu nichtsymmetrischen Winkelverteilungen führen kann. Der differentielle HF-Querschnitt für Nukleonen in expliziter Schreibweise lautet:

$$\sigma_{\mathrm{ab}}^{\mathrm{HF}}(\vartheta) = \frac{1}{4}\,\lambda_{\mathrm{a}}^{2} \sum_{I_{\mathrm{c}}} \sum_{l_{\mathrm{a}}j_{\mathrm{a}}} \sum_{l_{\mathrm{b}}j_{\mathrm{b}}} \frac{(-1)^{j_{\mathrm{b}}-1}}{2(2I_{\mathrm{A}}+1)} \frac{T_{\alpha}^{I_{\mathrm{c}}}{}_{l_{\mathrm{a}}j_{\mathrm{a}}} \cdot T_{\beta}^{I_{\mathrm{c}}}{}_{l_{\mathrm{b}}j_{\mathrm{b}}}}{\sum\limits_{\gamma l_{\gamma}j_{\gamma}} T_{\gamma l_{\gamma}j_{\gamma}}^{I_{\mathrm{c}}}} \bar{Z}_{l_{\mathrm{a}}j_{\mathrm{a}}l_{\mathrm{b}}j_{\mathrm{b}}I_{\mathrm{c}},L} P_{L}(\cos\vartheta) \tag{10.264}$$

mit den hier nicht näher ausgeführten gemittelten Kopplungskoeffizienten $\bar{Z}_{l_a j_a l_b I_c}$, L, die für $L = 2n + 1, n = 0, 1, 2, \ldots$, gleich Null werden. Abb. 10.33 zeigt ein Beispiel von guter Übereinstimmung zwischen berechneten und gemessenen Winkelverteilungen der Reaktionsprodukte.

5. Mit Hilfe eines einfachen Beispiels, der Reaktion $^{23}_{11}$Na(p, α)$^{20}_{10}$Ne für $E_p \leqq 0{,}4$ MeV, (siehe Abb. 10.34), soll die Anwendung der HF-Theorie veranschaulicht werden. In diesem Fall

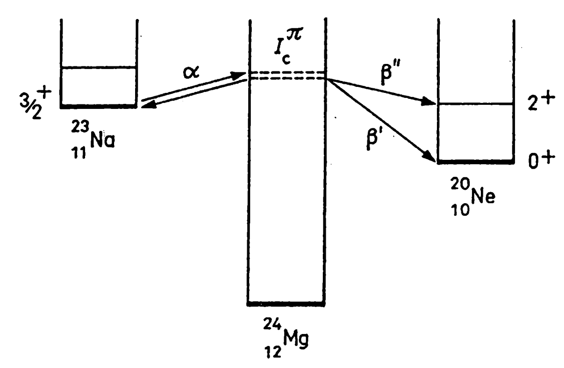


Abb. 10.34
Kanäle der Reaktion $^{23}_{11}N_a(p, \alpha)^{20}_{11}N_e$

gilt $I_a = I_p = 1/2$, $I_\alpha = I = 0$, $I_A = 3/2$, $I_B^\pi = 0^+(\beta')$ oder $2^+(\beta'')$. Es sind, halbklassisch berechnet, maximale Bahndrehimpulswerte

$l_{aA}^{max} = \frac{R}{\lambda_a} = \frac{3{,}7 \cdot 10^{-15}\,\text{m}}{7{,}22 \cdot 10^{15}\,\text{m}} = 0{,}51$ möglich, d. h., es ist ausreichend, $l_a = 0{,}1$ zuzulassen. Im Ausgangskanal ist $l_b = 0 \dots 4$. Für die Gesamtdrehimpulse der Projektile im Ein- und Ausgangskanal gilt

$$j_a = |l_p + I_p| = l_p \pm \frac{1}{2}$$

und

$$j_b = |l_\alpha + I_\alpha| = l_\alpha .$$

Die Gesamtdrehimpulserhaltung erfordert

$$j_a + I_A = I_c = j_b + I_B ,$$

$$|I_c - I_A| \leqq j_a \leqq I_c + I_A \quad \text{und} \quad |I_c - I_B| \leqq j_b \leqq I_c + I_B .$$

Aus der Paritätserhaltung folgt die zusätzliche Einschränkung wegen $P_p = P = P_A = P_B = +1$

$$l_b - l_a = 0, 2, 4, \dots \quad \text{und} \quad P_C = (-1)^{l_a} = (-1)^{l_b} .$$

In Tabelle 10.2 sind die unter diesen Bedingungen verbleibenden Transmissionskoeffizienten $T^{I_c}_{\alpha l_a j_a}$ und $T^{I_c}_{\beta l_b j_b}$ aufgeführt.

Der HF'-Querschnitt für den Kanal (α, β') lautet:

$$\sigma_{p\alpha}(3/2^+ \to 0^+) = \pi\lambda_p^2 \left[\frac{1}{2 \cdot 4}\left\{\frac{T_{\alpha,2,3/2} \cdot T_{\beta',0,0}}{T_{\alpha,2,3/2} + T_{\beta',0,0} + T_{\beta'',2,2}}\right\} + \frac{3}{2 \cdot 4}\left\{\frac{(T_{\alpha,1,1/2} + T_{\alpha,1,3/2})\,T_{\beta',1,1}}{T_{\alpha,1,1/2} + T_{\alpha,1,3/2} + T_{\beta',1,1} + T_{\beta'',1,1} + T_{\beta'',3,3}}\right\} + \frac{5}{2 \cdot 4}\left\{\frac{T_{\alpha,0,1/2} T_{\beta',2,2}}{T_{\alpha,0,1/2} + T_{\beta',2,2} + T_{\beta'',0,0} + T_{\beta'',2,2} + T_{\beta'',4,4}}\right\}\right].$$

10.4.5. Vollständig statistische Theorie

10.4.5.1. Weißkopf-Ewing-Formel

1. Betrachten wir nun den Fall (10.214) der Anregung eines Kontinuums von Zuständen im Endkern mit der Dichte $\varrho_B(I_B, U)$.

Um von (10.263) zum absoluten Teilchenspektrum $\sigma_{ab}(E_a, E_b)$ überzugehen, wird eine statistische Verteilung der Quantenzahlen der Endzustände angenommen. Insbesondere werden beide Paritäten als gleichwahrscheinlich angesehen. Über alle Spinfreiheitsgrade der Ausgangskanäle wird summiert, die Summation über die Energie im HF-Nenner wird durch Integration ersetzt.

Tabelle 10.2
Transmissionskoeffizienten für die Reaktion $^{23}_{11}Na(p, \alpha)$ bei $E_p \leqq 0{,}4$ MeV

I_C	offene Reaktionskanäle		
	$\alpha(3/2^+ \to I_C)$	$\beta'(I_C \to 0^+)$	$\beta''(I_C \to 2^+)$
0^+	$T_{\alpha,2,3/2}$	$T_{\beta',0,0}$	$T_{\beta'',2,2}$
0^-	$T_{\alpha,1,3/2}$	—	—
1^+	$T_{\alpha,0,1/2} T_{\alpha,2,3/2}$ $T_{\alpha,2,5/2}$	—	$T_{\beta'',2,2}$
1^-	$T_{\alpha,1,1/2}$ $T_{\alpha,1,3/2}$	$T_{\beta',1,1}$	$T_{\beta'',1,1} T_{\beta'',3,3}$
2^+	$T_{\alpha,0,1,2}$	$T_{\beta',2,2}$	$T_{\beta'',0,0} T_{\beta'',2,2}$ $T_{\beta'',4,4}$
2^-	$T_{\alpha,1,1/2}$ $T_{\alpha,1,3/2}$	—	$T_{\beta'',1,1} T_{\beta'',3,3}$

Das ergibt

$$\sigma_{ab}^{Hf}(E_a, E_b)\, dE_b = \pi \lambda_a^2 \sum_{I_c} \sum_{l_a j_a} \frac{2I_c + 1}{(2I_a + 1)(2I_A + 1)} \times T^{I_c}_{\alpha l_a j_a} \frac{\sum\limits_{l_b j_b I_B} T^{I}_{\beta l_b j_b}(E_b)\, \varrho(I_B, U)\, dE_b}{\sum\limits_{\gamma l_\gamma j_\gamma I_\gamma} \int\limits_0^{E^* - E_B(\gamma)} T^{I_c}_{\gamma l_\gamma j_\gamma}(E_\gamma)\,(I_\gamma, U_\gamma)\, dE_\gamma}. \tag{10.265}$$

2. Der Ausdruck (10.265) kann durch folgende Annahme weiter vereinfacht werden:

— die Spinabhängigkeit der Zustandsdichte im Endkern wird mit

$$\varrho(I_B, U) = (2I_B + 1)\, \varrho(O, U) \tag{10.266}$$

angenommen;

— die Abhängigkeit der Transmissionskoeffizienten von I_C wird vernachlässigt, was ihrer Berechnung im sphärischen optischen Modell entspricht

$$T^{I_c}_{\alpha}, l_a, j_a = T'_{\alpha}, l_a, j_a\,; \tag{10.267}$$

— die Summation über die Spins führt zu folgenden Ergebnissen

$$\sum_{I_A} (2I_A + 1) = (2I_C + 1)(2j_a + 1)$$

$$\sum_{I_B} (2I_B + 1) = (2I_C + 1)(2j_b + 1)$$

und

$$\sum_{I_c} \frac{(2I_c + 1)}{(2I_a + 1)(2I_A + 1)} = \frac{(2j_a + 1)}{(2I_a + 1)}; \tag{10.268}$$

— der Absorptions- oder CN-Bildungsquerschnitt geht mit (10.267) und (10.210) zu

$$\sigma_a^c = \pi\lambda_a^2 \sum_{I_c} \sum_{l_a j_a} \frac{2I_c + 1}{(2I_a + 1)(2I_A + 1)} T^{I_c}_{\alpha, l_a, j_a} = \pi\lambda_a^2 \sum_{l_a j_a} \frac{(2j_a + 1)}{(2I_a + 1)} T_{\alpha, l_a, j_a} \tag{10.269}$$

über. Hieraus folgt, daß die Summe über l_a und j_a in (10.265) zu $\sigma_a^C(E_a)$ und analog dazu die Summe über l_b und j_b zu $\sigma_b^C(E_b)$ führt.
Damit erhalten wir zusammenfassend die als Weißkopf-Ewing-Formel bekannte Gleichung

$$\sigma_{ab}(E_a, E_b) = \frac{\sigma_a^c(E_a)\, \sigma_b^c(E_b)\, E_b \varrho_B(O, U)}{\sum\limits_{\gamma} \int\limits_0^{E_{\gamma\,\max}} E_\gamma \sigma_\gamma^c(E_\gamma)\, \varrho(O, U_\gamma)\, dE_\gamma}, \tag{10.270}$$

die wiederum der Faktorisierung des Reaktionsquerschnitts σ_{ab} in CN-Bildungsquerschnitt σ_a^C und Zerfallswahrscheinlichkeit P_b (10.70) entspricht.

3. Die relative Spektralverteilung der emittierten Teilchen wird durch (10.270) mit

$$\sigma_{ab}(E_a, E_b)\, dE_b \sim N(E_b)\, dE_b = \text{const.}\; E_b \sigma_b^c(E_b)\, \varrho(O, U) \tag{10.271}$$

wiedergegeben. Diese Beziehung kann auch auf einfacherem Wege erhalten werden: Wir betrachten den Zerfall des CN und seinen inversen Prozeß

$$C^* \rightleftarrows B(U) + b(E_b),$$

mit den zugehörigen Übergangsraten P_b und P'_b, die nach der Störungstheorie durch mittlere Matrixelemente für den direkten und inversen Prozeß, $|\langle M \rangle|^2$ bzw. $|\langle M^* \rangle|^2$ ausgedrückt werden können:

$$P_b = \frac{2\pi}{\hbar} |\langle M \rangle|^2\, \varrho_B(U)\, \varrho_K \tag{10.272}$$

$$P'_b = \frac{2\pi}{\hbar} |\langle M^* \rangle|^2\, \varrho_C(E^*). \tag{10.273}$$

Wegen der Invarianz bei Zeitumkehr gilt $|\langle M \rangle|^2 = |\langle M^* \rangle|^2$ und damit

$$P_b = P'_b \frac{\varrho_B(U)\, \varrho_K}{\varrho_C(E^*)}. \tag{10.274}$$

Durch Normierung auf den Teilchenfluß $1/v_b$ kann P'_b auch als inverser Querschnitt ausgedrückt werden

$$P'_b = \sigma_{inv}(E_b)\, v_b = \sigma_b^c(E_b) \sqrt{\frac{2E_b}{m_b}}, \tag{10.275}$$

während die Teilchendichte im Kontinuum ϱ_K gleich

$$\varrho_K = \frac{4\pi p_b^2 \, dp_b}{(2\pi\hbar)^3} = \frac{m_b^{3/2} E_b^{1/2}}{\sqrt{2}\pi^2\hbar^3} \, dE_b \tag{10.276}$$

ist. Werden (10.275) und (10.276) in (10.274) eingesetzt, so erhalten wir wieder (10.271).

10.4.5.2. Niveaudichtefunktionen angeregter Kerne

1. Die Berechnung der Teilchenspektren nach (10.270) oder (10.271) setzt die Kenntnis der Niveaudichtefunktionen voraus. Diese können nur auf der Basis eines Kernstrukturmodells, in der Regel des Fermigas-Modells (siehe Kap. 8.), gewonnen werden.

Die Besetzungswahrscheinlichkeit der Einteilchenzustände des Fermi-Gases bei der thermodynamischen Temperatur t und der Fermi-Energie ε_F

$$f(v) = \frac{1}{1 + \exp\{[\varepsilon(v) - \varepsilon_F]/t\}} \tag{10.277}$$

läßt die Abschätzung der Zahl angeregter Teilchen n oberhalb ε_F (und „Löcher" unterhalb ε_F) zu. Einerseits ist

$$E/n \cong t$$

und andererseits, über die Anzahl von Einteilchenzuständen im Energieintervall der Breite t um ε_F

$$n \cong t g_F ,$$

mit der Dichte g_F/MeV der Einteilchenzustände nahe ε_F. Aus beiden Beziehungen folgt

$$E = a \cdot t^2 \tag{10.278}$$

mit dem Niveaudichtparameter genannten Proportionalitätsfaktor $a \sim g_F$.

Aus (10.278) ist die Entropie des Kerns bestimmbar

$$S = \int_0^t \frac{dE}{t} = 2at = 2(aE)^{1/2} , \tag{10.279}$$

aus der mit Hilfe des Boltzmann-Gesetzes die Zustandsdichte

$$\varrho(O, E) = \frac{1}{\lambda(E)} \exp S = \frac{1}{\lambda(E)} \exp[2(aE)^{1/2}] \sim \exp[2(aE)^{1/2}] \tag{10.280}$$

abgeschätzt werden kann ($\lambda(E)$ ist eine schwach energieabhängige Funktion).

Die Spinabhängigkeit der Zustandsdichte kann aus folgenden Überlegungen abgeleitet werden: Die Rotationsenergie des Kernes mit dem Spin I und dem Trägheitsmoment J kann halbklassisch gleich

$$E_{rot} = \frac{\hbar^2 I(I+1)}{2J} \tag{10.281}$$

angesetzt werden. Nur der Teil E_{eff} der gesamten Anregungsenergie E

$$E_{eff} = E - E_{rot} = E - \frac{\hbar^2 I(I+1)}{J} \tag{10.282}$$

steht damit für die Anregung innerer Freiheitsgrade zur Verfügung.

Mit Berücksichtigung der $(2I + 1)$fachen Entartung der Niveaus erhalten wir, im Unterschied zu (10.280),

$$\varrho(I, E) = (2I + 1)\, \varrho\left(0, E - \frac{\hbar^2 I(I + 1)}{J}\right).$$

Das Trägheitsmoment kann durch das einer starren Kugel (vgl. (6.209))

$$J \approx J_0 = \frac{2}{5} m_B R^2$$

angenähert werden, was die Niveaudichtefunktion

$$\varrho(I, E) = \text{const.}\ (2I + 1) \exp\left\{2(aE)^{1/2} - \frac{\hbar^2 I(I + 1)}{J_0}\right\} \tag{10.284}$$

ergibt, die sich nicht sehr stark von der exakt abgeleiteten Formel

$$\varrho(E, I) = \frac{(2I + 1)}{24\sqrt{2}\, a^{1/4} E^{5/4} \sigma^3} \exp\left\{2(aE)^{1/2} - \frac{(I + 1/2)^2}{2\sigma^2}\right\}, \tag{10.285}$$

unterscheidet, mit dem Niveaudichteparameter a,

$$a = \frac{\pi^2}{6}\, g_F \cong \frac{A}{7{,}5}\Big/ \text{MeV}^{-1} \tag{10.286}$$

und dem Spinabschneidefaktor σ^2

$$\sigma^2 = \frac{6}{\pi^2} \sqrt{aE}\, \langle m^* \rangle, \tag{10.287}$$

in welchem $\langle m^* \rangle$ die mittlere Projektionsquantenzahl (Magnetquantenzahl) der angeregten Zustände bedeutet.

10.4.5.3. Verdampfungsspektren

Durch Einsetzen von (10.285) in (10.270) oder (10.271) erhält man das absolute bzw. relative Teilchenspektrum. Letzteres lautet

$$P_b(E_b)\, dE_b = \text{const} \cdot E_b \sigma_b^c(E_b)\, U^{-5/4} \exp\left[2(aU)^{1/2}\right]. \tag{10.288}$$

Für den Vergleich mit dem Experiment wird häufig die Darstellung

$$\ln \frac{[P_b(E_b)] \exp \cdot U^{5/4}}{E_b \cdot \sigma_b^c(E_b)} \sim 2(aU)^{1/2} \tag{10.289}$$

verwendet. Experimentell gewonnene Spektren der (n, n')-Reaktion, in dieser Darstellung über $U^{1/2} = (E_n - E_{n'})^{1/2}$ aufgetragen, müssen danach einen linearen Verlauf aufweisen, aus dessen Anstieg der Niveaudichteparameter a zu bestimmen ist. Andererseits deuten Abweichungen vom linearen Verlauf, vorausgesetzt die Bedingungen einer guten Statistik der Endkernzustände sind erfüllt, auf das Vorhandensein anderer Reaktionsmechanismen hin. Auf den Abb. 10.35 und 10.36 sind solche Vergleiche mit Experimenten durchgeführt. Niveaudichteparameter aus derartigen Analysen und aus den mittleren Abständen zwischen Neutronenresonanzen $\varrho \sim \langle \Delta_C \rangle^{-1}$ sind auf Abb. 10.37 dargestellt und mit dem Fermigas-Modell (10.286) verglichen. Es ist zu sehen, daß größere Abweichungen im Gebiet magischer Kerne, insbesondere des doppelt magischen $^{208}_{82}$Pb, auftreten, die in der reduzierten Einteilchenzustandsdichte g_F dieser Kerne ihre Ursache haben.

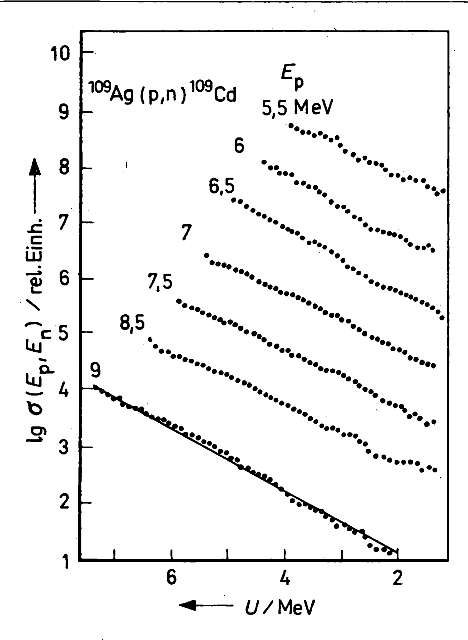


Abb. 10.35
Neutronenspektren aus der Kernreaktion ^{109}Ag(p, n)^{109}Cd für verschiedene Einschuß-energien E_p = 5,5 ... 9 MeV über der Restkernanregungsenergie U aufgetragen; Kurve — nach dem Verdampfungsmodell (10.291) berechnetes Spektrum mit T = 0,68 MeV

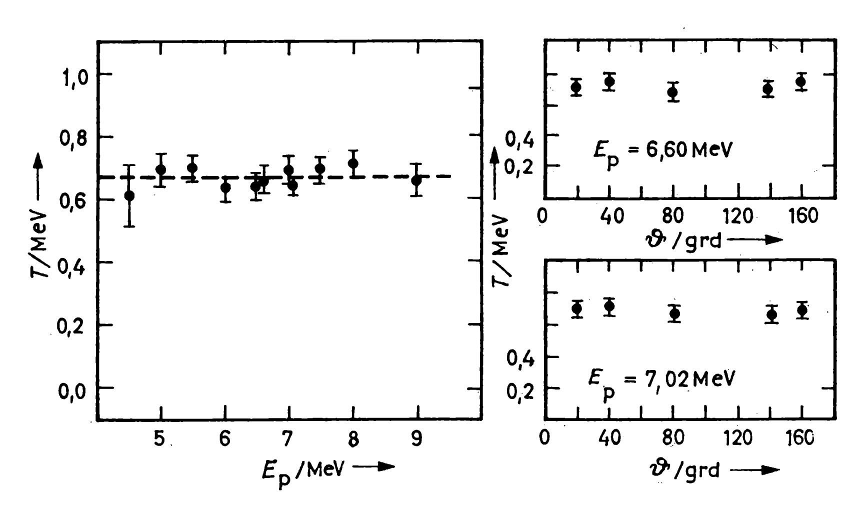


Abb. 10.36
Aus experimentellen Neutronenspektren der Reaktion ^{109}Ag(p, n)^{109}Cd ermittelte Kerntemperaturparameter T, für verschiedene Einschußenergien (links) und Austrittswinkel (rechts)

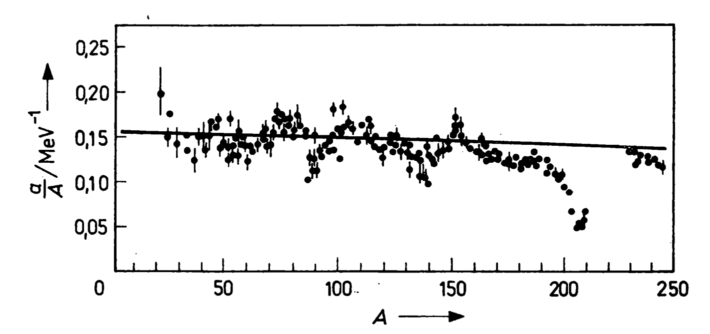


Abb. 10.37
Abhängigkeit des Niveaudichteparameters a von der Massenzahl A; Punkte — experimentelle Werte aus der Dichte von Neutronenresonanzen

Eine weitere Näherung ergibt sich, wenn $S(E)$ durch das erste Glied der Taylor-Reihe

$$S(E) = \frac{\partial S}{\partial E} E + \cdots; \qquad \text{mit} \quad \left(\frac{\partial S}{\partial E}\right) = \frac{1}{T} = \text{const.} \tag{10.290}$$

ersetzt wird; sie wird als „Modell konstanter Temperatur", der Parameter T als Kerntemperatur bezeichnet. Das Spektrum ist in diesem Fall mit dem Maxwellschen Verdampfungsspektrum, das für die Emission von Elektronen aus einer erhitzten Metalloberfläche gilt, identisch

$$\begin{aligned} P_\mathrm{b}(E_\mathrm{b})\,\mathrm{d}E_\mathrm{b} &= \text{const} \cdot E_\mathrm{b}\sigma_\mathrm{b}^\mathrm{c}(E_\mathrm{b}) \exp(U/T) \\ &= \text{const} \cdot E_\mathrm{b}\sigma_\mathrm{b}^\mathrm{c}(E_\mathrm{b}) \exp(-E_\mathrm{b}/T), \end{aligned} \tag{10.291}$$

da $\exp(+U/T) = \exp[(E^* - E_\mathrm{B}^{(\mathrm{b})} - E_\mathrm{b})/T] \sim \exp(-E_\mathrm{b}/T)$ ist. Physikalisch bedeutet die Näherung (10.290) eine Vernachlässigung der Abkühlung des Kernes bei der Emission eines Teilchens b — eine sehr grobe Näherung, wenn man bedenkt, daß das Teilchen die Energie $E_\mathrm{B}^{(\mathrm{b})} + E_\mathrm{b}$ dem Kern entzieht. Dennoch beschreibt auch diese Beziehung in vielen Fällen die experimentellen Spektren recht gut und wird daher häufig angewandt.

Der Vergleich zwischen Verdampfungsmodell und Experiment auf den Abbildungen 10.35 und 10.36 bestätigt dies: Die Spektren haben für unterschiedliche Einschußenergien eine sehr ähnliche Form und lassen sich gut mit dem Verdampfungsmodell (10.291) beschreiben. Werden durch Anpassung des theoretischen Ausdrucks (10.291) an die Spektren für verschiedene Einschußenergien und Austrittswinkel Kerntemperaturparameter bestimmt, so sind letztere im Rahmen der Bestimmungsfehler konstant — damit wird letztlich das vollständig statistische Modell vollauf bestätigt, die vorliegende Reaktion verläuft über den Compoundkernmechanismus.

10.4.6. Fluktuationen

1. Im Falle der gleichzeitigen Anregung von N nicht überlappenden Resonanzen lautet die Streumatrix, anstelle von (10.208)

$$S_\mathrm{ab} = S_\mathrm{ab}^0 \left[S_\mathrm{ab} + \mathrm{i} \sum_{i=1}^{N} \frac{\gamma_{\mathrm{a}i}\gamma_{\mathrm{b}i}}{(E_i - E_\mathrm{a}) - \frac{1}{2}\Gamma_i} \right] \tag{10.292}$$

mit

$$\Gamma_{\mathrm{a}i} = (\gamma_{\mathrm{a}i})^2, \qquad \Gamma_{\mathrm{b}i} = (\gamma_{\mathrm{b}i})^2 \quad \text{und} \quad \Gamma_i = \sum_c \Gamma_{ci},$$

Die über $\Delta E_a \gg \Delta_C \gg \Gamma_i$ gemittelte Streumatrix lautet wegen

$$\frac{1}{E_a}\int\limits_{E_a}\sum_{i=1}^{N}\frac{\gamma_{ai}\gamma_{bi}}{(E_i-E_a)-\frac{i}{2}\Gamma_i}\,dE_a \approx \frac{N\langle\gamma_{ai}\gamma_{bi}\rangle_N}{N\langle\Delta_c\rangle}\int\frac{dE_a}{(E_i-E_a)} = i\pi\frac{\langle\gamma_{ai}\gamma_{bi}\rangle_N}{\langle\Delta_c\rangle}$$

nunmehr

$$S_{ab} = S^0_{ab}\left[\delta_{ab} - \pi\frac{\langle\gamma_{ai}\gamma_{bi}\rangle_N}{\langle\Delta_c\rangle}\right]. \tag{10.293}$$

Aus (10.293) folgt, daß bei Fehlen direkter Reaktionen mit $b \neq a$ wegen $\bar{S}_{ab} = 0$ auch $\langle\gamma_{ai}\gamma_{bi}\rangle = 0$ sein muß.
Dann gilt

$$\bar{S}_{ab} = \bar{S}_{aa} = S^0_{ab}\left[1 - \frac{\pi\langle\Gamma_{ai}\rangle}{\langle\Delta_c\rangle}N\right]. \tag{10.294}$$

Aus dem Vergleich mit (10.209) ist ersichtlich, daß (wegen $\langle\Delta_c\rangle \gg \langle\Gamma_{ai}\rangle$)

$$T_a = 1 - |\bar{S}_{aa}|^2 = \frac{2\pi\langle\Gamma_{ai}\rangle}{\langle\Delta_c\rangle}N - \frac{\pi^2\langle\Gamma_{ai}\rangle^2}{\langle\Delta_c\rangle^2}N \simeq \frac{2\pi\langle\Gamma_{ai}\rangle}{\langle\Delta_c\rangle}N \tag{10.295}$$

gilt.

In gleicher Näherung kann der Fluktuationsquerschnitt unter der Annahme diagonaler Matrixelemente $\bar{S}_{ab} = \bar{S}_{aa}$ ausgedrückt werden, das ergibt

$$\sigma^{fl}_{ab} = \frac{2\pi^2\lambda_a^2}{\langle\Delta_c\rangle}\left\langle\frac{\Gamma_{ai}\Gamma_{bi}}{\Gamma_i}\right\rangle N. \tag{10.296}$$

Der Vergleich zwischen dem eben erhaltenen Ausdruck und σ^{HF}_{ab} (10.261), der mittels (10.295) ebenfalls als Funktion der mittleren Breiten dargestellt werden kann,

$$\sigma^{HF}_{ab} = \pi\lambda_a^2\frac{T_aT_b}{\sum\limits_c T_c} = \frac{2\pi^2\lambda_a^2}{\langle\Delta_c\rangle}\cdot\frac{\langle\Gamma_{ai}\rangle_N\langle\Gamma_{bi}\rangle_N}{\langle\Gamma_i\rangle_N}. \tag{10.297}$$

führt zu dem Ergebnis, daß sich beide Ausdrücke um einen Faktor F_{ab} unterscheiden

$$\sigma^{fl}_{ab} = \sigma^{HF}_{ab}\cdot F_{ab},$$

mit

$$F_{ab} = \left\langle\frac{\Gamma_{ai}\Gamma_{bi}}{\Gamma_i}\right\rangle_N \Big/ \frac{\langle\Gamma_{ai}\rangle_N\langle\Gamma_{bi}\rangle_N}{\langle\Gamma_i\rangle_N}, \tag{10.298}$$

der die Bezeichnung Breitenfluktuationskorrektur trägt und im Falle schwach fluktuierender Breiten $\Gamma_i \approx \langle\Gamma_i\rangle$ aber auch bei Vergrößerung der Anzahl von Resonanzen N (oder ΔE_a) gegen eins geht. Aus den bekannten Verteilungsfunktionen der Breiten (10.255) bzw. (10.257) kann nach MOLDAUER der Korrekturfaktor F_{ab} berechnet und somit σ^{HF}_{ab} korrigiert werden.

Im Falle überlappender Resonanzen $\langle\Gamma_i\rangle \geqq \langle\Delta_C\rangle$ ist ein weiterer Korrekturfaktor zu berücksichtigen, der auf Fluktuationen des Interferenzanteiles benachbarter Resonanzen zurückzuführen ist. Dieser geht bei $\langle\Gamma_i\rangle \gg \langle\Delta_C\rangle$ gegen eins.

Zusammenfassend kann festgestellt werden, daß die ursprünglich formulierte HF-Theorie im Falle der Mittelung über sehr viele isolierte Resonanzen

$$\Delta E_a \gg \langle\Delta_C\rangle \gg \langle\Gamma_i\rangle$$

und im Gebiet sehr breiter, stark überlappender Resonanzen

$$\Delta E_a > \langle \Gamma_i \rangle \gg \langle \Delta_C \rangle$$

gilt. Häufig erfolgen Anwendungen auch im Fall

$$\langle \Gamma_i \rangle \geqq \langle \Delta_C \rangle ,$$

dann sind die von MOLDAUER eingeführten Korrekturen erforderlich.

2. Von physikalischem Interesse ist die Frage nach der statistischen Verteilung der Fluktuationen im Wirkungsquerschnitt. Sind diese zufällig verteilt, so darf es keine weitreichenden Korrelationen im Querschnittsverlauf geben. Diese Fragestellung wurde von ERICSON mit Hilfe der Autokorrelationsfunktion

$$\begin{aligned} F(\varepsilon) &= \langle (\sigma_{ab}(E_a + \varepsilon) - \langle \sigma_{ab} \rangle) (\sigma_{ab}(E_a) - \langle \sigma_{ab} \rangle) \rangle \\ &= \langle \sigma_{ab}(E_a + \varepsilon) \, \sigma_{ab}(E_a) \rangle - \langle \sigma_{ab} \rangle^2 \end{aligned} \tag{10.299}$$

untersucht. Für $\varepsilon = 0$ stellt diese Funktion

$$\begin{aligned} F(0) &= \langle \sigma^2_{ab}(E_a) \rangle - \langle \sigma_{ab} \rangle^2 \\ &= \langle [\sigma_{ab}(E_a) - \langle \sigma_{ab} \rangle] \rangle^2 \end{aligned} \tag{10.300}$$

das mittlere Quadrat der Abweichung vom Mittelwert dar, im Falle unkorrelierter Fluktuationen muß

$$\lim_{\varepsilon \to \infty} F(\varepsilon) = 0 \tag{10.301}$$

gelten. Nach Einsetzen des Matrixelements (10.292) in (10.299) erhält ERICSON die Beziehungen für den Reaktionsquerschnitt σ_{ab}

$$F_{ab}(\varepsilon) = \frac{1}{1 + (\varepsilon/\langle \Gamma \rangle)^2} \langle \sigma^{fl}_{ab} \rangle \left(2\sigma^{div}_{ab} + \langle \sigma^{fl}_{ab} \rangle\right) \tag{10.302}$$

und den totalen Querschnitt σ_t

$$F_t(\varepsilon) = \frac{1}{1 + (\varepsilon/\langle \Gamma \rangle)^2} 2\pi \lambda^2_a \langle \sigma^{fl}_{aa} \rangle , \tag{10.303}$$

aus der folgende Schlußfolgerungen gezogen werden können:

- die beschriebenen Fluktuationen treten prinzipiell nur bei $\langle \sigma^{fl}_{ab} \rangle \neq 0$, d. h. für CN-Reaktionen auf;
- die Resonanzbreite Γ ist die prinzipielle Ursache für Korrelationen des Querschnitts in benachbarten Energiegebieten, daher können sich Korrelationen nur innerhalb von Bereichen der Dimension von Γ ergeben — die Funktion $F(\varepsilon)$ sinkt mit $[1 + (\varepsilon/\langle \Gamma \rangle)^{+2}]^{-1}$;
- $F(0)$ wird im Falle der Reaktion (a, b) durch die Interferenz zwischen CN- und direktem Anteil, im Falle des totalen Querschnitts nur durch die Fluktuation der elastischen Streuung bestimmt;
- die Untersuchung des Korrelationsverhaltens der Querschnitte gestattet es, experimentelle Aussagen über $\langle \Gamma \rangle$ und $\langle \sigma^{fl}_{ab} \rangle$, damit auch über $\langle \Delta_C \rangle$ zu erlangen;
- Abweichungen vom Verhalten $F(\varepsilon) \sim (1 + (\varepsilon/\langle \Gamma \rangle)^2)^{-1}$, insbesondere das Auftreten von Korrelationen im Bereich $\varepsilon \sim \Gamma_I$ (siehe 10.1. und Abb. 10.8), sind Hinweise für das Auftreten intermediärer Prozesse, welche in ihrem Mechanismus sowohl von CN- als auch direkten Prozessen verschieden sind (Näheres hierzu siehe 10.7).

10.5. Optisches Modell

10.5.1. Absorption im komplexen Potential

1. Als zu Beginn der fünfziger Jahre Experimente zur Wechselwirkung niederenergetischer Neutronen ($E_n = 0{,}1-3$ MeV) mit mittelschweren und schweren Kernen bei geringer Energieauflösung (20—100 keV) durchgeführt wurden, beobachtete man in der Energieabhängigkeit des totalen Wirkungsquerschnitts charakteristische Resonanzerscheinungen, die von den individuellen Eigenschaften des Targetkerns (Spin, Neutronenbindungsenergie) unabhängig waren. Diese Oszillationen besaßen Breiten von etwa 1 MeV, also einen Wert, der um Größenordnungen über den bei Compoundkernreaktionen erwarteten Resonanzbreiten liegt. Man gab diesen Großstrukturen im Wirkungsquerschnitt den Namen Riesenresonanzen. Gleichartige Regularitäten im Wirkungsquerschnitt stellt man bei fester Einschußenergie in Abhängigkeit von der Massenzahl A des Targets bzw. vom Kernradius $R = r_0 A^{1/3}$ fest, so daß statt Riesenresonanz auch die Bezeichnung Formresonanz gebräuchlich wurde. Einige Ergebnisse dieser Untersuchungen sind in Abb. 10.38 zusammengefaßt. Spätere Experimente bei höheren Einschußenergien zeigten, daß nicht nur im totalen, sondern auch im elastischen Neutronenquerschnitt derartige Form- oder Riesenresonanzen auftreten, wobei der Abstand benachbarter Resonanzen 10—20 MeV betragen kann (vgl. auch Abb. 10.8 und (10.102)). Als man die gleichen Effekte auch bei anderen Inzidenzteilchen (Protonen, Deuteronen, α-Teilchen) nachwies, bestand kein Zweifel mehr, daß das Auftreten von Riesenresonanzen in den Wirkungsquerschnitten eine allgemeine Eigenschaft des Reaktionsablaufs ausdrückt, die nicht den Mechanismusvorstellungen des Compoundkerns entspricht.

2. Die Breiten und Abstände der Riesenresonanzen weisen darauf hin, daß bei Mittelung über ein Energieintervall, das viele Compoundkernresonanzen erfaßt, der Vielteilchencharakter der Nukleon-Kern-Wechselwirkung verlorengeht und charakteristische Züge eines Einteilchenproblems in Erscheinung treten. Die elastische Streuung eines Nukleons läuft im wesentlichen als Wechselwirkung des Nukleons mit einem anziehenden mittleren Potential U ab, das von allen Targetnukleonen durch Mittelung über die Zweiteilchenwechselwirkungen gebildet wird. Dieses mittlere Potential führt einerseits zu einer Brechung der einlaufenden ebenen Welle, so daß die gestreuten Teilchen in großem Abstand vom Streuzentrum in einem gegenüber dem Anfangszustand veränderten Impulszustand nachgewiesen werden. Andererseits wird der Ablauf der elastischen Streuung durch die Möglichkeit beeinflußt, daß über eine Restwechselwirkung auch nicht-elastische Prozesse (unelastische Streuung, Compoundkernbildung, Kernreaktionen mit Umordnung) auftreten, die zu Übergängen aus dem Eingangskanal in andere offene Reaktionskanäle führen. Derartige Reaktionen, die einen Teil des einlaufenden Flusses in nicht-elastische Kanäle leiten, bedeuten eine Absorption aus dem Eingangskanal: für den einfallenden Strahl wirkt das Target als stark brechendes und schwach absorbierendes Medium. Um das Auftreten anderer Reaktionskanäle in Form einer Absorption aus dem Eingangskanal zu simulieren, wählt man das mittlere Potential U für die elastische Streuung komplex. Als effektiver Hamilton-Operator für den elastischen Kanal ergibt sich dann

$$H = T + U(r),$$

$$T = \frac{p^2}{2m}, \qquad U(r) = V(r) + \mathrm{i}W(r). \tag{10.304}$$

Das abstandsabhängige Potential $U(r)$ besteht aus einem Realteil $V(r)$ und einem Imaginärteil $W(r)$. Man bezeichnet $U(r)$ als optisches Potential, da es die Ausbreitung eines Teilchens der Energie E in einem streuenden und absorbierenden Medium durch einen komplexen Brechungs-

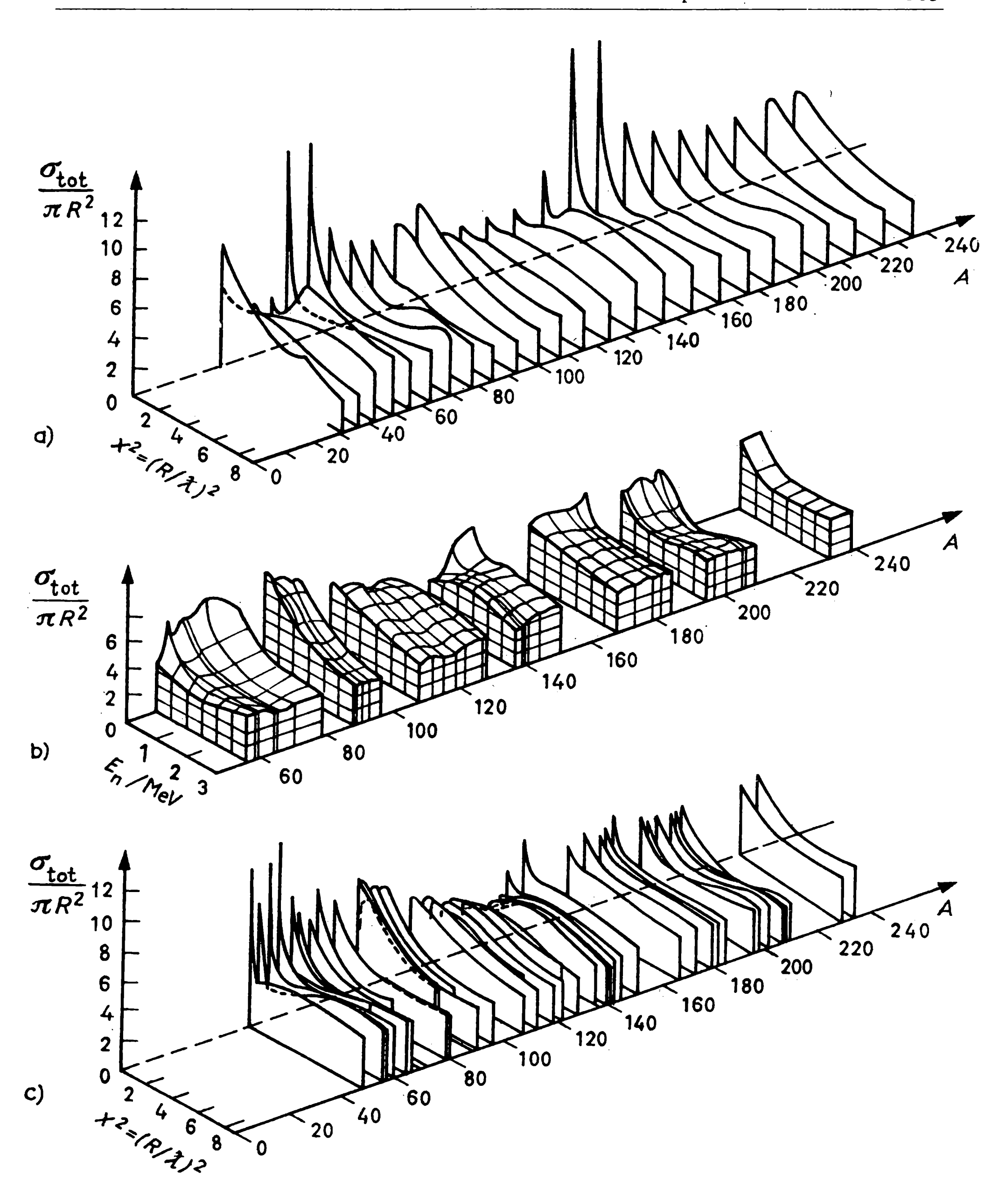


Abb. 10.38
Totaler Neutronenquerschnitt σ_{tot} als Funktion der Einschußenergie E_n bzw. der Variablen $x^2 = (R/\lambda)^2$ für verschiedene Werte der Massenzahl A ($R = 1{,}45 \cdot A^{1/3} \cdot 10^{-13}$ cm) (a): Rechnungen im optischen Modell mit Kastenpotential $U = V(1 + i\xi)$ ($V = 43$ MeV, $\xi = 0{,}03$). (b), (c): experimentelle Ergebnisse

index $n^2(r) = 1 - \frac{1}{E}(V(r) + \mathrm{i}W(r))$ für die entsprechende Welle beschreibt. Ein Modell, das die Nukleon-Kernwechselwirkung auf die unabhängige Einteilchenbewegung in einem komplexen Potential zurückführt, nennt man optisches Modell. Man kann das optische Modell als Fortsetzung des Schalenmodells ins Kontinuum auffassen.

3. Der Hamilton-Operator (10.304) des optischen Modells ist nicht hermitesch, $H^+ = T + V(r) - \mathrm{i}W(r)$, so daß die Normierung der Wellenfunktion im Zeitablauf nicht erhalten bleibt. Aus der zeitabhängigen Schrödinger-Gleichung für die Wellenfunktion $\psi(\boldsymbol{r}, t)$, die die Bewegung des einfallenden Nukleons im Target beschreibt

$$-\frac{\hbar}{\mathrm{i}}\frac{\partial}{\partial t}\psi(\boldsymbol{r}, t) = \left[\frac{\boldsymbol{p}^2}{2m} + V(r) + \mathrm{i}W(r)\right]\psi(\boldsymbol{r}, t) \tag{10.305}$$

läßt sich mit

$$\varrho(\boldsymbol{r}, t) = \psi^*(\boldsymbol{r}, t) \cdot \psi(\boldsymbol{r}, t),$$

und

$$\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}, t) = \frac{\hbar}{2\mathrm{i}m}\left(\psi^*(\boldsymbol{r}, t)\frac{\partial\psi(\boldsymbol{r}, t)}{\partial\boldsymbol{r}} - \psi(\boldsymbol{r}, t)\frac{\partial\psi^*(\boldsymbol{r}, t)}{\partial\boldsymbol{r}}\right)$$

eine Kontinuitätsgleichung in der Form

$$\frac{\partial\varrho(\boldsymbol{r}, t)}{\partial t} + \operatorname{div}\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}, t) = \frac{2}{\hbar}W(r)\,\varrho(\boldsymbol{r}, t) \tag{10.306}$$

ableiten. Die zeitliche Änderung der Dichte ϱ der Aufenthaltswahrscheinlichkeit in einem endlichen Volumen ist nicht nur durch die Divergenz der Stromdichte $\boldsymbol{j}$, sondern auch durch den Quellterm $\sim W(r)\,\varrho(\boldsymbol{r}, t)$ bestimmt. Für $W(r) < 0$ entspricht das einer Absorption. Dieser Absorptionsvorgang muß im Falle des Atomkerns schwach sein, da die beobachteten Oszillationen im Wirkungsquerschnitt nur dann zustande kommen, wenn eine Interferenz von einfallender und durchgelassener Welle auftritt. Ein schwarzer, d. h. vollständig absorbierender Kern würde einen monotonen Abfall des totalen Wirkungsquerschnittes bedingen.

4. Der Imaginärteil des optischen Potentials bestimmt nach (10.306) die Absorptionsrate der Teilchen im Kern zu $-2W(r)/\hbar$. Da die Absorption des einfallenden Teilchens im Sinne einer Dämpfung der unabhängigen Bewegung nur durch Stöße mit den Targetnukleonen erfolgen kann, läßt sich die mittlere freie Weglänge, eine fundamentale Größe für jedes Vielteilchensystem, aus dem Imaginärteil des optischen Potentials abschätzen. Es gilt

$$\lambda = -\frac{\hbar v}{2W}, \tag{10.307}$$

wobei v die Teilchengeschwindigkeit innerhalb des Potentials ist. Für $W \to 0$ wird die mittlere freie Weglänge unendlich groß, während eine starke Absorption $W \to \infty$ eine sehr geringe freie Weglänge bedeutet. Die im nuklearen Vielteilchensystem vorliegende mittlere freie Weglänge läßt sich aus der Stärke der Oszillationen im totalen Wirkungsquerschnitt quantitativ abschätzen. Man findet, daß für Nukleonen mit Energien von etwa 20 MeV der Wert für λ in der Größenordnung des Kernradius liegt. Aus dieser Abschätzung können wir schließen, daß die einfallenden Nukleonen den Targetkern mit großer Wahrscheinlichkeit unter Aufrechterhaltung der unabhängigen Einteilchenbewegung durchlaufen, ohne daß sofort beim Eindringen in den Kern ein Compoundkern gebildet wird.

10.5.2. Gemittelte Wirkungsquerschnitte

1. Für hinreichend hohe energetische Auflösung zeigen Neutronenquerschnitte bei niedrigen Einschußenergien zahlreiche Resonanzen oder drastische Fluktuationen, die durch Compoundkernbildung mit z. T. stark überlappenden Niveaus zustande kommen. Diese starke Energieabhängigkeit der Wechselwirkungsprozesse läßt sich in einem Einteilchenmodell wie dem optischen Modell nicht erfassen. Der Verlauf des Wirkungsquerschnitts legt aber eine statistische Betrachtungsweise nahe: durch eine geeignete Energiemittelung kann man die Schwankungen beseitigen, indem man einen mittleren Wirkungsquerschnitt einführt, der schwächer von der Energie abhängt. Die mathematische Mittelung des Wirkungsquerschnitts nehmen wir nach

$$\langle\sigma(E)\rangle = \frac{1}{\Delta}\int\limits_{E-\Delta/2}^{E+\Delta/2} \sigma(E')\,\mathrm{d}E' \tag{10.308}$$

bei der Energie E über ein Energieintervall Δ so vor, daß Δ groß gegenüber dem mittleren Abstand D der Compoundkernresonanzen, aber klein gegenüber der Einschußenergie E ist, so daß die Wellenzahl des Inzidenzteilchens als konstant angesehen werden kann: $D \ll \Delta \ll E$. Der mittlere Wirkungsquerschnitt $\langle\sigma(E)\rangle$ variiert dann nur noch schwach mit E.

Wir wollen zeigen, wie dieser über die Energie gemittelte Wirkungsquerschnitt mit den im optischen Modell berechneten Größen zusammenhängt.

2. Nach Gl. (B.143) und (B.148) gilt für den elastischen Streuquerschnitt σ_{el} und den Reaktionsquerschnitt σ_{R}

$$\sigma_{\mathrm{el}} = \frac{\pi}{k^2}\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)\,|1-S_l|^2\,, \tag{10.309}$$

$$\sigma_{\mathrm{R}} = \frac{\pi}{k^2}\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)\,(1-|S_l|)^2\,, \tag{10.310}$$

wobei im Resonanzgebiet die Streuphase $\delta_l(k)$ der Partialwelle mit dem Drehimpuls l in der Streumatrix $S_l = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\delta_l(k)}$ stark mit der Energie variiert. Der totale Reaktionsquerschnitt $\sigma_{\mathrm{tot}} = \sigma_{\mathrm{el}} + \sigma_{\mathrm{R}}$ wird

$$\sigma_{\mathrm{tot}} = \frac{\pi}{k^2}\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)\,[2\,\mathrm{Re}\,(1-S_l)]\,. \tag{10.311}$$

Die Mittelung der Wirkungsquerschnitte (10.309—311) nach der Vorschrift (10.308) ergibt

$$\begin{aligned}\langle\sigma_{\mathrm{el}}\rangle &= \frac{\pi}{k^2}\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)\,(1-\langle S_l\rangle-\langle S_l^*\rangle+\langle|S_l|^2\rangle)\\ &= \frac{\pi}{k^2}\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)\,(|1-\langle S_l\rangle|^2+\langle|S_l|^2\rangle-|\langle S_l\rangle|^2)\,,\end{aligned} \tag{10.312}$$

$$\langle\sigma_{\mathrm{R}}\rangle = \frac{\pi}{k^2}\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)\,(1-|\langle S_l\rangle|^2+\langle|S_l|^2\rangle-|\langle S_l\rangle|^2)\,, \tag{10.313}$$

$$\langle\sigma_{\mathrm{tot}}\rangle = \frac{\pi}{k^2}\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)\,(|1-\langle S_l\rangle|^2+1-|\langle S_l\rangle^2|)\,. \tag{10.314}$$

Die Form dieser Ausdrücke legt nahe, die Wirkungsquerschnitte neu aufzuteilen, indem man die Wirkungsquerschnitte für die formelastische Streuung σ_{sl}, die compoundelastische Streuung σ_{ce} und die Absorption σ_c definiert nach:

$$\sigma_{sl} = \frac{\pi}{k^2} \sum_l^\infty (2l+1) \, |1 - \langle S_l \rangle|^2 \,, \tag{10.315}$$

$$\sigma_{ce} = \frac{\pi}{k^2} \sum_l (2l+1) \, (\langle |S_l|^2 \rangle - |\langle S_l \rangle|^2) \,, \tag{10.316}$$

$$\sigma_c = \frac{\pi}{k^2} \sum_l (2l+1) \, (1 - |\langle S_l \rangle|^2) \,. \tag{10.317}$$

Die mittleren Wirkungsquerschnitte (10.312—314) lassen sich dann wie folgt umschreiben:

$$\langle \sigma_{el} \rangle = \sigma_{sl} + \sigma_{ce} \,, \tag{10.318}$$

$$\langle \sigma_R \rangle = \sigma_c - \sigma_{ce} \,, \tag{10.319}$$

$$\langle \sigma_{tot} \rangle = \sigma_{sl} + \sigma_c \,. \tag{10.320}$$

Der mittlere elastische Streuquerschnitt ist eine Summe aus formelastischem und compoundelastischem Wirkungsquerschnitt, während der mittlere Reaktionsquerschnitt die Differenz der Wirkungsquerschnitte für Compoundkernbildung und compoundelastische Streuung darstellt. Der mittlere totale Wirkungsquerschnitt setzt sich aus formelastischem und Absorptionsquerschnitt zusammen.

Der Wirkungsquerschnitt der formelastischen Streuung σ_{sl} erfaßt die Streuung infolge der Wechselwirkung mit dem mittleren Potential. Er berechnet sich aus der gemittelten Streumatrix $\langle S_l \rangle$. Auch in die Größe σ_c, die die Bildungswahrscheinlichkeit für den Compoundkern darstellt, geht nur der Mittelwert der Streufunktion ein. Der Wirkungsquerschnitt σ_{ce} hingegen beschreibt Prozesse, bei denen ein Compoundkern gebildet wird, der anschließend zurück in den elastischen Kanal zerfällt. Er hängt von den Fluktuationen um den Mittelwert von S_l ab.

3. Die Lösung des Streuproblems mit dem komplexen Einteilchenpotential U führt auf eine Streumatrix, die wir bei geeigneter Wahl von U mit der über viele Compoundkernresonanzen gemittelten Streumatrix $\langle S_l \rangle$ identifizieren können. Im optischen Modell läßt sich also nach (10.315) und (10.317) nur der formelastische Wirkungsquerschnitt σ_{sl} und der Wirkungsquerschnitt σ_c für die Compoundkernbildung berechnen. Ein Vergleich mit den experimentell bestimmten mittleren elastischen Streuquerschnitten und Reaktionsquerschnitten ist nach (10.318) und (10.319) nur möglich, wenn $\langle \sigma_{el} \rangle \approx \sigma_{sl}$ und $\langle \sigma_R \rangle \approx \sigma_c$ gilt. Dieser Fall tritt für $\sigma_{ce} \ll \sigma_{sl}$ und $\sigma_{ce} \ll \sigma_c$ ein. Auch bei geringer Energieunschärfe des Strahls sind diese Bedingungen für die Streuung von Neutronen mit der Energie $E_n \gtrapprox 10$ MeV an mittelschweren und schweren Kernen erfüllt, da dann die mittlere Breite $\langle \Gamma \rangle$ der Compoundkernniveaus groß gegenüber ihren mittlerem Abstand wird, so daß S_l schwächer mit der Energie variiert und wegen $|\langle S_l \rangle|^2 \approx \langle |S_l|^2 \rangle$ die compoundelastische Streuung unwahrscheinlich wird, $\sigma_{ce} \approx 0$. Bei leichten Kernen sind die Niveauabstände wesentlich größer, so daß das optische Modell erst bei Einschußenergien von 20—30 MeV anwendbar wird. Bei niedrigen Energien kann die compoundelastische Streuung nicht vernachlässigt werden. Sie liefert im allgemeinen einen isotropen Beitrag zum differentiellen Streuquerschnitt.

10.5.3. Stärkefunktion

1. Bei der Neutronenstreuung mit Inzidenzenergien im keV-Bereich tritt nur die Partialwelle mit dem Drehimpuls $l = 0$ (s-Welle) mit dem Kern in Wechselwirkung. Außerdem sind die Compoundkernresonanzen isoliert, so daß der Wirkungsquerschnitt für die Compoundkernbildung durch eine Summe über Breit-Wigner-Terme für die Beiträge der einzelnen Resonanzen bei E_r mit der Gesamtbreite $\Gamma^{(r)}$ gegeben ist. Die Energiemittelung nach (10.308) führt auf

$$\langle \sigma_c \rangle = \frac{1}{\Delta} \int_{E'-\Delta/2}^{E'+\Delta/2} \mathrm{d}E' \, \frac{\pi}{k^2} \sum \frac{\Gamma^{(r)} \Gamma_n}{(E' - E_r)^2 + \left(\frac{1}{2} \Gamma^{(r)}\right)^2} = \frac{\pi}{k^2} \cdot 2\pi \, \frac{\bar{\Gamma}_n}{D} \,. \tag{10.321}$$

$\bar{\Gamma}_n$ ist die mittlere Neutronenbreite im Mittelungsintervall, D der mittlere Resonanzabstand. Die Größe $\bar{\Gamma}_n/D$ wird als s-Wellen-Stärkefunktion bezeichnet.* Um die Stärkefunktion bei verschiedenen Anregungsenergien vergleichen zu können, bezieht man sie gewöhnlich auf eine Einschußenergie von $E_0 = 1$ eV, $\bar{\Gamma}_n^{(0)}/D = \left(\frac{E_0}{E}\right)^{1/2} \bar{\Gamma}_n/D$. Die Größe $\bar{\Gamma}^{(0)}/D$ ist energieunabhängig.

2. Die Stärkefunktion läßt sich durch die Berechnung des Absorptionsquerschnitts im optischen Modell theoretisch abschätzen. In Abhängigkeit von der Massenzahl A des Targets erwartet man ein Maximum der Stärkefunktion für Kernradien, bei denen eine Formresonanz vorliegt, da dann die Aufenthaltswahrscheinlichkeit des Teilchens im Kerninneren und damit die Bildungswahrscheinlichkeit für einen Compoundkern groß wird. Für einen schwarzen Kern wäre die Stärkefunktion, also die Absorptionswahrscheinlichkeit, konstant gleich Eins. Da bei schwacher Absorption die Einteilchenbewegung zeitlich nur exponentiell abklingt, erhöht sich die Absorptionswahrscheinlichkeit für Kerne mit einem Radius, der die Ausbildung einer stehenden Welle im Kern zuläßt. Das optische Modell gibt den gemessenen Verlauf der Stärkefunktion mit zwei Maxima bei $A \approx 60$ und $A \approx 160$ im Mittel gut wieder (siehe Abb. 10.27). Fluktuationen um diese mittlere A-Abhängigkeit sind durch die individuelle Struktur der Targetkerne bedingt. Die Aufspaltung des Maximums bei $A \approx 160$ in zwei Maxima ist ein Effekt der Kerndeformation. Bei axialsymmetrisch deformierten Kernen kann sich eine stehende Welle sowohl in Richtung der großen als auch der kleinen Hauptachse ausbilden, so daß die Größe der Aufspaltung mit der Stärke der vorliegenden Kerndeformation zusammenhängt.

10.5.4. Phänomenologische optische Potentiale

10.5.4.1. Nukleonen

1. Für das optische Potential der Nukleon-Kern-Wechselwirkung bei höheren Energien (bis etwa 300 MeV) macht man einen phänomenologischen Ansatz der allgemeinen Form

$$U(r) = -V f(r) - \mathrm{i}W g(r) + (V_s + \mathrm{i}W_s) \left(\frac{\hbar}{m_\pi c^2}\right)^2 \frac{1}{r} \frac{\mathrm{d}f_s(r)}{\mathrm{d}r} (\boldsymbol{\sigma l}) \,. \tag{10.322}$$

Dieses Potential ist lokal. Es besteht aus einem komplexen sphärischen Potential und einem Spinbahnkopplungsterm, wobei die einzelnen Anteile jeweils durch einen Stärkeparameter und einen radialabhängigen Formfaktor dargestellt werden. Jeder Formfaktor enthält seinerseits zwei Parameter, die die räumliche Lokalisierung des Potentials und Einzelheiten seines Verlaufs erfassen. Wir erläutern zunächst die bei Analysen im optischen Modell gebräuchlichen Ansätze für die Formfaktoren, wie sie in Abb. 10.39 zusammengestellt wurden.

2. Da der Hauptbeitrag zum Realteil von einer Mittelung der Zweiteilchenwechselwirkung zwischen Inzidenznukleon und Targetnukleonen über den Grundzustand des Targetkerns herrührt, folgt der Formfaktor $f(r)$ im wesentlichen der Massenverteilung im Kern, besitzt

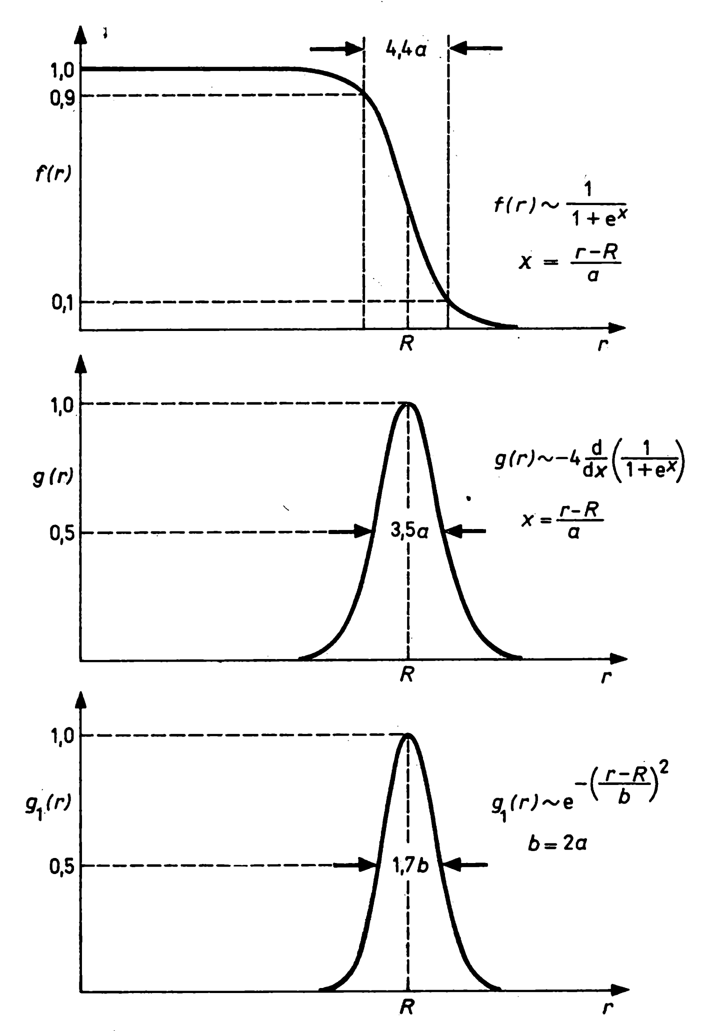


Abb. 10.39
Formfaktoren im optischen Potential. f: Woods-Saxon-Potential. g: Ableitung des Woods-Saxon-Formfaktors. g_1: Gauß-Potential

im allgemeinen aber einen etwas größeren Radiusparameter als die Dichteverteilung. Für $f(r)$ wählt man eine Woods-Saxon-Form

$$f(r) = \frac{1}{1 + e^{(r-R)/a}}, \qquad R = r_0 A^{1/3} . \tag{10.323}$$

Die Oberflächendicke beträgt etwa $4a$. Verglichen mit einem dreidimensionalen Kastenpotential verringert der stetige Abfall des Potentials am Kernrand die Streuung unter Rückwärtswinkel.

Bei mittleren Energien erfolgt die Wechselwirkung der einfallenden Nukleonen mit den Targetnukleonen vorwiegend im Bereich des Kernrands, da die Wechselwirkungsprozesse im

Volumen durch das Pauli-Prinzip stärker beschränkt werden. Man verwendet deshalb für $g(r)$ Formfaktoren, die am Kernrand ein Maximum besitzen, so daß die Oberflächenabsorption begünstigt wird:

$$g(r) = -4W_D \frac{d}{dx_D} f(x_D), \qquad x_D = (r - r_D A^{1/3})/a_D \tag{10.324}$$

(Ableitung des Woods-Saxon-Formfaktors),

$$g(r) = W_G \, e^{-(r-R)^2/b^2}, \qquad R = r_G A^{1/3} \tag{10.325}$$

(Gauß-Potential).

Beide Potentialformen sind äquivalent, wenn man für die Reichweiteparameter $b \approx 2a_D$ wählt. Bei Einschußenergien über etwa 20 MeV werden Absorptionsprozesse im Kerninneren zunehmend wahrscheinlicher, so daß neben der Oberflächenabsorption auch eine geringe Volumenabsorption auftritt, für die man ebenfalls einen Woods-Saxon-Formfaktor ansetzen kann,

$$W(r) = W_V f(x_V) - 4W_D \frac{d}{dx_D} f(x_D), \qquad x_{V(D)} = (r - r_{V(D)} A^{1/3})/a_{V(D)}. \tag{10.326}$$

Bei Einschußenergien oberhalb 100 MeV überwiegt die Volumenabsorption.

Für die Spinbahnkopplung verwendet man meistens ein reelles Potential ($W_S = 0$). Der Formfaktor der Spinbahnkopplung, dessen Parameter weniger genau bestimmt sind, besitzt ein Maximum am Kernrand. Durch die Kopplung des Spins des Inzidenznukleons an seine Bahnbewegung können Streuprozesse auftreten, in denen der Spin umklappt, wodurch eine Polarisation der elastisch gestreuten Nukleonen hervorgerugen wird.

3. Berechnet man die Streuung von Protonen an einem Kern der Ordnungszahl Z, dann muß man zu dem optischen Potential (10.322) das Coulomb-Potential $V_C(r)$ einer sphärischen, gleichförmigen Ladungsverteilung mit dem Radius R_c hinzufügen

$$V_c(r) = \begin{cases} \dfrac{Z\varepsilon^2}{r} & \text{für} \quad r > R_c \\ \dfrac{Z\varepsilon^2}{2R_c}\left(3 - \left(\dfrac{r}{R_c}\right)^2\right) & \quad\quad\; r \leqq R_c\,. \end{cases} \tag{10.327}$$

Da die Nukleon-Nukleon-Wechselwirkung isospinabhängig ist, erwartet man, daß ein durch Mittelung dieser Wechselwirkung entstehendes optisches Potential vom Neutronenüberschuß im Target, d. h. vom Symmetrieparameter $(N - Z)/A$ abhängt. Wenn man annimmt, daß das Symmetriepotential die gleiche radiale Form wie Real- bzw. Imaginärteil besitzt, dann läßt sich die Isospinabhängigkeit des optischen Potentials durch eine Korrektur der Stärkeparameter V und W berücksichtigen,

$$V' = V \pm V_1(N - Z)/A, \qquad W' = W \pm W_1(N - Z)/A. \tag{10.328}$$

Das Pluszeichen gilt für Protonen, das Minuszeichen für Neutronen als Inzidenzteilchen. Bei gleichem Neutronenüberschuß ist das Proton-Kern-Potential also stärker anziehend als das Neutron-Kern-Potential.

4. Die Lösung $\chi(r)$ der zeitunabhängigen Schrödinger-Gleichung $(T + U(r))\,\chi(r) = E\chi(r)$ für vorgegebene Einschußenergie E erlaubt es, das Feld der Aufenthaltswahrscheinlichkeit $|\chi(r)|^2$ des Nukleons im Kern für einen Streuzustand im komplexen Potential U anzugeben. Bei mittleren Teilchenenergien beobachtet man eine Fokussierung der Flußlinien, die zu einem starken Anwachsen der Aufenthaltswahrscheinlichkeit längs der Streuachse in der der Quelle abgewandten Kernhälfte führt. Die Abb. 10.40

belegt diesen Effekt für den Fall der Streuung von 10 MeV Protonen an ^{19}F. Der Strahl läuft von links ein. Vor dem Kern treten Oszillationen der Aufenthaltswahrscheinlichkeit auf, da einlaufende und reflektierte Wellen interferieren. Im Bereich des Kernrandes erfolgt dann ein Abfall der Aufenthaltswahrscheinlichkeit infolge der einsetzenden Absorption. Das Maximum in der hinteren Kernhälfte entsteht, weil zahlreiche Flußlinien in diesem Punkt zusammenlaufen.

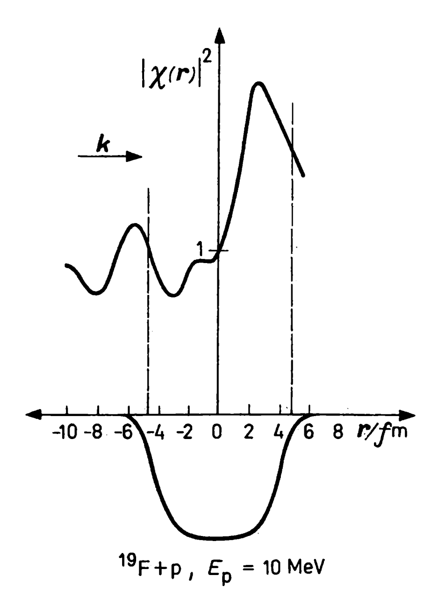


Abb. 10.40
Absolutqudrat der Kontinuumswellenfunktion $\chi(r)$ im optischen Potential längs der Streuachse für die Streuung von 10 MeV-Protonen an ^{19}F. Die Teilchen laufen von links ein. Der Potentialbereich ist durch senkrechte gestrichelte Linien markiert

5. Die Parameter des optischen Potentials (10.322) werden für einen bestimmten Targetkern und für bestimmte Einschußenergie durch Anpassung an experimentelle Daten (totale Wirkungsquerschnitte, Reaktionsquerschnitte, differentieller Wirkungsquerschnitt und Polarisation der elastischen Streuung) empirisch bestimmt. In einer solchen Anpassungsprozedur, die nur mit leistungsfähigen Rechnern effektiv durchgeführt werden kann, startet man von einem geeignet gewählten Parametersatz, berechnet durch Lösung des Streuproblems die interessierenden Größen X_i^{th}, $i = 1, \dots, N$, vergleicht mit den entsprechenden experimentellen Werten X_i^{exp} und variiert dann die Potentialparameter, bis die Größe

$$\chi^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{X_i^{\text{exp}} - X_i^{\text{th}}}{\Delta X_i^{\text{exp}}} \right)^2 \tag{10.329}$$

ein Minimum erreicht (ΔX_i^{exp}: Meßfehler der Größe X_i). Die Schwierigkeiten dieses aufwendigen Verfahrens liegen darin, daß χ^2 als Funktion aller Potentialparameter eine vieldimensionale Fläche darstellt, die verschiedene lokale Maxima besitzen kann. Bei einer automatischen Anpassung treten deshalb oft Unsicherheiten auf, die durch physikalische Betrachtungen eingeschränkt werden können.

Neben den optischen Parametern, die für bestimmte Werte von (N, Z) und E als Bestwerte durch Anpassung an einen möglichst umfassenden Satz experimenteller Daten bestimmt wurden,

gibt es aus systematischen optischen Analysen über einen weiten Bereich der Massenzahl und der Einschußenergie auch Angaben über mittlere Parametersätze. Viele praktische Rechnungen im optischen Modell verwenden diese mehr pauschalen Potentiale.

Da sehr viele Analysen von Reaktionsdaten im optischen Modell vorliegen, kann man einige systematische Trends in der Massenzahl- und Energieabhängigkeit des phänomenologischen optischen Potentials angeben. Während sich die optischen Parameter mit A nur schwach

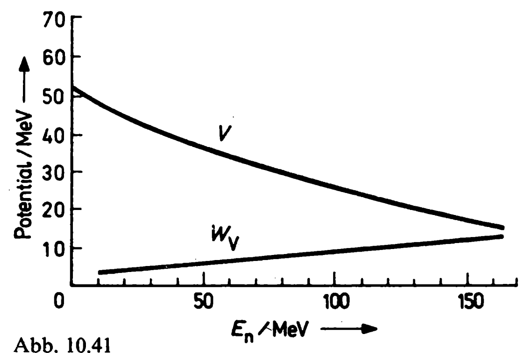


Abb. 10.41
Aus der Anpassung an Experimente entnommene mittlere Abhängigkeit der Tiefe des Realteils V und der Stärke der Volumenabsorption W_V im optischen Potential für Neutronen in Abhängigkeit von der Einschußenergie E_n (Woods-Saxon-Formfaktor, $r_0 = 1{,}25$ fm, $a = 0{,}65$ fm). Interpolationsformel für den Realteil: $V = 52 - 0{,}3E_n$

Tabelle 10.3
Optische Parameter für Nukleonen (Energien in MeV, geometrische Parameter in fm)

Neutronen	Protonen
(I) F. D. Becchetti, G. R. Greenlees Phys. Rev. *182* (1969) 1190 $A > 40$, $E < 24$ $V = 56{,}3 - 0{,}32E - 24(N-Z)/A$ $r_0 = 1{,}17 \quad a_0 = 0{,}75$ $W_V = 0{,}22E - 1{,}56$ $W_D = 13 - 0{,}25E - 12(N-Z)/A$ $r_W = r_D = 1{,}26 \quad a_W = a_D = 0{,}58$ $V_S = 6{,}2 \quad r_S = 1{,}01 \quad a_S = 0{,}75$	(I) F. D. Becchetti, G. R. Greenlees Phys. Rev. *182* (1969) 1190 $A > 40$, $E < 50$ $V = 54{,}0 - 0{,}32E + 24(N-Z)/A + 0{,}4(Z/A^{1/3})$ $r_0 = 1{,}17 \quad a_0 = 0{,}75$ $W_V = 0{,}22E - 2{,}7$ $W_D = 11{,}8 - 0{,}25E + 12(N-Z)/A$ $r_W = r_D = 1{,}32$ $a_W = a_D = 0{,}51 + 0{,}7(N-Z)/A$ $V_S = 6{,}2 \quad r_S = 1{,}01 \quad a_S = 0{,}75$
(II) D. Wilmore, P. E. Hodgson Nucl. Phys. *55* (1964) 674 $V = 47{,}01 - 0{,}267E - 0{,}0018E^2$ $r_0 = 1{,}322 - 7{,}6A \cdot 10^{-4} + 4A^2 \cdot 10^{-6} - 8A^3 \cdot 10^{-9}$ $a_0 = 0{,}66$ $W_D = 9{,}52 - 0{,}053E$ $r_D = 1{,}266 - 3{,}7A \cdot 10^{-4} + 2A^2 \cdot 10^{-6} - 4A^3 \cdot 10^{-9} \quad a_D = 0{,}48$ $V_S = 7$	(II) F. G. Perey Phys. Rev. *131* (1963) 745 $30 < A < 100 \quad E < 20$ $V = 53{,}3 - 0{,}55E + 27(N-Z)/A + 0{,}4(Z/A)^{1/3}$ $r_0 = 1{,}25 \quad a_0 = 0{,}65$ $W_D = 13{,}5 \pm 2{,}0$ $r_D = 1{,}25 \quad a_D = 0{,}47$ $V_S = 7{,}5 \quad r_S = 1{,}25 \quad a_S = 0{,}47$

ändern, hängt die Stärke des Real- und Imaginärteils für einen bestimmten Targetkern in charakteristischer Weise von der Einschußenergie ab. Die Tiefe des reellen Potentials fällt mit wachsender Einschußenergie monoton ab; der Imaginärteil steigt monoton an, da die Zahl der offenen Reaktionskanäle und damit die Absorption aus dem Eingangskanal anwächst (siehe Abb. 10.41). Dieses mittlere Verhalten in der Energieabhängigkeit der Stärkeparameter läßt sich durch lineare Interpolationsformeln wiedergeben. Bei Mittelung über A liegen diese Interpolationsformeln für den Realteil einen Abfall von $V \approx 60$ MeV bei $E = 5$ MeV bis auf $V \approx 10$ MeV bei $E \approx 200$ MeV, während die Absorption im gleichen Energiebereich von

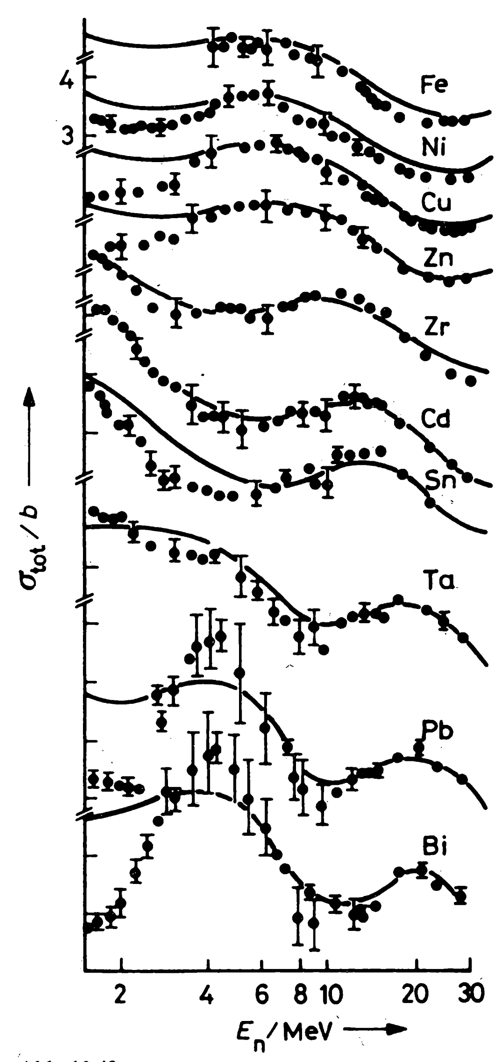


Abb. 10.42
Experimenteller totaler Wirkungsquerschnitt σ_{tot} für Neutronen in Abhängigkeit von der Einschußenergie E_n im Vergleich mit Rechnungen nach dem optischen Modell (Parameter aus Tab. 10.3)

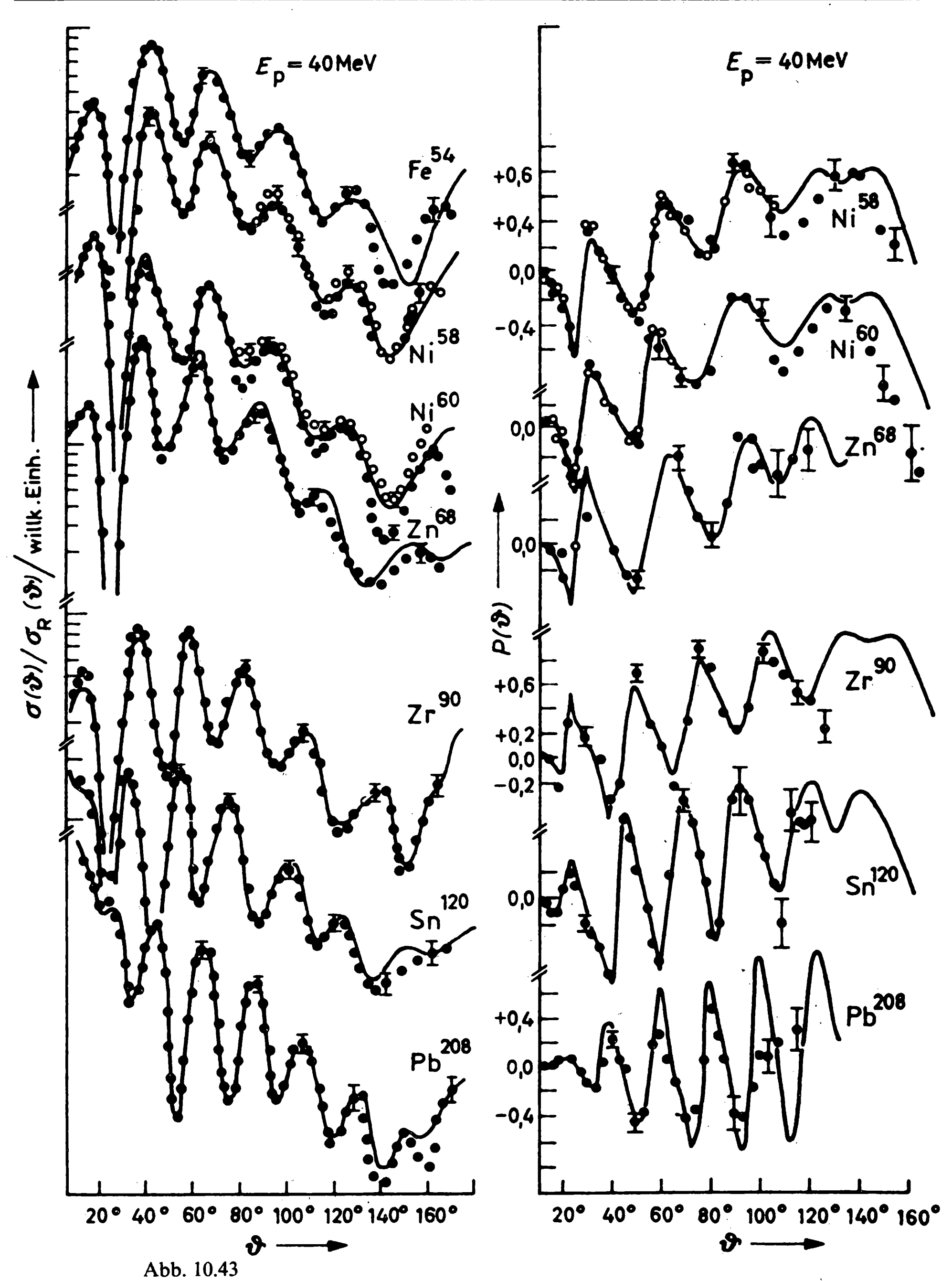


Abb. 10.43
Vergleich der bei elastischer Streuung von 40 MeV-Protonen an mittelschweren und schweren Kernen beobachteten Winkelverteilung und Polarisation mit Rechnungen im optischen Modell (Parameter aus Tab. 10.3). σ_R: Rutherford-Streuquerschnitt

$W \approx 5$ MeV auf $W \approx 20$ MeV ansteigt. Bei Einschußenergien unter 20 MeV findet man für die geometrischen Parameter $r_0 \approx 1{,}2$—$1{,}3$ fm, $a \approx 0{,}65$—$0{,}70$ fm, $r_D \approx 1{,}2$—$1{,}3$ fm, $a_D \approx 0{,}5$ bis 0,7 fm. Für höhere Einschußenergien hat man r_0 geringfügig zu verringern, während a

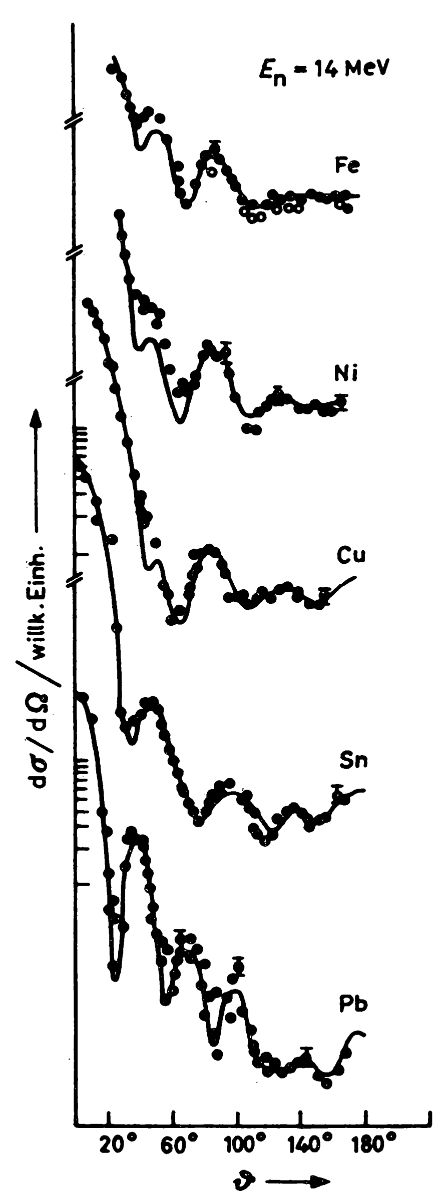


Abb. 10.44
Differentieller Wirkungsquerschnitt der elastischen Streuung von 14 MeV-Neutronen an mittelschweren und schweren Kernen. Die Kurven stellen Rechnungen im optischen Modell mit Parametern aus Tab. 10.3 dar

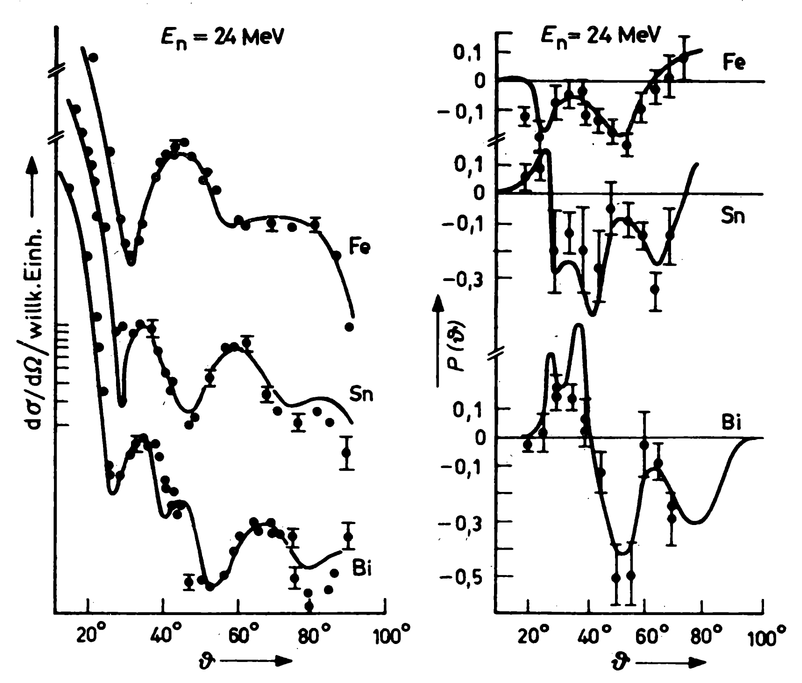


Abb. 10.45
Differentieller Wirkungsquerschnitt und Polarisation in der elastischen Streuung von 24 MeV-Neutronen. Die Kurven stellen Rechnungen im optischen Modell mit Parametern aus Tab. 10.3 dar

und r_D bei etwa gleichem a_D etwas größer zu nehmen sind. Die Stärke des Symmetriepotentials ergibt sich aus einem Vergleich der Neutron- und Protonstreuung zu $V_1 \approx 30$ MeV.

Einige häufig verwendete Parametersätze für das optische Modell der Nukleon-Kern-Wechselwirkung können Tabelle 10.3 entnommen werden. Die durch Analysen im optischen Modell erreichbare nahezu perfekte Anpassung an experimentelle Daten wird an einigen Beispielen in Abb. 10.42—45 belegt.

10.5.4.2. Komplexe Teilchen

Die Streuung komplexer Teilchen wie Deuteronen, Tritonen, ^{3}He und ^{4}He an Kernen kann ebenfalls in einem optischen Modell beschrieben werden. Obwohl die dabei verwendeten optischen Potentiale im wesentlichen die gleichen Eigenschaften wie die Nukleonenpotentiale haben, sind systematische Parameterbestimmungen wesentlich schwieriger durchzuführen. Die Gründe hierfür sind darin zu sehen, daß einerseits im allgemeinen weniger experimentelles Material vorliegt, andererseits die Parameter nicht eindeutig sind: verschiedene Potentialtiefen liefern die gleichen Wirkungsquerschnitte, wenn sich im Kerninneren eine stehende Welle ausbilden kann. Als physikalisch sinnvoll werden solche Potentialtiefen für den Realteil angesehen, die etwa der Summe der Potentialtiefen für die Konstituenten entsprechen, also z. B. $V(\mathrm{d}) \approx V(\mathrm{n}) + V(\mathrm{p})$.

Bei der Analyse der ^{4}He-Streuung kommt noch erschwerend hinzu, daß die innere Struktur des Targetkerns den differentiellen Wirkungsquerschnitt stark beeinflussen kann.

Im allgemeinen werden komplexe Teilchen vom Targetkern stärker absorbiert als Nukleonen, so daß der Imaginärteil im optischen Potential wesentlich größer ausfällt. Die Winkelverteilung der gestreuten

Teilchen zeigt deshalb eine ausgeprägte Diffraktionsstruktur, die bei gegebener Einschußenergie durch den Kernradius bestimmt ist (Abb. 10.46).

Für ^{4}He verwendet man meistens ein Potential mit Volumenabsorption und den geometrischen Parameter $r_0 \approx 1{,}4$—$1{,}5$ fm, $a = 0{,}5$—$0{,}6$ fm. Die Potentiale für Deuteronen und ^{3}He sind einander sehr ähnlich, unterscheiden sich aber vom α-Teilchen-Potential dadurch, daß eine Absorption bereits in größerem Abstand vom Kernmittelpunkt erfolgt und der Realteil einen breiteren Oberflächenbereich besitzt. Durch eine optimale Parameterwahl läßt sich auch für komplexe Teilchen eine ausgezeichnete

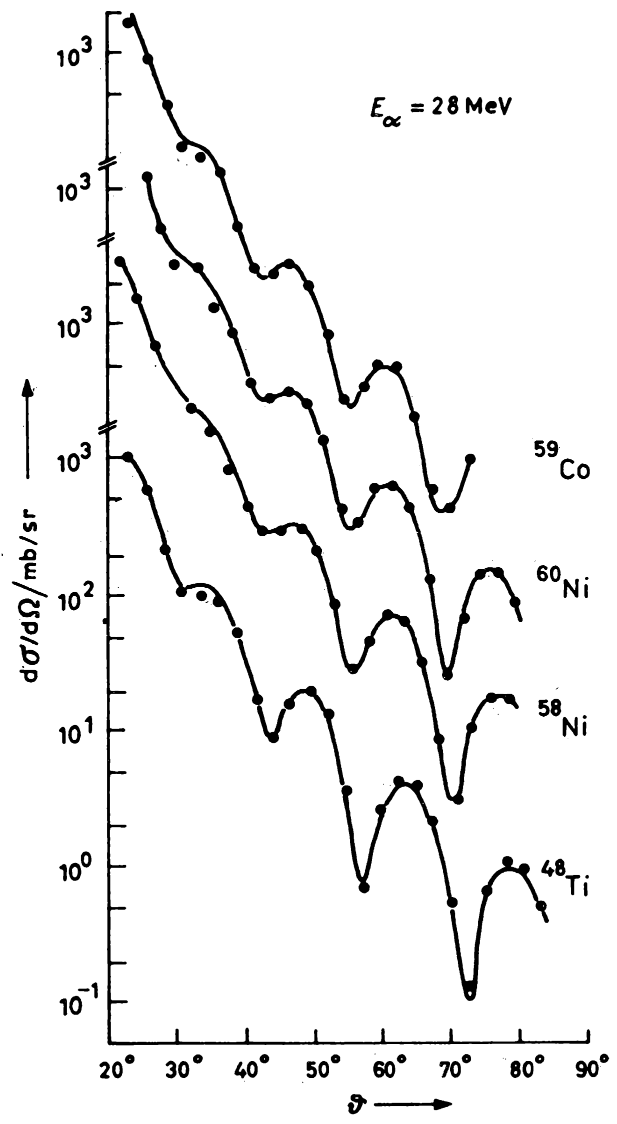


Abb. 10.46
Experimenteller differentieller Wirkungsquerschnitt der elastischen Streuung von 28 MeV-α-Teilchen an Ti, Co, Ni und Vergleich mit Anpassungen im optischen Modell

Übereinstimmung von gemessenen und im optischen Modell berechneten Größen erreichen, wie in Abb. 10.47 für ^{4}He demonstriert wird. Selbst die Orientierungseffekte in der Deutronenstreuung, die wegen des größeren Spins des Deuterons ($S = 1$) reichhaltiger sind als in der Nukleonenstreuung, werden durch einen Spinbahnkopplungsterm gut beschrieben (Abb. 10.48). Einige optische Parameter für die elastische Streuung komplexer Teilchen sind in Tabelle 10.4 zusammengestellt.

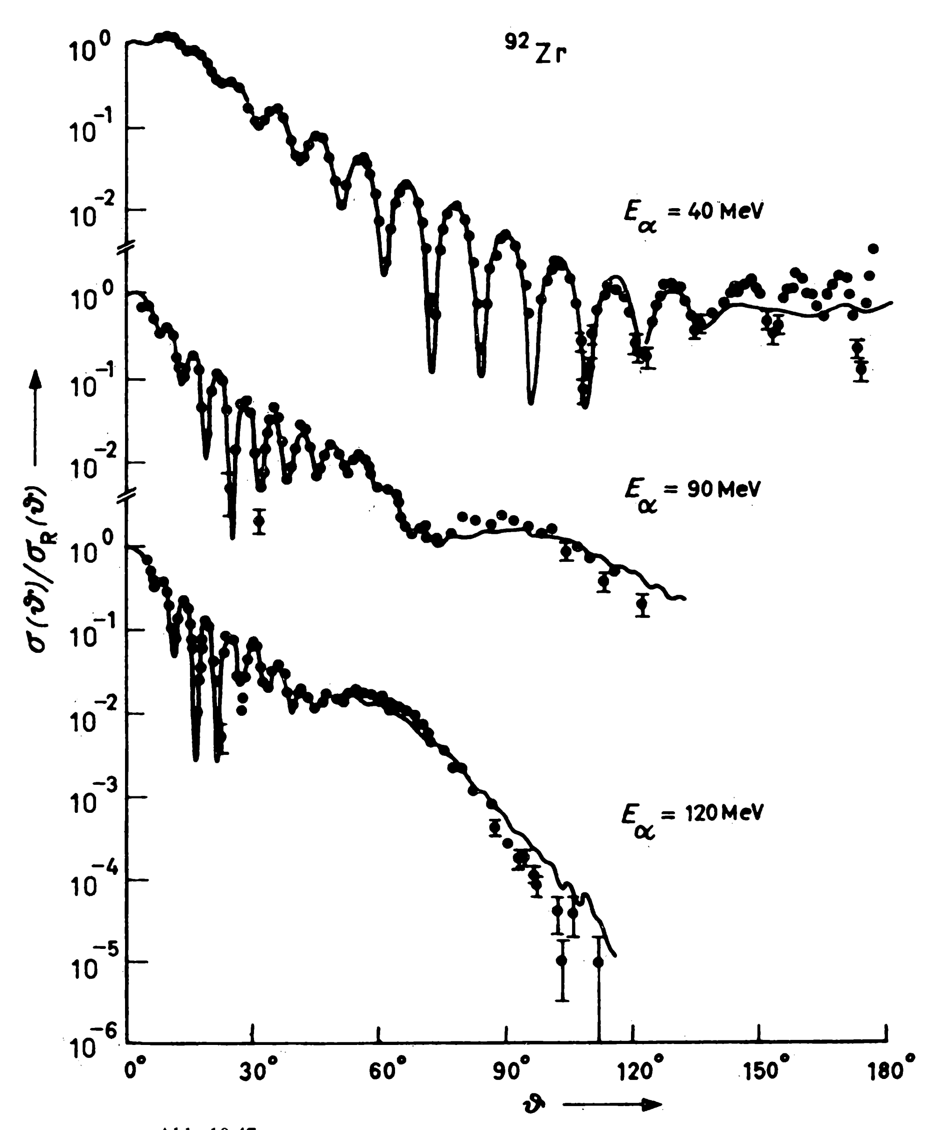


Abb. 10.47
Differentieller Wirkungsquerschnitt für die elastische Streuung von α-Teilchen verschiedener Energie an ^{92}Zr. σ_R: Rutherford-Streuquerschnitt. Die Kurven stellen Anpassungen im optischen Modell dar

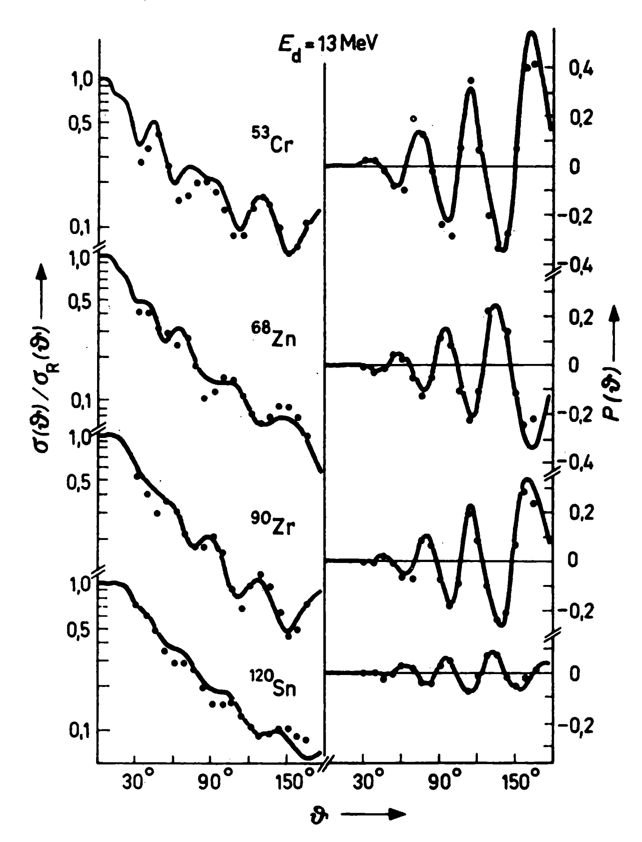


Abb. 10.48
Differentieller Wirkungsquerschnitt und Polarisation für die elastische Streuung von Deuteronen der Energie $E_d = 13$ MeV an mittelschweren Kernen. σ_R: Rutherford-Streuquerschnitt. Die Kurven stellen Anpassungen im optischen Modell dar (Parameter aus Tab. 10.4)

10.5.5. Verallgemeinerte optische Potentiale

1. Wenn die Nukleon-Nukleon-Wechselwirkung einen Ortsaustauschoperator enthält, dann weist das optische Potential eine Nichtlokalität auf. Die Schrödinger-Gleichung für die unabhängige Bewegung des Inzidenzteilchens wird dann zur Integro-Differentialgleichung

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial r^2}\chi(r) + \int \mathrm{d}r'\tilde{U}(r, r')\,\chi(r') = E\chi(r)\,. \tag{10.330}$$

Die Wellenfunktion des Teilchens am Ort r wird durch das Potential in einer gewissen Umgebung von r bestimmt. Bisherige Untersuchungen verwenden eine faktorisierte Form für $\tilde{U}(r, r')$,

$$\tilde{U}(r, r') = U\left(\frac{1}{2}\,|r + r'|\right) H(|r - r'|/\beta)\,, \tag{10.331}$$

mit einem üblichen Woods-Saxon-Potential für U und einer Gauß-Form für die Funktion H, die die Nichtlokalität mit dem Reichweiteparameter β festlegt. Mit einem solchen verallgemeinerten, nicht-lokalen Po-

Tabelle 10.4
Optischer Parameter für komplexe Teilchen (Energien in MeV, geometrische Parameter in fm)

Deuteronen	^{3}Helium
J. M. LOHR, W. HAEBERLI	F. D. BECCHETTI, G. W. GREENLEES
Nucl. Phys. *A232* (1974) 381	in Polar. Phen. in Nucl. Reactions, 1971
$A > 40 \quad E = 8 - 13$	$A > 40 \quad E = 15$ und 20
$V = 91{,}13 + 2{,}2(Z/A^{1/3})$	$V = 151{,}9 - 0{,}17E + 50(N - Z)/A$
$r_0 = 1{,}05 \quad a_0 = 0{,}86$	$r_0 = 1{,}20 \quad a_0 = 0{,}72$
$W_D = 218/A^{2/3}$	$W_V = 41{,}7 - 0{,}33E + 0{,}44(N - Z)/A$
$r_D = 1{,}43 \quad a_D = 0{,}50 + 0{,}013A^{2/3}$	$r_W = 1{,}40 \quad a_W = 0{,}88$
$V_S = 7{,}0 \quad r_S = 0{,}75 \quad a_S = 0{,}5$	$V_S = 2{,}5 \quad r_S = 1{,}2 \quad a_S = 0{,}72$
$r_C = 1{,}3$	$r_C = 1{,}3$

Tritonen	α-Teilchen
F. D. BECCHETTI, G. W. GREENLEES	L. W. PUT, A. M. J. PAANS
in Polar. Phen. in Nucl. Reactions, 1971	Nucl. Phys. *A291* (1977) 93
$A > 40 \quad E > 40$	^{90,92}Zr $\quad E = 40 - 120$
$V = 165{,}0 - 0{,}17E - 6{,}4(N - Z)/A$	$V_0(E_\alpha) = \bar{V}_0(1 + \alpha_V E_\alpha)$
$r_0 = 1{,}20 \quad a_0 = 0{,}72$	$W_V(E_\alpha) = \bar{W}_V(1 + \alpha_W E_\alpha)$
$W_V = 46{,}0 - 0{,}33E - 110(N - Z)/A$	$\bar{V}_0 = 155{,}2 \pm 5{,}8$ MeV
	$\alpha_V = -0{,}0016 \pm 0{,}0003$ MeV^{-1}
$r_W = 1{,}40 \quad a_W = 0{,}84 \quad a_S = 0{,}72$	$r_0 = 1{,}245 \quad a_0 = 0{,}801$
$V_S = 2{,}5 \quad r_S = 1{,}2$	$\bar{W}_V = 19{,}17 \pm 1{,}43$ MeV
	$\alpha_W = 0{,}0003 \pm 0{,}0006$ MeV^{-1}
$r_C = 1{,}3$	$r_W = 1{,}570 \quad a_W = 0{,}567$

tential war es möglich, die elastische Neutronenstreuung im Energiebereich von 0,4 MeV bis 24 MeV mit einem einzigen festen Parametersatz ($\beta = 0{,}85$ fm) zu beschreiben. Hierin liegt der Vorteil der Gl. (10.330): das lokale optische Potential mit energieabhängigen Parametern kann durch ein energieunabhängiges nicht-lokales Potential ersetzt werden.

Wir verweisen noch auf einen Effekt, der für die Berechnung von Wirkungsquerschnitten mit Wellenfunktionen des optischen Modells wichtig ist. Selbst wenn ein nicht-lokales und (dazu äquivalentes) lokales optisches Potential die gleichen Streuquerschnitte liefern, die beiden Wellenfunktionen also die gleiche asymptotische Form besitzen, unterscheiden sie sich stark im Potentialbereich. Die mit lokalem Potential berechneten Streufunktionen liefern wesentlich größere Aufenthaltswahrscheinlichkeiten als im nicht-lokalen Fall.

2. Für einen sphärischen Kern hängt das optische Potential am Ort $\boldsymbol{r}$ im Kern nach (10.322) nur vom Abstand dieses Punktes von der Oberfläche ab, die durch den Kernradius gegeben ist, $U \equiv U(r - R)$. Die Äquipotentialflächen sind jeweils Kugeloberflächen. Besitzt der Kern aber eine Deformation, dann wird der Abstand vom Kernmittelpunkt zur Kernoberfläche eine Funktion der Richtung (ϑ, φ). Die Funktion $R(\vartheta, \varphi)$, die die Oberfläche des Kerns beschreibt, läßt sich nach Kugelfunktionen entwickeln,

$$R(\vartheta, \varphi) = R_0 \left(1 + \sum_{\lambda,\mu} \alpha_{\lambda\mu} Y_\lambda^\mu(\vartheta, \varphi)\right) \equiv R_0 + \delta R(\vartheta, \varphi)\,, \tag{10.332}$$

wobei R_0 den mittleren Radius und $\delta R = R_0 \sum \alpha_{\lambda\mu} Y_\lambda^\mu$ die Abweichung von der Kugelform bezeichnet. Die komplexen Parameter $\alpha_{\lambda\mu}$ sind die Deformationsparameter. Damit $R(\vartheta, \varphi)$ reell wird, fordern wir $\alpha_{\lambda\mu} = (-1)^\mu \alpha^*_{\lambda-\mu}$. Da $\lambda = 1$ nur einer Verschiebung des Kerns als

Ganzes entspricht, muß die Summation in (10.332) bei Volumenerhaltung auf $\lambda \geqq 2$ eingeschränkt werden, wobei $\lambda = 2$ einer Quadrupoldeformation (Ellipsoid) entspricht.

Nehmen wir an, daß auch bei einem deformierten Kern das optische Potential vom Abstand des betrachteten Punktes von der Oberfläche abhängt, dann läßt sich der Ansatz (10.322) verallgemeinern, $U \equiv U(r - R(\vartheta, \varphi))$. Für geringe Abweichungen von der Kugelform kann man $U(r - R(\vartheta, \varphi))$ nach Potenzen von $\delta R(\vartheta, \varphi)$ entwickeln.

$$U(r - R(\vartheta, \varphi)) = U(r - R_0) - \frac{\mathrm{d}U(r - R_0)}{\mathrm{d}r}\,\delta R(\vartheta, \varphi) + \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2U(r - R_0)}{\mathrm{d}r^2}\,(\delta R(\vartheta, \varphi))^2 - \cdots$$

$$= U(r - R_0) - R_0\,\frac{\mathrm{d}U(r - R_0)}{\mathrm{d}r} \sum_{\lambda\mu} \alpha_{\lambda\mu} Y_\lambda^\mu(\vartheta, \varphi)$$

$$+ \frac{1}{2} R_0^2\,\frac{\mathrm{d}^2U(r - R_0)}{\mathrm{d}r^2} \Big(\sum_{\lambda\mu} \alpha_{\lambda\mu} Y_\lambda^\mu(\vartheta, \varphi)\Big)^2 - \cdots. \tag{10.333}$$

$U(r - R_0)$ ist das übliche optische Potential für einen sphärischen Kern. Die beiden anderen Terme enthalten die Deformationsparameter in erster und zweiter Ordnung. Diese Glieder beeinflussen nicht nur die elastische Streuung, sondern erlauben auch Änderungen des Deformationszustandes des Targets. So kann ein Kern durch diese Anteile des verallgemeinerten optischen Potentials zu Schwingungen angeregt werden, wobei das Inzidenzteilchen unelastisch gestreut wird. Wir kommen auf diesen Anregungsmechanismus im Abschnitt 10.6.2 zurück.

10.6. Direkte Reaktionen

10.6.1. Charakterisierung des direkten Reaktionsmechanismus

1. Bei Einschußenergien oberhalb etwa 10 MeV können Kernreaktionen mit unterschiedlichen Inzidenzteilchen (Nukleonen, Deuteronen, α-Teilchen usw.) ablaufen, ohne daß sich im Wechselwirkungsgebiet ein quasistationärer hochangeregter Zustand des Gesamtsystems aus Target und Projektil bildet, an dessen Aufbau viele Freiheitsgrade beteiligt sind. Das Auftreten eines solchen Mechanismus hängt eng mit der Ausbildung eines mittleren Potentials im Kern und der damit verbundenen schwachen Dämpfung der Einteilchenbewegung zusammen. Wir stellen zunächst die qualitativen Merkmale des direkten Mechanismus zusammen und geben die Bedingungen an, unter denen er gegenüber Compoundkernbildung dominiert.

Direkte Reaktionen vollziehen sich in einer sehr kurzen Zeitskala, die etwa der Durchlaufzeit des Inzidenzteilchens durch den Wechselwirkungsbereich entspricht. Bei den betrachteten Energien liegt die Reaktionszeit im allgemeinen bei etwa 10^{-23}—10^{-22} s, also mehrere Größenordnungen unter der mittleren Lebensdauer des Compoundkerns. Während der Reaktion erfolgt ein direkter Übergang aus dem Eingangs- in den Ausgangskanal, ohne daß infolge zahlreicher Nukleon-Nukleon-Stöße als Zwischenphase ein gebundener Zustand des Gesamtsystems erreicht wird. Diese Situation können wir formal beschreiben, indem wir die Wellenfunktion Ψ des Gesamtsystems nach $\Psi = \Psi_P + \Psi_Q$ in zwei Anteile zerlegen, von den nur Ψ_P in den Kanälen von Null verschieden ist und damit zum Fluß im Unendlichen (d. h. am Detektorort), also zum Reaktionsquerschnitt beiträgt. Die Funktion Ψ_Q hingegen fällt außerhalb des Wechselwirkungsgebietes exponentiell ab. Sie beschreibt einen Zustand, in dem alle an der Reaktion beteiligten Nukleonen gebundene Einteilchenniveaus besetzen. In diesem Bild ent-

sprechen direkte Reaktionen einer unmittelbaren Kopplung der verschiedenen Komponenten von Ψ_P, die durch eine effektive Wechselwirkung V vermittelt wird. Die Wahrscheinlichkeit für einen solchen Übergang ist mit $|\langle\Psi_P|\, V\,|\Psi_P\rangle|^2$ verknüpft. Ganz andere Bildungen gehen in dynamische Modelle für Compoundkernreaktionen ein. Da die Funktionen Ψ_Q zu Energien gehören, die im kontinuierlichen Spektrum des Hamilton-Operators liegen, können sie mit gewisser Wahrscheinlichkeit durch eine Kopplung an Ψ_P zerfallen. Daraus erfolgt eine bestimmte Zerfallsbreite und über die Energie-Zeit-Unschärferelation eine zugehörige mittlere Lebensdauer des quasistationären Niveaus. Ein dynamisches Modell für eine Compoundkernreaktion enthält also Matrixelemente, die Ψ_P (Eingangskanal) an Ψ_Q (Compoundkernzustand) und zurück an Ψ_P (Ausgangskanal) koppeln, $\langle\Psi_P|\, V\,|\Psi_Q\rangle\langle\Psi_Q|\, V\,|\Psi_P\rangle$. Die Compoundkernwellenfunktionen Ψ_Q treten nur als intermediäre Zustände auf.

Die Wellenfunktionen Ψ_P bestehen in den Kanälen aus der inneren Wellenfunktion der Reaktionspartner und der oszillierenden Wellenfunktion der Relativbewegung. Verglichen mit Ψ_Q können sie eine relativ einfache Struktur besitzen, wobei in die Hauptkomponenten die Koordinaten nur weniger aktiver Nukleonen eingehen. In direkten Übergängen werden bevorzugt Endzustände angeregt, bei denen nur wenige Freiheitsgrade eine Rolle spielen, so daß die Wellenfunktionen im Eingangs- und Ausgangskanal stark überlappen. Solche Prozesse sollten sich vorwiegend an der Kanaloberfläche abspielen. Die kurze Zeitskala der direkten Reaktionen impliziert, daß die Wirkungsquerschnitte nur eine schwache Energieabhängigkeit zeigen. Anstelle von schmalen Compoundkernresonanzen beobachtet man ähnlich wie im optischen Modell Riesenresonanzphänomene, die durch eine Absorption in nicht explizit betrachtete Kanäle stark gedämpft werden können.

2. Jede Kernreaktion ist ein einheitlicher Prozeß, in dem mit gewisser relativer Wahrscheinlichkeit sowohl Compoundkernbildung als auch eine direkte Kopplung der Kanäle realisiert werden kann. Beide Anteile interferieren im Übergangsmatrixelement. Der Interferenzterm im Wirkungsquerschnitt bleibt gering, wenn die Wellenpakete, die durch die Reaktion entstehen — das direkte Wellenpaket, das etwa gleichzeitig mit dem durchgelassenen Wellenpaket aus dem Wechselwirkungsgebiet ausläuft, und das Wellenpaket der Compoundkernreaktion, das entsprechend der mittleren Lebensdauer des Compoundkerns verzögert erscheint — zeitlich getrennt sind und deshalb räumlich nicht überlappen (vgl. Abb. 10.23). In jedem Fall kann man erwarten, daß die Interferenzterme verschwinden, wenn man über ein hinreichend breites Energieintervall mittelt, wie das bei Experimenten mit geringer Energieauflösung annähernd geschieht.

In nukleoneninduzierten Reaktionen dominiert der direkte Mechanismus, wenn bei höheren Einschußenergien ($\gtrsim 10$ MeV) niedrig liegende Zustände im Endkern angeregt werden. Unter diesen Bedingungen ist einerseits die Kopplung des Eingangs- und Ausgangskanals an sehr hochliegende, komplexe Compoundkernzustände sehr schwach, da diese Anregungen nur über viele Nukleon-Nukleon-Stöße erreichbar sind, während andererseits die Überlappung von Eingangs- und Ausgangskanal wegen der „Ähnlichkeit" von Anfangs- und Endzustand groß ist. Diese Feststellungen gelten insbesondere für hohe Partialwellen der ein- oder auslaufenden Wellen, die nur die Randzone des Wechselwirkungsgebietes überdecken.

Der direkte Mechanismus führt im Spektrum der kinetischen Energie der auslaufenden Teilchen zu Abweichungen vom Verdampfungsmodell, indem ein Überschuß an hochenergetischen Reaktionsprodukten nachgewiesen wird. Auf diese Abweichungen vom statistischen Compoundkernmodell gehen wir in Abschnitt 10.7. ausführlich ein. Bei der Identifizierung des direkten Mechanismus kann man sich vor allem auf die Winkelverteilung der Reaktionsprodukte stützen. Während das Compoundkernmodell bei isolierten Resonanzen oder bei Mittelung über viele Resonanzen stets Symmetrie um 90°, sehr oft sogar Isotropie liefert, zeigt die Winkelverteilung bei direkten Reaktionen in den meisten Fällen eine Bevorzugung der

Vorwärtsrichtung und ein oszillierendes, einem Beugungsbild ähnliches Verhalten. Der Charakter der Winkelverteilung einer direkten Reaktion ändert sich wenig, wenn man die Einschußenergie variiert. Wir betonen, daß Vorwärts- oder Rückwärtsmaxima der Winkelverteilung auch bei Compoundkernreaktionen auftreten können, falls wenige Resonanzen unterschiedlicher Parität überlappen. Im Unterschied zu direkten Reaktionen ändert sich dann der Charakter der Winkelverteilung aber stark mit der Einschußenergie.

3. Der direkte Mechanismus wurde für eine Vielzahl von Reaktionstypen experimentell bestätigt. Die Abb. 10.49 enthält eine Übersicht, die bei weitem nicht vollständig ist. Oberhalb 10 MeV läuft die unelastische Streuung von Nukleonen oder komplexen Teilchen vorwiegend als Wechselwirkung mit der Oberfläche des Targetkerns ab, wobei bevorzugt Vibrations- oder Rotationszustände angeregt werden. Auch Einteilchenanregungen im mittleren Potential sind auf direktem Weg möglich. Transferprozesse, bei denen einige Nukleonen vom Inzidenzteilchen auf das Target (oder umgekehrt) übergehen, sind oft direkte Reaktionen. Häufig untersucht wurde z. B. die (d, p)-Reaktion als Abstreifen (stripping) eines Neutrons, das mit bestimmtem

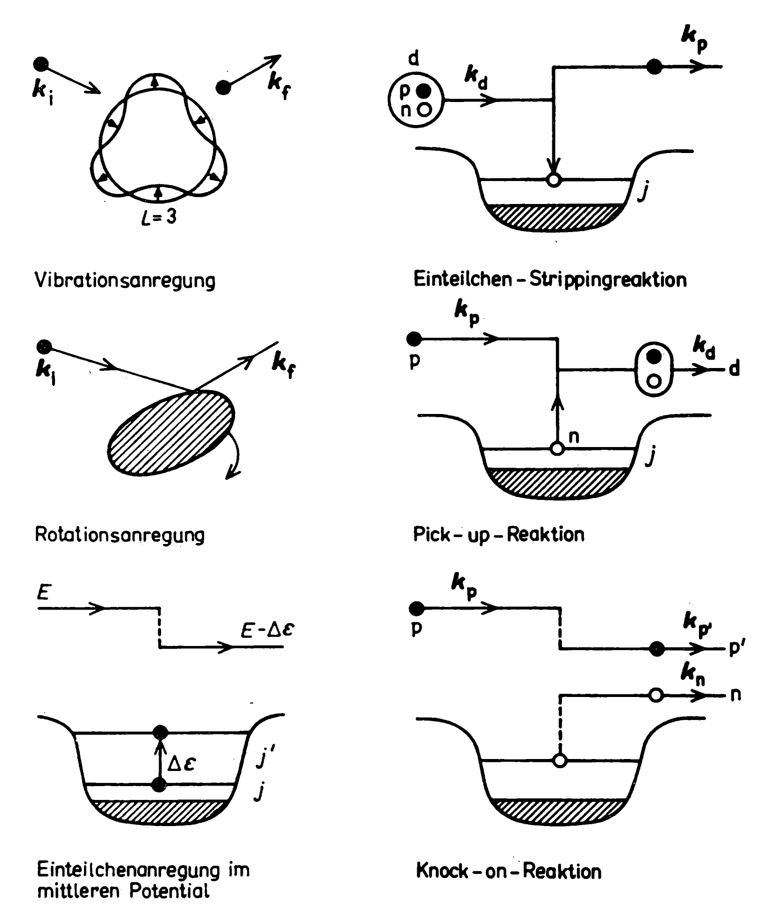


Abb. 10.49
Schematische Darstellung einiger direkter Kernreaktionen

Drehimpuls in einen gebundenen Einteilchenzustand des Targets eingefangen wird. Der (p, d)-Umkehrprozeß wird als pick-up Reaktion bezeichnet. Der gleiche Endkanal wird erreicht, wenn ein Proton ein Deuteron aus dem Targetkern herausschlägt (knock-out) und dabei soviel Energie verliert, daß es selbst eingefangen wird. Auch eine (p, p′n)-Reaktion kann direkt ablaufen: das Inzidenzproton regt das gebundene Neutron in einen Kontinuumzustand des mittleren Targetpotentials an (knock-on) und beide Teilchen laufen unkorreliert aus. Bei einer Zweiteilchentransferreaktion (t, p) werden zwei Neutronen an den Targetkern angelagert, ein Prozeß, der in einem Schritt als Übertragung eines „Clusters" in Form eines Dineutrons oder sukzessive mit dem Deuteronenkanal als Zwischenzustand ($t + A \to d + (A + n) \to p + (A + 2\,n)$) erfolgen kann. Solche Mehrstufenprozesse werden auch in anderen Reaktionen beobachtet. In (d, p)-Reaktionen kann z. B. im ersten Reaktionsschritt eine unelastische Anregung erfolgen, so daß beim anschließenden Teilchentransfer das Neutron in einen angeregten Targetzustand eingebaut wird: $d + A \to d' + A^* \to p + A^* + n$.

4. Für die Theorie direkter Kernreaktionen gibt es zahlreiche Formulierungen, die in den verwendeten Näherungen oft speziellen Reaktionsbedingungen (sehr hohe Einschußenergie, starke Absorption des Projektils) angepaßt sind. Wir beschränken uns auf die beiden wichtigsten theoretischen Methoden zur Analyse direkter Reaktionen, die von großer praktischer Bedeutung sind: die erste Bornsche Näherung mit gestörten Wellen (DWBA — distorted wave Born approximation) und die Methode der gekoppelten Kanäle.

Die Wirkungsquerschnitte direkter Kanal-Kanal-Übergänge sind oft um Größenordnungen kleiner als der elastische Streuquerschnitt. Man kann deshalb versuchen, die Wechselwirkung, die zur Reaktion führt, nur in erster Ordnung zu berücksichtigen, das Übergangsmatrixelement also in 1. Bornscher Näherung zu berechnen. Allerdings ist zu beachten, daß die einfallende ebene Welle im Wechselwirkungsgebiet durch das mittlere Kernpotential und (bei geladenen Inzidenzteilchen) durch das Coulomb-Feld stark gestört wird, so daß im Kerninneren kein Eigenzustand des Impulses (ebene Welle), sondern ein Streuzustand mit bestimmter Randbedingung vorliegt. Die Restwechselwirkung im Eingangskanal führt dann zum eigentlichen Übergang in den Endkanal, wobei die Übergangswahrscheinlichkeit (und damit der Reaktionsquerschnitt) von der Stärke der Wechselwirkung sowie der Struktur der Target- und Restkernzustände abhängt. Im Ausgangskanal wirkt wiederum ein mittleres Potential, das die Bewegung des auslaufenden Teilchens bestimmt. Diese Störpotentiale im Eingangs- und Ausgangskanal sind es, die die Winkelverteilung der Reaktionsprodukte wesentlich beeinflussen. Diesem physikalischen Bild einer direkten Reaktion ist die in Abschnitt 10.3.3.3. behandelte 1. Bornsche Näherung mit gestörten Wellen adäquat, die die Streuung der Teilchen am optischen Potential des Eingangs- oder Ausgangskanals exakt erfaßt und die Restwechselwirkung in einem Kanal nur in 1. Ordnung mitnimmt. Das T-Matrixelement für direkte Reaktionen ist in dieser Näherung durch Gl. (10.200) gegeben. Mehrstufenprozesse können als aufeinanderfolgende Übergänge erster Ordnung durch höhere Glieder der Bornschen Reihe (10.140) erfaßt werden.

In den folgenden Abschnitten behandeln wir einige ausgewählte direkte Reaktionen und erläutern an diesen typischen Beispielen sowohl die Grundlagen der theoretischen Methoden als auch ihre Leistungsfähigkeit im Vergleich mit experimentellen Ergebnissen. Wir verweisen dabei auch auf den Zusammenhang von Kernstruktur und Reaktionsmechanismus, wodurch sich die Möglichkeit ergibt, aus Reaktionsdaten spezifische Informationen über die individuelle Struktur der beteiligten Kerne abzuleiten (Reaktionsspektroskopie).

10.6.2. Unelastische Streuung

10.6.2.1. Bornsche Näherung mit gestörten Wellen (DWBA)

1. Wir untersuchen die unelastische Nukleon-Kern-Streuung im Energiebereich von etwa 10—50 MeV. Im Endkanal beschränken wir uns auf die Anregung diskreter, niedrigliegender

Targetzustände, die sich im Energiespektrum der auslaufenden Nukleonen als scharfe, getrennte Linien zeigen. Das Streuproblem wird durch den Hamilton-Operator

$$H = H_T(\xi) + T + U(r) + V(\boldsymbol{r}, \xi) \tag{10.334}$$

beschrieben, wobei wir der Einfachheit halber vom Spin des Nukleons absehen. Der Operator H_T liefert nach

$$H_T(\xi)\, \varphi_{IM\alpha}(\xi) = \varepsilon_{I\alpha} \varphi_{IM\alpha}(\xi) \tag{10.335}$$

die stationären Zustände $\Phi_{IM\alpha}(\xi)$ des Targets, die von den inneren Koordinaten ξ abhängen. Sie werden durch die Spinquantenzahlen IM und eine zusätzliche Quantenzahl α, die verschiedene Wellenfunktionen zu gleichem I unterscheidet, spezifiziert. $T = -\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{\partial^2}{\partial \boldsymbol{r}^2}$ (μ: reduzierte Masse) ist der Operator der kinetischen Energie des einfallenden Nukleons, $U(r) = V(r) + \mathrm{i}W(r) + V_c$ erfaßt als sphärisches optisches Potential die mittlere Wechselwirkung mit dem Target. Wir vernachlässigen den schwachen Effekt, daß streng genommen im Ausgangskanal ein anderes optisches Potential vorliegt als im Eingangskanal, weil die Mittelung der Zweiteilchenwechselwirkung über die Konfigurationen des angeregten Endzustands vorzunehmen ist. Die beiden Anteile T und $U(r)$ in (10.334) operieren lediglich auf die Einteilchenkoordinaten $\boldsymbol{r}$ des Projektils. Um eine unelastische Anregung des Targets zu ermöglichen, wurde das Glied $V(\boldsymbol{r}, \xi)$ eingeführt, das die Einteilchenbewegung im mittleren Potential $U(r)$ an die innere Bewegung der Targetnukleonen koppelt. Die Wechselwirkung V, die sowohl von der Projektilkoordinate $\boldsymbol{r}$ als auch den inneren Koordinaten ξ abhängt, vermittelt den Übergang vom Grundzustand $I_iM_i\alpha_i$ in den angeregten Endzustand $I_fM_f\alpha_f$, wobei das Inzidenzteilchen die Flugrichtung ändert und an kinetischer Energie verliert. Bezeichnet man die Einschußenergie mit E, dann gilt $k_i^2 = \frac{2\mu}{\hbar^2}E$, $k_f^2 = \frac{2\mu}{\hbar^2}(E - \Delta\varepsilon)$, mit $\Delta\varepsilon = \varepsilon_{I_f\alpha_f} - \varepsilon_{I_i\alpha_i}$ als Anregungsenergie des Targets.

2. Nach (10.200) gilt für diesen Prozeß in 1. Bornscher Näherung mit gestörten Wellen das T-Matrixelement

$$T_{fi}(\boldsymbol{k}_f, \boldsymbol{k}_i) = \langle \chi_{\boldsymbol{k}_f}^{(-)}(\boldsymbol{r}) | (\Phi_{I_fM_f\alpha_f} | V(\boldsymbol{r}, \xi) | \Phi_{I_iM_i\alpha_i}) | \chi_{\boldsymbol{k}_i}^{(+)}(\boldsymbol{r}) \rangle \,. \tag{10.336}$$

Die innere runde Klammer steht für eine Integration über die inneren Koordinaten ξ, während die äußeren Klammern eine Integration über die Projektilkoordinate $\boldsymbol{r}$ bedeutet. Das innere Matrixelement kann als effektiver Wechselwirkungsoperator aufgefaßt werden, der den Übergang zwischen den Kontinuumszuständen χ_i, χ_f im optischen Potential des Anfangs- bzw. Endzustandes i, f bewirkt. Um dieses Integral auswerten zu können, entwickelt man die Wechselwirkung $V(\boldsymbol{r}, \xi)$ nach Kugelfunktionen (Multipolentwicklung)

$$V(\boldsymbol{r}, \xi) = \sum_{L,M} V_{LM}(r, \xi)\, [\mathrm{i}^L Y_L^M(\hat{\boldsymbol{r}})]^* \,. \tag{10.337}$$

Die Entwicklungskoeffizienten V_{LM} besitzen selbst die Eigenschaften eines Drehimpulsoperators, $L = 0, 1, 2, \ldots, M = -L, \ldots, +L$. Für das innere Matrixelement erhält man dann unter Verwendung des Wigner-Eckart-Theorems (siehe Anhang A 6.)

$$(\Phi_{I_fM_f\alpha_f} | V(\boldsymbol{r}, \xi) | \Phi_{I_iM_i\alpha_i}) = \sum_{L,M} (I_iM_iLM \mid I_fM_f) \langle I_f \| V_L(r, \xi) \| I_i \rangle\, [\mathrm{i}^L Y_L^M(\hat{\boldsymbol{r}})]^* \,. \tag{10.338}$$

Die Abhängigkeit des Matrixelements von den Projektionsquantenzahlen trägt der Clebsch-Gordan-Koeffizient $(I_iM_iLM \mid I_fM_f)$. Das reduzierte Matrixelement $\langle I_f \| V_L \| I_i \rangle$, das als

alleinige Funktion von r von den Targetzuständen I_i, α_i, I_f, α_f abhängt, stellt man als Produkt aus einem Formfaktor $F_L(r)$ und einem Stärkeparameter A_L dar,

$$\langle I_f \| V_L(r, \xi) \| I_i \rangle = A_L F_L(r) . \tag{10.339}$$

Da die Kernwellenfunktionen Φ einen räumlich begrenzten Zustand beschreiben, besitzt die Funktion F_L ebenfalls eine begrenzte Reichweite. Durch den Verlauf des Formfaktors wird bestimmt, wie stark die Reaktion lokalisiert ist. Wir setzen (10.339) und (10.338) in (10.336) ein und erhalten

$$\begin{aligned} T_{fi}(\boldsymbol{k}_f, \boldsymbol{k}_i) &= \sum_{L,M} (I_i M_i L M \mid I_f M_f)\, A_L \langle \chi^{(-)}_{\boldsymbol{k}_f}(\boldsymbol{r}) |\, F_L(r)\, [\mathrm{i}^L Y_L^M(\hat{r})]^*\, | \chi^{(+)}_{\boldsymbol{k}_i}(\boldsymbol{r}) \rangle \\ &\equiv \sum_{L,M} A_L (I_i M_i L M \mid I_f M_f)\, \tilde{T}_{LM} . \end{aligned} \tag{10.340}$$

Aus dieser Form des T-Matrixelements ist ersichtlich, daß L den in der Wechselwirkung übertragenen Drehimpuls bedeutet. Die Erhaltung des Drehimpulses verlangt $\boldsymbol{I}_i + \boldsymbol{L} = \boldsymbol{I}_f$, $M_i + M = M_f$; sie ist in dem Clebsch-Gordan-Koeffizienten enthalten. Um die Matrixelemente T_{LM} zu berechnen, nimmt man eine Partialwellenentwicklung der gestörten Wellen vor, wobei als Einfallsrichtung $\boldsymbol{k}_i$ des Projektils die positive z-Achse gewählt wird (vgl. (B. 116), (B. 132) und (B. 128)),

$$\begin{aligned} \chi^{(+)}_{\boldsymbol{k}_i}(\boldsymbol{r}) &= \sum_{l=0}^{\infty} \sqrt{4\pi(2l+1)}\, \mathrm{i}^l\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\sigma_l}\, \frac{u_l(k_i r)}{r}\, Y_l^0(\hat{r}) \\ \chi^{(-)*}_{\boldsymbol{k}_f}(\boldsymbol{r}) &= 4\pi \sum_{l',m'} \mathrm{i}^{-l'}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\sigma_{l'}}\, \frac{u_{l'}(k_f r)}{r}\, Y_{l'}^{m'}(\hat{r})\, Y_{l'}^{m'*}(\hat{\boldsymbol{k}}_f) . \end{aligned} \tag{10.341}$$

Hierbei ist σ_l die Phasenverschiebung, die bei geladenem Projektil durch das Coulomb-Potential des Targetkerns hervorgerufen wird. Im äußeren Matrixelement $\langle \chi^{(-)}_{\boldsymbol{k}_f}(\boldsymbol{r}) |\, F_L(r)\, [\mathrm{i}^L Y_L^M]^*$ $| \chi^{(+)}_{\boldsymbol{k}_i}(\boldsymbol{r}) \rangle$ läßt sich mit (10.341) die Integration über drei Kugelfunktionen, die von der Richtung $\hat{r}$ abhängen, sofort ausführen. Im Ergebnis treten zwei Clebsch-Gordan-Koeffizienten auf, die die Erhaltung des Drehimpulses und der Parität garantieren. Wegen $(LMlm \mid l'm')$ muß sich bei übertragenem Drehimpuls L der Drehimpuls der auslaufenden Welle nach $\boldsymbol{L} + \boldsymbol{l} = \boldsymbol{l}'$ ändern. Da der spezielle Clebsch-Gordan-Koeffizient $(L0l0 \mid l'0)$ nur für geradzahlige Werte von $L + l + l'$ von Null verschieden ist, muß zusätzlich $(-1)^{L+l} = (-1)^{l'}$ gelten, d. h. zum Beispiel eine einlaufende d-Welle ($l = 2$) kann bei $L = 2$ nur als s-Welle ($l' = 0$), d-Welle ($l' = 2$) oder g-Welle ($l' = 4$) auslaufen, obwohl nach der Drehimpulserhaltung auch $l' = 1, 3$ möglich wäre. Der übertragene Drehimpuls legt also die Paritätsänderung beim Übergang fest: $\Delta\pi = (-1)^L$. Vom äußeren Matrixelement verbleibt dann lediglich die Integration über r. Dabei treten Matrixelemente der Form

$$I^L_{l'l} = \int_0^{\infty} \mathrm{d}r\, u_{l'}(k_f r)\, F_L(r)\, u_l(k_i r) \tag{10.342}$$

auf, die numerisch berechnet werden müssen. Im Unterschied zur elastischen Streuung, bei der zur Berechnung des differentiellen Wirkungsquerschnitts nur die Asymptotik der Radialwellenfunktion im optischen Potential (d. h. die Streuphase) eine Rolle spielt, wird für die direkte Reaktion in den Matrixelementen (10.342) der gesamte Verlauf im Kernbereich wesentlich. Insgesamt läßt sich die partielle Amplitude T_{LM} dann als eine Linearkombination aus Gliedern der Form $I^L_{l'l} Y^M_{l'}(\hat{\boldsymbol{k}}_f)$ darstellen, wobei die Richtung $\hat{\boldsymbol{k}}_f$ des gestreuten Teilchens in der Kugelfunktion auftritt. Die Anzahl der in (10.341) zu berücksichtigenden Partialwellen $l = 0, \ldots, l_{\max}$ hängt von der Einschußenergie E und der Reichweite des Formfaktors F_L ab. Als Richtwert gilt, daß für eine Einschußenergie von E MeV alle Partialwellen bis $l_{\max} = E$ mitzunehmen sind.

3. Um mit gemessenen Zählraten vergleichen zu können, haben wir bei unpolarisiertem Target im Wirkungsquerschnitt über die Spinrichtungen M_i im Anfangszustand zu mitteln und außerdem über die Spinrichtungen M_f des Endzustandes zu summieren, wenn die Spinorientierung im Endzustand experimentell nicht beobachtet wird. Nach (10.340) und (10.116) gilt dann

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{\mu}{2\pi\hbar^2}\right)^2 \frac{k_f}{k_i} \frac{1}{2I_i + 1} \sum_{M_i, M_f} \left| \sum_{LM} A_L(I_i M_i LM \mid I_f M_f)\, \tilde{T}_{LM} \right|^2 . \tag{10.343}$$

Unter Verwendung der in Anhang A4.1. angegebenen Symmetrie- und Orthogonalitätsbeziehungen für die Clebsch-Gordan-Koeffizienten lassen sich die Summationen über die Projektionsquantenzahlen M_i, M_f ausführen. Dabei stellt man fest, daß in (10.343) die Interferenzglieder zwischen verschiedenen übertragenen Drehimpulsen L und L', $\tilde{T}^*_{L'M'}\tilde{T}_{L'M'}$, herausfallen. Man erhält

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{\mu}{2\pi\hbar^2}\right)^2 \frac{k_f}{k_i} \sum_{L,M} \frac{2(I_f + 1)}{2(I_i + 1)(2L + 1)} A_L^2 \, |\tilde{T}_{LM}|^2 . \tag{10.344}$$

4. Um den prinzipiellen Charakter der durch (10.344) gegebenen Winkelverteilung zu erkennen, betrachten wir das T-Matrixelement (10.340) in einer Näherung, die das optische Potential in den Kanälen vernachlässigt. Dann erfolgt in der unelastischen Streuung ein direkter Übergang zwischen den Impulszuständen $\boldsymbol{k}_i$, $\boldsymbol{k}_f$ des Projektils, die durch ebene Wellen beschrieben werden (Bornsche Näherung mit ebenen Wellen (PWBA), siehe Gl. (10.142)),

$$\begin{aligned} T_{fi}(\boldsymbol{k}_f, \boldsymbol{k}_i) &= \langle e^{i\boldsymbol{k}_f\boldsymbol{r}} \mid (\Phi_{I_f M_f \alpha_f} \mid V(\boldsymbol{r}, \xi) \mid \Phi_{I_i M_i \alpha_i}) \mid e^{i\boldsymbol{k}_i\boldsymbol{r}} \rangle \\ &= \int d\boldsymbol{r}\, e^{i\boldsymbol{q}\boldsymbol{r}} (\Phi_{I_f M_f \alpha_f} \mid V(\boldsymbol{r}, \xi) \mid \Phi_{I_i M_i \alpha_i}) . \end{aligned} \tag{10.345}$$

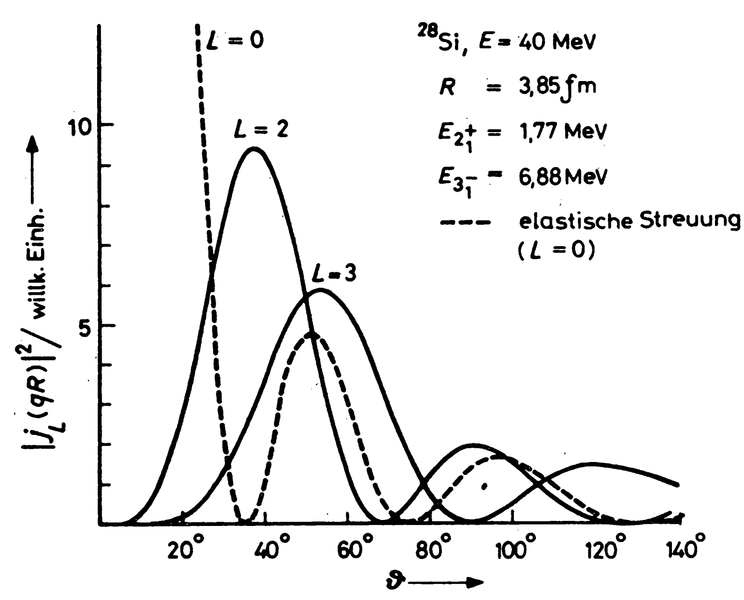


Abb. 10.50
Elastische und unelastische Nukleonenstreuung ($E = 40$ MeV) an ^{28}Si in Bornscher Näherung mit ebenen Wellen (PWBA). Anregung des ersten 2^+- und 3^--Zustandes. L: übertragener Drehimpuls

In Gl. (10.345) wurde der im Stoß übertragene Impuls mit $\boldsymbol{q}$ bezeichnet, $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{k}_i - \boldsymbol{k}_f$. Das innere Matrixelement werten wir unter stark vereinfachten Annahmen über die Targetzustände Φ und die Wechselwirkung V aus. Wir nehmen an, daß die Anregung als Einteilchenübergang aus einem im s-Zustand $\varphi_0(\boldsymbol{r}_1)$ gebundenen Teilchen (Koordinate $\xi \equiv \boldsymbol{r}_1$) in einen gebundenen Einteilchenzustand $\varphi_{LM}(\boldsymbol{r}_1) = \frac{u_L(r_1)}{r_1} Y_L^M(\hat{r}_1)$ erfolgt. Als Wechselwirkung zwischen dem Inzidenzteilchen und dem Targetnukleon wird ein Deltapotential angesetzt, so daß die Bahnänderung nur erfolgt, wenn sich die beiden Teilchen am gleichen Ort „begegnen",

$$V(\boldsymbol{r}, \xi) \equiv V(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}_1) = -V_0 \delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_1) . \tag{10.346}$$

Für das innere Matrixelement erhält man dann einfach $-V_0 \varphi_{LM}(\boldsymbol{r})\, \varphi_0(\boldsymbol{r})$. Um die Integration über die Projektilkoordinate $\boldsymbol{r}$ auszuführen, entwickeln wir die ebene Welle $e^{i\boldsymbol{q}\boldsymbol{r}}$ entsprechend Gl. (B. 127) nach Kugelfunktionen $Y_l^m(\hat{r})$. Die Winkelintegration liefert dann ein Kronecker-Symbol $\delta_{Ll}\delta_{Mm}$, so daß das T-Matrixelement T_{fi} proportional zu einem Radialintegral wird,

$$T_{fi} \sim \int \mathrm{d}r u_L(r)\, j_L(qr)\, u_0(r) . \tag{10.347}$$

Nimmt man zusätzlich eine reine Oberflächenreaktion am Kernradius R an, dann trägt das Innengebiet nicht zum Integral (10.347) bei, und der differentielle Wirkungsquerschnitt wird dem Absolutquadrat einer sphärischen Besselfunktion der Ordnung L zum Argument qR, $q^2 = k_i^2 + k_f^2 - 2k_ik_f \cos\vartheta$ proportional:

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} \sim A_L^2\, |j_L(qR)|^2 , \qquad A_L = u_L(R)\, u_0(R) . \tag{10.348}$$

Diese Winkelverteilung ist für einige L-Werte in Abb. 10.50 dargestellt. Sie wird durch den übertragenen Drehimpuls L, der der Ordnung der sphärischen Bessel-Funktion entspricht, und (bei gegebener Inzidenzenergie) durch den Kernradius R bestimmt. Sie besitzt eine ausgeprägte Beugungsstruktur mit Nullstellen des differentiellen Wirkungsquerschnitts. Die Höhe der Beugungsmaxima nimmt mit wachsendem Streuwinkel ab. Bei festgehaltenem Kernradius verschiebt sich das erste Maximum mit wachsenden Werten des übertragenen Drehimpulses zu größeren Streuwinkeln. Die Lage der Maxima und Nullstellen ändert sich auch bei Variation der Einschußenergie.

5. Wir stellen die Teilschritte zusammen, die zur Berechnung des differentiellen Wirkungsquerschnitts der unelastischen Nukleon-Kern-Streuung in Bornscher Näherung mit gestörten Wellen erforderlich sind:

- Auswahl des Kernmodells zur Strukturbeschreibung der Targetzustände. Angabe der Wellenfunktionen $\Phi_{IM}(\xi)$;
- Ansatz für die effektive Wechselwirkung $V(\boldsymbol{r}, \xi)$, Multipolentwicklung zur Ermittlung von $V_{LM}(r, \xi)$;
- Berechnung des reduzierten inneren Matrixelementes, Bestimmung von Formfaktor F_L und Stärkeparameter A_L;
- Wahl des optischen Potentials $U(r)$, Berechnung der Radialwellenfunktionen $u_l(k_ir)$, $u_{l'}(k_fr)$ im Eingangs- und Ausgangskanal;
- Berechnung der Radialmatrixelemente $I_{l'l}^L$;
- Berechnung der Übergangsamplituden T_{LM} für verschiedene übertragene Drehimpulse L unter Berücksichtigung der Auswahlregeln für Parität und Drehimpuls;
- Aufsummation der Absolutquadrate von T_{LM} zum differentiellen Wirkungsquerschnitt.

Für praktische Rechnungen, die nur mit leistungsfähigen Rechnern möglich sind, stehen Standardprogramme zur Verfügung, die bei Eingabe der Reaktionsdaten (Massen- und Ladungszahl von Target und Projektil, Einschußenergie usw.), der optischen Parameter und der Formfaktoren die gestörten Wellen und die Radialintegrale berechnen, um nach Bewältigung der umfangreichen Drehimpulsalgebra den differentiellen Wirkungsquerschnitt anzugeben.

Die eigentliche Aufgabe des Anwenders besteht dann in der Berechnung von A und F, wenn die Wechselwirkung und das Kernstrukturmodell vorgegeben sind. Wir betrachten einige Beispiele:

Kollektivmodell

1. Für die Anregung eines Vibrationszustandes I_f^π eines sphärischen gg-Kerns (Grundzustand $I_i^\pi = 0^+$) durch eine direkte unelastische Streuung legen wir das Kollektivmodell zugrunde, um die Targetwellenfunktionen und in gleicher Darstellung die effektive Wechselwirkung anzugeben. Im Abschnitt 8.4.4. wurde gezeigt, daß im Vibrationsmodell die Deformationsparameter α der Kernoberfläche als Kollektivkoordinaten fungieren (vgl. auch Gl. (10.332)). Die Deformationsparameter hängen nach

$$\alpha_{lm}^* = \sqrt{\frac{\hbar\omega_l}{2C_l}}\,(b_{lm}^+ + (-1)^m\, b_{l-m}) \tag{10.349}$$

mit den Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren b^+, b für Phononen zusammen, die als quantisierte Oberflächenschwingungen aufzufassen sind. In Gl. (10.349) ist $\hbar\omega_l$ die Anregungsenergie des Phonons mit der Multipolarität l, C_l ist der durch den Hamilton-Operator (8.147) definierte Parameter der Rückstellkraft. Die Targetwellenfunktionen sind das Phononenvakuum $|0\rangle$ für den Grundzustand und ein Ein-Phononen-Zustand als angeregtes Niveau im Endkanal,

$$\Phi_{I_iM_i} = |0\rangle\,, \qquad \Phi_{I_fM_f} = b_{I_fM_f}^+\,|0\rangle\,. \tag{10.350}$$

2. Die Wechselwirkung von Projektil und Target wird durch das verallgemeinerte optische Potential (10.333) beschrieben. Den kugelsymmetrischen Anteil $U(r - R_0)$ benutzen wir, um die gestörten Wellen $\chi(r)$ im Eingangs- und Ausgangskanal zu erzeugen. Die in den Deformationsparametern linearen und quadratischen Glieder koppeln die Projektilbewegung (Koordinaten r, ϑ, φ) an die kollektiven Freiheitsgrade des Targets (Deformationsparameter α). Sie stellen die in (10.334) eingeführte effektive Wechselwirkung $V(\mathbf{r}, \xi)$ dar, die in der Streuung zur Vibrationsanregung der Oberfläche führt. Ein Vergleich von (10.337) und (10.333) zeigt, daß in erster Ordnung in den Deformationsparametern gilt:

$$V(\mathbf{r}, \alpha) = \sum_{L,M} V_{LM}^{(1)}(r, \alpha)\, Y_L^M(\hat{\mathbf{r}})\,,$$

$$V_{LM}^{(1)} = i^L R_0\,\frac{\mathrm{d}U(r - R_0)}{\mathrm{d}r}\,\alpha_{LM}^*\,. \tag{10.351}$$

Wenn wir in (10.351) die Deformationsparameter nach (10.349) durch Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren von Phononen ersetzen, dann können wir zusammen mit (10.350) das innere Matrixelement $(\Phi_{I_fM_f}|\, V(\mathbf{r}, \xi)\, |\Phi_{I_iM})$ unter Verwendung von $\langle 0\,|\,0\rangle = 1$, $b_{LM}\,|0\rangle = 0$, $\langle 0\,|\, b_{I_fM_f} b_{LM}^+\,|0\rangle = \delta_{I_fL}\delta_{M_fM}$ auswerten. Ein Vergleich des Resultats mit (10.339) ergibt für das reduzierte Matrixelement

$$\langle I_f \|\, V_L(r, \alpha) \|0\rangle = -\mathrm{i}^{I_f}\left(\frac{\hbar\omega_{I_f}}{2C_{I_f}}\right)^{1/2} R_0\,\frac{\mathrm{d}U(r - R_0)}{\mathrm{d}r}\,\delta_{LI_f} \equiv A_{I_f}F_{I_f}(r)\,. \tag{10.352}$$

3. Im Kollektivmodell erhalten wir in erster Ordnung einen universellen, vom übertragenen Drehimpuls unabhängigen Formfaktor

$$F(r) = R_0\,\frac{\mathrm{d}U(r - R_0)}{\mathrm{d}r}\,, \tag{10.353}$$

dessen Radialabhängigkeit vollständig aus dem optischen Potential im elastischen Kanal folgt. Da $U(r - R_0)$ einen Imaginärteil enthält, wird der Formfaktor $F(r)$ komplex. Verwendet man für den Realteil von U ein Woods-Saxon-Potential, dann besitzt der Realteil des Formfaktors F_L (10.353) ein Maximum am Kernrand, so daß die Reaktion streng an der Oberfläche lokalisiert wird. Der Betrag des Wirkungsquerschnitts hängt quadratisch von dem Faktor A_{I_f} in (10.352) ab,

$$A_{I_f} = -\mathrm{i}^{I_f}\beta_{I_f}, \qquad \beta_{I_f} = \sqrt{\frac{\hbar\omega_{I_f}}{2C_{I_f}}}, \tag{10.354}$$

der durch die Kernstrukturparameter B_{I_f}, C_{I_f} des Hamilton-Operators (8.147) festgelegt ist ($\omega = \sqrt{C/B}$). Die Größe β_{I_f} ist eine effektive Kopplungsstärke des Grundzustandes an das Vibrationsniveau mit dem Spin I_f. Sie kann durch Normierung der berechneten DWBA-Kurve an dem gemessenen differentiellen Wirkungsquerschnitt aus Experimenten entnommen werden. Liegt im elastischen Kanal eine Oberflächenabsorption vor, dann besitzt der Imaginärteil des Formfaktors als 2. Ableitung eines Woods-Saxon-Potentials einen Knoten am Kernrand. Der Gesamtverlauf des Formfaktors im Kollektivmodell ist aus Abb. 10.51 ersichtlich.

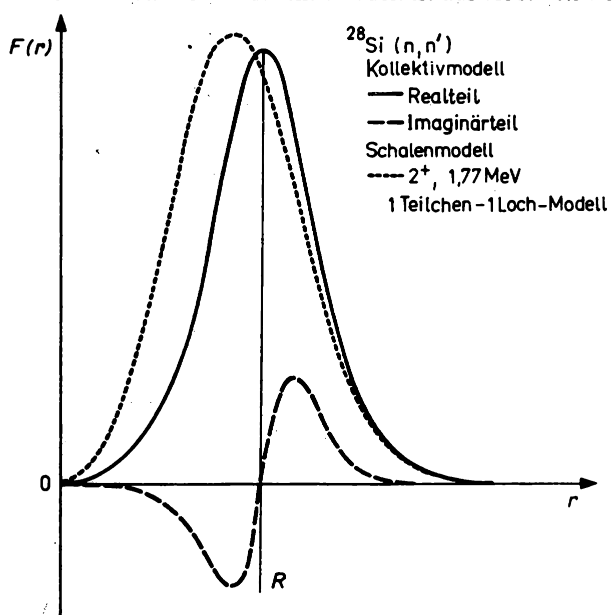


Abb. 10.51
Real- und Imaginärteil des Formfaktors F für die unelastische Neutronenstreuung an ^{28}Si im phänomenologischen Kollektivmodell und im 1 Teilchen-1 Loch-Modell. r: Abstand Nukleon—Targetmittelpunkt. R: Kernradius im Woods-Saxon-Potential

4. Das Glied zweiter Ordnung in den Deformationsparametern enthält Produkte $\alpha^*_{lm}, \alpha^*_{l'm'}$, die man nach (10.349) in Produkte aus je zwei Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren von Phononen überführen kann. Folglich treten in den Multipolmomenten $V^{(2)}_{LM}(r, \alpha)$ der Wechselwirkung zweiter Ordnung Terme der Form $b^+_{lm}b^+_{l'm'}$ auf, die bereits in erster Bornscher Näherung einen direkten Übergang aus dem Grundzustand in einen Zweiphononenzustand hervorrufen,

$$\Phi_{I_iM_i} = |0\rangle \xrightarrow{V^{(2)}} \Phi_{I_fM_f} = \{b^+_l b^+_{l'}\}_{I_fM_f}|0\rangle \,. \tag{10.355}$$

In (10.355) drücken die geschweiften Klammern die Vektorkopplung der Drehimpulse l und l' der beiden Phononen zum Gesamtdrehimpuls I_f aus. Bei der Berechnung des reduzierten Matrixelements $\langle \Phi_{I_f} \| V^{(2)}(r, \alpha) \| \Phi_{I_i} \rangle$ ergibt sich dann wiederum ein vom übertragenen Drehimpuls unabhängiger Formfaktor

$$F(r) = R_0^2 \frac{d^2 U(r - R_0)}{dr^2}, \tag{10.356}$$

dessen Realteil als zweite Abteilung eines Woods-Saxon-Potentials am Kernrand einen Knoten besitzt (vgl. Abb. 10.51). Wenn man den gleichen Übergang (10.355) in zweiter Bornscher Näherung als Zweischrittprozeß mit dem Einphononenzustand als Zwischenstand betrachtet, dann läßt sich ein Zweiphononenzustand auch über die Wechselwirkung $V^{(1)}$ anregen:

$$|\Phi_{I_i M_i}\rangle = |0\rangle \xrightarrow{V^{(1)}} b^+_{l'm'}\,|0\rangle \xrightarrow{V^{(1)}} \{b^+_l b^+_{l'}\}_{I_f M_f}\,|0\rangle\,. \tag{10.357}$$

Numerische Rechnungen für die unelastische Streuung von α-Teilchen zeigen, daß in diesem Falle die Amplituden des direkten und des Zweistufenprozesses betragsgemäß gleichgroß, aber unterschiedlich in ihrer Phase sind, so daß durch Interferenz charakteristische Beziehungen zwischen elastischer und unelastischer Winkelverteilung entstehen. Diese Aussage läßt sich für die Protonstreuung nicht aufrecht erhalten, wie Abb. 10.52 für die Reaktion ^{64}Ni(p, p'), $E_p = 11$ MeV zeigt. Für diese Reaktion hat die Zweifachanregung einen wesentlich größeren Wirkungsquerschnitt als der direkte Übergang. In den Amplituden für beide Prozesse tritt destruktive Interferenz auf, so daß der Anregungsquerschnitt herabgesetzt und die Struktur der Winkelverteilung geglättet wird. Im T-Matrixelement für die Anregung von Zweiphononenzuständen müssen sowohl Ein- als auch Zweischrittprozesse und deren Interferenz berücksichtigt werden, um Übereinstimmung mit den gemessenen differentiellen Wirkungsquerschnitten zu erzielen.

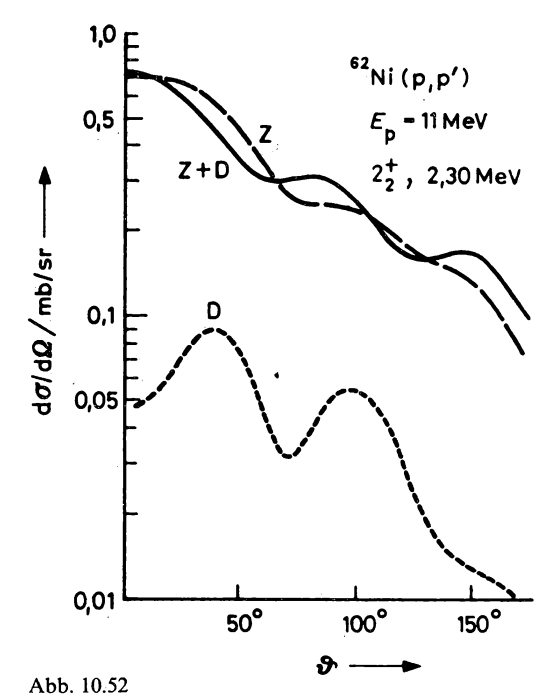


Abb. 10.52
Anregung des Zwei-Phononen-Zustandes 2^+, 2,89 MeV in der Reaktion ^{64}Ni(p, p'), $E_p = 11$ MeV durch einen direkten Übergang (Wechselwirkung $V^{(2)}$, (10.356)) (D) und durch einen Zweistufenprozeß (Wechselwirkung $V^{(1)}$, (10.351)) (Z)

5. Die Betrachtungen können auch auf die Anregung von Rotationsbanden in stark deformierten Kernen erweitert werden. Für diesen Typ kollektiver Bewegungszustände des Kerns ergibt sich im Falle axialsymmetrischer Deformation in erster Ordnung im Deformationsparameter β_{I_f} für das reduzierte Matrixelement des Übergangs $0^+ \to I_f$,

$$A_{I_f} F_{I_f}(r) = -\mathrm{i}^{I_f} \frac{\beta_{I_f}}{\sqrt{2I_f + 1}} R_0 \frac{\mathrm{d}U(r - R_0)}{\mathrm{d}r} . \tag{10.358}$$

Der Parameter β_{I_f} mißt die Multipolordnung I_f der permanenten Gleichgewichtsdeformation des Targetkerns im Grundzustand. Die beiden Ausdrücke (10.354) und (10.358) für Vibrations- bzw. Rotationsanregung unterscheiden sich um einen Faktor $1/\sqrt{I_f + 1}$. Die Analyse der unelastischen Nukleonenstreuung an deformierten Kernen hat bestätigt, daß geringe β_4-Deformationen des Grundzustandes vorliegen können.

6. Die Abb. 10.53 zeigt für die Reaktion ^{28}Si(n, n'), $E_n = 14{,}7$ MeV, einen Vergleich des gemessenen differentiellen Wirkungsquerschnitts mit DWBA-Rechnungen, bei denen ein Formfaktor nach dem Kollektivmodell sowohl mit reeller als auch mit komplexer Kopplung verwendet wurden. Seine Parameter stammen aus einer Analyse des elastischen Streuquerschnitts im optischen Modell mit Oberflächenabsorption und Spinbahnkopplung. Die unelastischen Übergänge zum ersten 2^+-, 3^-- und 4^+-Zustand werden als Vibrationsanregungen aufgefaßt. Vergleicht man die mit reeller und komplexer Kopplung berechneten Winkelverteilungen, dann fällt auf, daß sich signifikante Unterschiede besonders unter Vorwärtswinkeln $\vartheta \lessapprox 30°$ ergeben, für die eine reelle Kopplung einen deutlich geringeren Wirkungsquerschnitt liefert. Mit einem komplexen Formfaktor ergibt sich im gesamten Winkelbereich eine befriedigende Übereinstimmung zwischen Theorie und Experiment. Außerdem fällt der DWBA-Wirkungsquerschnitt für komplexe Formfaktoren größer aus, so daß die ermittelten Kopplungsstärken β kleiner werden. Das betrachtete Experiment liefert $\beta_2 = 0{,}38(0{,}40)$, $\beta_3 = 0{,}37(0{,}40)$ und $\beta_4 = 0{,}28$ $(0{,}33)$, wobei sich die Zahlen in Klammern auf den Fall der reellen Kopplung beziehen.

Mikroskopische Beschreibung

1. In einem Schalenmodell mit Restwechselwirkung für die Targetzustände hängen die Kernwellenfunktionen ψ von den Koordinaten aller aktiven Nukleonen $1, \ldots, N$ außerhalb abgeschlossener Schalen ab, $\psi = \psi(\boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{r}_N)$. Das einfallende Nukleon (Koordinate $\boldsymbol{r}_0$) tritt mit den Targetnukleonen, die sich in einem mittleren Potential korreliert bewegen, über effektive Zweiteilchenkräfte in Wechselwirkung

$$V(\boldsymbol{r}_0, \xi) = \sum_{i=1}^{N} v(r_{i0}), \qquad r_{i0} = |\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_0| . \tag{10.359}$$

Für das abstandsabhängige Potential V wählt man ein Gauß- oder Yukawa-Potential der Stärke V_0 und der Reichweite α

$$v(r_{i0}) = \begin{cases} -V_0 \, \mathrm{e}^{-(r_{i0}/\alpha)^2} & \textsc{Gauss} \\ -V_0 \dfrac{\mathrm{e}^{-\alpha r_{i0}}}{\alpha r_{i0}} & \textsc{Yukawa} . \end{cases} \tag{10.360}$$

Wie in (10.351) nimmt man eine Multipolentwicklung von $v(r_{i0})$ vor,

$$v(r_{i0}) = \sum_{L,M} g_L(r_i, r_0) \, Y_L^M(\hat{\boldsymbol{r}}_i) \, Y_L^{M*}(\hat{\boldsymbol{r}}) \tag{10.361}$$

und findet durch Vergleich mit (10.337)

$$V_{LM}(r_0, \xi) = \sum_{i=1}^{N} g_L(r_i, r_0) \, Y_L^M(\hat{\boldsymbol{r}}_i) . \tag{10.362}$$

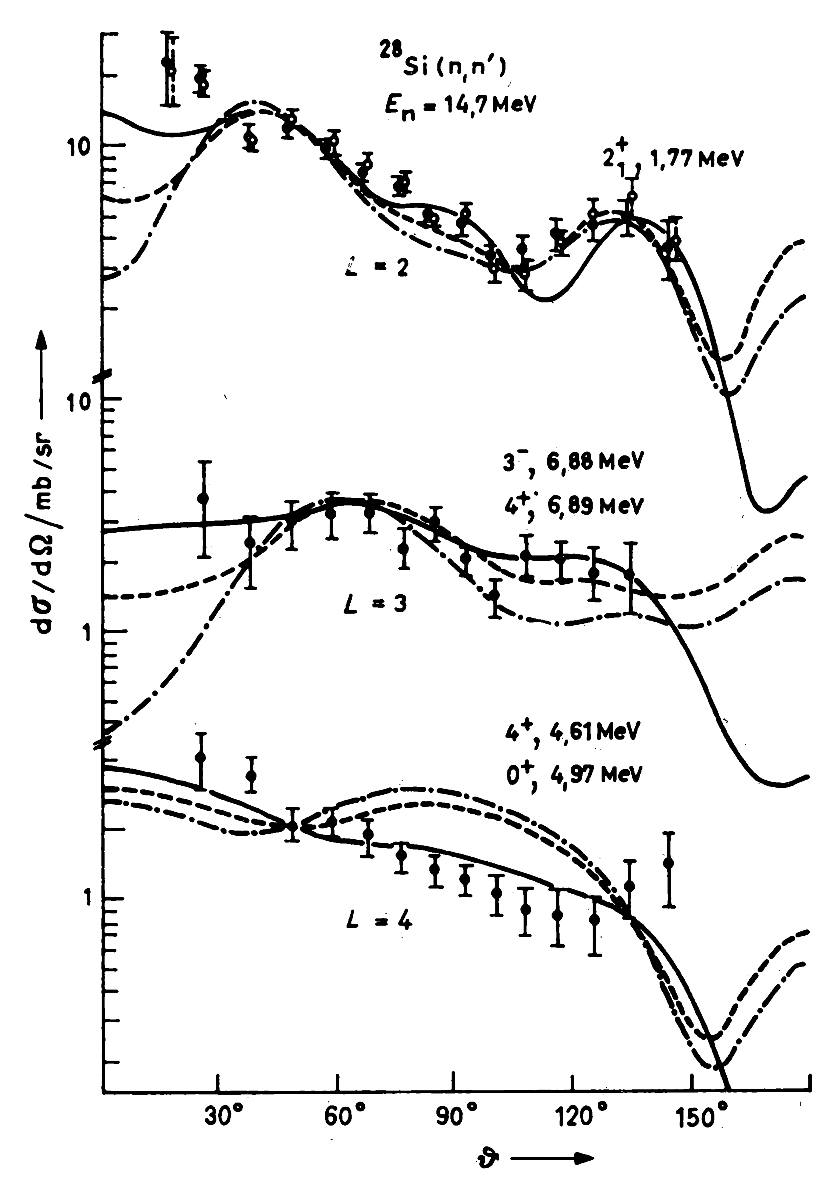


Abb. 10.53
Differentieller Wirkungsquerschnitt der unelastischen Streuung von 14 MeV-Neutronen an ^{28}Si. Die Niveaus 3^-, 6,88 MeV und 4^+, 6,89 MeV sowie 4^+, 4,61 MeV und 0^+, 4,97 MeV werden im Experiment nicht aufgelöst. Die Kurven stellen die Ergebnisse von DWBA-Rechnungen dar: Formfaktor im Kollektivmodell (– – – reelle Kopplung, ——— komplexe Kopplung) und mikroskopischer Formfaktor (—·—·—) im Ein-Teilchen-Ein-Loch-Modell

2. Bei der Berechnung des inneren Matrixelements

$$(\psi_{I_f M_f}(\boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{r}_N) \mid \sum v(r_{i0}) \mid \psi_{I_i M_i}(\boldsymbol{r}_1, \ldots \boldsymbol{r}_N))$$

beachtet man zunächst, daß die Wellenfunktion ψ bei Vertauschung der Koordinaten zweier Teilchen antisymmetrisch ist,

$$\left(\psi_{I_f M_f} \,\middle|\, \sum_{i=1}^{N} v(r_{i0}) \,\middle|\, \psi_{I_i M_i}\right) = N(\psi_{I_f M_f} \mid v(r_{N0}) \mid \psi_{I_i M_i}) . \tag{10.363}$$

Wie wir in Abschnitt 8.6.3.3. gesehen haben, können wir die Konzeption der Abstammungskoeffizienten benutzten, um von einer Vielteilchenfunktion eine Einteilchenfunktion abzukoppeln

$$\psi_{IM}(\boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{r}_N) = \sum_{I_1, \beta, j_\beta} \omega_{\beta j_\beta} \{\psi_{I_1}^{(\beta)}(\boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{r}_{N-1})\, \varphi_{j_\beta}(\boldsymbol{r}_N)\}_{IM} . \tag{10.364}$$

Diese Entwicklung setzen wir auf beiden Seiten des inneren Matrixelementes (10.363) ein. Da die verschiedenen Zustände I_1, β der Nukleonengruppe $1, \ldots, N-1$ orthonormal sind, $\langle \psi_{I_1'}^{(\beta')}(\boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{r}_{N-1}) \mid \psi_{I_1}^{(\beta)}(\boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{r}_{N-1}) \rangle = \delta_{\beta\beta'} \delta_{I_1 I_1'}$, ergibt sich für das innere Matrixelement eine Summe über Einteilchenanregungen $j \to j'$. Die Kohärenzeigenschaften dieser Überlagerung von Elementaranregungen werden durch die Strukturkoeffizienten und die Drehimpulskopplung bestimmt,

$$\begin{aligned}\left(\psi_{I_f M_f} \,\middle|\, \sum_i v(r_{i0}) \,\middle|\, \psi_{I_i M_i}\right) &= N \sum \omega_{\beta' j_{\beta'}}^{*} \omega_{\beta j_\beta} (I_1 M_1' j' m' \mid IM) \\ &\quad \times (I_1 M_1 jm \mid IM) \langle \varphi_{j_{\beta'} m'}(\boldsymbol{r}_N) \mid v(r_{N0}) \mid \varphi_{j_\beta m}(\boldsymbol{r}_N) \rangle .\end{aligned} \tag{10.365}$$

Wir können diesen Sachverhalt folgendermaßen formulieren. Die Wechselwirkung (10.359) stellt eine Summe von Einteilchenoperatoren in den Koordinaten der aktiven Targetnukleonen dar. Folglich sind im inneren Matrixelement (10.365) nur solche Terme von Null verschieden, die zwei Konfigurationen miteinander verknüpfen, die sich im Besetzungszustand höchstens eines Teilchens unterscheiden. In erster Bornscher Näherung erlaubt also der Ansatz (10.359) für die effektive Projektil-Target-Wechselwirkung nur ganz bestimmte Anregungsmoden, z. B. Einteilchenübergänge $|jm\rangle \to |j'm'\rangle$, Anregung eines Teilchen-Loch-Paares $|0\rangle \to |(j_p j_h^{-1})\, IM\rangle$, Zwei-Quasiteilchenanregungen $|\Phi_0\rangle \to \alpha_{j'm'}^{+} \alpha_{jm}^{+} |\Phi_0\rangle$, Umkopplung der Drehimpulse einer Gruppe äquivalenter Teilchen $|(j)^n\, IM\rangle \to |(j)^n\, I'M'\rangle$.

Im Einteilchenmatrixelement $\langle \varphi_{j_{\beta'} m'}(\boldsymbol{r}_N) \mid v(r_{N0}) \mid \varphi_{j_\beta m}(\boldsymbol{r}_N) \rangle$ lassen sich alle Integrationen über die Spin- und Winkelvariablen des Nten Teilchens ausführen. Es verbleiben Radialintegrale der Form

$$I_{j_{\beta'} j_\beta}^{(L)}(r_0) = \int_0^\infty \mathrm{d}r_N\, u_{j_{\beta'}}(r_N)\, g_L(r_N, r_0)\, u_{j_\beta}(r_N) . \tag{10.366}$$

Nach (10.365) erwartet man für den Formfaktor $F_L(r_0)$ eine kohärente Überlagerung von Radialintegralen (10.366), die eine unelastische Anregung aufbauende Einteilchenübergänge darstellen,

$$F_L(r_0) = \sum_{(\beta' j_{\beta'})(\beta j_\beta)} C_{\beta' j_{\beta'} \beta j_\beta}^{(L)} I_{j_{\beta'} j_\beta}^{(L)}(r_0) . \tag{10.367}$$

In die spektroskopischen Amplituden C gehen neben geometrischen Koeffizienten, die von den Drehimpulskopplungen in den beteiligten Wellenfunktionen und den Winkelintegrationen herrühren, vor allem die Produkte $\omega_{\beta' j_{\beta'}}^{*} \omega_{\beta j_\beta}$ ein, die von den Wellenfunktionen im Anfangs- und Endzustand geliefert werden. Der Formfaktor (10.367) hängt also wesentlich von den relativen Phasen der beteiligten Einteilchenübergänge ab. Überlagern sich alle Einteilchenübergänge

konstruktiv, dann liegt eine kollektive Anregung mit einem Wirkungsquerschnitt vor, der etwa einen Faktor 10 größer ist als der Wirkungsquerschnitt nichtkollektiver Übergänge.

3. Der Formfaktor $F_L(r_0)$ und damit der differentielle Wirkungsquerschnitt der unelastischen Streuung hängen nur schwach von dem Schalenmodellpotential, mit dem die Radialfunktionen u_{j_β} in (10.366) berechnet werden, und von dem Reichweiteparameter α der effektiven Wechselwirkung (10.360) ab. Die Stärke v_0 der effektiven Wechselwirkung geht quadratisch in den Wirkungsquerschnitt ein; sie kann durch Normierung der berechneten Winkelverteilung auf den absolut gemessenen Wirkungsquerschnitt aus Experimenten entnommen werden. Für ein Yukawa-Potential der Reichweite $\alpha = 1$ fm findet man für die unelastische Nukleonstreuung oft $v_0 \approx 100$ MeV. Eine Spinabhängigkeit der effektiven Nukleon-Nukleon-Wechselwirkung läßt sich in Form eines Austauschterms berücksichtigen

$$v_{i0} = v(r_{i0})\,(1 + a(\sigma_i\sigma_0))\,. \tag{10.368}$$

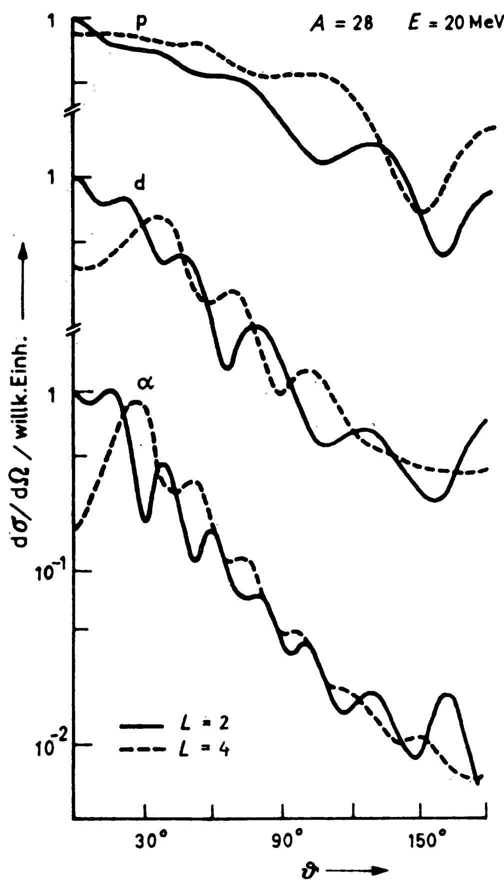


Abb. 10.54
DWBA-Winkelverteilung der unelastischen Streuung von Protonen, Deuteronen und α-Teilchen der Energie $E = 20$ MeV an einem Kern der Massenzahl $A = 28$ für übertragene Drehimpulse $L = 2$ und 4. Der Formfaktor entspricht einer Anregung, die in der Umkopplung zweier Teilchen auf einem $1d_{5/2}$-Niveau besteht: $(1d_{5/2})^2\, I = 0 \rightarrow (1d_{5/2})^2\, I = L$

Außer einem Bahndrehimpuls L kann dann noch ein Spin $S = 1$ auf den Targetkern übertragen werden. Die gesamte Drehimpulsänderung $\boldsymbol{J}$ des Targets ergibt sich in diesem Fall durch die Kopplung von $\boldsymbol{L}$ und $\boldsymbol{S}$: $J = L, L \pm 1$. Die Spinaustauschkraft ist relativ schwach ($a \approx 0{,}3$).

4. In einer mikroskopischen Beschreibung betrachten wir zunächst die Übergänge, bei denen zwei äquivalente Nukleonen ihre relative Drehimpulsorientierung ändern. Als Beispiel wird $(1d_{5/2})^2\ I = 0 \rightarrow (1d_{5/2})^2\ I = L$ mit der Drehimpulsübertragung $L, S = 0, J = L$ gewählt. Bei gleicher Einschußenergie und gleichem Formfaktor vergleichen wir in Abb. 10.54 die berechneten Wirkungsquerschnitte für Streuung von Protonen, Deuteronen und α-Teilchen für $L = 2{,}4$, wobei optische Störpotentiale verwendet werden, die für diese Teilchenarten charakteristisch sind. Die Winkelverteilung unelastisch gestreuter Protonen zeigt ein sehr verwaschenes Beugungsbild, da die Absorption im Kern schwach und die räumliche Lokalisierung der unelastischen Reaktion unscharf ist. Die Winkelverteilung der Deuteronen und besonders der α-Teilchen besitzen ausgeprägte Beugungsstruktur, wobei sich das erste Maximum bei $L = 4$ für größere Streuwinkel ausbildet als für $L = 2$. In Abb. 10.51 wird der Formfaktor für die Anregung des kollektiven 2^+, 1,77 MeV Zustandes in ^{28}Si im 1 Teilchen-1 Loch-Modell (Gauß-Potential (10.360), $\alpha = 1{,}7$ fm) mit dem Realteil des Formfaktors im Kollektivmodell verglichen. Das Maximum des mikroskopischen Formfaktors liegt mehr im Kerninneren, und die Kurve ist breiter. Da aber die Formfaktoren beider Modelle außerhalb des Kernradius in Bereichen, für die eine starke Überlappung mit den gestörten Wellen vorliegt, sich sehr ähnlich verhalten, unterscheiden sich die berechneten Winkelverteilungen nur unter Vorwärtswinkeln (siehe Abb. 10.53). Um die gemessenen Übergangsstärken zu reproduzieren, muß man für die Stärken der effektiven Zweiteilchenwechselwirkung (10.360) $v_0 \approx 70$ MeV wählen.

Wie sich der Formfaktor für einen kollektiven Übergang durch konstruktive Überlagerung der Formfaktoren einzelner Elementaranregungen aufbaut, verfolgen wir in Abb. 10.55 für den ersten 2^+-Zustand in ^{60}Ni, der bei einer Anregungsenergie von 1,33 MeV liegt. Im Supraflüssigkeitsmodell treten als Ele-

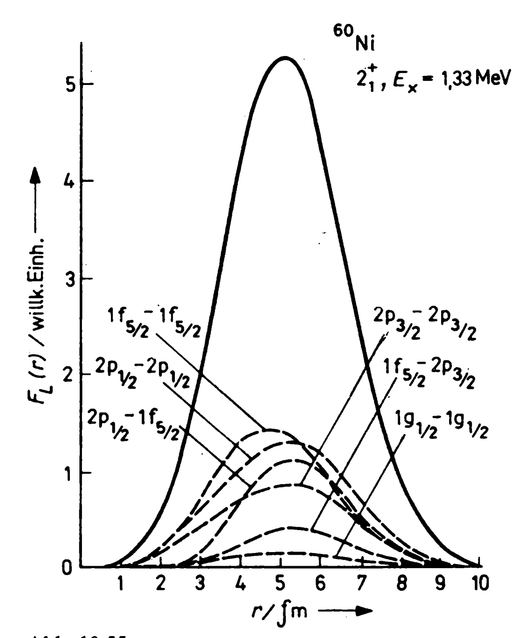


Abb. 10.55
Konstruktiv kohärenter Aufbau des mikroskopischen Formfaktors für den kollektiven Übergang $0^+ \rightarrow 2^+$, 1,33 MeV in der unelastischen Protonenstreuung an ^{60}Ni aus Zwei-Quasiteilchen-Anregungen

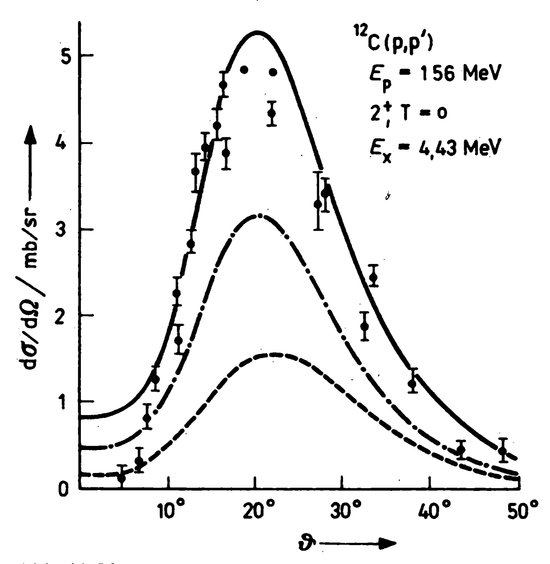


Abb. 10.56
Differentieller Wirkungsquerschnitt für die Anregung des Niveaus 2^+, 4,43 MeV in ^{12}C durch unelastische Protonenstreuung bei 156 MeV. Die Kurven stellen DWBA-Rechnungen mit verschiedenen mikroskopischen Wellenfunktionen dar: ––– $(1p_{3/2})^{-1}\,1p_{1/2}$, –·– Überlagerung von 1 Teilchen-1 Loch-Anregungen, ——— Berücksichtigung von Grundzustandskorrektionen

mentaranregungen die Zwei-Quasiteilchenanregungen $\alpha_{j_1}^+\alpha_{j_2}^+$ aus dem BCS-Grundzustand (siehe Abschnitt 8.6.4.3.) auf. Die Radialintegrale $I_{j_1j_2}^{(2)}(r)$ für die einzelnen Übergänge unterscheiden sich hinsichtlich Breite und Lage des Maximums. Da sich die Radialintegrale aller beteiligten Anregungen mit gleicher Phase überlagern, entsteht ein totaler Formfaktor mit einem Maximum am Kernradius, der vom Formfaktor des Kollektivmodells lediglich durch eine größere Breite abweicht. Die kollektive Verstärkung einer unelastischen Anregung wird auch in Abb. 10.56 deutlich, die den gemessenen differentiellen Wirkungsquerschnitt für die Reaktion ^{12}C(p, p'), 2^+, 4,43 MeV bei einer Energie von 156 MeV mit DWBA-Rechnungen für verschiedene ^{12}C-Wellenfunktionen vergleicht. Man entnimmt der Abbildung, daß die Winkelverteilung für Formfaktoren, die mit verschiedenen Strukturmodellen berechnet wurden, in ihrem Charakter übereinstimmt. Die Unterschiede liegen in der Übergangsstärke. Der theoretische Wirkungsquerschnitt bleibt etwa um den Faktor 4 unter den gemessenen Werten, wenn eine einzige 1 Teilchen-1 Loch-Komponente $(1p_{3/2})^{-1}\,(1p_{1/2})$ angeregt wird. Die Überlagerung mehrerer 1 Teilchen-1 Loch-Anregungen aus den abgeschlossenen $(1s_{1/2})\,(1p_{3/2})$-Niveaus erhöht den Wirkungsquerschnitt um den Faktor ≈ 3. Erst die Berücksichtigung von Teilchen-Loch-Komponenten in der Wellenfunktion für den Grundzustand von ^{12}C ergibt eine Übereinstimmung von Theorie und Experiment. In diesem Sinne stellt die unelastische Streuung eine geeignete Methode dar, um die Wellenfunktionen, die für die beteiligten Kernzustände aus verschiedenen Kernmodellen folgen, besonders hinsichtlich ihrer kollektiven Eigenschaften zu testen.

10.6.2.2. Methode der gekoppelten Kanäle

1. Die Bornsche Näherung mit gestörten Wellen betrachtet neben dem elastischen Kanal nur eine einzige, ausgewählte Anregung eines isolierten Targetzustandes. Alle anderen Übergänge in offene Reaktionskanäle werden durch den Imaginärteil des optischen Potentials, in dem die gestörten Wellen berechnet werden, pauschal berücksichtigt. Diese Näherung versagt, wenn

mehrere Endzustände stark an den Eingangskanal und untereinander koppeln bzw. einzelne Endzustände betrachtet werden, die aus dem Grundzustand nur mit geringer Wahrscheinlichkeit angeregt werden. In solchen Fällen treten Mehrstufenprozesse auf, bei denen angeregte Niveaus über einen Zwischenzustand erreicht werden und auch Abregungen, z. T. zurück in den elastischen Kanal vorkommen (siehe Abb. 10.57).

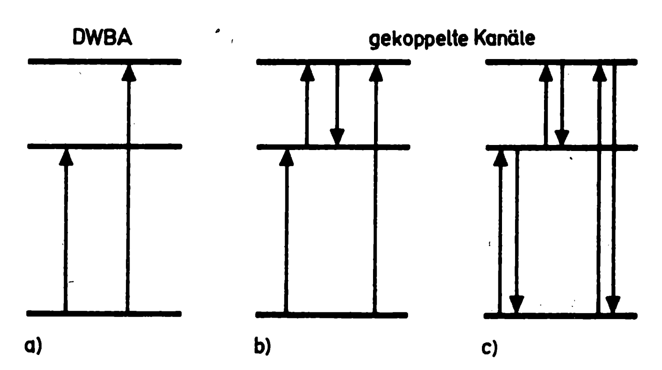


Abb. 10.57
Übergänge zwischen dem Grundzustand 0^+ und zwei angeregten Zuständen 1, 2, die in 1. Bornscher Näherung mit gestörten Wellen (a) und in der Näherung gekoppelter Kanäle berücksichtigt werden. Das Kopplungsschema (b) vernachlässigt die Rückkopplung an den elastischen Kanal, während (c) alle möglichen Kopplungen in Betracht zieht

Um eine starke Kopplung verschiedener Reaktionskanäle zu erfassen, entwickelt man die Gesamtwellenfunktion $\Psi(\boldsymbol{r}, \xi)$ zum Hamilton-Operator (10.334),

$$[H_\mathrm{T}(\xi) + T + U(r) + V(\boldsymbol{r}, \xi) - E]\, \Psi(\boldsymbol{r}, \xi) = 0, \tag{10.369}$$

nach den Targeteigenfunktionen (10.335) $\Phi_{I\alpha}(\xi)$,

$$\Psi(\boldsymbol{r}, \xi) = \sum_{I\alpha} \varphi_{I\alpha}(\boldsymbol{r})\, \Phi_{I\alpha}(\xi)\,. \tag{10.370}$$

In der Summe beschränken wir uns auf die Targetzustände, deren Anregung wir in einem gewählten Kopplungsschema explizit untersuchen wollen. Der Ansatz (10.370) für die Zustände des Gesamtsystems vernachlässigt auch von vornherein Kanäle, in denen ein Teilchentransfer zwischen Projektil und Target abläuft. Die Funktionen $\varphi_{I\alpha}(\boldsymbol{r})$ beschreiben die Bewegung des gestreuten Teilchens im Kanal $I\alpha$. Für den elastischen Kanal besteht $\varphi_{I\alpha}(\boldsymbol{r})$ im Asymptotischen aus ein- und auslaufenden Kugelwellen. In den unelastischen Kanälen liegen nur auslaufende Kugelwellen vor, deren Amplituden unmittelbar die Wirkungsquerschnitte für die Anregung der entsprechenden Zustände liefern. Um die gesuchten Funktionen $\varphi_{I\alpha}(\boldsymbol{r})$ aus der Schrödinger-Gleichung (10.369) zu ermitteln, geht man mit dem Ansatz (10.370) in (10.369) ein, multipliziert von links mit $\Phi^*_{I'\alpha'}(\xi)$ und integriert über die inneren Koordinaten ξ. Es ergibt sich ein endliches gekoppeltes Gleichungssystem für die Koeffizienten $\varphi_{I\alpha}(\boldsymbol{r})$ der Entwicklung (10.370),

$$(T + U(r) - (E - \varepsilon_{I'\alpha'}))\, \varphi_{I'\alpha'}(\boldsymbol{r}) = \sum_{(I\alpha) \neq (I'\alpha')} \langle \Phi_{I'\alpha'} \,|\, v(\boldsymbol{r}, \xi) \,|\, \Phi_{I\alpha} \rangle\, \varphi_{I\alpha}(\boldsymbol{r})\,. \tag{10.371}$$

Die Zahl der gekoppelten Gleichungen entspricht der Zahl der Glieder in (10.370). Nach (10.371) wird die Wellenfunktion für die Relativbewegung von Projektil und Target in Kanal $I'\alpha'$ nicht nur durch das optische Potential $U(r)$ bestimmt, sondern auch durch die auf der rechten Seite der Gleichung auftretende Kopplung an alle anderen Kanäle $I\alpha$. Wie stark die Kanäle

koppeln, wird durch das Matrixelement $\langle \Phi_{I'\alpha'} | V(\boldsymbol{r}, \xi) | \Phi_{I\alpha} \rangle$ festgelegt, bei gegebener effektiver Wechselwirkung $V(\boldsymbol{r}, \xi)$ also durch die Struktur der beteiligten Zustände. Vernachlässigt man diese Kopplung, dann geht (10.371) in die Bestimmungsgleichung für die gestörte Welle $\chi(\boldsymbol{r})$ in den einzelnen Kanälen über. In dem Gleichungssystem (10.371) wurde für alle Kanäle das gleiche optische Potential benutzt. Diese Vereinfachung gilt nur näherungsweise. In diesem Zusammenhang verweisen wir darauf, daß bei Rechnungen mit gekoppelten Kanälen der Imaginärteil des optischen Potentials, wie er aus der Anpassung an Experimente zur elastischen Streuung folgt, um etwa 10% reduziert werden muß. Der Grund für diese Änderung ist darin zu sehen, daß die mit Hilfe der Gl. (10.371) explizit berücksichtigten Reaktionskanäle einen wesentlichen Teil der Absorption aus dem elastischen Kanal ausmachen.

2. Im Gegensatz zur Bornschen Reihe stellt die Methode der gekoppelten Kanäle keine Entwicklung des T-Matrixelementes nach Potenzen der Wechselwirkung dar, denn bei der Lösung des Gleichungssystems (10.371) wird $V(\boldsymbol{r}, \xi)$ bis zu unendlich hoher Ordnung, und damit exakt mitgenommen. Vielmehr liegt die Näherung in der Begrenzung der Summation in (10.370), also in der Auswahl der explizit berücksichtigten Kanäle. In praktischen Rechnungen werden die mitzunehmenden Kanäle und das Kopplungsschema (siehe Abb. 10.57) nach physikalischen Überlegungen fixiert, worin oft schwer zu überschauende Unsicherheiten und Schwierigkeiten der Methode liegen. Da der numerische Aufwand zur Lösung des gekoppelten Gleichungssystems (10.371) sehr stark mit der Kanalzahl anwächst, erreicht das Verfahren auch in dieser Hinsicht rasch seine Grenzen.

3. Die Methode der gekoppelten Kanäle kann mit Erfolg eingesetzt werden, um die Anregung von Ein-Phononen- und Zwei-Phononenzuständen bestimmter Multipolarität in Vibrationskernen einheitlich zu beschreiben. Als Beispiel betrachten wir in Abb. 10.58 die unelastische Protonenstreuung an Ni-Isotopen, wobei Übergänge zum Niveau 2_1^+ (1 Quadrupol-Phonon) und zum Triplett $4_1^+ - 0_2^+ - 2_2^+$ (Kopplung von 2 Quadrupol-Phononen) erfolgen. Zunächst vergleichen wir die Ergebnisse in DWBA und in der Näherung gekoppelter Kanäle miteinander. Bei diesen Rechnungen wurden die Kopplungsmatrixelemente zwischen den einzelnen Kanälen mit mikroskopischen Kernwellenfunktionen berechnet, die eine Überlagerung von Zwei-Quasiteilchen-Anregungen darstellen. Das verwendete Kopplungsschema berücksichtigt alle Übergänge zwischen den Zuständen $0_1^+ - 2_1^+ - 4_1^+ - 0_2^+ - 2_2^+$. Man entnimmt der Abb. 10.58, daß die Winkelverteilung im elastischen Kanal durch die Kopplung an unelastische Kanäle nur unter Rückwärtswinkel beeinflußt wird. Bei der Anregung des kollektiven 2_1^+-Zustandes und der Zustände 4_1^+, 0_2^+ treten Änderungen der Winkelverteilung im gesamten Winkelbereich auf, ohne daß sich der integrierte Wirkungsquerschnitt für den Übergang wesentlich ändert. Den deutlichsten Effekt der Kanalkopplung stellt man bei der Anregung des 2_2^+-Niveaus fest: die Methode der gekoppelten Kanäle liefert einen wesentlich größeren Wirkungsquerschnitt als die DWBA, da neben einem direkten Übergang eine stufenweise Anregung dieses Zustandes besonders über den 2_1^+-Zustand erfolgt. Die gute Übereinstimmung mit dem Experiment, die sich erreichen läßt, wenn man bei der Anregung höherliegender, in ihrer Struktur komplizierterer Zwei-Phononen-Zustände die Kopplung der Kanäle explizit berücksichtigt, wird für die Reaktion ^{64}Ni(p, p'), $E_p = 11$ MeV im rechten Teil der Abb. 10.58 belegt.

10.6.2.3. Austauscheffekte. Modell der schwachen Kopplung

1. In einem mikroskopischen Modell der unelastischen Nukleonenstreuung kann man übersehen, wie spezielle Austauschprozesse zum Übergangsmechanismus beitragen.

Die Ununterscheidbarkeit identischer Teilchen führt dazu, daß sich nicht feststellen läßt, ob es sich bei dem im Detektor registrierten Teilchen um das Inzidenznukleon oder ein Targetnukleon handelt. Nach dem Pauli-Prinzip müssen wir dann im Endzustand zwischen dem einfallenden Nukleon und den

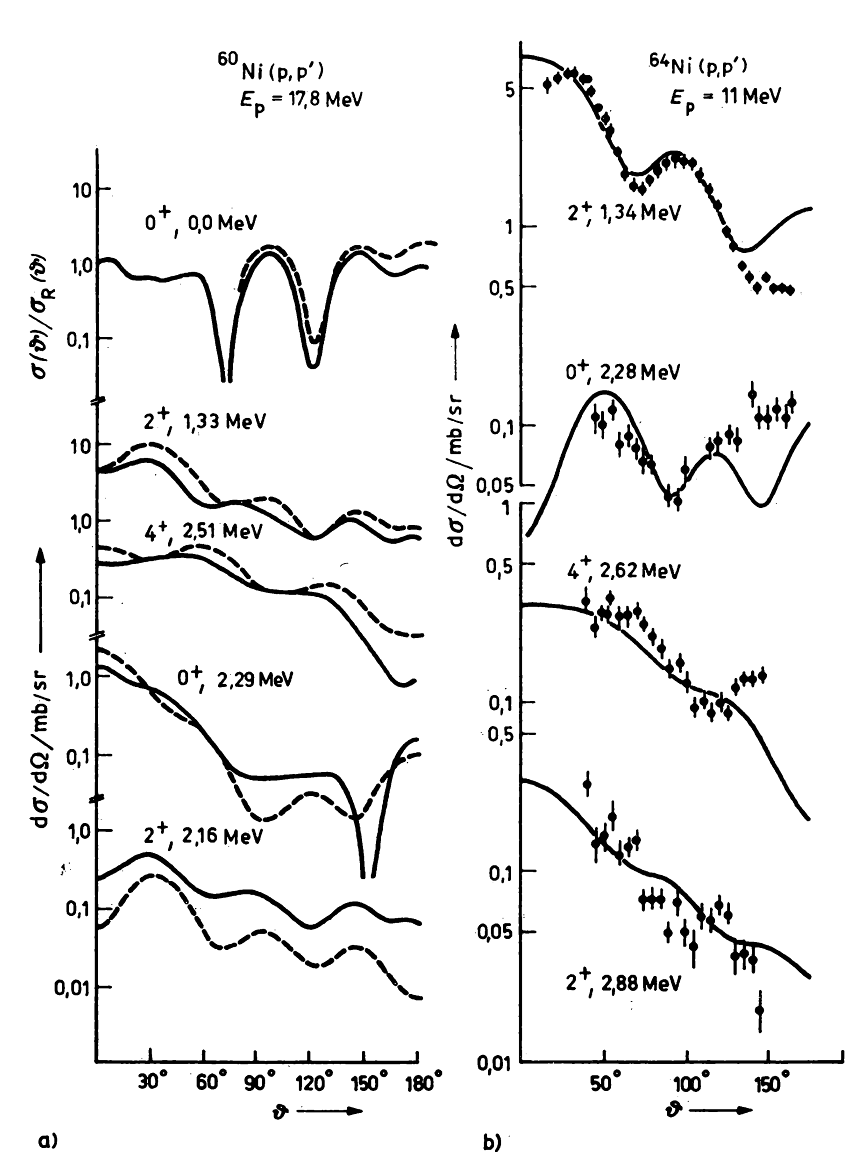


Abb. 10.58
Anregung von Ein- und Zwei-Phononenzuständen 2^+ bzw. (0^+, 2^+, 4^+) in Ni-Isotopen. (a) Vergleich von DWBA-Kurven (— — —) mit Ergebnissen bei Kanalkopplung (———) (mikroskopischer Formfaktor). (b) Vergleich von experimentellen differentiellen Wirkungsquerschnitten mit theoretischen Ergebnissen bei Kanalkopplung (Formfaktor im Kollektivmodell)

Targetnukleonen antisymmetrisieren. Diese Antisymmetrisierung nehmen wir vor, indem wir in die effektive Wechselwirkung v_{i0} formal einen Operator einführen, der einen Ortsaustausch bewirkt. Das T-Matrixelement besteht dann aus zwei Summanden, die dem direkten und dem Austauschprozeß entsprechen. In der Austauschamplitude erscheint dabei ein Nukleon, das im Eingangskanal einen gebundenen Zustand im Target besetzt, im Ausgangskanal in einem Streuzustand, während das Inzidenznukleon in einem angeregten Einteilchenniveau des Targets verbleibt. Bei Einschußenergien zwischen 10 MeV und 150 MeV können durch das Pauli-Prinzip bedingte Austauscheffekte nicht vernachlässigt werden. Größe und Phase der Austauschamplitude hängen stark von den Einteilchenwellenfunktionen im Anfangs- und Endkanal ab. Bei kollektiven Anregungen überlagern sich beide Anteile konstruktiv, so daß die Übergangswahrscheinlichkeit durch Austauscheffekte erhöht wird. Ein Merkmal der Austauschprozesse besteht auch darin, daß ihr relativer Beitrag mit dem übertragenen Drehimpuls stark anwächst. Die Interferenzterme zwischen direkter und Austauschamplitude können besonders die Winkelverteilung erheblich beeinflussen. Die Abb. 10.59 zeigt am Beispiel einer kollektiven Quadrupolanregung in ^{118}Sn durch unelastische Protonenstreuung, wie die Berücksichtigung von Austauscheffekten zu einer besseren Übereinstimmung von Theorie und Experiment im differentiellen Wirkungsquerschnitt führt.

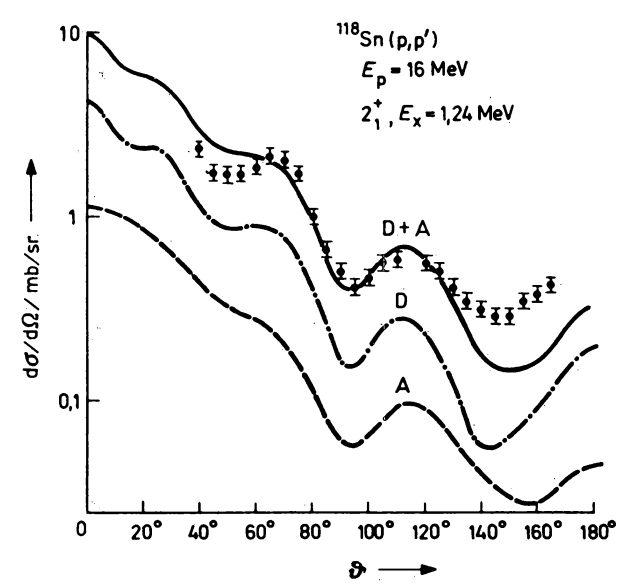


Abb. 10.59
Differentieller Wirkungsquerschnitt der unelastischen Protonenstreuung an ^{118}Sn unter Anregung des ersten 2^+-Zustandes bei einer Anregungsenergie von 1,24 MeV. Die experimentellen Daten werden mit den Ergebnissen von DWBA-Rechnungen verglichen. D: ohne Berücksichtigung des Pauli-Prinzips. A: Austauschreaktion. D + A: direkter Übergang + Austauschreaktion

2. In den Spektren ungerader Kerne werden außer Einteilchenzuständen oft Multipletts beobachtet, die durch eine Kopplung des unpaarigen Nukleons (oder eines Lochs) mit dem Gesamtdrehimpuls j an eine Vibrationsanregung L im benachbarten gg-Kern zustande kommen. Die Energien $E_{I'}$ der Zustände des Multipletts mit den Spinwerten

$$|L-j| \leqq I' \leqq L+j \tag{10.372}$$

befolgen gewöhnlich eine Schwerpunktregel,

$$E_L = \frac{1}{(2j+1)(2L+1)} \sum_{I'} (2I'+1)\, E_{I'}\,, \tag{10.373}$$

wobei E_L die Energie der Vibrationsanregung im gg-Rumpf bedeutet. Eine geringe Energieaufspaltung des Multipletts weist auf eine schwache Kopplung des Teilchens an die Vibration hin, so daß die Wellenfunktion für die Mitglieder des Multipletts (10.372) eine vektorgekoppelte Produktfunktion ist,

$$|\{jL\}\, I'M'\rangle = \sum_{m_j m_L} (jm_j Lm_L \,|\, I'M')\, |jm_j\rangle\, |Lm_L\rangle\,. \tag{10.374}$$

In diesem Grenzfall schwacher Kopplung stimmt die Winkelverteilung der unelastisch gestreuten Teilchen für den Übergang

$$|I = j\rangle \to |I'\rangle \tag{10.375}$$

in ungeraden Kernen überein mit der Winkelverteilung, die in der Vibrationsanregung des gg-Kerns beobachtet und durch den übertragenen Drehimpuls L charakterisiert wird. Da in diesem Modell das ungerade Teilchen an der Anregung nicht beteiligt ist, kann der Wirkungsquerschnitt $d\sigma(I')$ über einen statistischen Faktor durch den im gg-Kern gemessenen Querschnitt $d\sigma(L)$ ausgedrückt werden,

$$d\sigma(I') = \frac{2I'+1}{(2j+1)(2L+1)}\, d\sigma(L)\,. \tag{10.376}$$

Daraus folgt die Summenregel

$$\sum_{I'} d\sigma(I') = d\sigma(L)\,. \tag{10.377}$$

In vielen Fällen gibt dieses Modell der schwachen Kopplung gute Resultate, so daß es zur Bestimmung der Spinfolge im Multiplett herangezogen werden kann.

Als Beispiel für die Anwendung des Modells schwacher Kopplung betrachten wir die Anregung eines Multipletts mit den Niveaus $I'^{\pi} = 1/2^+, \ldots, 9/2^+$ in ^{27}Al in der unelastischen Deuteronenstreuung bei $E_d \approx 13$ MeV. Im Grundzustand wird der Targetkern durch eine Lochkonfiguration im $1d_{5/2}$-Niveau beschrieben. Die betrachteten Multiplettzustände zwischen 0,84 MeV und 3,00 MeV entstehen durch die Kopplung dieses Lochs an die Anregung eines 2^+-Zustandes im ^{28}Si-Rumpf, die bei einer Anregungsenergie von 1,77 MeV beobachtet wird. Die Schwerpunktregel (10.373) für die Gruppierung der Multiplettzustände um die Vibrationsanregung ist recht gut erfüllt. Auch die gemessenen Winkelverteilungen der unelastischen Deuteronenstreuung an ^{27}Al stimmen (besonders hinsichtlich der Lage des ersten Maximums) gut mit der Winkelverteilung der Quadrupolanregung in ^{28}Si überein (siehe Abb. 10.60). Bei

Tabelle 10.5
Modell schwacher Kopplung für die unelastische Deuteronenstreuung ($E_d = 12{,}8$ MeV) an ^{27}Al. Verglichen werden die unter dem ersten Maximum der Winkelverteilung integrierten gemessenen Wirkungsquerschnitte mit dem für das Multiplett $(1d_{5/2}2^+)\, I$ nach (10.376) erwarteten Wirkungsquerschnitten.

	E_x/MeV	I^{π}	$\sigma_{exp.}$/mb	$\sigma_{theor.}$/mb
^{28}Si(d, d')	1,77	2^+	18,1 ± 3,0	
^{27}Al(d, d')	0,84	$1/2^+$	1,5 ± 0,2	1,2
	1,01	$3/2^+$	2,5 ± 0,4	2,4
	2,21	$7/2^+$	3,6 ± 0,5	4,8
	2,73	$5/2^+$	1,4 ± 0,2	3,6
	3,00	$9/2^+$	4,3 ± 0,7	6,0

der Aufteilung der 2^+-Anregungsstärke auf die Mitglieder des Multipletts nach (10.376) tritt lediglich bei dem $5/2^+$, 2,73 MeV-Niveau eine deutliche Abweichung um den Faktor 2,5 auf (siehe Tabelle 10.5). Diese Unstimmigkeit weist darauf hin, daß energetisch benachbarte Konfigurationen mit den Quantenzahlen $5/2^+$ stark beigemischt sind, die in der Wellenfunktion zu Abweichungen von dem einfachen Ansatz (10.374) des Modells schwacher Kopplung führen.

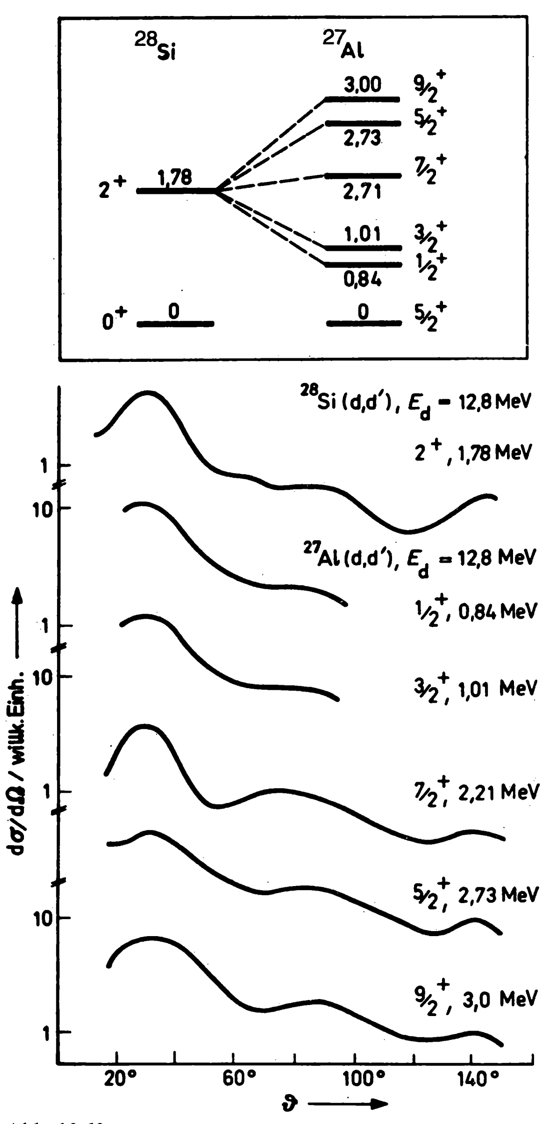


Abb. 10.60
Modell schwacher Kopplung für die Anregung von ^{27}Al in der Reaktion ^{27}Al(d, d'), E_d = 12,8 MeV. Oberer Teil der Abbildung: Multiplettstruktur im Spektrum der angeregten Zustände von ^{27}Al. Unterer Teil der Abbildung: Gemessene Winkelverteilungen der Quadrupolanregung im ^{28}Si-Rumpf und der Multiplettanregung in ^{27}Al

10.6.3. Transferreaktionen

10.6.3.1. Einteilchen-Strippingreaktionen

1. Die am besten untersuchte direkte Reaktion ist die Deuteronenstrippingreaktion A(d, p)B bzw. A(d, n)B. Das Deuterium ist ein schwach gebundenes Neutron-Proton-System. Im Feld des Targetkerns kommt es zum Aufbruch des mit dem Impuls $\hbar \boldsymbol{k}_d$ einlaufenden Projektils, wobei das Neutron vom Targetkern A in einen gebundenen Einteilchenzustand mit bestimmten Impuls $\boldsymbol{k}_n$ und Drehimpuls $\boldsymbol{l}$ ($j = l \pm 1/2$)

$$\boldsymbol{k}_n = \boldsymbol{k}_d - \boldsymbol{k}_p\,, \qquad \boldsymbol{l} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{k}_n \tag{10.378}$$

($|\boldsymbol{r}| \approx R$, Kernradius) eingefangen wird, während das Proton etwa in Vorwärtsrichtung mit dem Impuls $\hbar \boldsymbol{k}_p$ in Richtung ϑ ausläuft. Für den Prozeß des Transfers spielt das Proton mehr eine Zuschauerrolle. Die Deuteronenstrippingreaktion besitzt einen positiven Q-Wert. Die im Protonenspektrum beobachteten Gruppen p_0, p_1, ... entsprechen verschiedenen angeregten Zuständen des Endkerns B. Aus der Intensität dieser Gruppen können Rückschlüsse darauf gezogen werden, mit welcher Wahrscheinlichkeit bestimmte Einteilchenzustände in den stationären Zuständen des Endkerns auftreten.

Im Gegensatz zur unelastischen Streuung, die vorwiegend zu Endzuständen hoher Kollektivität führt, werden in Deuteronenstrippingreaktionen selektiv Endzustände mit hoher Einteilchenkomponente angeregt, während Endzustände mit komplizierter Struktur einen sehr geringen Wirkungsquerschnitt aufweisen.

2. Die DWBA-Theorie der Deuteronenstrippingreaktion A + d → B + p (B = A + n) geht von dem T-Matrixelement in post-Form (10.200) aus,

$$T = \int \mathrm{d}\boldsymbol{r}_{pB}\, \mathrm{d}\boldsymbol{r}_{dA}\, \chi_{\boldsymbol{k}_p}^{(-)*}(\boldsymbol{r}_{pB})\, \psi_B(\xi, \boldsymbol{r}_{nA})\, |V_{pB} - U(\boldsymbol{r}_{pB})|\, \psi_A(\xi)\, \varphi_d(\boldsymbol{r}_{np})\, |\chi_{\boldsymbol{k}_d}^{(+)}(\boldsymbol{r}_{dA})\rangle\,. \tag{10.379}$$

Die verwendeten Koordinaten sind aus Abb. 10.61 ersichtlich. Die Funktionen $\varphi_d(\boldsymbol{r}_{np})$, $\psi_A(\xi)$, $\psi_B(\xi, \boldsymbol{r}_{nA})$ bedeuten die inneren Funktionen von Deuteron, Target- und Endkern. Mit V_{pB} wird die Wechselwirkung des auslaufenden Protons mit dem Endkern bezeichnet, die sich aus der Wechselwirkung mit dem Target V_{pA} und mit dem übertragenen Neutron V_{pn} zusammensetzt, $V_{pB} = V_{pn} + V_{pA}$. $U(\boldsymbol{r}_{pB})$ ist das optische Potential für die Bewegung des Protons im

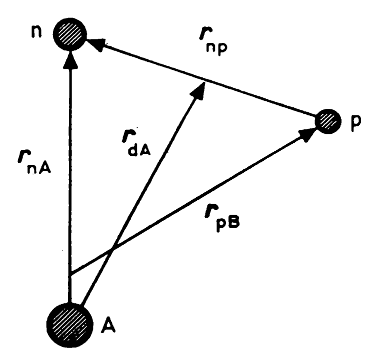


Abb. 10.61
Koordinaten im DWBA-Matrixelement für die Einteilchenstrippingreaktion A(d, p)B

Endkern B, entspricht also etwa der Wechselwirkung V_{pA}. Für das innere Matrixelement macht man deshalb die Näherung

$$(\psi_B | V_{pB} - U(r_{pB}) | \psi_A \varphi_d) \approx (\psi_B | V_{pn} | \varphi_A \varphi_d) \,. \tag{10.380}$$

Ersetzt man außerdem das Produkt aus Neutron-Proton-Wechselwirkung V_{pn} und Deuteronenwellenfunktion φ_d durch eine Deltafunktion

$$V_{pn}\varphi_d(\boldsymbol{r}_{np}) = D_0 \delta(\boldsymbol{r}_{np}) = D_0 \delta\left(\frac{A}{A+1}\,\boldsymbol{r}_{nA} - \boldsymbol{r}_{pB}\right), \tag{10.381}$$

wobei sich der Faktor D_0 bei bekannter Deuteronenwellenfunktion φ_d abschätzen läßt nach

$$D_0 = \int d\boldsymbol{r}_{np}\, V_{pn}\varphi_d(\boldsymbol{r}_{np}) \approx \sqrt{1{,}5} \cdot 10^2\,\text{MeV fm}^{3/2}\,, \tag{10.382}$$

dann vereinfacht sich die Integration über die Koordinaten $\boldsymbol{r}_{pB}$ und $\boldsymbol{r}_{dA}$ im T-Matrixelement (10.379). Nehmen wir an, daß der Endzustand dadurch erreicht wird, daß sich ein Neutron in dem Einteilchenzustand $\varphi_{nlj}(\boldsymbol{r}_{nA})$ an den inerten Targetgrundzustand anlagert, $\psi_B(\xi, \boldsymbol{r}_{nA}) = \psi_A(\xi)\,\varphi_{nlj}(\boldsymbol{r}_{nA})$, so reduziert sich das sechsdimensionale Integral in (10.379) auf ein dreidimensionales Integral

$$T \approx \int d\boldsymbol{r}\; \chi^{(-)*}_{k_p}(A\boldsymbol{r}/(A+1))\; \varphi_{nlj}(\boldsymbol{r})\; \chi^{(+)}_{k_d}(\boldsymbol{r})\,. \tag{10.383}$$

Man bezeichnet die durch (10.381) eingeführte Approximation als Nullreichweite-Näherung (zero range approximation). Wird im T-Matrixelement (10.379) die sechsdimensionale Integration vollständig ausgeführt, dann spricht man von einer Behandlung der Strippingreaktion in endlicher Reichweite.

Für das T-Matrixelement der Strippingreaktion erhält man in Null-Reichweitenäherung einen ähnlichen Ausdruck wie für den unelastischen Streuprozeß. Als Formfaktor tritt die Radialwellenfunktion des eingefangenen Neutrons auf, die als gebundener Zustand in einem reellen Woods-Saxon-Potential berechnet werden kann. Um den richtigen symptotischen Abfall des Formfaktors zu erhalten, wird die Tiefe dieses Potentials so gewählt, daß die experimentell gefundene Bindungsenergie des Zustandes φ_{nlj} reproduziert wird.

3. Liegt ein komplexerer Endzustand ψ_B vor, dann können wir eine ähnliche Entwicklung wie in Gl. (8.257) vornehmen, die von einer Vielteilchenfunktion eine Einteilchenfunktion abkoppelt,

$$\psi_B(\xi, \boldsymbol{r}_{nA}) = \sum_{A', \alpha} \sqrt{S^{(B)}_{A'\alpha}}\,\psi_{A'}(\xi)\,\varphi_\alpha(\boldsymbol{r}_{nA})\,. \tag{10.384}$$

Die Größe $S^{(B)}_{A'\alpha}$ liefert die Wahrscheinlichkeit dafür, daß im Endzustand B eine Konfiguration realisiert ist, in der sich das Neutron im Einteilchenzustand $\alpha (\equiv nlj)$ und der Targetkern im Zustand A′ befinden. Nehmen wir an, daß in der Summe (10.384) nur ein einziger Einteilchenzustand α auftritt, dann erhält man wegen der Orthogonalität der Targetzustände, $(\psi_A(\xi)|(\psi_A(\xi)) = \delta_{AA'}$, für das innere Matrixelement

$$(\psi_B(\xi, \boldsymbol{r}_{nA})\,|V_{pn}|\,\psi_A(\xi)\,\varphi_d(\boldsymbol{r}_{np})) = \sqrt{S^{(B)}_{A\alpha}}(\varphi_\alpha(\boldsymbol{r}_{nA})\,|V_{pn}|\,\varphi_d(\boldsymbol{r}_{np}))\,. \tag{10.385}$$

Im allgemeinen Fall tritt im Wirkungsquerschnitt für die Deuteronenstrippingreaktion also ein Faktor $S^{(B)}_{A\alpha}$ auf, der als spektroskopischer Faktor bezeichnet wird. Der spektroskopische Faktor bestimmt die Größe des Wirkungsquerschnitts. Er wird gleich eins, wenn im Transferprozeß einem Kern mit abgeschlossenen Neutronenschalen ein Neutron hinzugefügt wird. In allen anderen Fällen erwartet man $S^{(B)}_{A\alpha} < 1$ als Maß für die Abweichung des Endzustandes von einem reinen Einteilchenzustand, d. h. für die Stärke der Konfigurationsmischung im Schalenmodell. Durch Normierung der DWBA-Kurve auf den gemessenen absoluten Wirkungsquerschnitt

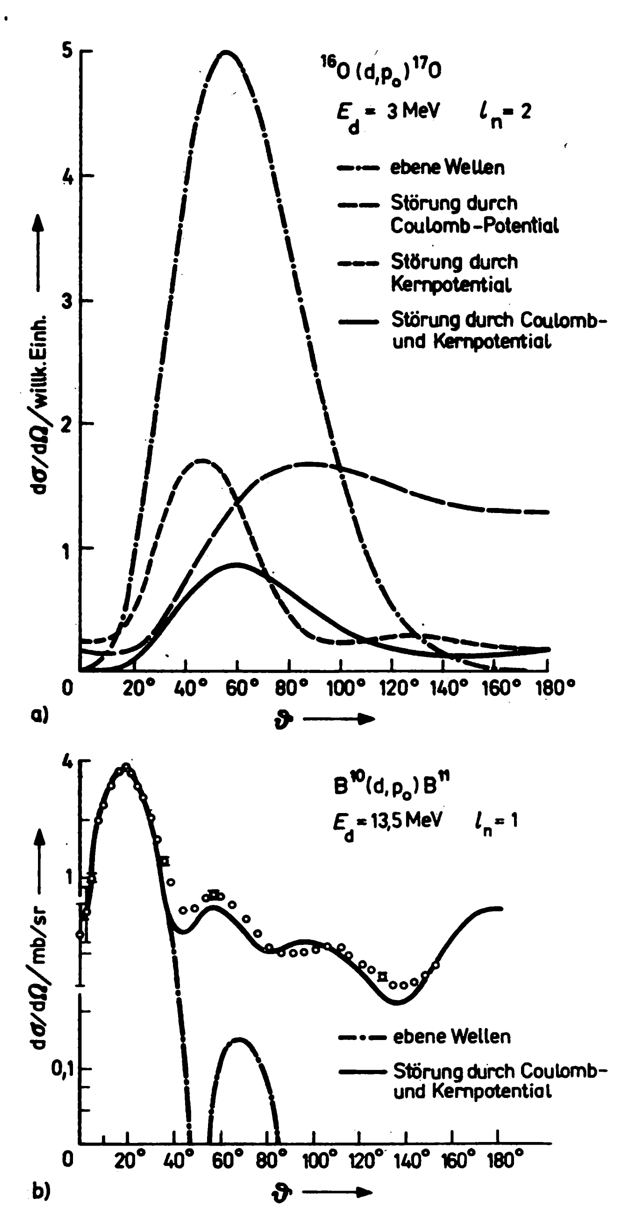


Abb. 10.62
Vergleich von Bornscher Näherung mit ebenen (PWBA) und mit gestörten Wellen (DWBA). Die Kurven zeigen den Einfluß des Coulomb- und des optischen Kernpotentials im Eingangs- und Ausgangskanal auf die Protonenwinkelverteilung in den Deuteronenstrippingreaktionen $^{16}O(d, p_0)^{17}O$, $E_d = 3$ MeV ($l_n = 3$) (a) und $^{10}B(d, p_0)^{11}B$, $E_d = 13{,}5$ MeV ($l_n = 1$) (b)

kann der spektroskopische Faktor experimentell bestimmt werden. Ein Vergleich dieser Werte mit den theoretischen Voraussagen in einem bestimmten Kernmodell stellt für die an der Transferreaktion beteiligten Kernzustände einen empfindlichen Test der Wellenfunktionen dar. Der Bahndrehimpuls l der angeregten Einteilchenzustände bestimmt nach (10.378) die Winkelverteilung des auslaufenden Nukleons, die besonders für Einschußenergien oberhalb der Coulomb-Barriere durch Coulomb- und optische Potentiale im Deuteronen- und Protonenkanal beeinflußt wird. Die Abb. 10.62 verdeutlicht diese verschiedenen Effekte.

4. Als Beispiel für eine Deuteronenstrippingreaktion analysieren wir die (d, p)-Reaktion am doppelt magischen Targetkern ^{40}Ca. Wir beziehen uns dabei auf ein van-de-Graaff-Experiment mit hoher Energieauflösung (Magnetspektrometer, Kernemulsionsplatten), in dem der differentielle Wirkungsquerschnitt für die Übergänge in 120 Niveaus bis zu einer Anregungsenergie von etwa 6,8 MeV im Endkern gemessen wurden. Eine Übersicht gibt Abb. 10.63. Der in der Messung erfaßte Winkelbereich betrug 7—170°; der beobachtete Wirkungsquerschnitt im Maximum der Winkelverteilung variierte zwischen 25 mb/sr und 0,1 mb/sr bei einem Fehler in den Absolutwerten von $\pm 10\%$. Einige Übergänge zeigen nicht das für direkte Reaktionen charakteristische Maximum des differentiellen Wirkungsquerschnitts in Vorwärtsrichtung, sondern eine nahezu isotope Winkelverteilung, die auf einen Compoundkernmechanismus hinweist. Von diesen Anregungen sehen wir ab. Aus den experimentellen Daten extrahieren wir für jedes

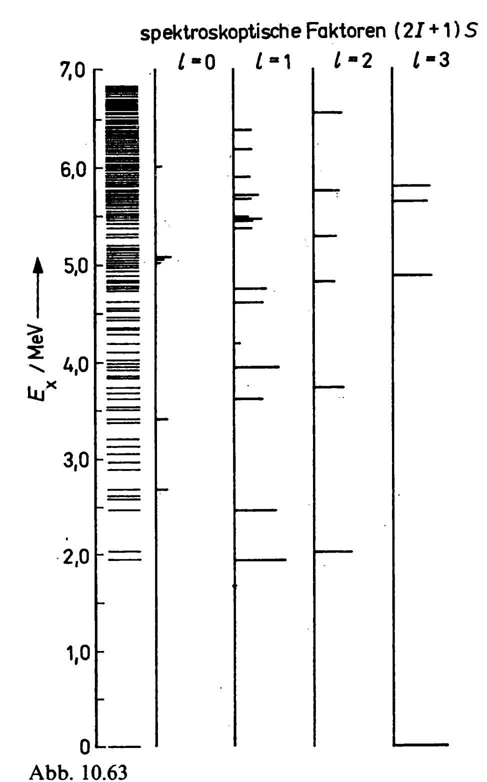


Abb. 10.63
Deuteronenstrippingreaktion $^{40}Ca(d, p)^{41}Ca$, $E_d = 7$ MeV. Beobachtete Niveaus im Endkern ^{41}Ca und durch Vergleich des gemessenen und in DWBA berechneten differentiellen Wirkungsquerschnitts bestimmte spektroskopische Faktoren S. l: Bahndrehimpuls des eingefangenen Neutrons. I: Spin des Endzustandes. Bis zu einer Anregungsenergie von $E_x \approx 6{,}8$ MeV wurden ca. 100 angeregte ^{41}Ca-Zustände nachgewiesen

Niveau zwei spektroskopische Informationen: (1) Wir führen eine DWBA-Rechnung durch und ermitteln aus dem Charakter der Winkelverteilung den Betrag des Bahndrehimpulses, mit dem das Neutron eingefangen wird. In einigen Fällen ist aus empirischen Regeln über spezifische Eigenschaften der Winkelverteilung bei Rückwärtswinkeln für einen gegebenen l-Wert eine Zuordnung des Gesamtdrehimpulses $j = l \pm 1/2$ möglich. (2) Durch Anpassung der DWBA-Kurven an den absoluten Wirkungsquerschnitt im Strippingmaximum bestimmen wir den spektroskopischen Faktor S.

Tabelle 10.6
Reaktion ^{40}Ca(d, p)^{41}Ca, $E_d = 7$ MeV. E_x: Anregungsenergie des Endzustandes. nlj: Quantenzahlen des Einteilchenzustandes, in den das übertragene Neutron eingefangen wird. S: spektroskopischer Faktor. Die Tabelle enthält nur eine Auswahl der beobachteten Übergänge.

E_x/MeV	nlj	S	E_x/MeV	nlj	S
0	$1f_{7/2}$	1,0	4,894	$1f_{5/2}$	0,12
1,949	$2p_{3/2}$	0,94	5,656	$1f_{5/2}$	0,25
2,471	$2p_{3/2}$	0,28	5,813	$1f_{5/2}$	0,11
3,623	$2p_{1/2}$	0,11	4,983	$1g_{9/2}$	0,07
3.954	$2p_{1/2}$	0,73			
4,198	$2p_{1/2}$	0,01	2,680	$3s_{1/2}$	0,018
4,618	$2p_{1/2}$	0,11	5,024	$3s_{1/2}$	0,002
4,765	$2p_{1/2}$	0,21	3,740	$2d_{5/2}$	0,047
			4,829	$2d_{5/2}$	0,017

Bei dieser Analyse stellen wir fest, daß Drehimpulsübertragungen von $l = 0$ (7 Zustände), $l = 1$ (15 Zustände), $l = 2$ (6 Zustände), $l = 3$ (4 Zustände) und $l = 4$ (1 Zustand) auftreten und die spektroskopischen Faktoren zwischen 1 und 0,01 liegen (siehe Tabelle 10.6). Um diese direkten Übergänge im Schalenmodell theoretisch zu interpretieren, gehen wir davon aus, daß das übertragene Neutron die über dem (1s) (1p) (2s 1d)-Rumpf liegenden freien Einteilchenzustände $1f_{7/2}$ ($l = 3$), $2p_{1/2}$ ($l = 1$), $1g_{9/2}$ ($l = 4$), $1f_{5/2}$ ($l = 3$), $2d_{5/2}$ ($l = 2$) und $3s_{1/2}$ ($l = 0$) besetzen kann (vgl. Abb. 8.12). Diese Niveaufolge erklärt das Auftreten der beobachteten Drehimpulse $l = 0, \ldots, 4$. Da (mit Ausnahme von $l = 4$) mehrere ^{41}Ca-Zustände mit dem gleichen Bahndrehimpuls l des übertragenen Neutrons angeregt werden, können wir schließen, daß diese Einteilchenkomponente auf mehrere Endzustände verteilt ist. Die Stärke der Fragmentierung (siehe Abb. 10.63) wird durch die Verteilung des spektroskopischen Faktors zum Ausdruck gebracht. Bei fast reinen Einteilchenzuständen liegt S um Eins; bei Zuständen mit starker Konfigurationsmischung macht der Einteilchenzustand nur einen geringen Anteil der Wellenfunktion $\psi(^{41}\text{Ca}) = c\varphi_{nlj}(n)$ + komplexe Konfiguration, $|c|^2 \ll 1$ aus, so daß S sehr klein wird. Der Grundzustandsübergang ist ein $1f_{7/2}$-Transfer, der dem spektrokopischen Faktor $S \approx 1$ besitzt und nicht fragmentiert ist. Als stark fragmentiert erweist sich der $2p_{1/2}$-Zustand mit einer Verteilung auf 5 stationäre Zustände. Übergänge mit $l = 0$ sind sehr schwach. Einige der Übergänge mit geradem l können nur erklärt werden, wenn man annimmt, daß das übertragene Neutron Lochzustände im Grundzustand von ^{40}Ca auffüllt. Ein solcher Prozeß wird möglich, wenn infolge der Restwechselwirkung in der Wellenfunktion für den ^{40}Ca-Grundzustand 2 Teilchen-2 Loch-Komponenten $(1d_{3/2})^{-2}\,(1f_{7/2})^2$ bzw. $(2s_{1/2})^{-2}\,(1f_{7/2})^{-2}$ auftreten, so daß das Neutron auch einen freien Platz auf den $1d_{3/2}$- bzw. $2s_{1/2}$-Niveau besetzen kann. Im Endzustand liegen dann 2 Teilchen-1 Loch-Konfigurationen $(1d_{3/2})^{-1}\,(1f_{7/2})^2$ bzw. $(1s_{1/2})^{-1}\,(1f_{7/2})^2$ vor.

Die gute Übereinstimmung von Theorie und Experiment im differentiellen Wirkungsquerschnitt wird für die gleiche Reaktion ^{40}Ca(d, p)^{41}Ca bei etwas höherer Energie ($E_d = 12$ MeV) in Abb. 10.64 veranschaulicht. Die DWBA-Rechnungen wurden sowohl in endlicher Reichweite als auch mit nichtlokalen optischen Potentialen durchgeführt. Auch das mittlere Potential zur Berechnung der Formfaktoren wurde nichtlokal gewählt. Geht man von dem T-Matrixelement in Nullreichweite-Näherung mit lokalen Potentialen aus und bringt schrittweise die gesamten Verbesserungen an, dann treten die stärksten Effekte bei $l = 3$-Übergängen auf. Während die Winkelverteilung in allen Fällen nahezu ungeändert bleibt, ändern sich der berechnete Wirkungsquerschnitt und damit der aus den Experimenten extrahierte spektroskopische Faktor beträchtlich. Beim Übergang von der Nullreichweite-Näherung zu Rechnungen mit end-

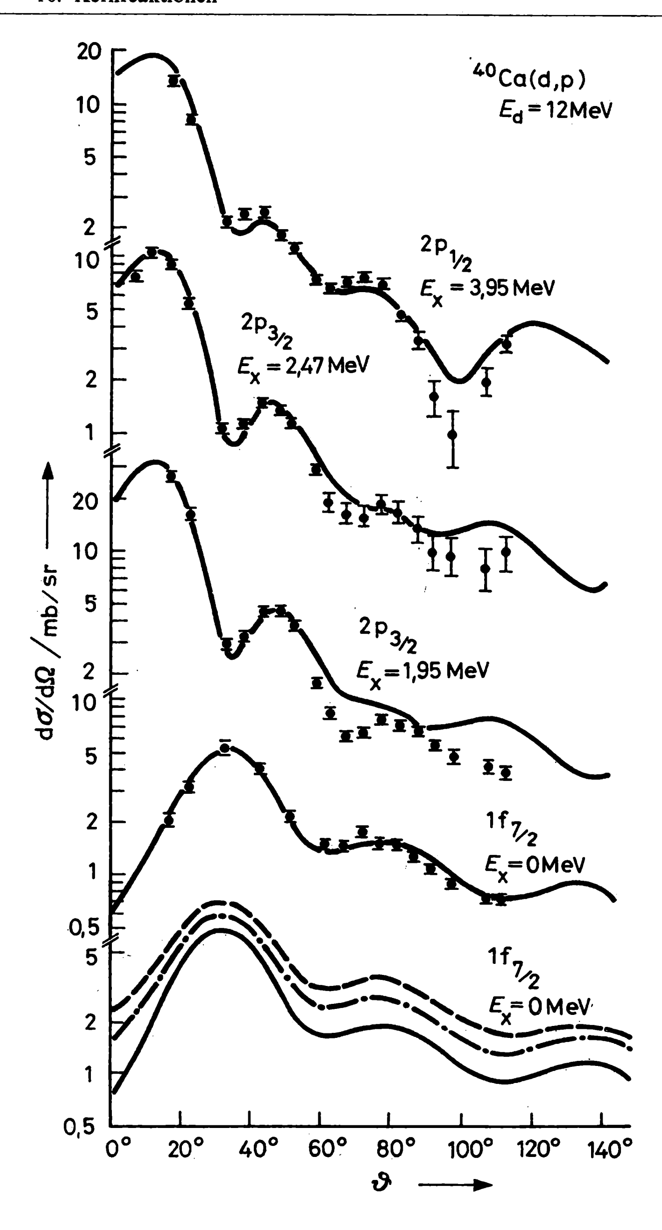


Abb. 10.64
Vergleich der gemessenen und in DWBA endlicher Reichweite mit nichtlokalen optischen Potentialen berechneten differentiellen Wirkungsquerschnitte der Deuteronenstrippingreaktion ^{40}Ca(d, p)^{41}Ca, E_d = 12 MeV. Unterer Teil; systematische Untersuchungen zum Grundzustandsübergang. Gestrichelte Kurve: lokale optische Potentiale, zero-range-Näherung. Strichpunktierte Kurve: lokale optische Potentiale, endliche Reichweite. Ausgezogene Kurve: nichtlokale optische Potentiale, endliche Reichweite

licher Reichweite reduziert sich der differentielle Wirkungsquerschnitt im Hauptmaximum um etwa 15 %. Eine weitere Reduktion um ≈ 18 % stellt man fest, falls die lokalen durch äquivalente nichtlokale optische Potentiale ersetzt werden. Diese Reduktion wird z. T. kompensiert, wenn der Formfaktor im nichtlokalen Potential berechnet wird, da in diesem Fall der Wirkungsquerschnitt im Strippingmaximum wächst.

5. Im Abschnitt 10.6.2.2. haben wir darauf hingewiesen, daß in der unelastischen Nukleonenstreuung unter bestimmten Bedingungen eine explizite Kopplung verschiedener Kanäle berücksichtigt werden muß. Solche Effekte können auch bei Transferprozessen wesentlich sein, wenn im Eingangs- oder Ausgangskanal mit hoher Wahrscheinlichkeit unelastische Anregungen des Target- oder Endkerns auftreten. Dann kommt es zu vielfältigen Mehrstufenprozessen, bei denen Transfer- und Streukanäle stark koppeln: unelastische Streuung des Projektils am Target + Transferreaktion am angeregten Targetkern oder Transferreaktion am Targetkern im Grundzustand + unelastische Streuung des auslaufenden Teilchens am Endkern. Einige dieser Mechanismen sind in Abb. 10.65 schematisch dargestellt. Um derartige Prozesse zu erfassen, modifiziert man das DWBA-Matrixelement, indem bei den gestörten Wellen im asymptotischen Bereich zur Kugelwelle der elastischen Streuung noch auslaufende Kugelwellen in den offenen unelastischen Kanälen hinzutreten, wobei die Amplituden aus einer Rechnung mit gekoppelten Kanälen folgen. Die eigentliche Transferreaktion wird dann wie üblich in erster Bornscher Näherung behandelt. Eine solche Erweiterung der Theorie ist unumgänglich, wenn Transferübergänge mit geringem Wirkungsquerschnitt untersucht werden, bei denen Kerne mit starken kollektiven Eigenschaften (Rotations- oder Vibrationsanregungen) ins Spiel kommen.

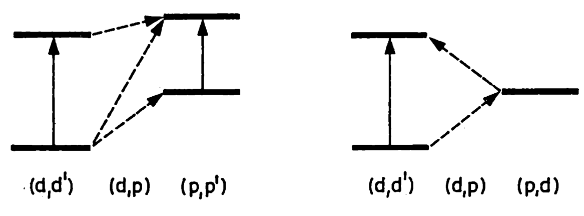


Abb. 10.65
Kopplung von Streu- und Transferkanälen

Als Beispiel betrachten wir die Anregung des $7/2^+$, 1,61 MeV-Zustands in ^{25}Al in der Einteilchenstrippingreaktion ^{24}Mg(^{3}He, d)^{25}Al, $E_{^3\mathrm{He}} = 38{,}5$ MeV. Legt man ein sphärisches Schalenmodell zugrunde, dann läßt sich dieser Übergang als Einfang des übertragenen Protons in einen $1g_{7/2}$-Einteilchenzustand verstehen. Diese Interpretation stößt aber auf Schwierigkeiten. Der $1g_{7/2}$-Zustand wird nach dem Einteilchenspektrum (siehe Abb. 8.12) erst bei wesentlich höherer Anregungsenergie erwartet. Deshalb ist eine so starke Fragmentierung des $1g_{7/2}$-Einteilchenzustandes, daß ein bei 1,6 MeV liegender ^{25}Al-Zustand eine dominierende $1g_{7/2}$-Einteilchenkomponente besitzt, äußerst unwahrscheinlich. Außerdem erwartet man für eine Strippingreaktion mit dem übertragenen Drehimpuls $l = 4$ in der Winkelverteilung ein Maximum im Vorwärtswinkelbereich, was im Experiment nicht beobachtet wird (siehe Abb. 10.66). Um die experimentellen Daten erklären zu können, muß man beachten, daß der Targetkern ^{24}Mg eine starke Quadrupoldeformation aufweist ($\beta_2 = +0{,}65$). Im ^{25}Al-Grundzustand besetzt das hinzukommende Proton dann einen Einteilchenzustand im deformierten Potential, also eine Nilsson-Bahn mit positiver Parität und der Drehimpulsprojektion $\Omega = 5/2$ auf die Symmetrieachse. Auf diesen Einteilchenzustand baut sich eine Rotationsbande mit den Spins $I = 5/2^+, 7/2^+, 9/2^+, \ldots, K^\pi = \Omega^\pi = 5/2^+$ auf. In diesem Bild erscheint der $7/2^+$, 1,61 MeV-Zustand in ^{25}Al als Mitglied einer Rotationsbande, so daß seine Anregung in der Reaktion ^{24}Mg(^{3}He, d) auf zwei Wegen möglich wird: (1) Rotationsanregung $0^+ \to 2^+$ von ^{24}Mg im Eingangskanal, anschließend Einteilchentransfer zum Endzustand $7/2^+$ in ^{25}Al, (2) Einteilchentransfer in den $5/2^+$-Grundzustand von ^{25}Al, anschließend Rotationsanregung $5/2^+ \to 7/2^+$ im Ausgangskanal. Um diese Prozesse durch Kanalkopplung zu erfassen, benötigt man neben dem Deformationsparameter β_2, der die Stärke der unelastischen Streuvorgänge bestimmt, noch die spektroskopischen

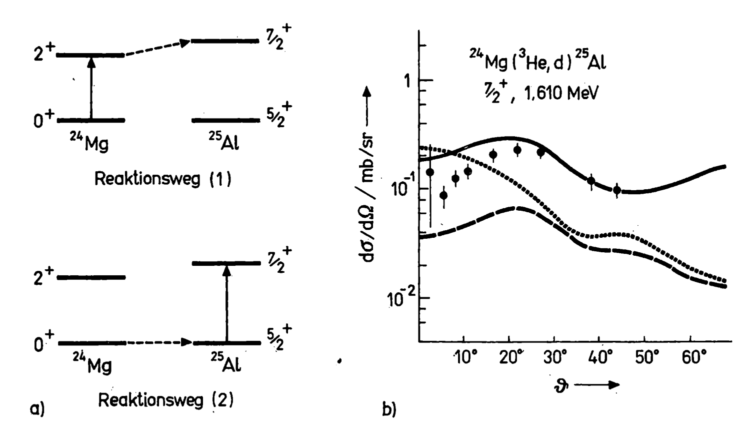


Abb. 10.66
Anregung des 7/2$^+$, 1,61 MeV Niveaus in ^{25}Al durch die Einteilchen-Strippingreaktion ^{24}Mg(^{3}He, d)^{25}Al, $E_{^3\mathrm{He}} = 38{,}5$ MeV

a) Kopplungsschema
b) Vergleich der experimentellen Daten mit Rechnungen in Kanalkopplung unter Berücksichtigung von Rotationsanregungen im Eingangs- und Ausgangskanal (— — —: Reaktionsweg (1), ...: Reaktionsweg (2), ———: Reaktionsweg (1) + Reaktionsweg (2))

Faktoren für die Transferprozesse ^{24}Mg, $^+0 \to {}^{25}$Al, 5/2$^+$ und ^{24}Mg, 2$^+ \to {}^{25}$Al, 7/2$^+$, die aus dem Experiment entnommen bzw. im Nilsson-Modell abgeschätzt werden können. Die Rechnungen zeigen, daß der erste Reaktionsweg 0$^+$ — 2$^+$ — 7/2$^+$ nur etwa 1/5 der beobachteten Übergangsstärke liefert. Der zweite Reaktionsweg liefert für sich genommen ein Übergangsmatrixelement, das etwa gleichen Betrag und gleiche Phase wie das Übergangsmatrixelement für den ersten Prozeß besitzt. Eine kohärente Überlagerung beider Anteile ergibt einen differentiellen Wirkungsquerschnitt, der gut mit den Meßergebnissen übereinstimmt (Abb. 10.66).

10.6.3.2. Mehrteilchentransferreaktionen

1. Reaktionen, bei denen mehrere Nukleonen zwischen Projektil und Targetkern ausgetauscht werden, können bei höheren Einschußenergien ebenfalls über einen direkten Mechanismus ablaufen. Besonders häufig untersucht wurde die (t, p)-Reaktion unter der Annahme, daß ein Einstufen-Strippingprozeß vorliegt, bei dem ein Dineutron auf den Targetkern übergeht. In DWBA lautet das T-Matrixelement für die Reaktion A + a → B + b, a = b + 2, B = A + 2

$$T_{fi} = \int \mathrm{d}\boldsymbol{R}\,\mathrm{d}\boldsymbol{r}\,\chi_f^{(-)}(\boldsymbol{r} + A\boldsymbol{R}/(A+2))\,(\mathrm{Bb}\,|V_f|\,\mathrm{aA})\,\chi_i^{(+)}((a-2)\,\boldsymbol{r}/a + \boldsymbol{R})\,. \tag{10.386}$$

Der Vektor $\boldsymbol{R}$ ist die Schwerpunktkoordinate des Dineutrons, während $\boldsymbol{r}$ den Abstand zwischen dem Schwerpunkt des Dineutrons und dem auslaufenden Proton bezeichnet (siehe Abb. 10.67); V_f bedeutet die effektive Wechselwirkung zwischen dem Dineutron und dem Proton im Ausgangskanal. Im Anfangszustand befindet sich das Dineutron im Inzidenzteilchen in einem 1s-Zustand. Im Endzustand besetzen die übertragenen Neutronen verschiedene Einteilchenzustände im mittleren Potential. Deshalb können wir bei der Auswertung des inneren Matrixelements

$$(\mathrm{Bb}|\,V_f\,|\mathrm{aA}) = \int \mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\zeta\,\mathrm{d}\varrho\,\psi_f^{(\mathrm{B})*}(\xi, \boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2)\,\psi_f(\zeta)\,V_f(\varrho)\,\psi_i^{(\mathrm{a})}(\zeta, \boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2)\,\psi_i^{(\mathrm{A})}(\xi) \tag{10.387}$$

□ Schwerpunkt von $A + n_1 + n_2 = B$
△ Schwerpunkt von $b + n_1 + n_2 = a$
○ Schwerpunkt von $n_1 + n_2$

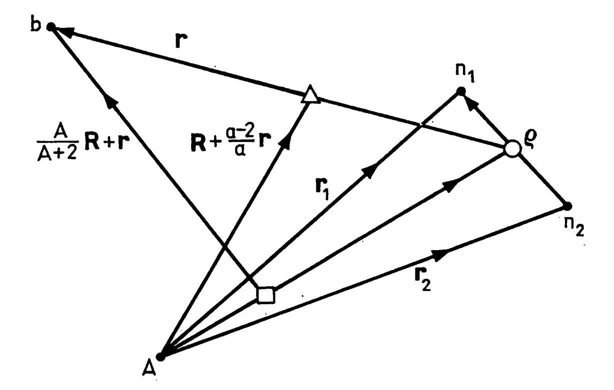


Abb. 10.67
Koordinatensystem für die DWBA-Analyse einer Zweiteilchen-Transferreaktion $A + a \to b + B$, $a = b + 2$, $B = A + 2$

die Wellenfunktion des Endkerns $\psi_f^{(B)}$ zerlegen nach Produkten aus einer Zweiteilchenfunktion $\varphi_{j_1 j_2}(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2)$ und einer Targetwellenfunktion $\psi_\alpha^{(A)}(\xi)$,

$$\psi_f^{(B)}(\xi, \boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2) = \sum_{\alpha, j_1, j_2} C_{j_1 j_2}^{(\alpha)} \psi_\alpha^{(A)}(\xi)\, \Phi_{j_1 j_2}(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2)\,. \tag{10.388}$$

Hierbei bedeuten ξ und ζ die inneren Koordinaten des Targets und des Projektilrests, ϱ ist der Abstand der Neutronen im Dineutron; $C_{j_1 j_2}^{(a)}$ sind spektroskopische Amplituden. Die Ausführung der Integration führt auf einen Formfaktor, der eine kohärente Überlagerung von Anteilen darstellt, die einem Einfang in verschiedene Einteilchenzustände j_1, j_2 entsprechen. In die Koeffizienten gehen die spektroskopischen Amplituden $C_{j_1 j_2}^{(a)}$ ein, die von den Wellenfunktionen der aus der Reaktion beteiligten Kerne abhängen. Die Kohärenzeigenschaften des Formfaktors einer Zweiteilchentransferreaktion zeigen, daß dieser Reaktionstyp für reaktionsspektroskopische Untersuchungen geeignet ist, bei denen das Verhalten eines Nukleonenpaares im Kern getestet werden soll. Bei der Analyse von Zweiteilchentransferreaktionen erweist sich die DWBA-Näherung wiederum als sehr erfolgreiche Methode zur Auswertung direkter Reaktionen.

2. Die Abb. 10.68 vergleicht experimentelle und theoretische Ergebnisse für einige Reaktionen, bei denen zwei Neutronen vom Projektil (Triton) auf das Target (^{10}Zr, ^{122}Sn, ^{207}Pb) übergehen. In allen Fällen wird dabei der Drehimpuls $L = 0$ übertragen. Solche Reaktionen sind geeignet, die Neutronenkomponente der Wellenfunktion für den Endzustand zu testen, indem man die Wirkungsquerschnitte für verschiedene Übergänge in einem spektroskopischen Kernmodell berechnet und mit experimentellen Daten vergleicht. Als weiteres Beispiel für eine Mehrteilchentransferreaktion betrachten wir den Dreiteilchen-Pickup bei dem Übergang ^{107}Ag(p, α_0) ^{104}Pd, $E_p = 12$ MeV zum Grundzustand von ^{104}Pb. In einem phänomenologischen Clustermodell können wir diesen Prozeß als Übertragung eines strukturlosen Quasi-Tritons, das im Grundzustand des Targets einen bestimmten Einteilchenzustand in einem effektiven Triton-Restkern-Potential besetzt, auffassen. Bei einem geeignet gewählten Woods-Saxon-Potential muß das Triton einen 6p-Zustand einnehmen, um die experimentell beobachtete Separationsenergie eines Tritons vom Targetkern ^{107}Ag zu reproduzieren. Da das Triton einen Spin $s = {}^1/_2$ besitzt, kann

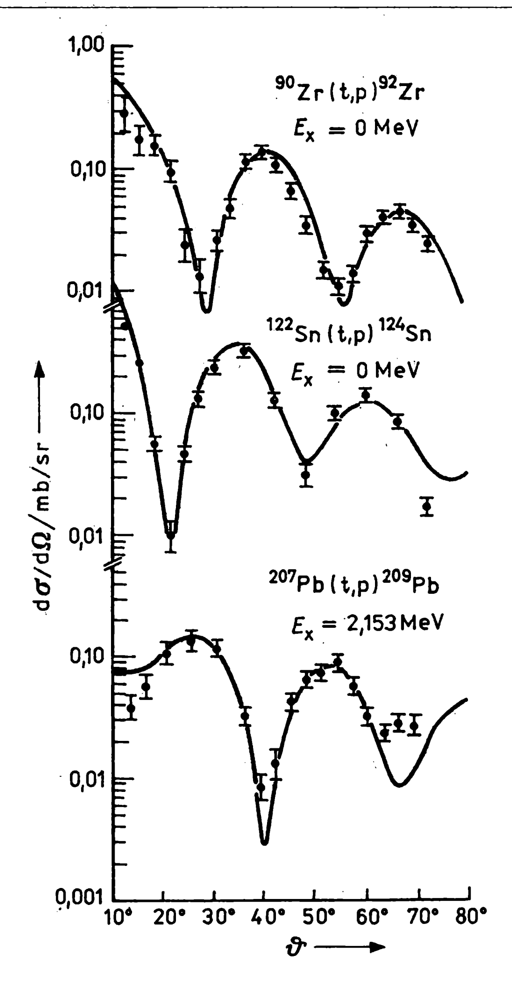


Abb. 10.68
Zweiteilchen-Strippingreaktion. Vergleich des gemessenen und in DWBA berechneten differentiellen Wirkungsquerschnitts für Übergänge mit dem übertragenen Drehimpuls $L = 0$

ähnlich wie bei Nukleonen im mittleren Tritonpotential eine Spinbahnkopplung auftreten, die eine unterschiedliche Radialwellenfunktion für Zustände mit dem Gesamtdrehimpuls $j = {}^3/_2$ und $j = {}^1/_2$ bedingt. In das DWBA-Matrixelement geht diese Radialwellenfunktion als Formfaktor ein, so daß sich unterschiedliche Winkelverteilungen des α-Teilchens ergeben, je nachdem ob das Triton aus einem $6p_{3/2}$- oder $6p_{1/2}$-Zustand entfernt wird. Ein Vergleich der DWBA-Rechnungen, bei denen diese beiden Formfaktoren verwendet wurden, mit dem gemessenen differentiellen Wirkungsquerschnitt zeigt, daß das Triton-Cluster im Grundzustand von ^{107}Ag in einem $6p_{1/2}$-Zustand gebunden ist (Abb. 10.69). An diesem Beispiel sehen wir, daß die Winkelverteilung direkter Reaktionen nicht nur vom übertragenen Bahndrehimpuls l, sondern auch vom Gesamtdrehimpuls $j = l + s$ abhängt, wodurch die spektroskopischen Aussagen aus direkten Reaktionen vervollständigt werden können.

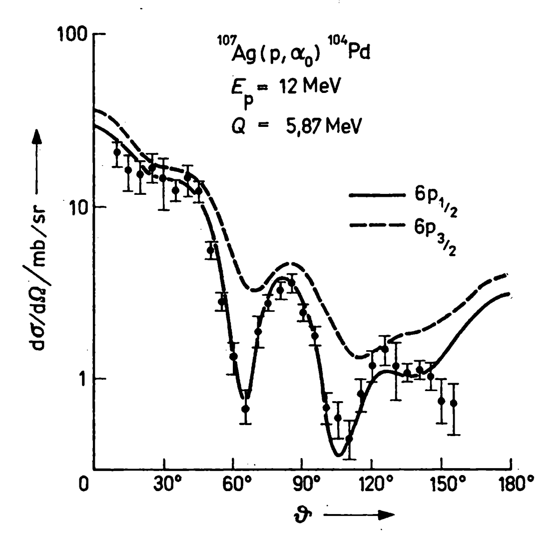


Abb. 10.69
Dreiteilchen-Pickupreaktion $^{107}Ag(p, \alpha)^{104}Pd$, $E_p = 12$ MeV zum Grundzustand von ^{104}Pd. Die Kurven entsprechen DWBA-Rechnungen für verschiedene Gesamtdrehimpulse des Einteilchenzustandes, den das übertragene Triton im Grundzustand des Targets besetzt

10.7. Intermediäre Prozesse

10.7.1. Statistische Beschreibung intermediärer Reaktionen

10.7.1.1. Excitonenmodell

1. Bereits in 10.1 wurde anhand des totalen Wirkungsquerschnitts festgestellt, daß es Reaktionen geben muß, die hinsichtlich des Zeitablaufs und auch der Komplexität der angeregten Zustände des Systems eine Zwischenstellung zwischen direkten Einstufenprozessen und CN-Reaktionen einnehmen. Ihre theoretische Beschreibung ist nicht nur von praktischem Wert, sondern ist auch aus heuristischer Sicht von Interesse, da sie eine Antwort auf die Frage nach der Art und Weise der Bildung des Compoundkernes zu geben verspricht.

Der praktikabelste Weg hierzu geht von Annahmen aus, die der vollständig statistischen Theorie (siehe 10.4.5.1.) völlig analog sind:

— alle auftretenden Zwischen- und Endkerne besitzen so hohe Zustandsdichten, daß Interferenzglieder grundsätzlich herausgemittelt werden;
— Matrixelemente für alle Übergänge zwischen Zuständen des Systems werden durch ihre Mittelwerte ersetzt.

2. Im Rahmen dieser Grundkonzeption stellt das sogenannte Excitonenmodell (GRIFFIN, 1966) eine der einfachsten und zugleich am häufigsten angewandten Modellvorstellungen über intermediäre Prozesse dar.

Sie basiert auf folgenden weiteren Annahmen:

— Der Kern wird als Fermi-Gas mit Einteilchenzuständen betrachtet, die im Grundzustand bis zur Fermi-Energie besetzt sind;
— angeregte Kernzustände lassen sich dann eindeutig durch die Zahl angeregter Teilchen p plus Löcher h sowie die Anregungsenergie E klassifizieren, wobei alle Zustände mit gleichem n = p + h als gleichwahrscheinlich angesehen werden;
— Drehimpulserhaltung wird nicht berücksichtigt;
— schwache Restwechselwirkungen führen zur Umverteilung der Teilchen und Löcher auf den Einteilchenzuständen sowie zur Geburt oder Vernichtung von Teilchen-Loch-Paaren, d. h., es erfolgen Übergänge mit $\Delta n = 0, \pm 2$;
— die anfängliche quasifreie Bewegung eines eingeschlossenen Nukleons im Kern entspricht einem 1p0h-Zustand, der nach der ersten Restwechselwirkung (= Absorption) in einen 2p1h-Zustand übergeht. Aus diesem erfolgt Emission oder der Übergang zu n = 3p2h = 5 usw. (siehe Abb. 10.70).

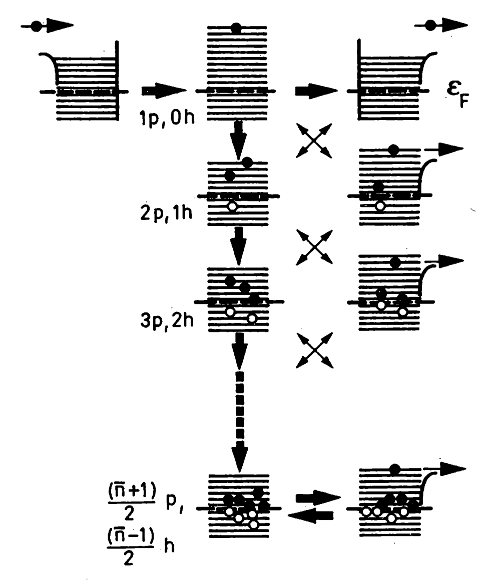


Abb. 10.70
Modellbild vom Ablauf von Kernreaktionen im Rahmen des Excitonenmodells

3. Die so entstehende Kette von Übergängen mit $\Delta n = +2$ reicht von n_0 bis zum CN-Zustand d. h. bis $n = \bar{n} = (2gE)^{1/2}$ erreicht ist. Aus jeder Zwischenstufe dieses Entwicklungsprozesses kann es mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit zur Teilchenemission vor Erreichen des Gleichgewichtszustandes kommen, der sogenannten Prä-Equilibrium-Emission (PE).

Die PE-Emissionswahrscheinlichkeit pro Zeiteinheit wird in völliger Analogie zur Emissionsrate aus CN-Zuständen (10.271) berechnet, wobei jedoch anstelle von $\varrho_B(U)$ bzw. $\varrho_C(E^*)$ die partiellen Zustandsdichten $\varrho(p - 1, h, U)$ bzw. $\varrho(p, h, E)$ für bestimmte Teilchen-Loch-Zahlen zu verwenden sind:

$$P_b(p, h, E_b) = \sigma_{inv}(E_b)\, v_b \varrho_k(E_B)\, \frac{\varrho(p - 1, h, U)}{\varrho(p, h, E^*)} \,. \tag{10.389}$$

Das Produkt dieser Rate mit der mittleren Lebensdauer τ_{ph} ergibt die Emissionswahrscheinlichkeit aus Zuständen mit den Quantenzahlen n und E.

$$N_b^{PE}(p, h, E_b) = P_b(p, h, E_b) \cdot \tau_{ph} \tag{10.390}$$

und für den gesamten PE-Bereich

$$N_b^{PE}(E_b) = \sum_{\substack{n=n_0 \\ \Delta n=+2}}^{\bar{n}} P_b(p, h, E_b)\, \tau_{ph}\,. \tag{10.391}$$

Wird weiter der Wirkungsquerschnitt für die Absorption des einfallenden Teilchens $\sigma_{abs}(E_a)$ eingeführt, so kann ein absoluter PE-Querschnitt als Summe über alle Zustände von n_0 bis $\bar{n}$ angegeben werden:

$$\sigma_{ab}^{PE}(E_a, E_b) = \sigma_{abs}(E_a)\, \sigma_{inv}(E_b)\, v_b \varrho_k(E_b) \sum_{\substack{n=n_0 \\ \Delta n=+2}}^{\bar{n}} \frac{\varrho(p-1, h, U)}{\varrho(p, h, E^*)}\, \tau_{ph}\,. \tag{10.392}$$

Nach Einsetzen der Zustandsdichte im Kontinuum (10.276) und Gleichsetzen von Absorptions- und CN-Bildungsquerschnitt lautet (10.392)

$$\sigma_{ab}^{PE}(E_a, E_b) = \sigma_a^c\, \frac{(2I_a + 1)\, m_b}{\pi^2 \hbar^3}\, \sigma_{inv}(E_b)\, E_b \sum_{\substack{n=n_0 \\ \Delta n=+2}}^{\bar{n}} \tau_{ph}\, \frac{\varrho(p-1, h, U)}{\varrho(p, h, E^*)}\,. \tag{10.393}$$

Letztere Annahme bedeutet, daß der Wahrscheinlichkeitsverlust durch PE-Emission relativ zur CN-Bildung gering ist.

4. Für ein äquidistantes Einteilchenschema $g(\varepsilon) = g_0 = \text{const.}$ kann die Excitonenzustandsdichte leicht abgeleitet werden: Für 1p1h-Zustände kann die Anregungsenergie E in gE ‚Anregungsquanten' der Größe $1/g_0$ aufgeteilt werden, hierfür gibt es $N_{1p1h} = g_0 E$ Möglichkeiten. Die Dichte dieser Zustände ist $\varrho(1, 1, E) = g_0 N_{1p1h} = g_0(g_0 E)$.

Für 2p2h-Zustände ist

$$\varrho(2, 2, E) = g_0 N_{2p2h} = g_0 \int_0^{g_0 E} x(g_0 E - x)\, dx = \frac{g_0 (g_0 E)^3}{3!} \quad \text{usw.}$$

So ergibt sich für die Zustandsdichte im beliebigen Fall annähernd die Beziehung von Ericson

$$\varrho(p, h, E) = \frac{g_0 (g_0 E)^{p+h-1}}{p!\,h!\,(p+h-1)!}\,. \tag{10.394}$$

Die Energieabhängigkeit dieser Funktion ist wesentlich schwächer als die der vollständigen Zustandsdichte im Fermigas-Modell (10.280).

5. Wir kommen nun zu der zweiten Unbekannten in (10.393), der mittleren Lebensdauer τ_{ph}. Entsprechend der Annahme $\sigma_{abs} = \sigma_a^C$ wird der Zerfall der ph-Zustände hauptsächlich durch Übergänge $n \to n + 2$ mit der Übergangsrate $\lambda_+(p, h, E) \cong 1/\tau_{ph}$ verursacht. Diese kann wiederum nach der Störtheorie durch ein mittleres Übergangsmatrixelement $\langle |M|^2 \rangle$ und die Dichte der bei diesem Übergang erreichbaren Endzustände $\varrho_f^+(p, h, E)$, die kleiner als die Zustandsdichte aller ph-Zustände (10.394) ist, ausgedrückt werden:

$$\lambda_+(p, h, E) = \frac{2\pi}{\hbar} \langle |M|^2 \rangle\, \varrho_f^+(p, h, E) = \frac{2\pi}{\hbar} \langle |M|^2 \rangle\, \frac{g_0 (g_0 E)^2}{2(p + h + 1)}\,. \tag{10.395}$$

Das mittlere Matrixelement $\langle|M|^2\rangle$ ist unbekannt, es ist daher zu ersetzen: Dies geschieht, indem für den ersten Übergang 1p0h → 2p1h die Größe $\lambda_+(1, 0, E)$ gleich der Stoßrate λ_{coll} für Teilchen in der Kernmaterie gesetzt wird, die aus der mittleren Geschwindigkeit der Kernnukleonen $\langle v_N\rangle$, dem Nukleon-Nukleon-Streuquerschnitt $\langle\sigma_{NN}\rangle$ unter Berücksichtigung des Pauli-Prinzips, und der Nukleonendichte $A/\frac{4}{3}\pi R^3$ berechnet wird:

$$\lambda_{coll}/s^{-1} = \langle V_N\rangle \langle\sigma_{NN}\rangle \frac{A}{4/3\pi R^3}$$
$$= 1{,}4 \cdot 10^{21}[(E_a + E_b^{(a)})/\mathrm{MeV}] - 6 \cdot 10^{18}[(E_a + E_b^{(a)})/\mathrm{MeV}]^2 . \qquad (10.396)$$

Eine zweite Möglichkeit besteht darin, diese Stoßrate aus dem Imaginärteil W des optischen Potentials zu bestimmen. In diesem Fall erhalten wir aus der freien Weglänge Λ

$$\lambda_{coll} = \frac{\langle v_N\rangle}{\Lambda} = \frac{2}{\hbar} W . \qquad (10.397)$$

Wird (10.396) oder (10.397) gleich $\lambda_+(1, 0, E)$ gesetzt

$$\lambda_+(1{,}0E) = \frac{2\pi}{\hbar} \langle|M|^2\rangle \frac{g_0(g_0E)^2}{4} = \lambda_{coll} ,$$

so kann $\langle|M|^2\rangle$ eliminiert werden. Um dies auch für die höheren Übergänge tun zu können, muß die Unabhängigkeit des Matrixelementes von n angenommen werden, dies führt zu der gesuchten Lebensdauer:

$$\frac{1}{\tau_{ph}} \approx \lambda_+(\mathrm{p, h}, E) = \frac{2\lambda_{coll}}{(\mathrm{p + h} + 1)} \sim \frac{1}{(\mathrm{p + h} + 1)} . \qquad (10.398)$$

6. Nunmehr können (10.394) und (10.398) in (10.393) eingesetzt werden, was einen sofort anwendbaren Ausdruck für den PE-Querschnitt liefert

$$\sigma_{ab}^{PE}(E_a, E_b) = \frac{(2I_b + 1)\, m_b}{\pi^3\hbar^2} \frac{\sigma_a^c(E_a)\, \sigma_b^c(E_b)\, E_b}{\langle|M^2|\rangle\, g_0^4 E^{*3}} \sum_{\substack{n=n_0 \\ \Delta n=+2}}^{\bar{n}} \left(\frac{U}{E^*}\right)^{n-2} p(n^2 - 1)$$
$$= \frac{(2I_b + 1)\, m_b}{\pi^2\hbar^3} \frac{\sigma_a^c(E_a)\, \sigma_b^c(E_b)\, E_b}{2\lambda_{coll} g_0 E^*} \sum_{\substack{n=n_0 \\ \Delta n=+2}}^{\bar{n}} \left(\frac{U}{E^*}\right)^{n-2} p(n^2 - 1) . \qquad (10.399)$$

Betrachten wir einige Besonderheiten dieser Beziehung:

- Wegen $(U/E^*) \ll 1$ konvergiert die Reihe (10.399) sehr schnell, d. h., PE-Emission tritt praktisch nur bei den ersten Wechselwirkungsstufen auf. ‚Überlebt' das Compoundsystem diese Anfangsphase der Reaktion ohne zu zerfallen, so kommt es mit sehr großer Wahrscheinlichkeit zur CN-Bildung;
- die Kollisionsraten liegen für $E^* = 20$ MeV etwa bei $\lambda_{coll} = 1{,}4 \cdot 10^{22}\ \mathrm{s}^{-1}$, der wesentliche Anteil der Vorgleichgewichtsemission erfolgt also innerhalb der Zeit

$$\tau = \tau_3 + \tau_5 + \tau_7 + \tau_9 = \frac{1}{\lambda_{coll}}(4 + 6 + 8 + 10) \cong 10^{-21}\ \mathrm{s} .$$

Der Zerfall des Compoundkerns erfolgt demgegenüber erst nach $10^{-15} \dots 10^{-18}$ s;

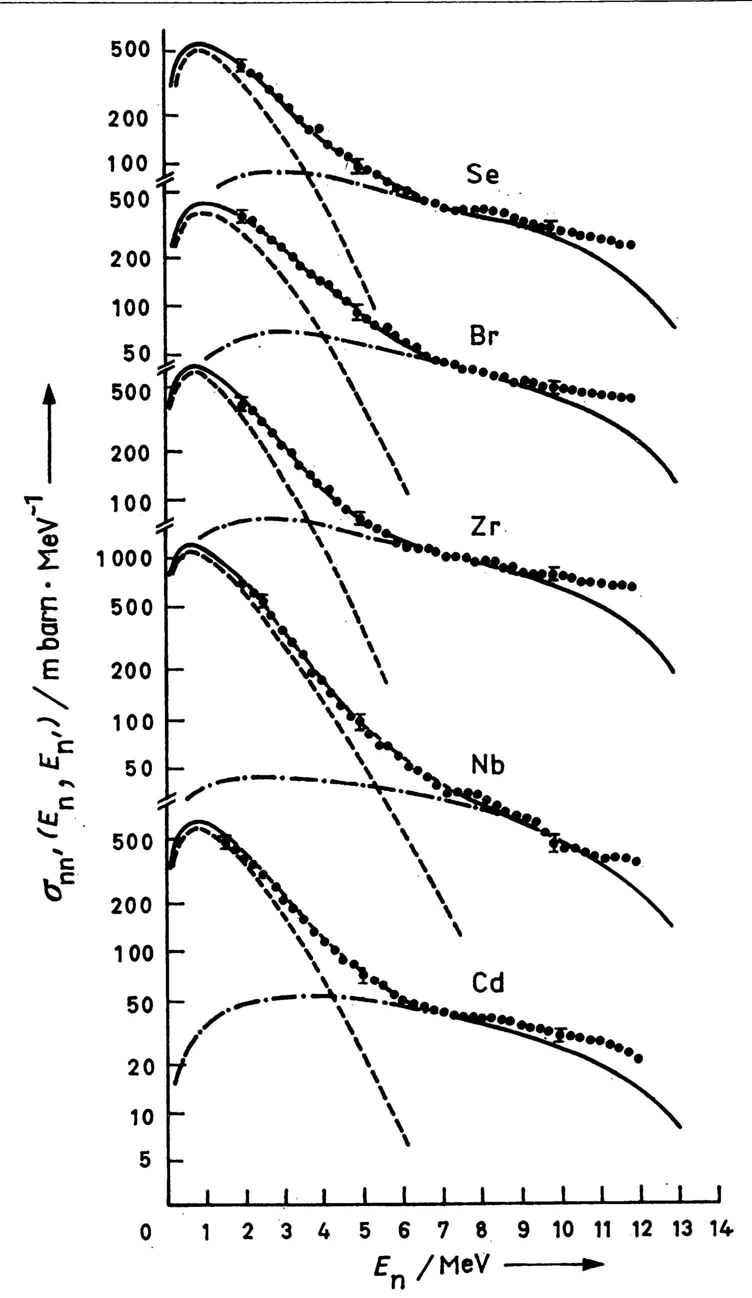


Abb. 10.71
Kontinuierliche Neutronenspektren aus der unelastischen Streuung von Neutronen mit $E_n = 14$ MeV an einigen schweren Kernen; — — — Berechnung nach dem vollständig statistischen Modell (10.288); —·—·— Berechnung nach dem Excitonenmodell (10.393); — Summe von berechneten PE — und CN-Anteilen

— die nach (10.399) ermittelte relative Spektrenform

$$N_b^{PE}(E_b)\,dE_b = \text{const.}\ \sigma_b^c(E_b)\,E_b \sum_{\substack{n=n_0\\ \Delta n=+2}}^{\bar{n}} \left(\frac{U}{E^*}\right)^{n-2} p(n^2-1) \qquad (10.400)$$

geht mit ihrem bei $U/E^* \ll 1$ größten Anteil für $n = n_0 = 3$ nach

$$N_b^{PE}(E_b)\,dE_b \cong P_b(2, 1, E_b) = \text{const.}\ \sigma_b^c(E_b)\,E_b \left(\frac{U}{E^*}\right)$$

$$\sim \sigma_b^c(E_b) \cdot E_b[E^* - E_B^{(b)} - E_b/E^*] \qquad (10.401)$$

über. Hieraus wird am deutlichsten der Unterschied zu den Verdampfungsspektren (10.288) bzw. (10.291) sichtbar. Die mittlere Energie der aus PE-Zuständen emittierten Teilchen ist wesentlich höher als die der aus dem CN stammenden, ihre spektrale Verteilung wesentlich härter als für letztere.

7. Das beschriebene Modell wird erfolgreich zur Interpretation von Anregungsfunktionen und Teilchenspektren in Ergänzung zu den statistischen Kernreaktionsmodellen (siehe 10.4.4. und 10.4.5.) eingesetzt. Auf Abb. 10.71 ist als Beispiel die Beschreibung von Neutronenspektren aus der Reaktion (n, n') an schweren Kernen für $E_n = 14$ MeV gezeigt. Nur die Summe von Vorgleichgewichts- und Gleichgewichtsemission kann die gemessenen Spektren im gesamten Bereich beschreiben. Auf Abb. 10.72 ist die Anregungsfunktion der Reaktion ^{169}Tm(p, n) abgebildet. Im Gebiet weit oberhalb des relativen Maximums im Querschnittsverlauf sagt die statistische Theorie einen viel zu kleinen Querschnitt voraus. Das berechnete Absinken des CN-Querschnitts kommt zustande, da sich immer mehr Reaktionskanäle öffnen. Durch PE-Emission hochenergetischer Teilchen kommt es zu einer stärkeren Kernabregung; der verbleibende Rest-

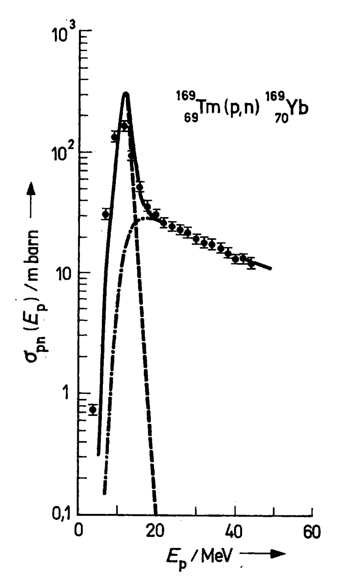


Abb. 10.72
Anregungsfunktion der Reaktion $^{169}_{69}$Tm(p, n)$^{169}_{70}$Yb; ——— Berechnung nach der statistischen Theorie nach HAUSER und FEHSBACH; —·—·— PE-Emission nach (10.393)

kern kann daher mit geringerer Wahrscheinlichkeit weitere Teilchen emittieren, der berechnete Wirkungsquerschnitt der Reaktion ist folglich, in Übereinstimmung mit dem Experiment, wesentlich größer als nach der statistischen CN-Theorie ermittelt.

10.7.1.2. Master-Gleichungen

1. Eine strengere Beschreibung der intermediären Prozesse im Rahmen des oben entworfenen Modellbildes ist mit Hilfe der Master-Gleichungen des Excitonenmodells möglich. Master-Gleichungen sind ein in der statistischen Physik gut eingeführtes Instrument zur Beschreibung der Dynamik von Relaxationsprozessen in statistischen Systemen. Die hier interessierenden Master-Gleichungen basieren auf den Paulischen Gleichungen der statistischen Physik für die Beschreibung irreversibler Prozesse in Systemen mit schwacher Wechselwirkung zwischen den Teilchen des Systems.

2. Bei der Herleitung der Gleichung (10.399) wurden Übergänge mit $\Delta n = 0$ und -2 vernachlässigt. Werden alle Übergänge $\Delta n = 0, \pm 2$ und ebenso die Teilchenemission in alle offenen Kanäle b berücksichtigt, so ergibt sich ein sehr komplizierter dynamischer Prozeß, der mit Hilfe des Systems gekoppelter Differentialgleichungen für die Besetzungswahrscheinlichkeiten $W(\mathrm{p}, \mathrm{h}, t)$ der ph-Zustände

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} W(\mathrm{p}, \mathrm{h}, t) = {} & [W(\mathrm{p}-1, \mathrm{h}-1, t)\, \lambda_{+}(\mathrm{p}-1, \mathrm{h}-1, E) \\ & + W(\mathrm{p}+1, \mathrm{h}+1, t)\, \lambda_{-}(\mathrm{p}+1, \mathrm{h}+1, E)] \\ & - W(\mathrm{p}, \mathrm{h}, t) \left[\lambda_{+}(\mathrm{p}, \mathrm{h}, E) + \lambda_{-}(\mathrm{p}, \mathrm{h}, E) + \sum_{b} \Gamma_{\mathrm{b}}\right], \end{aligned} \tag{10.402}$$

den sogenannten Master-Gleichungen zu beschreiben ist. In (10.402) bedeuten λ_{-} die Übergangswahrscheinlichkeiten für $\Delta n = -2$. Glieder für die Streuung von Excitonen in der Form $W(\mathrm{p}, \mathrm{h}, t)\, \lambda_0(\mathrm{p}, \mathrm{h}, E)$ treten sowohl beim Wahrscheinlichkeitszufluß wie auch -abfluß auf, sie heben sich also auf. Teilchenbreiten Γ_{b} und die Übergangswahrscheinlichkeiten werden aus (10.395) und

$$\lambda_{-} = \frac{2\pi}{\hbar} \langle |M|^2 \rangle\, \varrho_{\mathrm{f}}^{-} = \frac{2\pi}{\hbar} \langle |M|^2 \rangle \frac{g_0}{2} [\mathrm{ph}(\mathrm{p}+\mathrm{h}) - 2)] \tag{10.403}$$

bzw. aus

$$\Gamma_{\mathrm{b}} = \int_0^{E^* - E_{\mathrm{B}}^{(\mathrm{b})}} P_{\mathrm{b}}(\mathrm{p}, \mathrm{h}, E_{\mathrm{b}})\, \mathrm{d}E_{\mathrm{b}} \tag{10.404}$$

mit den spektralen Emissionsraten P_{b} aus (10.389) gewonnen. Die Anfangsbedingungen für die Lösung von (10.402) lautet

$$W(\mathrm{p}, \mathrm{h}, 0) = \delta(\mathrm{p} - \mathrm{p}_0)\, \delta(\mathrm{h} - \mathrm{h}_0)$$

mit $\mathrm{n}_0 = \mathrm{p}_0 + \mathrm{h}_0 = 3$ für Nukleonen.

3. Wie verläuft die Dynamik des Systems? Für $\mathrm{n} = \mathrm{n}_0 = 3$ ist nach (10.395) und (10.403) bei gleichen Matrixelementen $\lambda_{-} \ll \lambda_{+}$, d. h., im relaxierenden System vollziehen sich in der Anfangsphase hauptsächlich λ_{+}-Übergänge. Das rechtfertigt auch die Vernachlässigung der λ_{-}-Übergänge in (10.399). Wenn sich jedoch das System dem Gleichgewichtszustand mit $\mathrm{n} = \bar{\mathrm{n}} = 2 \mathrm{g}_0 E)^{1/2}$ nähert, werden Übergänge λ_{+} und λ_{-} gleichwahrscheinlich. Im System sind mit einer bestimmten Verteilung, die sich mit der Zeit nicht mehr ändert, die Zustände um $\mathrm{n} = \bar{\mathrm{n}}$ besiedelt (siehe Abb. 10.73a). Die Emission aus diesem Gleichgewichtszustand ist mit der CN-Emission identisch. Auf diese Weise gelingt es, im Rahmen eines einheitlichen Formalismus die Dynamik

des Wechselwirkungsprozesses von der ersten Restwechselwirkung, d. h. der Absorption des Teilchens im Kern, angefangen bis hin zum CN-Stadium zu erfassen, allerdings auf einer einfachen Modellbasis, in die nur äquidistante Einteilchenzustände für die Beschreibung des Kerns und Zweiteilchenstöße für die Beschreibung der Wechselwirkungen (keine kollektiven Effekte!) eingehen.

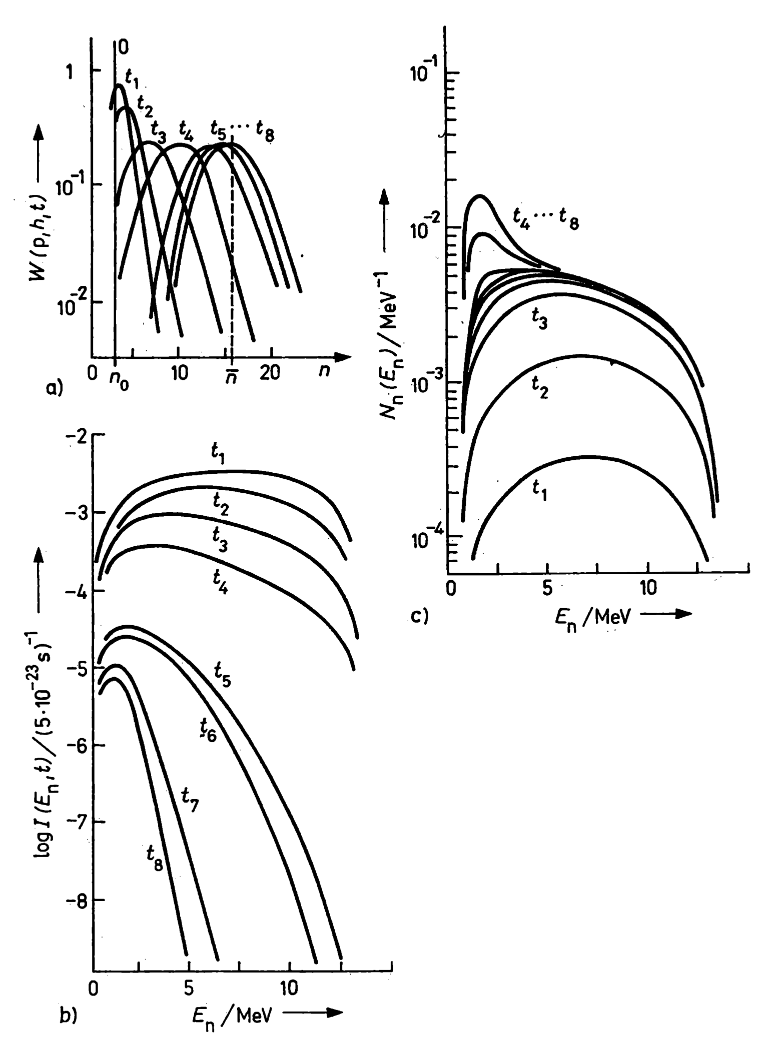


Abb. 10.73
Mit den Mastergleichungen (10.402) berechnetes System $A = 64$, $E = 24$ MeV
a) Besetzungswahrscheinlichkeiten, $n_0 = 3$, $\bar{n} = 15{,}8$
b) momentane Neutronenspektren
c) integrierte Neutronenspektren; die Zeitintervalle bedeuten $t_1, \ldots, t_8 = 10, 100, 200, 400, 10^3, 10^4, 10^5 \times 5 \cdot 10^{-23}$ s

4. Betrachten wir einige Ergebnisse dieses Verfahrens anhand der Berechnungen für ein konkretes Beispiel, die Relaxation in einem Compoundsystem mit $E = 24$ MeV und $g_0 = 5{,}2\ \mathrm{MeV}^{-1}$ (das entspricht einer Massenzahl $A = 64$) sowie $\bar{n} = (2g_0E)^{1/2} = 15{,}8$. Auf Abb. 10.73a ist die zeitliche Entwicklung der Besetzungswahrscheinlichkeiten $W(\mathrm{p, h}, t)$ in Zeiteinheiten $\tau = 1/\lambda_{\mathrm{coll}} = 5 \cdot 10^{-23}$ s angegeben. Bei $t = 0$ entspricht die Verteilung der δ-Funktion bei $n_0 = 3$. Nach $t = 100\tau = 5 \cdot 10^{-21}$ s hat sich bereits eine breite Verlagerung um $n = 7$ eingestellt. Die PE-Emission ist im wesentlichen beendet. Nach $t = (1000 \ldots 3000) = (0{,}5 \ldots 1{,}5) \cdot 10^{-19}$ s ist der CN-Zustand erreicht, die Verteilung um $\bar{n}$ bleibt im weiteren Verlauf unverändert. Die momentane Teilchenemissionsrate als Funktion von t

$$I_{\mathrm{b}}(E_{\mathrm{b}}, t) = \sum_{n} W(\mathrm{p, h}, t)\, P_{\mathrm{b}}(\mathrm{p, h}, E_{\mathrm{b}}) \tag{10.405}$$

ist auf Abb. 10.73b dargestellt. Im PE-Zeitraum $t/\tau < 200$ erfolgt die Emission mit hoher Rate und in einem breiten Energiebereich. Mit Erreichen des CN-Zustandes verringert sich die Emissionsrate sehr stark und die Spektrenform geht zum „Verdampfungsspektrum" über. Dadurch lebt der CN mit $T_{\mathrm{CN}} = 5 \cdot 10^{-18}$ s relativ lange. Das gesamte Teilchenspektrum $N_{\mathrm{b}}(E_{\mathrm{b}})$ ergibt sich aus der Integration über die Zeit

$$N_{\mathrm{b}}(E_{\mathrm{b}}) = \int_0^\infty I_{\mathrm{b}}(E_{\mathrm{b}}, t)\, \mathrm{d}t = \sum_{n=n_0}^{\infty} P_{\mathrm{b}}(\mathrm{p, h}, E_{\mathrm{b}}) \int_0^\infty W(\mathrm{p, h}, t)\, \mathrm{d}t\,. \tag{10.406}$$

Es ist auf Abb. 10.73c dargestellt und zeigt deutlich die Aufteilung in eine „schnelle", breit verteilte und eine „langsame" verdampfte Komponente, entsprechend dem PE- und CN-Mechanismus ihrer Emission.

Interessiert uns nur der PE-Anteil des Spektrums, so ist in (10.406) die Integration bis $T_{\mathrm{equil}} \cong 5 \cdot 10^{-21}$ s und die Summation bis $n = \bar{n}$ zu führen:

$$N_{\mathrm{b}}^{\mathrm{PE}}(E_{\mathrm{b}}) = \sum_{n=n_0}^{\bar{n}} P_{\mathrm{b}}(\mathrm{p, h}, E_{\mathrm{b}}) \int_0^{T_{\mathrm{equil}}} W(\mathrm{p, h}, t)\, \mathrm{d}t = \sum_{n=n_0}^{\bar{n}} P_{\mathrm{b}}(\mathrm{p, h}, E_{\mathrm{b}})\, \tau_{\mathrm{ph}}\,, \tag{10.407}$$

mit der auf der Basis der Master-Gleichungen genauer bestimmten mittleren Lebensdauer der Excitonenzustände

$$\tau_{\mathrm{ph}} \equiv \int_0^{T_{\mathrm{equil}}} W(\mathrm{p, h}, t)\, \mathrm{d}t\,. \tag{10.408}$$

Die Beziehung (10.407) ist bis auf die Art der Bestimmung von τ_{ph} identisch mit (10.391).

5. Zusammenfassend läßt sich sagen, daß PE-Prozesse der beschriebenen Art bei fast allen Kernreaktionen im Einschußenergiegebiet über 10 ... 20 MeV einen wesentlichen Beitrag zum Mechanismus des Prozeßablaufs neben den CN-Prozessen liefern. Auch bei Betrachtung eines kontinuierlichen Übergangs zum Gleichgewichtszustand über viele Zwischenstufen sind es nur die ersten, einfachsten Konfigurationen, welche einen Beitrag zur PE-Emission liefern. Sie erfolgt innerhalb eines Zeitbereichs $< 5 \cdot 10^{-21}$ s, der ähnlich dem für direkte Reaktionen ist. So dürften keine prinzipiellen Unterschiede hinsichtlich des Mechanismus, wohl aber hinsichtlich der theoretischen Beschreibung zwischen der PE-Emission nach der ersten Restwechselwirkung ($n = 3$) und einem direkten Einstufenprozeß bestehen. Unterschiede im Mechanismus treten erst bei den weniger gewichtigen höheren Gliedern der Reihe (10.393) bzw. (10.407) auf. Ein entscheidender Vorteil der beschriebenen Master-Gleichungen besteht darin, daß es nur auf diesem Wege bisher gelungen ist, den gesamten Reaktionsprozeß im Rahmen einer einheitlichen und außerdem sehr transparenten Modellvorstellung zu beschreiben und damit ein auch quantitativ richtiges Verständnis vieler Experimente zu erhalten.

10.8. Kernspaltung

10.8.1. Besonderheiten der Kernspaltung

Die Entdeckung der Kernspaltung von Uran (HAHN, STRASSMANN, 1938) durch radiochemischen Nachweis des Spaltproduktes $_{56}$Ba, die Erklärung dieses Prozesses im Rahmen des Tröpfchenmodells (BOHR, WHEELER u. a., 1939) und des Schalenmodells (STRUTINSKIJ, 1967) waren von großer Bedeutung für die Erkenntnis neuer Bewegungsformen der Kernmaterie aber auch als Ausgangspunkt der Kernenergiegewinnung. Einige Besonderheiten zeichnen den Prozeß der spontanen

$$^{A}_{Z}\mathrm{A} \rightarrow {}^{A_\mathrm{s}}_{Z_\mathrm{s}}\mathrm{B}_\mathrm{s} + {}^{A_\mathrm{l}}_{Z_\mathrm{l}}\mathrm{B}_\mathrm{l} + \nu\mathrm{n} \tag{10.409 a}$$

und induzierten Spaltung

$$\mathrm{a} + {}^{A}_{Z}\mathrm{A} \rightarrow {}^{A_\mathrm{s}}_{Z_\mathrm{s}}\mathrm{B}_\mathrm{s} + {}^{A_\mathrm{l}}_{Z_\mathrm{l}}\mathrm{B}_\mathrm{l} + \nu\mathrm{n} \tag{10.409 b}$$

aus:

— Es wird eine Energiemenge freigesetzt, die um wenigstens eine Größenordnung über der anderer exothermer Reaktionen liegt. Diese läßt sich leicht anhand der spezifischen Bindungsenergie (siehe Abb. 6.14) abschätzen, welche für Uran um etwa 0,80 MeV/Nukleon höher als für Kerne mit halber Massenzahl ist, damit ist $E_Q = 238 \cdot 0{,}8 \cong 190$ MeV.

— Die kinetische Energie der Spaltbruchstücke B_S und B_L macht fast die gesamte Energiemenge E_Q aus. Auch hierfür gibt es eine plausible Erklärung: Die Coulomb-Energie der Bruchstücke im Moment ihrer Entstehung $R = R_\mathrm{S} + R_\mathrm{L}$ (siehe Gl. (3.6)) beträgt etwa $E_\mathrm{C} \cong 200$ MeV. Beim Auseinanderfliegen der Fragmente wird sie vollständig in kinetische Energie der Bruchstücke umgewandelt. Die innere Anregungsenergie der beteiligten Kerne wird also als relativ klein erwartet.

— Obgleich etwa 11% der riesigen Bindungsenergie des Urankerns ($E_\mathrm{B} = 1802$ MeV für $^{238}_{92}$U) freigesetzt wird, spielen aus oben genanntem Grund relativ kleine Änderungen der Bindungsenergie von wenigen MeV als Folge von Paarbildungs- und Schaleneffekten eine außerordentlich große Rolle beim Ablauf der Kernspaltung, sie sind u. a. verantwortlich für die Unterschiede der Schwellenergie zwischen gg- und gu-Kernen, die Asymmetrie des Zerfalls in ein schweres und leichtes Bruchstück (mit $A_\mathrm{S}:A_\mathrm{L} = 3:2$) u. a. Effekte.

10.8.2. Elementare Theorie der Kernspaltung

1. Eine relativ einfache Erklärung fanden viele Merkmale der Kernspaltung im Rahmen des Tröpfchenmodells (siehe 8.), nach welchem die Bindungsenergie des Kernes

$$\begin{aligned} E_\mathrm{B} &= [Zm_\mathrm{p} + (A - Z)\,m_\mathrm{n} - m_\mathrm{k}(A, Z)]\,\mathrm{c}^2 \\ &= \left[\alpha A - \beta A^{2/3} - \gamma \frac{Z^2}{A^{1/3}} - \varepsilon \frac{(A/2 - Z)^2}{A} - \delta\right] \end{aligned} \tag{10.410}$$

durch den Volumenterm, mit $\alpha = 15{,}75$ MeV; Oberflächenterm, mit $\beta = 17{,}0$ MeV; den Coulombterm, mit $\gamma = 0{,}69$ MeV; das Symmetrieglied, mit $\varepsilon = 36{,}0$ MeV; und die Paarenergie, mit $\delta = \pm 34 \cdot A^{-3/4}$/MeV, bestimmt wird.

2. Für das experimentell beobachtete Verhältnis $A_S:A_L = Z_S:Z_L = 3:2$ sowie $A_S + A_L = A$, $Z_S + Z_L = Z$ und $\delta = 0$ ergibt (10.410) für die bei der Spaltung frei werdende Energiemenge E_Q:

$$\begin{aligned} E_Q &= E_B(A_s, Z_s) + E_B(A_L, Z_L) - E_B(A, Z) \\ &= \Delta E_{\text{Oberfl.}} + \Delta E_{\text{Coul.}} \\ &= 0{,}36\gamma \frac{Z^2}{A^{1/3}} - 0{,}25\beta A^{2/3} . \end{aligned} \tag{10.411}$$

Die Beiträge vom Volumenterm und Symmetrieglied heben sich auf, ein Energiegewinn bei der Spaltung tritt dadurch ein, daß sich die Coulomb-Energie wesentlich verringert, wobei gleichzeitig die Oberflächenenergie steigt.

Für $^{238}_{92}U + n$ ergeben sich folgende Zahlenwerte:

Uran:	Oberflächenenergie	650 MeV	Coulomb-Energie	950 MeV
Fragmente:	Oberflächenenergie	813 MeV	Coulomb-Energie	607 MeV
Differenz:		−163 MeV		+343 MeV
Gesamtbilanz:		E_Q = +180 MeV		

Zusätzlich entstehen etwa 20 MeV im Zusammenhang mit dem β-Zerfall der stark neutronenüberschüssigen Spaltprodukte (Emission von β-, γ-, und Neutrinostrahlung), so daß insgesamt etwa 200 MeV freigesetzt werden. Die Energie der Spaltneutronen und prompten Gammaquanten ist im Wert 180 MeV mit enthalten, sie beträgt etwa 10 MeV, so daß ca. 170 MeV für die kinetische Energie der Spaltfragmente verbleiben.

3. Das gleiche Modell liefert eine grobe Beschreibung der Dynamik in der ersten Phase der Kernspaltung. Wir betrachten hierzu E_B für den axial deformierten Kern mit den Halbachsen

$$a = R(1 + \varkappa) , \qquad b = \frac{R}{(1 + \varkappa)^{1/2}} , \qquad \varkappa \ll 1 .$$

Da das Volumen nicht von der Größe der Deformation $\varkappa$ abhängt,

$$V = 4/3\pi ab^2 = 4/3\pi R^3 = \text{const.} ,$$

ist der Volumenterm und auch der nur von Z und A abhängige Symmetrieterm unverändert.

Die Größe der Oberfläche des Ellipsoids S steigt mit

$$S = 2\pi ab \left\{ (1 - \gamma^2)^{1/2} + \frac{\arcsin \gamma}{\gamma} \right\} \cong 4\pi R^2 \left(1 + \frac{2}{5} \varkappa^2 + \cdots \right) ,$$

mit

$$\gamma = (a^2 - b^2)^{1/2}$$

und damit auch die Oberflächenenergie

$$| E_{\text{Oberfl.}} | = \beta A^{2/3} \left(1 + \frac{2}{5} \varkappa^2 + \cdots \right) . \tag{10.412}$$

Demgegenüber sinkt die analog zu bestimmende Coulomb-Energie wegen des im Mittel größeren Abstandes zwischen den Protonen im deformierten Kern mit

$$| E_{\text{Coul.}} | = \gamma \frac{Z^2}{A^{1/3}} \left(1 - \frac{1}{5} \varkappa^2 + \cdots \right) . \tag{10.413}$$

Die Differenz

$$
\begin{aligned}
U_{LD}(\varkappa) \equiv \Delta E_B(\varkappa) &= E_B(A_S, Z_S) + E_B(A_L, Z_L) - E_B(A, Z, \varkappa) \\
&= -0.25\beta A^{2/3} + 0.36\gamma \frac{Z^2}{A^{1/3}} + \frac{\varkappa^2}{5}\left(2\beta A^{2/3} - \gamma \frac{Z^2}{A^{1/3}}\right) \\
&= E_Q + \frac{\varkappa^2}{5}\left(2\beta A^{2/3} - \gamma \frac{Z^2}{A^{1/3}}\right)
\end{aligned}
\tag{10.414}
$$

wächst mit dem Quadrat der Deformation. Infolgedessen befindet sich der Kern im Grundzustand in einer relativen Potentialmulde, deren physikalische Ursache die rücktreibende Kraft der Oberflächenspannung ist. Bei kleinen Anregungsenergien schwingt der Kern um seine Ruhelage ohne zu spalten. Erst wenn die Anregungsenergie $E^* > E_f$ wird, kann der Potentialwall überwunden werden; es kommt nacheinander zur Einschnürung, Trennung der Fragmente (sogenannte Scission) und ihrer getrennten Beschleunigung im abstoßenden Coloumb-Feld (siehe Abb. 10.74).

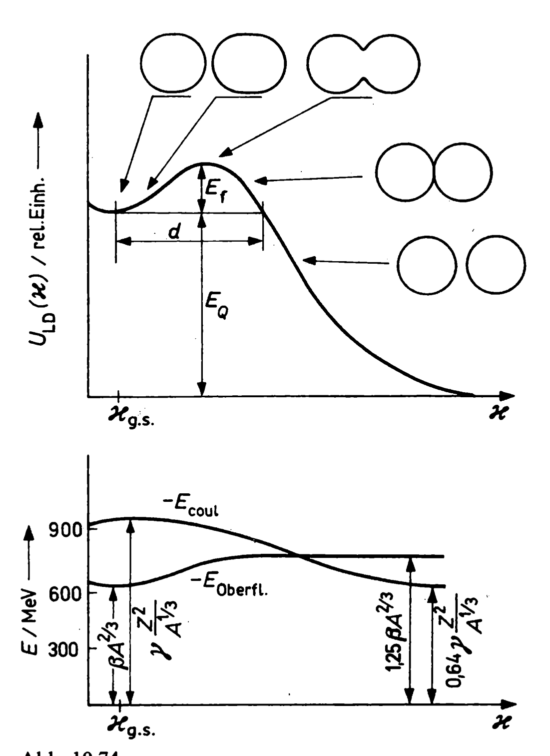


Abb. 10.74
Energetische Verhältnisse und Kernform bei der Beschreibung der Kernspaltung im Tröpfchenmodell; Symbole sind im Text erläutert; für getrennte Fragmente geht der Deformationsparameter über zu $\frac{\Delta}{R} = \varkappa$ mit dem Schwerpunktabstand der Fragmente Δ

Die Höhe der Spaltbarriere E_f wird nach (10.412) und (10.413) vom Verhältnis

$$\frac{2E_{\text{Oberfl.}}}{E_{\text{Coul.}}} = 2\frac{\beta}{\gamma}\frac{A}{Z^2} \sim \frac{A}{Z^2}$$

bestimmt. Aus (10.411) folgt, daß Energiegewinn aus der Spaltung $E_Q \geqq 0$ dann eintritt, wenn $0{,}36\gamma \frac{Z^2}{A^{1/3}} \geqq 0{,}25\beta A^{2/3}$ ist, d. h. für $\frac{Z^2}{A} \geqq \frac{0{,}25\beta}{0{,}36\gamma} = 17$.

Abb. 10.75 zeigt schematisch den Verlauf von $U_{LD}(\varkappa)$ für unterschiedliche Wertebereiche von Z^2/A.

Die obere Stabilitätsgrenze von Kernen bezüglich ihres sofortigen Zerfalls in Bruchstücke ist nach (10.414) für den Fall $2\beta A^{2/3} = \gamma \frac{Z^2}{A^{1/3}}$, d. h. mit $Z^2/A = 49$ gegeben. Zum Verhältnis der Spaltbarkeit von gg- und gu-Kernen in der Nähe $Z^2/A = 36$ durch Neutronen ist die Berücksichtigung der Paarenergie $\delta = E_P^{(n)}$ (siehe 6.3.2.) unbedingt erforderlich. Bei der Absorp-

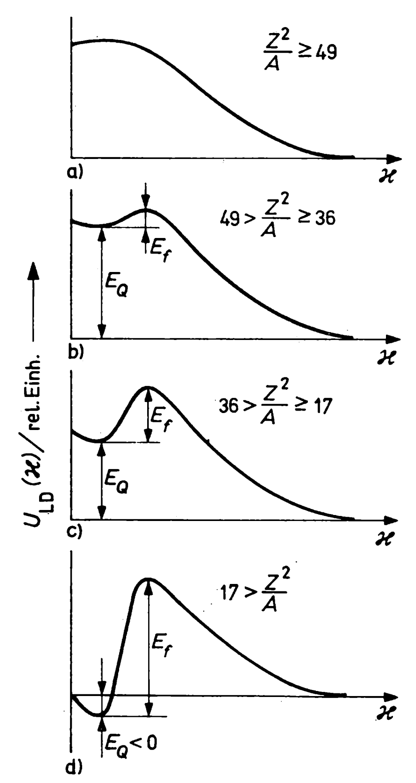


Abb. 10.75
Abhängigkeit der energetischen Verhältnisse bei der Kernspaltung vom Parameter Z^2/A;
a) $E_f = 0$, der Kern zerfällt sofort
b) $E_f \leqq E_B^{(n)}$ der Kern wird durch thermische Neutronen gespalten
c) $E_f > E_B^{(n)}$ schnellspaltende Kerne
d) es erfolgt kein Energiegewinn, Spaltung ist nur durch hochenergetische Teilchen möglich

tion des Neutrons im gu-Kern wird $\delta = 0{,}6$ MeV zusätzliche Anregungsenergie frei, und damit liegt z. B. für $^{233}_{92}U$, $^{235}_{92}U$, $^{239}_{94}Pu$ die Anregungsenergie $E^* = E_B^{(n)} + E_P^{(n)} > E_f$, d. h., die Spaltung erfolgt bereits durch thermische und Resonanzneutronen (siehe Abb. 4.22 und 10.76). Für die benachbarten gg-Kerne ist dies erst von bestimmten Schwellenenergien ab der Fall (siehe Tabelle 10.7 und Abb. 4.25).

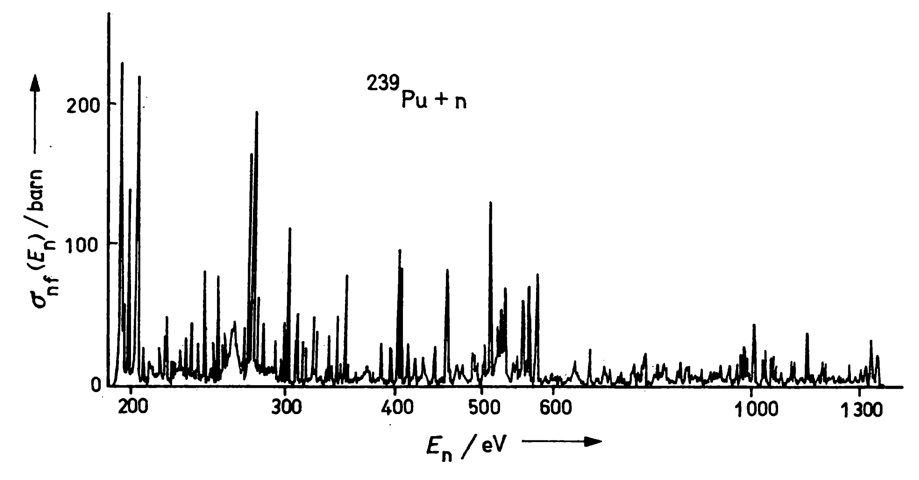


Abb. 10.76
Resonanzspaltung von $^{239}_{94}Pu$ durch Neutronen im Energiebereich $E_n = 200 \ldots 1300$ eV (vgl. auch Abb. 10.29)

Tabelle 10.7
Einige Schwellenergien schnellspaltender Nuklide

Nuklid	$^{238}_{92}U$	$^{232}_{90}Th$	$^{236}_{92}U$	$^{231}_{91}Pa$	$^{237}_{93}Np$
E_{Schw}/MeV	1,5	1,3	0,8	0,6	0,4

5. Das Vorhandensein der Spaltbarriere E_f erklärt auch den Effekt der spontanen Spaltung (Flerov, Petržak, 1940). Infolge des Tunneleffektes können im Prinzip alle Kerne mit $Z^2/A > 17$ spontan spalten. Eine grobe Abschätzung der Durchtunnelwahrscheinlichkeit eines Teilchens der Masse m_B durch die Barriere der Breite d in Höhe E_f

$$P_f \sim \exp\left\{-\frac{2}{\hbar}\,[m_B E_f d]\right\} \tag{10.415}$$

Tabelle 10.8
Halbwertzeiten einiger Nuklide für Alphazerfall und spontane Spaltung

Nuklid	$^{232}_{90}Th$	$^{235}_{92}U$	$^{238}_{92}U$	$^{252}_{98}Cf$	$^{254}_{100}Fm$
$T^{\alpha}_{1/2}$	$1{,}4 \cdot 10^{10}$ a	$7{,}1 \cdot 10^{8}$ a	$4{,}5 \cdot 10^{9}$ a	2,2 a	3,4 h
$T^{SF}_{1/2}$	10^{19} a	$1{,}8 \cdot 10^{17}$ a	$8 \cdot 10^{15}$ a	66 a	246 d

ergibt jedoch bereits Halbwertszeiten im Bereich $> 10^{20}$ a für Kerne im Massenzahlbereich um Uran! Die experimentellen Werte (siehe Tabelle 10.8) stimmen damit qualitativ überein. Da sie wesentlich über den Halbwertzeiten des Alphazerfalls liegen, begrenzt letzterer die reale Lebensdauer dieser Kerne.

6. Der resonanzartige Verlauf von $\sigma_n(E_n)$ für gu-Kerne zeigt eindeutig den CN-Mechanismus der Spaltung. Entsprechend wird der Querschnittsverlauf nahe einer isolierten s-Wellen-Resonanz mittels Breit-Wigner-Formel (10.246)

$$\sigma_{nf}(E_n) = \pi\lambda\kern-0.5em\raise0.3ex\hbox{-}_r \lambda\kern-0.5em\raise0.3ex\hbox{-}_n \cdot g \frac{\Gamma_n \Gamma_f}{(E_n - E_r)^2 + \frac{1}{4}\Gamma^2} \quad \text{mit} \quad \Gamma = \Gamma_n + \Gamma_\gamma + \Gamma_f \qquad (10.416)$$

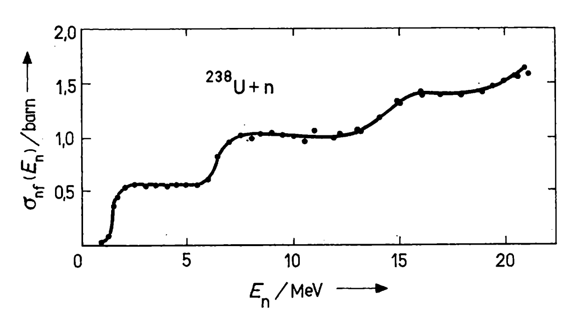


Abb. 10.77
Anregungsfunktion der Spaltung von ^{238}U mit schnellen Neutronen

beschrieben. Im Unterschied zum Strahlungseinfang sind die Spaltbreiten allerdings nach einer χ^2-Verteilung mit wenigen Freiheitsgraden ($\nu = 3 \ldots 6$) verteilt, d. h., der CN gelangt zur Spaltung nur über relativ begrenzte Anzahl sogenannter Spaltzustände. Der stufenartige Verlauf der Anregungsfunktion σ_n (En) für schnellspaltende Nuklide (siehe 10.77) ist im Rahmen des CN-Mechanismus ebenfalls zu verstehen. Sie treten dicht oberhalb der (n, f)-, (n, n'f)-, (n, 2nf)-Schwellen auf. Die Verdampfung des ersten Neutrons und des zweiten Neutrons hinterläßt jeweils den Restkern in einem relativ schmalen Anregungsgebiet

$$\bar{E} = E_n - \bar{E}_{n'} = E_n - 2T$$

bzw.

$$\bar{E}_{B''} = \bar{E}_{B'} - 2T = E_n - 4T,$$

und bei den ‚Schwellen' $E_{B'} > E_f$ bzw. $E_{B''} > E_f$ setzt die beobachtete rasche Erhöhung der Spaltwahrscheinlichkeit ein.

10.8.3. Schaleneffekte

1. Die Summe der Schalenmodell-Einteilchenenergien $E_i(\varkappa)$ bei einer bestimmten Deformation des Potentialtopfes (siehe 8.60)

$$E^{ET}(\varkappa) = \sum_{\substack{i \\ (N,P)}} n_i E_i(\varkappa), \qquad (10.417)$$

mit den Besetzungszahlen $n_i = 0, 1, 2$ im Neutronen (N)-plus Protonen (P)-System ergibt für sich genommen keinen richtigen Wert der Bindungsenergie des Kernes, daher konnte auch der Absolutwert von E_f im Schalenmodell nicht genau genug reproduziert werden. Das Schalenmodell ist jedoch geeignet, die Änderungen der Bindungsenergie von Kern zu Kern und bei Vergrößerung des Deformationsparameters richtig zu beschreiben.

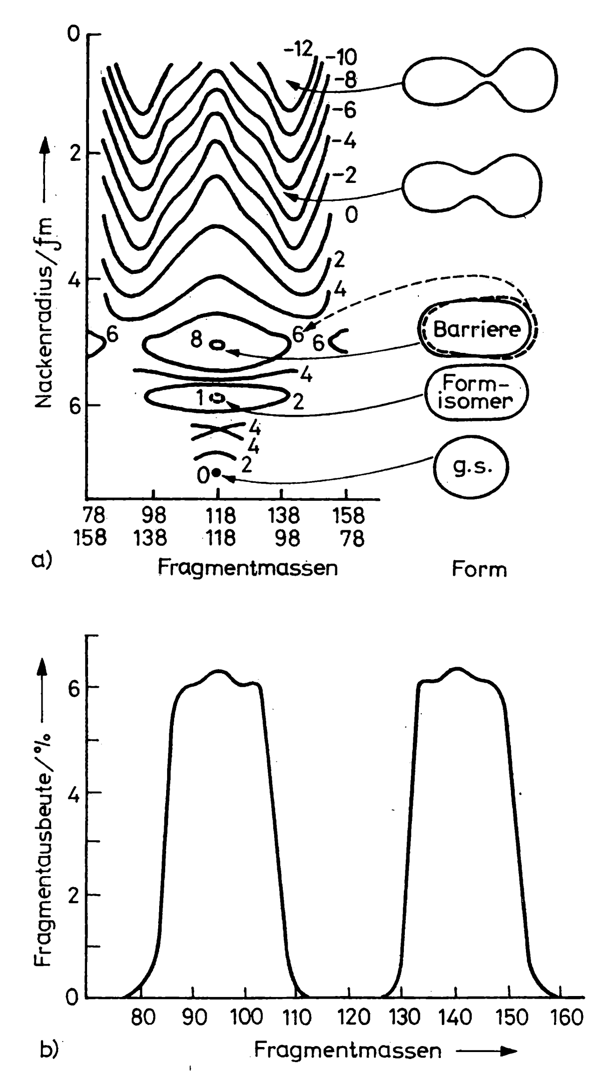


Abb. 10.78
Schaleneffekte bei der Kernspaltung $^{235}_{92}U + n$

a) Potentialverteilung $U(\varkappa) - U(\varkappa_{gs})$ in Abhängigkeit von Fragmentmassen und der Einschnürung

b) resultierende Massenverteilung der Spaltfragmente aus der thermischen Spaltung von ^{235}U

Um den Einfluß der Schalenstruktur auf die Bindungsenergie zu berücksichtigen, postulierte STRUTINSKIJ, daß für alle $\varkappa$-Werte zwischen dem Grundzustand und dem Scission-Punkt die gesamte potentielle Energie $U(\varkappa)$ als Summe der beiden Terme

$$U(\varkappa) = U_{LD}(\varkappa) + \delta U_{SM}(\varkappa)$$

mit

$$\delta U_{SM}(\varkappa) \ll U_{LD}(\varkappa) \tag{10.418}$$

angesetzt werden kann (siehe 8.4.2). Der Hauptanteil $U_{LD}(\varkappa)$ entstammt dem Tröpfchenmodell (10.410), während der Korrekturterm $\delta U_{SM}(\varkappa)$ aus der Besetzung der Einteilchenzustände $E_i(\varkappa)$ abgeleitet wird:

$$\delta U_{SM}(\varkappa) = \sum_{\substack{E_i < \varepsilon_F \\ (N,P)}} 2n_i \cdot E_i(\varkappa) - 2 \int_0^{\varepsilon'_F} \varepsilon \langle g(\varepsilon, \varkappa)\rangle \, d\varepsilon \,. \tag{10.419}$$

Hierbei bedeuten ε_F die Fermi-Energie; $\langle g(\varepsilon, \varkappa)\rangle$ eine über $\Delta\varepsilon = 8 \dots 10$ MeV gemittelte Einteilchenzustandsdichte; ε'_F die zur gemittelten Verteilung gehörige Fermi-Energie.

Der physikalische Sinn dieses Vorgehens besteht darin, daß der erste Term sehr empfindlich auf deformationsabhängige Änderungen der Einteilchendichten nahe ε_F, d. h. auf Schaleneffekte, reagiert, während diese Effekte im zweiten Term weitgehend herausgemittelt sind. Die relative Größe von δU_{SM} ändert sich wenig bei Variation des Schalenmodell-Potentials (siehe auch 8.4.2.).

Sie kann in Abhängigkeit von N, Z und $\varkappa$ berechnet werden. Das beschriebene Konzept hat sich als überaus nützlich für das Verständnis einer Reihe vorher nicht erklärbarer Aspekte der Kernspaltung erwiesen.

2. Durch Berücksichtigung der Schaleneffekte läßt sich die experimentell beobachtete Asymmetrie der Fragmentmassenverteilung erklären. Auf Abb. 10.78 sind die berechneten Äquipotentiallinien von $U(\varkappa) - U(\varkappa_{gs})$ in Abhängigkeit von den Fragmentmassen und dem Nacken-Radius (engste Stelle) abgebildet. Die „äußere“ Barriere für $A_S \cong 140$ und $A_L \cong 95$ ist um etwa 2 MeV niedriger als die Barriere für symmetrische Spaltung. Bei „thermischer“ Spaltung, d. h., wenn die Anregungsenergie die Spaltbarriere nur geringfügig übersteigt, kommt es zu einer

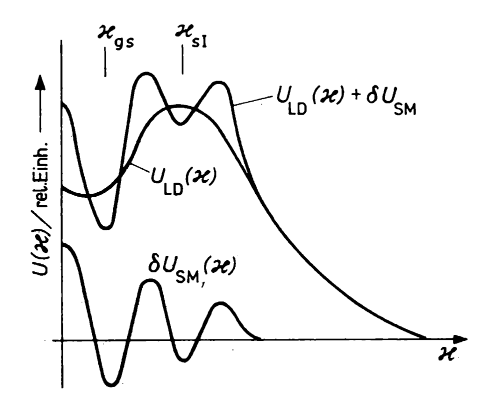


Abb. 10.79
Infolge der Überlagerung von potentieller Energie $U_{LD}(\varkappa)$ nach dem Tröpfchenmodell berechnet und der Schalenkorrekturen $\delta U_{SM}(\varkappa)$ kommt es zur Ausbildung einer zweiten Potentialmulde bei $\varkappa = \varkappa_{sI}$

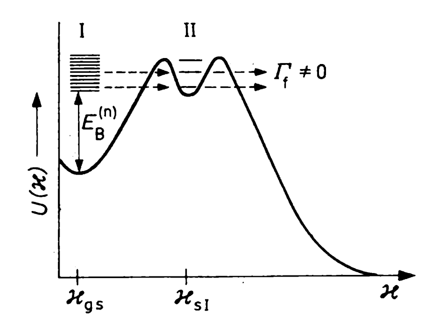


Abb. 10.80
Schema der Resonanzspaltung unterhalb der Spaltbarriere infolge der Kopplung von CN-Zuständen der Klasse I an angeregte Zustände der Klasse II des formisomeren Kernes

Abb. 10.81
Einfang- und Spaltresonanzen in $^{238}U + n$ unterhalb der Spaltbarriere infolge der auf Abb. 10.80 dargestellten Situation

stark asymmetrischen Teilung der Massen, der „Spaltweg" verläuft im Potentialtal. Es entstehen stark gebundene Spaltprodukte in der Nähe der magischen Zahlen $N = 82$ und $N = 50$. Erst wenn $E^* \gg E_f$ ist, verstärkt sich der Anteil symmetrischer Spaltung, die Massenverteilung wird im Bereich $A/2$ aufgefüllt.

3. Betrachten wir den Verlauf $U(\varkappa)$ für symmetrische Spaltung, so ergibt sich aus der Überlagerung von $U_{LD}(\varkappa)$ und $\delta U_{SM}(\varkappa)$ die Ausbildung einer zweiten Potentialmulde. Der Kern besitzt hier einen zweiten relativ stabilen Zustand, der eine hohe Deformation besitzt (Abb. 10.79). Dieser Zustand erhielt die Bezeichnung Formisomer.

Wichtiges Merkmal der Formisomerie ist die erhöhte Wahrscheinlichkeit spontaner Spaltung, die tatsächlich für eine Reihe von Kernen beobachtet werden konnte. Infolge der gleichzeitigen Verringerung von E_f und d in (10.415) sinkt die Lebensdauer im Mittel um 23 Größenordnungen! Die Lebensdauern liegen im Bereich $10^{-9} \dots 10^{-3}$ s, ausreichend um die Kerne im stark deformierten isomeren Zustand als langlebige Gebilde mit eigenem Grundzustand und angeregten Zuständen der Klasse II betrachten zu können.

4. Ein weiterer Schaleneffekt ist die experimentell beobachtete Resonanzspaltung unterhalb der Spaltbarriere. Das Vorhandensein von angeregten Zuständen des Formisomers bei gleicher Energie in der ersten und zweiten Potentialmulde, d. h. CN-Zuständen der Klasse I mit $\varkappa = \varkappa_{gs}$ und Rotationszuständen des Formisomers mit $\varkappa = \varkappa_{SI}$, führt zum resonanzartigen Überkoppeln, d. h. zur verstärkten Besiedlung des formisomeren Zustandes mit nachfolgender spontanen Spaltung (siehe Abb. 10.80). Da die Zustände der Klasse II breiter als die CN-Zustände sind und einen wesentlich größeren Abstand voneinander besitzen, tritt dieser Effekt für bestimmte voneinander getrennte Gruppen von Neutronenresonanzen auf. Abb. 10.81 zeigt diesen Effekt der Resonanzspaltung unterhalb der Spaltbarriere für ^{237}Np.

10.8.4. Spaltneutronen

1. Die mittlere Anzahl der freiwerdenden Spaltneutronen ν ist von der zur Verfügung stehenden Anregungsenergie abhängig, ihr kleinster Wert tritt folglich bei der spontanen Spaltung auf, mit wachsender Einschußenergie steigt $\nu(E_n)$. Der für Reaktorberechnungen wichtige ν-Wert für thermische Neutronen beträgt im Falle von ^{235}U $\nu(E_{th}) = 2{,}40$. Mit zunehmender Massenzahl steigt ν im Mittel ebenfalls an, wie der Tabelle 10.9 entnommen werden kann.

Tabelle 10.9
Mittlere Zahl von Spaltneutronen verschiedener Nuklide

Nuklid	^{233}U	^{235}U	^{238}U*)	^{239}Pu	^{252}Cf
$\nu(E_{th})$	2,50	2,40	—	2,90	
$\nu(1\ \text{MeV})$	2,70	2,60	2,50	3,0	

*) gilt für $E_n = 1{,}5$ MeV

2. Die spektrale Verteilung der emittierten Neutronen gibt Auskunft über den Mechanismus ihrer Emission. Theoretisch denkbare Alternativen sind:

— die Neutronenemission aus dem Nacken-Gebiet im Moment der Spaltung; infolge der „Schattenbildung" durch die Fragmente ist in diesem Falle die bevorzugte Aussendung von Neutronen senkrecht zur Bewegungsrichtung der Spaltfragmente zu erwarten;

— oder die isotope „Verdampfung" von Neutronen mit geringer mittlerer Energie $\bar{E}_n = 2T$ aus den bereits getrennten Fragmenten.

Das experimentell beobachtete Spektrum läßt sich durch

$$P_f(E_n) = \text{const} \exp \cdot (-E_n) \text{ Sh} \sqrt{2E_n} \tag{10.420}$$

mit $\bar{E}_n = 2$ MeV beschreiben. Maximalwerte der Neutronenenergie werden bis über 10 MeV beobachtet (siehe Abb. 10.82). Es entspricht in seiner Form dem Mechanismus der Verdampfung aus den bereits beschleunigten Fragmenten, die Emission erfolgt im Bereich 10^{-19} s. Die bisherigen Untersuchungen schließen Anteil bis zu 15% von Emissionsmechanismen der ersten oder anderer Art nicht aus, endgültige Schlußfolgerungen können jedoch noch nicht gezogen werden.

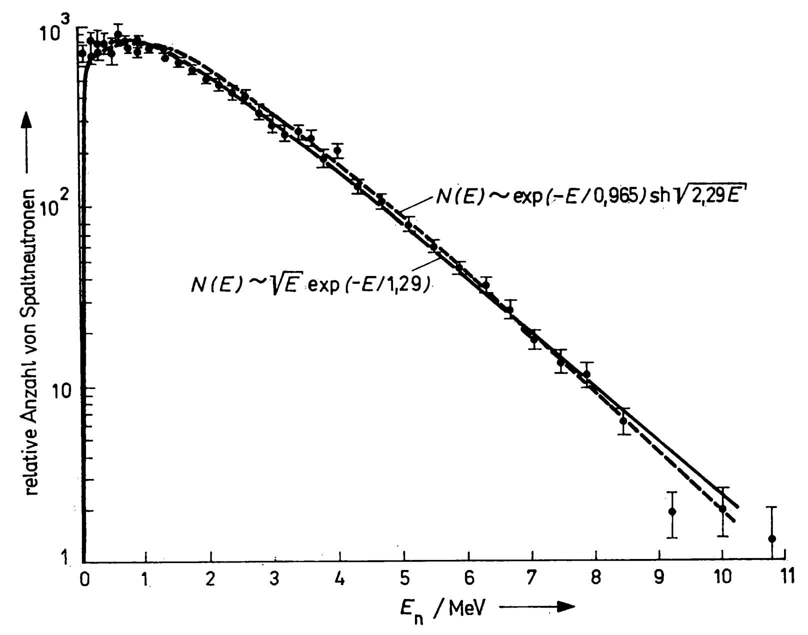


Abb. 10.82
Neutronenspektren der prompten Spaltung von ^{235}U mit thermischen Neutronen

3. Etwa 1% aller bei der Spaltung frei werdenden Neutronen entstehen als „verzögerte Neutronen" im Zeitraum von einigen Sekunden bis Minuten nach der Spaltung. Sie treten als Folge radioaktiver β-Zerfälle der Spaltprodukte in hochenergetische Kernzustände oberhalb der Bindungsenergie $E_B^{(n)}$ auf, sie haben also mit dem Spaltvorgang im engeren Sinne nichts zu tun. Auf Abb. 10.83 ist die Entstehung von zwei wesentlichen Gruppen verzögerter Neutronen infolge des radioaktiven Zerfalls der Spaltprodukt-Nuklide $^{87}_{35}Br$ und $^{137}_{53}J$ dargestellt.

Obgleich der absolute Anteil von verzögerten Neutronen im Vergleich zur Gesamtzahl der Spaltneutronen so gering ist, besitzen sie doch prinzipielle Bedeutung für die Steuerung von Kernreaktoren (siehe Kapitel 11).

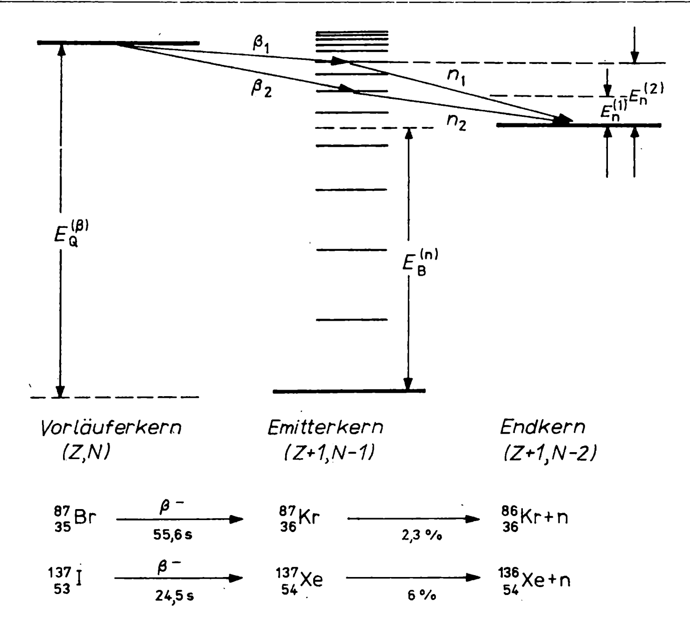


Abb. 10.83
Radioaktive Zerfälle, die zur Emission verzögerter Neutronen führen

10.9. Schwerioneninduzierte Kernreaktionen

Moderne Schwerionenbeschleuniger (Zyklotrons, Linearbeschleuniger) liefern intensive Strahlen schwerer Ionen ($\gtrsim 10^{10}$ Teilchen/s) in einem breiten Massenzahlbereich bis ^{238}U und mit spezifischen Energien $\varepsilon = E_\text{r}/A_1$ bis zu 20 MeV/Nukleon und darüber, wobei unter schweren Ionen im allgemeinen Projektile mit der Massenzahl $A_1 > 4$ verstanden werden. Diese Entwicklung der Beschleunigertechnik macht es möglich, die allgemeinen Gesetzmäßigkeiten von Stößen zwischen komplexen Kernen zu untersuchen.

10.9.1. Mechanismus schwerioneninduzierter Kernreaktionen

Wir stellen zunächst einige Besonderheiten zusammen, in denen sich schwerioneninduzierte Kernreaktionen von Reaktionen mit leichten Projektilen wie p, n, d, ... unterscheiden.

— Beide Reaktionspartner besitzen eine große Masse A_1, A_2, so daß ein wesentlicher Teil der kinetischen Energie im Eingangskanal in der Energie der Schwerpunktsbewegung gebunden ist. Für die Kernreaktion bestimmend bleibt die Energie der Relativbewegung im Schwerpunktsystem E_S, die um den Faktor $A_2/(A_1 + A_2)$ kleiner als die Laborenergie E_L ist, $E_\text{S} = E_\text{L}A_2/(A_1 + A_2)$. Während bei der Streuung z. B. von 14 MeV-Neutronen an Kernen nur Partialwellen bis $L \approx 14$ zu berücksichtigen sind, erfolgt die periphere Wechselwirkung zweier schwerer Kerne in hohen Drehimpulszuständen von etwa $100\hbar$. Infolge der großen Massenzahl von Projektil und Target bilden sich im Wechselwirkungsgebiet Zwischenzustände eines Gesamtsystems aus 300—400 Nukleonen. Die Annahme eines punktförmigen

Projektils wie etwa bei nukleoneninduzierten Kernreaktionen ist nicht länger zulässig; vielmehr kommen makroskopische Aspekte ins Spiel. Außerdem gelingt es in schwerioneninduzierten Kernreaktionen, durch Wahl der Projektil-Target-Kombination Kerne weitab von der Stabilitätslinie zu erzeugen, z. B. Transurane oder Nuklide mit großem Neutronenüberschuß.

— Die beiden Reaktionspartner besitzen eine hohe Ladungszahl Z_1, Z_2. Deshalb spielen in der Wechselwirkung Coulomb-Effekte eine große Rolle, so daß viele Erscheinungen aus dem Zusammenspiel von Coulomb- und Kernkräften resultieren. Das Coulomb-Potential beeinflußt insbesondere die Relativbewegung der beiden Kerne, wobei die kinetische Energie im Eingangskanal einen Mindestwert erreichen muß, damit sich Projektil und Target einander soweit annähern, daß die kurzreichweitigen Kernkräfte wirksam werden. Die asymptotische Energie im Schwerpunktsystem, die aufgebracht werden muß, um die Coulomb-Abstoßung zu überwinden, bezeichnet man als Coulomb-Barriere $E_C = V_C^{(B)}$,

$$E_C = V_C^{(B)} = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{R_C} . \tag{10.421}$$

Der empirisch gefundene Coulomb-Radius R_C ist größer als die Summe der Radien der Massenverteilungen R_1, R_2,

$$R_C = R_1 + R_2 + (3{,}0 \pm 0{,}5)\ \mathrm{fm}\,, \qquad R_i = 1{,}12 A_i^{1/3} - 0{,}94 A^{-1/3}\ \mathrm{fm}\,. \tag{10.422}$$

Bei Energien oberhalb der Coulomb-Barriere können durch Fusion von Projektil und Target Compoundkerne mit hoher Anregungsenergie und hohem Drehimpuls erzeugt werden. Schwerioneninduzierte Kernreaktionen sind daher besonders effektiv, um hochangeregte metastabile Compoundsysteme mit hohem Spin zu erzeugen. Die Analyse der Zerfälle dieser Systeme liefert Aussagen über die Struktureigenschaften schnellrotierender Kerne (Hochspinzustände; siehe Abschnitt 8.6.6).

— Die Drehimpulse der Partialwellen, in denen die Kern-Kern-Wechselwirkung erfolgt, sind sehr groß gegenüber $\hbar$. Außerdem ist die de Broglie-Wellenlänge der Relativbewegung $\lambda\!\!\!^{-}$,

$$\frac{1}{\lambda\!\!\!^{-}} = k = 0{,}219 A_{12} \sqrt{\varepsilon}\ \mathrm{fm}^{-1}\,, \qquad A_{12} = A_1 \cdot A_2/(A_1 + A_2) \tag{10.423}$$

klein gegenüber charakteristischen Abmessungen des Systems, wie dem Wechselwirkungsradius $R_1 + R_2$. Deshalb können für die Relativbewegung zweier hochenergetischer schwerer Ionen klassische Bahnvorstellungen aufrecht erhalten werden: bei gegebener Einschlußenergie läßt sich die Relativbewegung durch den Stoßparameter (Drehimpuls L) charakterisieren, der mit einer bestimmten Bahn (Trajektorie) verknüpft ist. Für sehr große Stoßparameter liegt eine reine Coulomb-Trajektorie vor, die durch den Umkehrpunkt R_{min} und den Ablenkwinkel Θ_S charakterisiert wird,

$$R_{min} = a \left[1 + \operatorname{arc\,sin} \left(\frac{\Theta_S}{2} \right) \right] \tag{10.424}$$

$$\Theta_S = 2/\sin\,(a/(R_{min} - a))$$

$$a = 0{,}72 \frac{Z_1 Z_2}{A_{12}}\ \mathrm{fm}\,, \qquad \varepsilon = E_L/A_1\,.$$

Bei kleinen Stoßparametern überwiegt die Kernwechselwirkung. Den Grenzfall, bei dem der Umkehrpunkt mit dem Coulomb-Radius übereinstimmt, bezeichnet man als Grazing-Trajektorie. Bei Stoßparametern $L > L_{gr}$,

$$L_{gr} = kR_C \left(\frac{\varepsilon - \varepsilon_C}{\varepsilon}\right)^{1/2}, \quad \varepsilon_C = \frac{E_C}{A_{12}}, \quad k = 0{,}219 A_{12} \varepsilon^{1/2} \text{ fm}^{-1} \tag{10.425}$$

liegt eine reine Coulomb-Wechselwirkung vor.

2. Für die Reaktion ^{40}Ar(288 MeV) + ^{232}Th geben wir für die Größen, die die Kinematik der Reaktion charakterisieren, die Zahlenwerte an. Die Radien der Massenverteilung der beiden Kerne sind $R_1 = 3{,}6$ fm und $R_2 = 6{,}7$ fm. Der Coulomb-Radius liegt bei $R_C = 13{,}3$ fm. Für die spezifische Energie im Laborsystem erhält man $\varepsilon = 7{,}2$ MeV/Nukleon. Die Relativenergie im Schwerpunktsystem beträgt $E_S = 245{,}6$ MeV. Nach (10.421) ergibt sich für die Coulomb-Barriere der Wert $E_C = 175{,}6$ MeV. Die kinetische Energie an der Coulomb-Barriere ist $E_S - E_C = 70$ MeV; die zugehörige spezifische Energie von 1,75 MeV/Nukleon bleibt weit unterhalb der Fermi-Energie. Die de Broglie-Wellenlänge der Relativbewegung an der Coulomb-Barriere ist $\lambda\!\!\!^{-} = 0{,}05$ fm, macht also nur 0,5 % des Wechselwirkungsradius $R_1 + R_2 = 10{,}3$ fm aus. Für den Bahndrehimpuls der Grazing-Trajektorie ergibt sich $L_{gr} = 142$. Der Umkehrpunkt der Grazing-Trajektorie und der zugehörige Ablenkwinkel sind $R_{min} = 13{,}3$ fm bzw. $\Theta_{gr} = 67{,}6°$.

3. Bei der groben Klassifizierung des Wechselwirkungsmechanismus zwischen zwei schweren Ionen unterscheidet man vier Reaktionstypen (siehe Abb. 10.84):

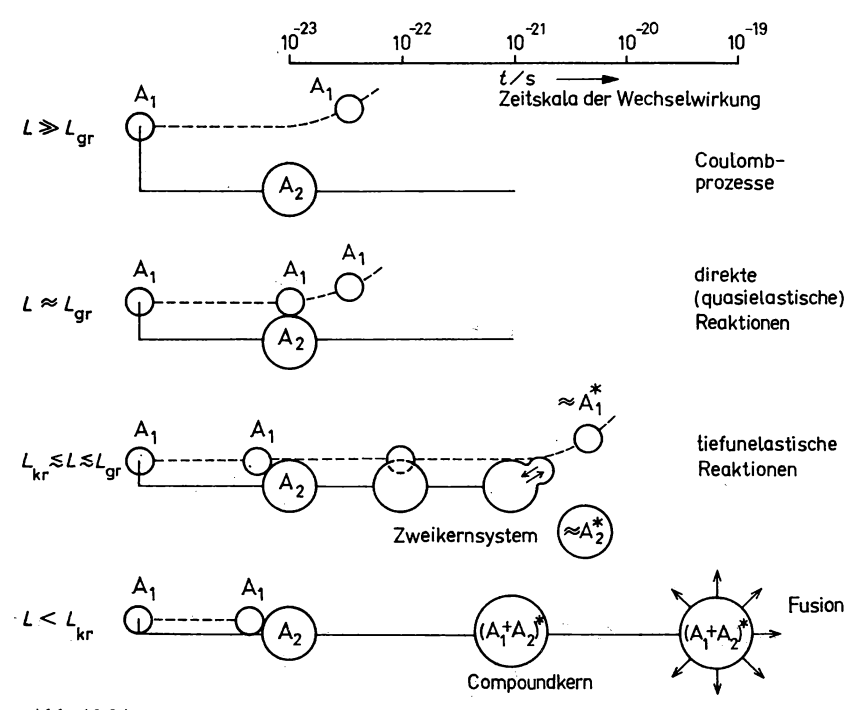


Abb. 10.84
Klassifizierung des Wechselwirkungsmechanismus zwischen zwei schweren Ionen A_1, A_2 gegebener Einschußenergie nach dem Stoßparameter (Drehimpuls L) und der Wechselwirkungszeit t

- elastische Rutherford-Streuung und Coulomb-Anregung kollektiver Zustände von Target oder (und) Projektil;
- direkte Reaktionen, bei denen die kurze Reaktionszeit von 10^{-22} bis 10^{-23} s die Anregung nur weniger innerer Freiheitsgrade von Projektil und Target erlaubt;
- tiefunelastische Reaktionen, welche über die Bildung eines relativ langlebigen Zweikernsystems ablaufen. In diesem System sind zwar sehr viele innere Freiheitsgrade angeregt, seine Lebensdauer von 10^{-21} bis 10^{-22} s reicht jedoch nicht aus, um für alle Freiheitsgrade einen Gleichgewichtszustand zu erreichen. Ähnlich wie bei direkten Reaktionen ist in den experimentellen Daten der Eingangskanal noch „erkennbar";
- Fusionsreaktionen, bei denen ein hochangeregter Coumpoundkern gebildet wird, welcher in typischen Zeiten von 10^{-18} bis 10^{-19} s sich entweder durch Teilchen- und Gammaemission in den Grundzustand abregt oder spaltet.

Für die angeführten Reaktionsmechanismen sind bestimmte Bereiche des Drehimpulses L der Relativbewegung im Eingangskanal charakteristisch. Bei Trajektorien mit $L \gg L_{gr}$ bleibt die Wechselwirkung auf reine Coulomb-Prozesse beschränkt. Direkte Reaktionen dominieren für Stoßparameter $L \approx L_{gr}$. Tiefunelastische Stöße erwartet man für stärker zentrale Stöße $L < L_{gr}$, bis unterhalb eines kritischen Drehimpulses L_{kr} eine Fusion von Target und Projektil erfolgt. Dieses Bild führt auf die in Abb. 10.85 angegebene schematische Aufteilung des totalen Wirkungsquerschnitts in verschiedene Partialquerschnitte $\sigma_L = d\sigma/dL = 2\pi\hbar^2 L$ (vgl. (10.37)).

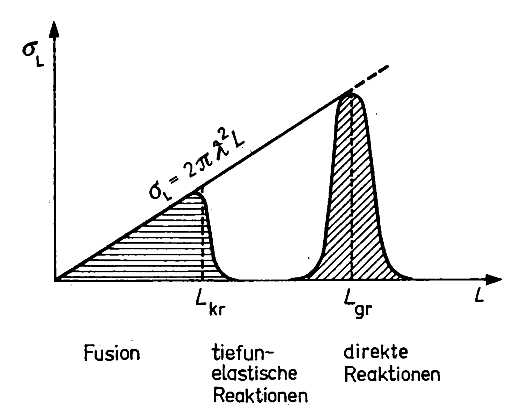


Abb. 10.85
Schematische Aufteilung des totalen Wirkungsquerschnitts in Partialwellenbereiche

Im folgenden diskutieren wir einige experimentelle und theoretische Resultate, die für verschiedene Typen schwerioneninduzierter Kernreaktionen charakteristisch sind.

10.9.2. Elastische Streuung

1. Nach der in Anhang B entwickelten Partialwellenmethode wird der differentielle elastische Streuquerschnitt $d\sigma_{el}/d\Omega$ bestimmt durch die Streuamplitude $f(\Theta)$, die sich aus einem Coulomb- und einem nuklearen Anteil zusammensetzt,

$$d\sigma_{el}/d\Omega = |f(\Theta)|^2 ,$$

$$f(\Theta) = f_C(\Theta) + \frac{i}{2k} \sum_{L=0}^{\infty} (2L+1)\, e^{2i\sigma_L}(1 - S_L)\, P_L(\cos\Theta) . \qquad (10.426)$$

In Gl. (10.426) ist

$$\sigma_L = \arg[\Gamma(L + 1 + in)], \qquad n = 0{,}157\,\frac{Z_1 Z_2}{\varepsilon^{1/2}} \tag{10.427}$$

die Coulomb-Streuphase, δ_L die durch Kernwechselwirkung bedingte Phasenverschiebung. Im Sinne eines klassischen Modells mit starker Absorption nehmen wir an, daß für $L > L_{gr}$ ($\Theta < \Theta_{gr}$) der elastische Streuquerschnitt gleich dem Rutherford-Querschnitt ist, während für $L < L_{gr}$ ($\Theta > \Theta_{gr}$) das Projektil vollständig absorbiert wird:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_{el}}{d\Omega} &= \frac{d\sigma_R}{d\Omega} = \frac{n^2}{4k^2}\sin^{-4}\left(\frac{\Theta}{2}\right) \quad \text{für} \quad \Theta \leqq \Theta_{gr}\,; \\ \frac{d\sigma_{el}}{d\Omega} &= 0 \quad \text{für} \quad \Theta > \Theta_{gr}\,. \end{aligned} \tag{10.428}$$

Für den totalen Reaktionsquerschnitt σ_{tot} erhält man nach Gl. (B.148)

$$\sigma_{tot} = \pi\lambda^2 \sum_{L=0}^{L_{max}} (2L + 1) = \pi\lambda^2 (L_{max} + 1)^2\,. \tag{10.429}$$

Setzt man $(L_{max} + 1)^2 \approx L_{gr}^2$, dann ergibt sich

$$\sigma_{tot} = \begin{cases} \pi\lambda^2 L_{gr}^2 = \pi R_c^2 (1 - \varepsilon_c/\varepsilon) & \text{für} \quad \varepsilon > \varepsilon_c\,, \\ 0 & \text{für} \quad \varepsilon \leqq \varepsilon_c\,. \end{cases} \tag{10.430}$$

Der Reaktionsquerschnitt verschwindet für Einschußenergien unterhalb der Coulomb-Barriere. In Abb. 10.86 ist das Verhalten von $d\sigma_{el}/d\sigma_R$ und σ_{tot} schematisch dargestellt.

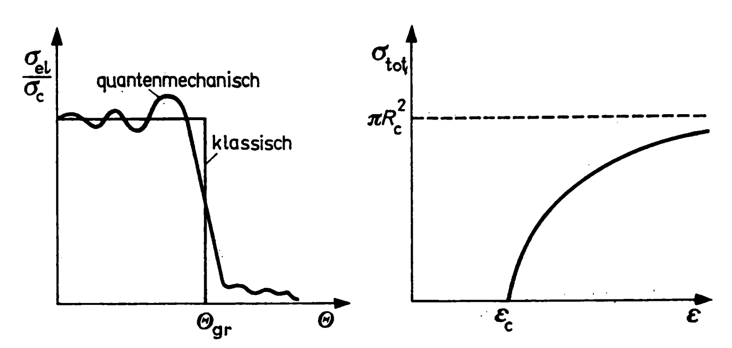


Abb. 10.86
Schematische Darstellung des Verlaufs des elastischen Streuquerschnitts σ_{el} und des totalen Reaktionsquerschnitts σ_{tot} in einem klassischen Modell mit vollständiger Absorption für $L < L_{gr}$

Die Experimente zur elastischen Kern-Kern-Streuung zeigen im wesentlichen die in Gl. (10.428) ausgedrückte Winkelabhängigkeit (siehe Abb. 10.87). Das Verhältnis von gemessenem Streuquerschnitt zum Coulomb-Querschnitt $\frac{d\sigma_{el}}{d\sigma_R}$ bleibt konstant etwa 1 unterhalb des Grazing-Winkels, während für $\Theta > \Theta_{gr}$ ein starker Abfall auftritt. Wenn man Quanteneffekte berücksichtigt, dann werden auch die leichten Oszillationen für $\Theta < \Theta_{gr}$ und die Streuung in klassisch nicht erreichbare Winkelbereiche verständlich.

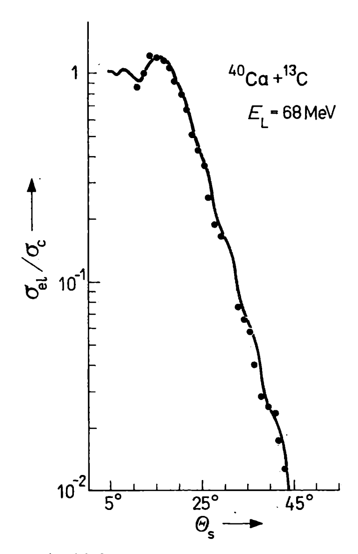


Abb. 10.87
Reaktion $^{40}Ca + ^{13}C$, $E = 68$ MeV. Vergleich des gemessenen differentiellen Wirkungsquerschnitts der elastischen Streuung mit Rechnungen im optischen Modell

2. In der Energieabhängigkeit des elastischen Streuquerschnitts leichter Systeme ($^6Li + ^{12}C$, $^{12}C + ^{13}C$, $^{14}N + ^{16}O$, ...) wird im Bereich der Einschußenergie von $E_S = 3$ bis 15 MeV eine Großstruktur beobachtet. Die Breiten der Oszillationen von 2 bis 4 MeV weisen darauf hin, daß eine Interpretation der Daten auf der Grundlage eines optischen Modells möglich ist. Verwendet werden Ansätze mit einem Woods-Saxon-Potential für Real- und Imaginärteil (Volumenabsorption) (siehe Abschnitt 10.5.4). Ein charakteristischer Satz optischer Parameter für die Reaktion $^{16}O + ^{16}O$ im Energiebereich 12 bis 40 MeV ist:

$$V = 12 + 0{,}25E\,, \qquad r = 1{,}35\ \mathrm{fm}\,, \qquad a = 0{,}49\ \mathrm{fm}\,,$$

$$W_V = 0{,}4 + 0{,}1E\,, \qquad r_V = 1{,}35\ \mathrm{fm}\,, \qquad a_V = 0{,}49\ \mathrm{fm}\,.$$

Im Unterschied zum optischen Potential für die elastische Nukleonenstreuung ist das optische Potential für die Ion-Ion-Streuung nicht geeignet, Wellenfunktionen für die Relativbewegung bei kleinen Projektil-Target-Abständen zu berechnen. Das optische Potential für schwere Ionen gilt nur für große Abstände, bei denen die Überlappung der Massenverteilungen von Projektil und Target gering ist und nur eine schwache Absorption vorliegt. Um Übereinstimmung mit dem Experiment zu erhalten ist es oft notwendig, die Stärke der Absorption vom Stoßparameter abhängig zu machen, $W_V = W_V(L)$.

3. Bei leichten Systemen ($^{16}O + ^{16}O$, $^{12}C + ^{12}C$, ...) zeigen Reaktions- und Streuquerschnitt für Einschußenergien in der Nähe und knapp über der Coulomb-Barriere charakteristische Resonanzen, die Breiten von 100 bis 500 keV besitzen (siehe Abb. 10.88). Diese Strukturen weisen auf Zwischenzustände des Compoundsystems hin, deren Lebensdauer groß gegenüber der Wirkungszeit direkter Reaktionen ist. Um derartige intermediäre Resonanzen zu erklären, nimmt man an, daß im Eingangskanal eine Anregung von Projektil oder (und) Target erfolgt, wobei Übergänge in kollektive Zustände bevorzugt auftreten. Dieser unelastische Prozeß führt zu Energie- und Drehimpulsverlust in der Relativbewegung, so daß sich im Zwischenzustand Target und Projektil in einem anderen effektiven Wechselwirkungspotential bewegen. Auf diese

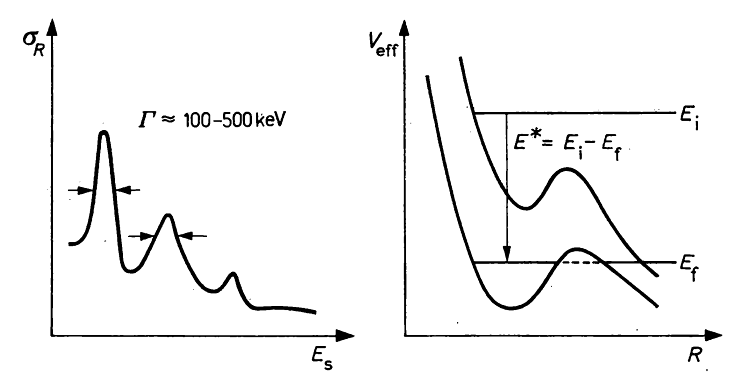


Abb. 10.88
Intermediäre Strukturen im Reaktionsquerschnitt (schematisch) (a), und Bildung quasimolekularer Zustände im effektiven Potential V_{eff} (b). E^*: Energie der kollektiven Anregung

Weise kann das System einen quasistationären Zustand in der „Tasche" des effektiven Potentials erreichen, der dann mit bestimmter Wahrscheinlichkeit durch Tunneleffekt zerfällt (siehe Abb. 10.88). Da in diesem speziellen Zwischenzustand die Identität beider Kerne erhalten bleibt, bezeichnet man ihn als quasimolekularen Zustand (Kern-Kern-Molekül).

10.9.3. Unelastische Streuung

1. Auch bei Einschußenergien unterhalb der Coulomb-Barriere sind wechselseitige Anregungen von Target und Projektil durch Coulomb-Kräfte möglich, die in einem halbklassischen Modell behandelt werden können. Das Projektil, das sich auf einer klassischen Rutherford-Trajektorie bewegt, wirkt als Punktquelle für ein elektromagnetisches Feld. Dieses äußere Feld führt zu Anregungen des Targets, wobei die entsprechende Übergangswahrscheinlichkeit in diskrete Endzustände quantenmechanisch berechnet wird. In erster Ordnung der Störungstheorie wächst der Wirkungsquerschnitt für diese sogenannte Coulomb-Anregung mit Z_1^2, so daß schwere Ionen für die Untersuchung solcher Prozesse sehr geeignet sind. In höherer Ordnung werden Vielfachanregungen wahrscheinlich. Ein spezieller Prozeß zweiter Ordnung ist die Umorientierung des Spins des angeregten Zustandes: im ersten Schritt erfolgt der Übergang $0^+ \rightarrow IM$, während eine zweite Wechselwirkung die Änderung der Spinorientierung bewirkt, $IM \rightarrow IM'$. Dieser Vorgang kann ausgenutzt werden, um das statische Quadrupolmoment im angeregten Zustand zu messen. In höherer Ordnung sind Vielfachanregungen möglich, die z. B. die stufenweise Anregung einer Rotationsbande erlauben, so daß in der Coulomb-Anregung auch Hochspinzustände erreicht werden. Mit ^{208}Pb als Projektil ist es gelungen, in der Rotationsbande von ^{238}U das Niveau 28^+ zu besiedeln.

2. Bei Einschußenergien oberhalb der Coulomb-Barriere erfolgt die Anregung diskreter Endzustände von Projektil und Target auch durch eine unelastische Kernwechselwirkung, wobei im allgemeinen eine destruktive Interferenz von Coulomb- und Kernamplitude auftritt. Wie bei leichten Projektilen beobachtet man auch in unelastischen Ion-Ion-Stößen eine starke Selektivität, die Rotations- und Vibrationsanregungen infolge einer Oberflächenwechselwirkung der beiden Kerne stark bevorzugt.

Das Diffraktionsbild der Winkelverteilung, das aus Abb. 10.89 für die Streuung von ^{16}O an ^{58}Ni ersichtlich ist, entsteht durch die Interferenz mehrere Trajektorien, wie man durch Betrachtung der Ablenkfunktion $\Theta(L)$ erkennt. Für große Stoßparameter wird der Ablenkwinkel allein durch die abstoßende Coulomb-Wechselwirkung bestimmt, so daß Θ mit geringer werdendem L ansteigt. Wird L kleiner als L_{gr}, dann kommen anziehende Kernkräfte ins Spiel, die die abstoßende Coulomb-Kraft zum Teil kompensieren und eine Ablenkung zu kleineren Winkeln als im Coulomb-Fall bewirken. Das Maximum in der Ablenkfunktion definiert den sogenannten Regenbogenwinkel. Am Regenbogenwinkel wird der klassische Streuquerschnitt unendlich groß,

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{klass.}} = \lambda^2 L \left(\sin\Theta \frac{d\Theta}{dL}\right)^{-1} \tag{10.431}$$

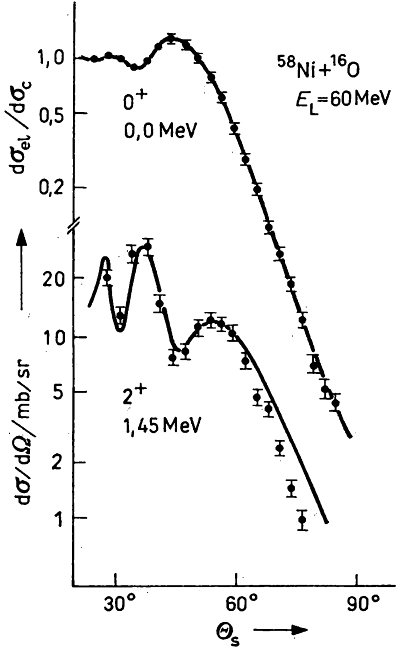


Abb. 10.89
Elastische und unelastische Streuung von ^{16}O (60 MeV) an ^{58}Ni. Die experimentellen Daten werden mit DWBA-Rechnungen verglichen

Für Stoßparameter, die zu einer starken Überlappung der Massenverteilung der Reaktionspartner führen, wird die Kernwechselwirkung so stark, daß eine Ablenkung zur anderen Seite der Strahlrichtung erfolgt. Man sagt, daß eine Ablenkung zu negativen Streuwinkeln vorliegt. Im Experiment können Trajektorien zu positiven und negativen Streuwinkeln nicht voneinander unterschieden werden. Das Interferenzbild im Wirkungsquerschnitt ergibt sich nach Abb. 10.90 im allgemeinen durch die Überlagerung von drei Trajektorien: einer reinen Coulomb-Bahn und zwei Trajektorien, die durch den unterschiedlichen Einfluß der Kernwechselwirkung für verschiedene Stoßparameter zustande kommen (positive und negative Streuwinkel).

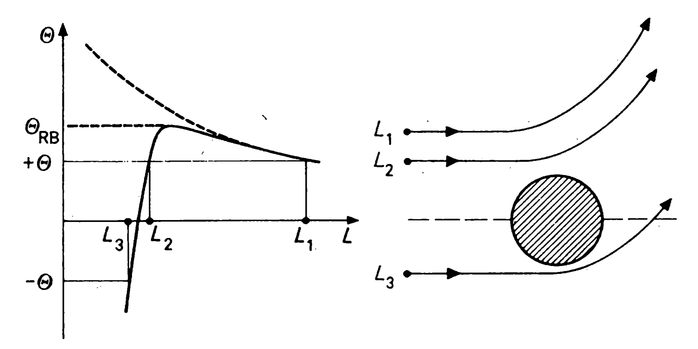


Abb. 10.90
Schematische Darstellung der klassischen Ablenkfunktion $\Theta(L)$ mit Definition positiver und negativer Ablenkwinkel sowie des Regenbogenwinkels. Die zu den Stoßparametern L_1, L_2, L_3 gehörigen Trajektorien sind experimentell nicht zu unterscheiden. Θ_{RB}: Regenbogenwinkel

10.9.4. Transferreaktionen

1. Bei schwerioneninduzierten Kernreaktionen werden ähnlich wie bei Reaktionen mit leichten Projektilen direkte Reaktionen beobachtet, in denen zwischen den Reaktionspartnern Nukleonengruppen ausgetauscht werden, ohne daß dabei Freiheitsgrade des Cores ins Spiel kommen. Solche Transferreaktionen können zu isolierten Endzuständen führen, wobei eine hohe Selektivität der Anregung durch die Struktur der beteiligten Kernzustände bedingt ist. Die Winkel-

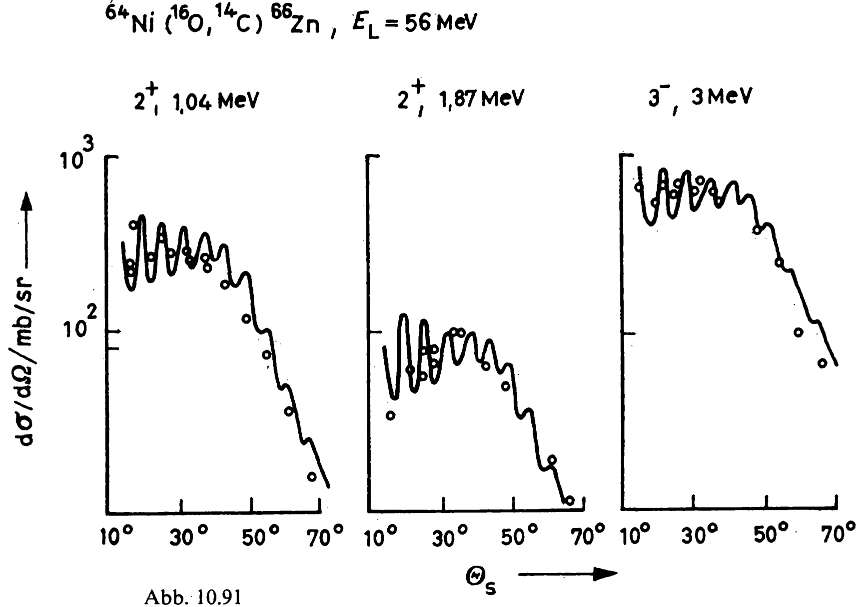


Abb. 10.91
Zweiteilchen-Transferreaktion $^{64}Ni(^{16}O, ^{14}C)^{66}Zn$, E_L = 56 MeV zu verschiedenen Endzuständen. Die experimentellen Daten werden mit DWBA-Rechnungen verglichen.

verteilung der Reaktionsprodukte besitzt oft eine Glockenform mit dem Maximum am Grazing-Winkel, oder einen dem elastischen Streuquerschnitt ähnlichen Verlauf. Nach einem klassischen Modell folgt daraus, daß sich die Massenmittelpunkte der Kerne auf einer Trajektorie bewegen, welcher der Transfer als schwache Störung überlagert ist. Als Beispiel betrachten wir in Abb. 10.91 die Zweiteilchen-Transferreaktion $^{64}Ni(^{16}O, ^{14}C)$. Die auftretenden Oszillationen in der Winkelverteilung kommen durch die Interferenz verschiedener Trajektorien zustande, wobei die Einzelheiten des Beugungsbildes von dem im Nukleonentransfer übertragenen Drehimpuls abhängen.

2. Die Berechnung des differentiellen Wirkungsquerschnitts von schwerioneninduzierten Transferreaktionen erfolgt wie bei Reaktionen mit leichten Projektilen in Bornscher Näherung mit gestörten Wellen (DWBA, siehe Abschnitt 10.3.3.3). Bei Schwerionenreaktionen ergeben sich aber einige Besonderheiten:

— Der Reaktionsmechanismus von Mehrteilchen-Transferreaktionen kann sehr komplex sein, da nicht nur vor und nach dem eigentlichen Transfer unelastische Anregungen sehr wahrscheinlich sind, sondern auch ein sukzessiver Transfer einzelner Nukleonen möglich wird.
— Die Nullreichweite-Näherung (siehe Abschnitt 10.6.3.1) ist nicht mehr gerechtfertigt, so daß zur Berechnung des T-Matrixelements mehrdimensionale Integrale auszuführen sind.
— Beim Übergang der Nukleonengruppe sind Rückstoßeffekte zu berücksichtigen, d. h., in den Kanalkoordinaten, von denen die gestörten Wellen im Eingangs- und Ausgangskanal abhängen, sind keine Näherungen möglich, die aus sehr unterschiedlichen Massenverhältnissen der beteiligten Kerne folgen würden.

In direkten Transferreaktionen oder unelastischen Stoßprozessen wird nur ein geringer Bruchteil der kinetischen Energie im Eingangskanal auf die Anregung innerer Freiheitsgrade der Fragmente übertragen. Außerdem tauschen Target und Projektil nur wenige Nukleonen aus, so daß sich Eingangs- und Ausgangskanal hinsichtlich der Aufteilung der Gesamtnukleonenzahl in zwei Nukleonengruppen nur wenig unterscheiden. Man faßt derartige Prozesse deshalb auch unter dem Begriff der quasielastischen Reaktionen zusammen.

10.9.5. Tiefunelastische Stoßprozesse

1. Die tiefunelastische Schwerionenreaktion läuft bei Einschußenergien von etwa 10 MeV/Nukleon nach einem Mechanismus ab, der durch folgende Merkmale charakterisiert wird:

— Die Reaktion ist binär, wobei die Stoßpartner auch im Wechselwirkungsgebiet ihre relative Identität bewahren.
— Die kinetische Energie der Relativbewegung im Eingangskanal dissipiert vollständig in die innere Anregung der Fragmente, so daß im Unterschied zu quasielastischen Reaktionen ein starker Energieverlust auftritt. Das Maximum im Spektrum der kinetischen Energie der projektilähnlichen Reaktionsprodukte entspricht der kinetischen Energie zweier deformierter Fragmente, die durch die Coulomb-Abstoßung beschleunigt worden sind. Die dissipierte Energie ist etwa im Verhältnis der Massenzahlen auf die beiden Fragmente aufgeteilt.
— Während der Wechselwirkungszeit erfolgt eine Diffusion von Nukleonen zwischen Target und Projektil, so daß sich eine breite Massen- und Ladungsverteilung der Fragmente im Ausgangskanal einstellt.
— Die Winkelverteilung ist stark anisotrop. Energieverlust und Winkelverteilung sind korreliert.

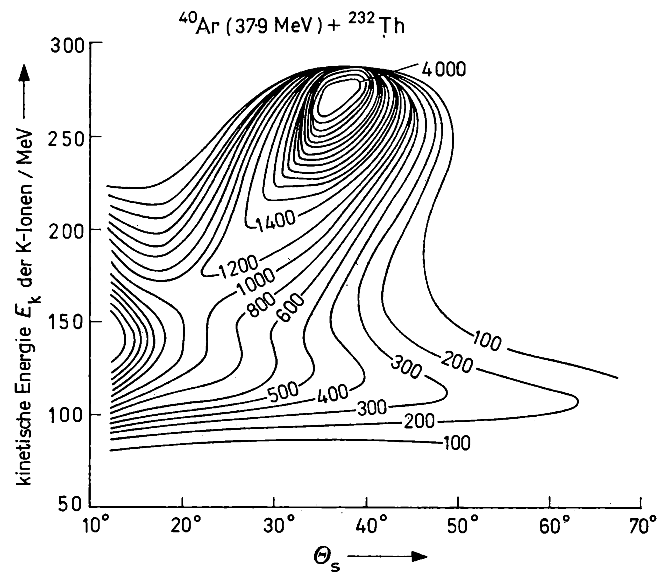


Abb. 10.92
Reaktion ^{40}Ar (379 MeV) + ^{232}Th. Höhenliniendarstellung des experimentellen differentiellen Wirkungsquerschnitts $d^2\sigma/dE\,d\Theta$ (in μb/MeV sr) für die Emission von K-Kernen der kinetischen Energie E unter dem Reaktionswinkel Θ im Schwerpunktsystem (Wilczynski-Plot)

2. Die Abb. 10.92 zeigt die Höhenliniendarstellung des doppelt differentiellen Wirkungsquerschnitts $d^2\sigma/dE\,d\Theta$ der Reaktion ^{40}Ar(380 MeV) + ^{232}Th als Funktion der kinetischen Energie E und des Streuwinkels Θ der projektilähnlichen Reaktionsprodukte. Bei einem festen Streuwinkel in der Nähe des Grazing-Winkels ($\Theta_{gr} \approx 35°$) beobachtet man zwei deutlich voneinander getrennte Maxima im Energiespektrum. Das erste Maximum ist in der Nähe der Einschußenergie lokalisiert, das zweite liegt bei einer kinetischen Endenergie von etwa 120 MeV, was einem Energieverlust von etwa 160 MeV entspricht. Für kleiner werdende Reaktionswinkel nähern sich beide Maxima einander an, während für größere Winkel nur das zweite Maximum übrig bleibt. Das erste hohe Maximum im Wirkungsquerschnitt in der Nähe der Einschußenergie und des Grazing-Winkels entspricht den quasielastischen Reaktionen

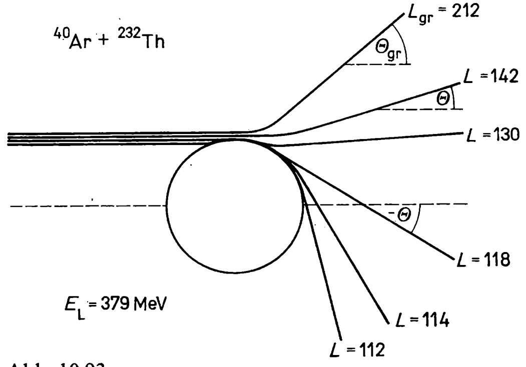


Abb. 10.93
Trajektorien der tiefunelastischen Reaktion ^{40}Ar (379 MeV) + ^{232}Th nach einem zweidimensionalen Reibungsmodell

mit $L \approx L_{gr}$ im Eingangskanal. Für Partialwellen mit $L < L_{gr}$ bildet sich auf Grund der stärker werdenden Kernkräfte ein Zweikernsystem aus, das einen großen Drehimpuls besitzt und infolge dieser Rotation bei Reaktionswinkeln $\Theta < \Theta_{gr}$ zerfällt. In der Kontaktzeit wird die kinetische Energie der Relativbewegung in innere Anregung der Fragmente umgesetzt, wobei gleichzeitig der Drehimpuls der Bahnbewegung teilweise auf eine Rotation der Fragmente übergeht (Dissipation des Drehimpulses). Mit wachsender Lebensdauer des Zweikernsystems und damit kleiner werdendem Reaktionswinkel tritt ein ansteigender Energieverlust in der Relativbewegung auf, so daß in der Höhenliniendarstellung von $\mathrm{d}^2\sigma/\mathrm{d}E\,\mathrm{d}\Theta$ das Maximum im Spektrum zu kleineren kinetischen Endenergien wandert. Dabei treten auch negative Ablenkwinkel auf, die zu dem zweiten, tiefunelastischen Maximum führen. Einige charakteristische Trajektorien sind in Abb. 10.93 dargestellt.

3. Die phänomenologische Theorie der tiefunelastischen Stöße basiert ebenfalls auf einem klassischen Trajektorienmodell. Um die Drehimpuls- und Energiedissipation zu berücksichtigen, führt man in die Bewegungsgleichung eine Reibungskraft ein. Für die Radialbewegung gilt die Gleichung (μ: reduzierte Masse)

$$\mu\ddot{R} + \frac{\partial}{\partial R} V_L(R) = -\gamma_R f_R(R)\,\dot{R}\,. \tag{10.432}$$

In Gl. (10.432) ist V_L das konservative effektive Potential, das aus Coulomb-Potential, Ion-Ion-Kernpotential und dem Zentrifugalpotential besteht. Auf der rechten Seite steht das zu $\dot{R}$ proproportionale Reibungsglied. Der Formfaktor $f(R)$ lokalisiert die Wirkung der Reibungskraft im Abstand R der Ionen, γ_R ist ein durch Anpassung an Experimente zu bestimmender Stärkeparameter. Besitzt die Reibungskraft auch eine tangentiale Komponente, dann bleibt auch der Drehimpuls längs der Trajektorie keine Erhaltungsgröße mehr,

$$\mu\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} = -\gamma_\Theta f_\Theta(R)\,L\,. \tag{10.433}$$

Die Drehimpulsübertragung bricht ab, wenn das Zweikernsystem als Ganzes starr rotiert. Für die Energiedissipation gilt

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = -\gamma_R f_R(R)\,\dot{R}^2 - \gamma_\Theta f_\Theta(R)\,\dot{\Theta}^2\,. \tag{10.434}$$

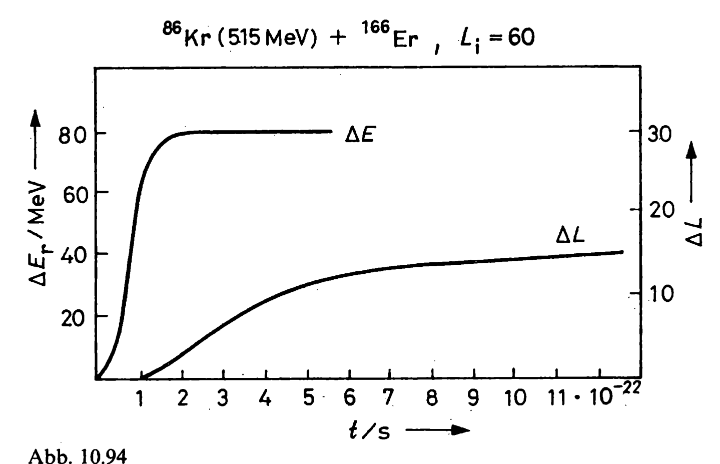


Abb. 10.94
Energie- und Drehimpulsverlust in der Reaktion ^{86}Kr (515 MeV) + ^{166}Er als Funktion der Zeit. Die Kurven wurden für die typisch tiefunelastische Trajektorie mit dem Stoßparameter $L_i = 60$ im Eingangskanal auf der Grundlage eines Reibungsmodells berechnet

Die Abb. 10.94 zeigt den radialen Energieverlust und die Drehimpulsdissipation in Abhängigkeit von der Zeit für die Reaktion ^{86}Kr (515 MeV) + ^{166}Er, wobei eine typisch tiefunelastische Trajektorie ($L_i = 60$) ausgewählt wurde. Man erkennt, daß die Energiedissipation sehr schnell innerhalb von etwa 10^{-22} s verläuft, während die Drehimpulsdissipation erst bei etwa 10^{-21} s beendet ist. Die gesamte Wechselwirkungszeit beträgt $3 \cdot 10^{-21}$ s.

4. Neben dem großen Energieverlust in der Relativbewegung ist für tiefunelastische Prozesse die Bildung vieler Elemente und Isotope charakteristisch. Bezeichnet man mit Z_1 die Ladung des projektilähnlichen Fragments, dann besitzt die Verteilung $P(Z_1, t)$ i. a. ein deutliches Maximum bei $Z_1 = Z_p$, der Ladung des Projektils, wie das für die Reaktion ^{86}Kr (515 MeV) + ^{166}Er in Abb. 10.95 verdeutlicht wird. Ähnlich wie die Kopplung der Relativbewegung an die innere Anregung der Fragmente wird auch der Prozeß des Nukleonenaustausches zwischen Projektil und Target statistisch behandelt, wobei zur Berechnung der zeitlichen Entwicklung der Verteilungsfunktion $P(Z_1, t)$ meistens eine Fokker-Planck-Gleichung mit zeitunabhängigen Koeffizienten verwendet wird,

$$\frac{\partial}{\partial t} P(Z_1, t) = -v \frac{\partial}{\partial Z_1} P(Z_1, t) + D \frac{\partial^2}{\partial Z_1^2} P(Z_1, t) . \tag{10.435}$$

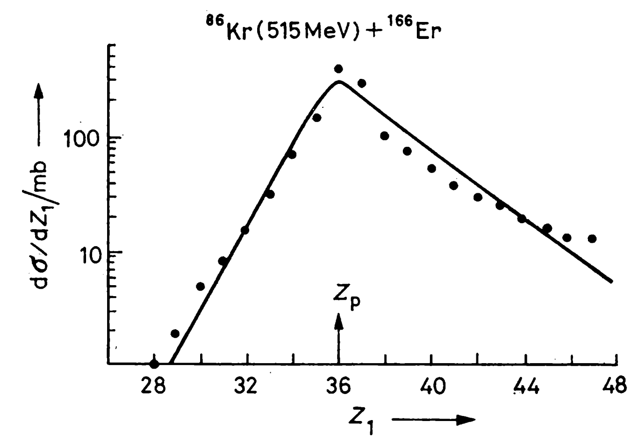


Abb. 10.95
Elementverteilung der projektilähnlichen Reaktionsprodukte in der Reaktion ^{86}Kr (515 MeV) + ^{166}Er. Z_p ist die Ladungszahl des Projektils. Die Kurve wurde auf der Grundlage eines Diffusionsmodells berechnet

Der Driftkoeffizient v und der Diffusionskoeffizient D werden durch Anpassung an experimentelle Verteilungen bestimmt. Die Lösung von Gl. (10.435) ist eine Gauß-Funktion

$$P(Z_1, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi D t}} e^{-(Z_1 - vt)^2/4Dt} . \tag{10.436}$$

Der Schwerpunkt $Z_1 = vt$ der Verteilung und die Varianz $\sigma^2 = 2Dt$ der Gauß-Verteilung im Endkanal sind lineare Funktionen der Wechselwirkungszeit, die man aus einer Trajektorienrechnung ermitteln kann.

5. Tiefunelastische Schwerionenreaktionen können auch ausgenutzt werden, um höhere Transurane zu erzeugen. Als Folge der Massendiffusion in sehr schweren Systemen wie $^{238}U + ^{238}U$ oder $^{238}U + ^{248}Cm$ entstehen insbesondere neutronenreiche Produkte mit einem Bildungsquerschnitt im Bereich von mb. Als Beispiel betrachten wir die Reaktion $^{238}U + ^{238}U$, $\varepsilon \cong 7{,}5$ MeV/A, bei der primäre tiefunelastische Prozesse etwa 40% des totalen Reaktionsquerschnitts ausmachen. Unter den Fragmenten werden Isotope der Elemente $Z = 26—100$ beobachtet, wobei unterschiedliche Reaktionsmechanismen wirksam werden. Einmal führen quasielastische Transferreaktionen zu Elementen mit $Z \approx 92$. Die nachfolgende Spaltung derartiger Reaktionsprodukte aus niedrigen Anregungszuständen ergibt eine Elementverteilung mit zwei Maxima bei $Z \approx 36$ und $Z \approx 56$. Durch den Massentransfer in tiefunelastischen Prozessen werden Elemente zwischen $Z \approx 73$ und $Z \approx 100$ mit etwa symmetrischer Verteilung um die Projektilladung erzeugt. Die anschließende Spaltung der hochangeregten Fragmente bedingt eine breite, nahezu symmetrische Spaltproduktverteilung um $Z \approx 55$. Die Wirkungsquerschnitte für die einzelnen Komponenten können aus Abb. 10.96 (a) entnommen werden. Die Abb. 10.96 (b) enthält den Bildungsquerschnitt für die Isotope einiger Transurane in der gleichen Reaktion $^{238}U + ^{238}U$, $\varepsilon \cong 7{,}5$ MeV/A.

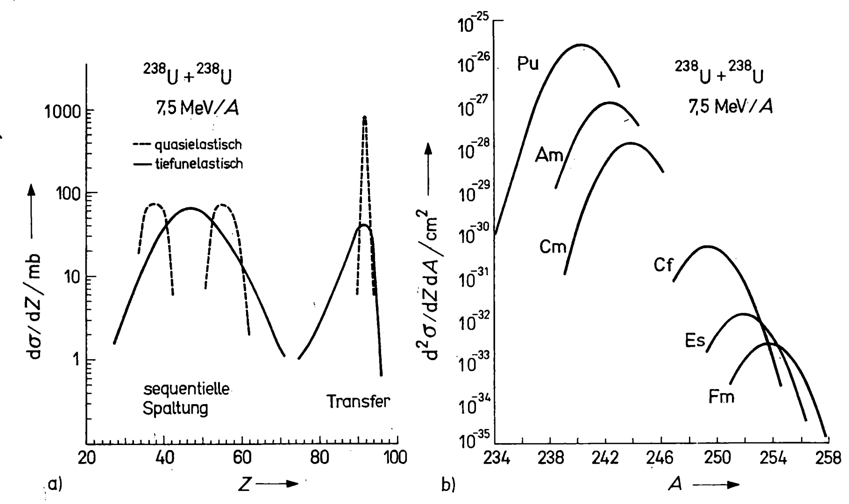


Abb. 10.96
Reaktion $^{238}U + ^{238}U$, $\varepsilon = 7{,}5$ MeV/A. (a) Elementverteilung dσ/dZ. Die ausgezogene (gestrichelte) Kurve gibt die Ladungsverteilung für tiefunelastische (quasielastische) Reaktionen und nachfolgender Spaltung bei hoher (niedriger) Anregungsenergie der primären Reaktionsprodukte an. Die Abbildung enthält auch die partiellen Wirkungsquerschnitte der einzelnen Komponenten. (b) Wirkungsquerschnitt $d^2\sigma/dZ\,dA$ für die Bildung der Isotope einiger transuraner Elemente.

10.9.6. Fusion

1. Als Fusion bezeichnet man einen Prozeß, in dem sich aus Projektil und Target ein Compoundkern im vollständigen statistischen Gleichgewicht bildet. Die Anregungsenergie des Compoundkerns E^* beträgt bei gegebener Einschußenergie E

$$E^* = E + Q_F\,, \qquad Q_F = c^2(M_1 + M_2 - M_{1+2})\,. \tag{10.437}$$

Die Größe Q_F ist der Q-Wert der Fusionsreaktion, der sich aus den Massen M_1, M_2 und M_{1+2} von Projektil, Target und Compoundkern berechnet. Nur für leichte Systeme mit $A_1 + A_2 \lesssim 100$ ergibt sich ein positiver Zahlenwert für Q_F. Für schwere Systeme wird Q_F negativ, da der

Energiebetrag, der zur Überwindung der Coulomb-Abstoßung aufgebracht werden muß, größer als der Gewinn an Bindungsenergie durch starke Wechselwirkung ist. Wir führen einige Beispiele an: $^{14}N + ^{12}C$ $Q_F = +15{,}1$ MeV, $^{14}N + ^{238}U$ $Q_F = -27{,}0$ MeV, $^{86}Kr + ^{238}U$ $Q_F = -326$ MeV. Außerdem muß in der Relativbewegung der beiden Kerne die Fusionsbarriere B_F überwunden werden, die durch die Barrierenhöhe im effektiven Potential für $L = 0$ gegeben ist. Die Höhe der Fusionsbarriere hängt stark vom System ab. Man berechnet für $^{14}N + ^{12}C$, $^{14}N + ^{238}U$ und $^{86}Kr + ^{238}U$ die Werte 7,0 MeV, 74,6 MeV bzw. 333 MeV. Fusionsbarriere B_F und Q-Wert Q_F bestimmen auch die minimale Anregungsenergie E_{min}, die sich bei vorgegebener Target-Projektil-Kombination erzielen läßt, da die Einschußenergie E mindestens die Barrierenhöhe B_F erreichen muß, um eine Fusion zu ermöglichen,

$$E^*_{min} = B_F + Q_F \,. \tag{10.438}$$

Für die Systeme $^{14}N + ^{12}C$ und $^{14}N + ^{238}U$ erhält man die Werte $E^*_{min} = 22{,}1$ MeV bzw. 47,6 MeV.

2. Die phänomenologische Analyse von Fusionsquerschnitten erfolgt in einem klassischen Modell. Nimmt man an, daß für alle Stoßparameter L bis zu einem Maximalwert L_{kr} das System fusioniert, dann findet man

$$\sigma_F = \int_0^{L_{kr}} \frac{d\sigma}{dL} = 2\pi\lambda\!\!\!^{-2} \int_0^{L_{kr}} L\, dL = 2\pi\lambda\!\!\!^{-2} L_{kr}^2 \,. \tag{10.439}$$

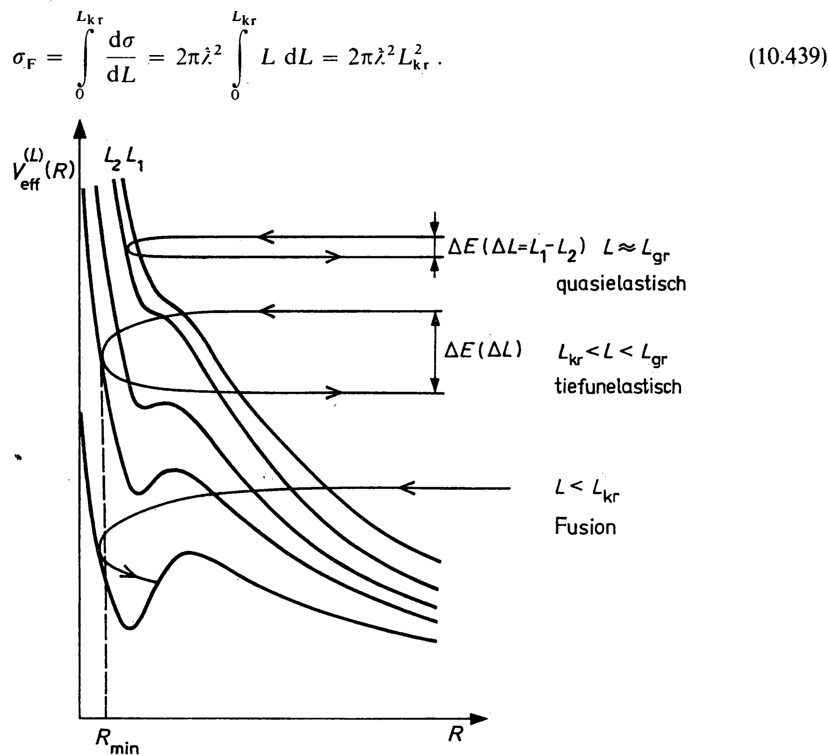


Abb. 10.97
Schematische Darstellung des Verlaufs einer quasielastischen, tiefunelastischen und Fusionstrajektorie $R(t)$ im effektiven Potential $V_{eff} = V_K + V_C + \frac{\hbar^2 L^2}{\mu r^2}$, $\mu = m\, A_{12}$ (m: Nukleonenmasse). Die zur Fusion führende Trajektorie wird in der „Tasche" des effektiven Potentials eingefangen

Der Grenzwert L_{kr} des Drehimpulses ist also nur im Zusammenhang mit der Analyse von Experimenten definiert. L_{kr} hängt von der Einschußenergie ab. Für die Fusionsreaktion $^{16}O + ^{92}Mo$ zum Compoundkern ^{108}Sn mit einer Anregungsenergie von 100 MeV ergibt sich $L_{kr} \approx 55$. Mit dem totalen Reaktionsquerschnitt kann analog zu (10.429) ein Maximalwert L_W des Stoßparameters definiert werden, bis zu dem das System wechselwirkt. Für die Reaktion O + Mo beträgt dieser Grenzwert $L_W \approx 90$. Aus diesen Angaben folgt, daß die Partialwellen mit einem Drehimpuls zwischen 55 und 90 zu tiefunelastischen oder quasielastischen Stößen führen. Man kann L auch theoretisch abschätzen, indem man in einem klassischen Trajektorienmodell mit Reibungskräften bei vorgegebener Einschußenergie den Stoßparameter L bestimmt, bei dem die Trajektorie $R(t)$ in die „Tasche" des effektiven Potentials führt (Abb. 10.97). Für

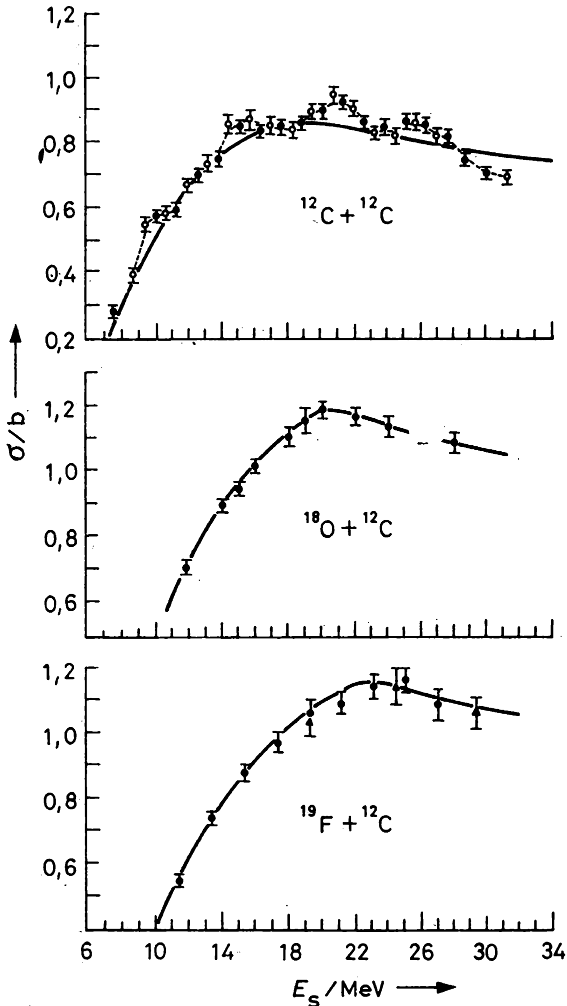


Abb. 10.98
Abhängigkeit des Fusionsquerschnitts von der Einschußenergie für verschiedene leichte Systeme

solche Trajektorien wird die Wechselwirkungszeit unendlich groß, da das klassische System die Potentialbarriere nicht durchtunneln kann, was anschaulich einer vollständigen Fusion des Systems entspricht. Die Abb. 10.98 zeigt die experimentelle Abhängigkeit des Fusionsquerschnitts von der Einschußenergie für einige leichte Systeme. Oberhalb der Barriere steigt der Fusionsquerschnitt zunächst an, erreicht ein Maximum und fällt dann leicht ab, da das System stärker in tiefunelastische Kanäle übergeht. In diesem Energiebereich macht der Fusionsquerschnitt nur etwa die Hälfte des Reaktionsquerschnitts aus.

3. Seit etwa 1965 setzt man die Fusionsreaktion leichter und mittelschwerer Projektile mit sehr schweren Targets ein, um über Prozesse des Typs (A, xn) neue Elemente zu synthetisieren. Während die Transurane bis $Z = 101$ durch Einfangreaktionen mit Neutronen und α-Teilchen gebildet werden können, lassen sich die Isotope der Elemente $Z = 102$ bis $Z = 107$ nur als Produkte von schwerioneninduzierten Kernreaktionen nachweisen. Als Projektile wurden zunächst vor allem leichte Ionen (N, O, Ne) verwendet. Der durch Fusion gebildete Compoundkern regt sich zunächst durch Verdampfung von x ($x = 2, \ldots, 5$) Neutronen ab. Die verbleibenden Restkerne werden dann separiert, so daß die gewonnenen Transurane durch die Messung der spontanen Spaltung identifiziert werden können. Wir geben einige Beispiele für (A, xn)-Reaktionen an, die zur Entdeckung neuer Elemente mit $Z = 102$—105 führten

$$^{238}\mathrm{U} + {}^{22}\mathrm{Ne} \rightarrow ({}^{260}102) \rightarrow {}^{256}102 + 4\mathrm{n}$$

$$^{243}\mathrm{Am} + {}^{18}\mathrm{O} \rightarrow ({}^{261}103) \rightarrow {}^{256}103 + 5\mathrm{n}$$

$$^{242}\mathrm{Pu} + {}^{22}\mathrm{Ne} \rightarrow ({}^{264}104) \rightarrow {}^{260(259)}104 + 4(5)\mathrm{n}$$

$$^{243}\mathrm{Am} + {}^{22}\mathrm{Ne} \rightarrow ({}^{265}105) \rightarrow {}^{261}105 + 4\mathrm{n}\,.$$

Die Wirkungsquerschnitte der Bildungsreaktionen (A, xn) besitzen eine charakteristische Abhängigkeit von der Einschußenergie. Als Beispiel zeigt Abb. 10.99 die Anregungsfunktion der Reaktion $^{238}\mathrm{U}(^{18}\mathrm{O}, x\mathrm{n})$ $^{256-x}\mathrm{Fm}$ für $x = 4, 5, 6, 8$. Man erkennt, daß das Maximum des Wirkungsquerschnitts mit wachsender Anzahl x der emittierten Neutronen zu höheren ^{18}O-Einschußenergien verschoben ist. Die Systematik der Halbwertszeiten $T_{1/2}^{\mathrm{SF}}$ gegen spontane Spaltung der Transurane $Z = 94$—104 ist in Abb. 10.100

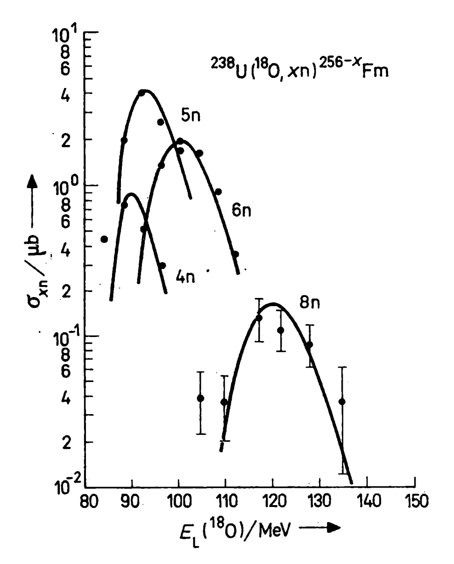


Abb. 10.99
Anregungsfunktion der Reaktion $^{238}\mathrm{U}(^{18}0, \mathrm{xn})^{256-x}\mathrm{Fm}$ für $x = 4, 5, 6, 8$

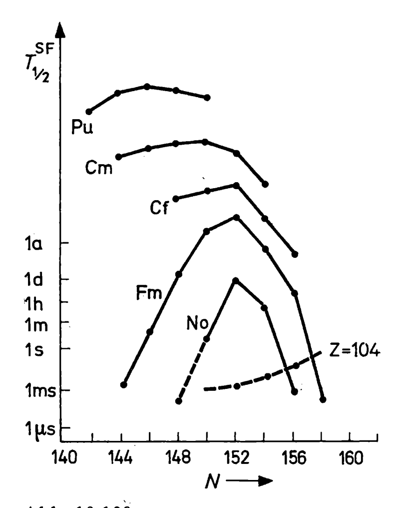


Abb. 10.100
Systematik der Halbwertszeiten $T_{1/2}^{SF}$ gegen spontane Spaltung im Elementbereich $Z = 94$—104

enthalten. Mit zunehmender Ladungszahl fällt die Halbwertszeit zunächst stark ab, bleibt bei $Z = 104$ aber auf einem relativ großen Wert. Außerdem ist $T_{1/2}^{SF}$ bei gegebenem Z-Wert stark von der Neutronenzahl abhängig: sowohl für neutronenreichere als auch neutronenärmere Nuklide ist sie im allgemeinen um mehrere Größenordnungen geringer als der Maximalwert. Für die Elementsynthese besonders günstig ist die Fusion mittelschwerer Kerne wie ^{40}Ca, ^{50}Ti, ^{54}Cr mit Targetkernen um das doppeltmagische Nuklid ^{208}Pb, da in diesem Fall Compoundkerne mit relativ niedriger Anregungsenergie entstehen. So

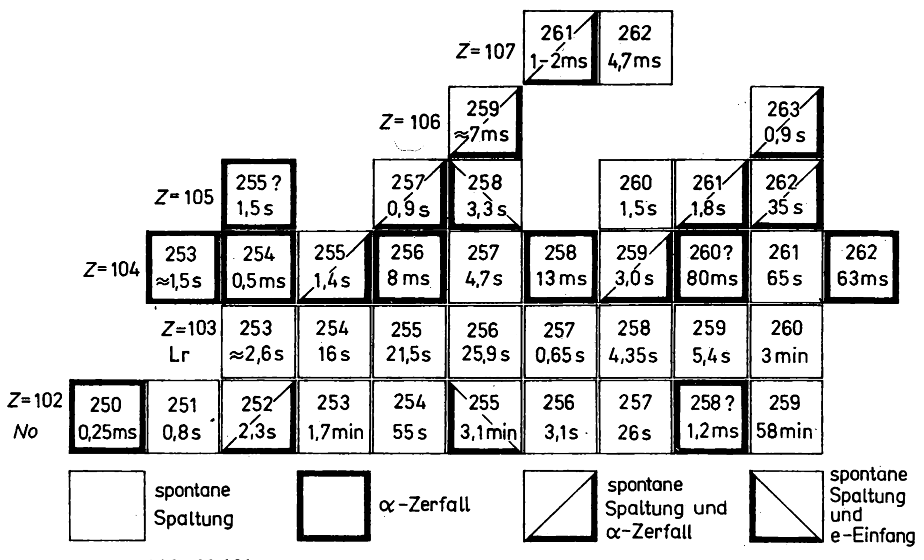


Abb. 10.101
Nuklidkarte mit Angabe der Zerfallsarten und der Halbwertszeit für einige durch schwerioneninduzierte Fusionsreaktionen erzeugte Transurane

wurde das Element 107 z. B. in der Reaktion $^{54}Cr + ^{209}Bi$, $\varepsilon = 4{,}85$ MeV/A gefunden. Die Halbwertszeit des Isotopes $^{262}107$ gegen α-Zerfall beträgt 4,7 ms. Über Existenz, Zerfallsart und Halbwertszeit der höchsten bisher nachgewiesenen Transurane gibt Abb. 10.101 Auskunft.

10.10. Einheitliche Theorie der Kernreaktionen

1. In den vorangegangenen Abschnitten haben wir einzelne Aspekte des Reaktionsmechanismus getrennt voneinander behandelt, wobei verschiedene theoretische Konzeptionen entwickelt wurden. Um die elastische Streuung von Nukleonen an Kernen zu interpretieren, genügte ein Einteilchenmodell, das ein komplexes mittleres Potential einführt. Die Wahrscheinlichkeit für einen direkten Übergang aus dem elastischen Kanal in einen nichtelastischen Kanal konnte mit einer schwachen Wechselwirkung in erster Bornscher Näherung hinreichend genau abgeschätzt werden. Diesem physikalischen Bild liegt die Annahme zu Grunde, daß die unabhängige Bewegung des Inzidenzteilchens im mittleren Feld des Targets nur schwach an komplexe Konfigurationen koppelt. Diametral entgegengesetzt war das Modell der Compoundkernreaktion. Dieser Mechanismus setzt eine sehr starke Zweiteilchenwechselwirkung zwischen dem einfallenden Nukleon und den Targetnukleonen voraus, so daß die Einteilchenbewegung sofort in komplexe Zustände zerfällt, bei denen viele Freiheitsgrade angeregt sind. Ein solches Nebeneinander verschiedener, zum Teil einander ausschließender Reaktionsmodelle mit sehr unterschiedlichen Parametrisierungen des Wirkungsquerschnitts ist unbefriedigend.

Wir legen deshalb noch die Grundzüge einer einheitlichen dynamischen Theorie der Kernreaktionen dar, wie sie von H. Feshbach formuliert wurde. Da sie den direkten und den Compoundkernmechanismus als Grenzfälle enthält, ist sie vom formalen Apparat her geeignet, den Zusammenhang verschiedener Näherungen zu übersehen. Eine solche einheitliche Theorie, die keine willkürlichen Elemente wie einen Kanalradius enthält, sollte die beobachtbaren Größen eindeutig durch die Matrixelemente der Wechselwirkung im System ausdrücken.

2. Der stationäre Zustand $|\Psi\rangle$, den das Gesamtsystem bei einer Kernreaktion annimmt, muß Lösung einer Schrödinger-Gleichung $H|\Psi\rangle = E|\Psi\rangle$ mit entsprechenden Randbedingungen sein. Der Zustandsvektor $|\Psi\rangle$ kann mit Hilfe von Projektionsoperatoren $P, Q, P + Q = 1$ in zwei orthogonale Anteile zerlegt werden

$$|\Psi\rangle = (P + Q)\,|\Psi\rangle = P\,|\Psi\rangle + Q\,|\Psi\rangle = |\Psi_P\rangle + |\Psi_Q\rangle\,. \tag{10.440}$$

Der Operator P projiziert auf solche Komponenten $|\Psi_P\rangle$ von $|\Psi\rangle$, die in der Ortsdarstellung eine Asymptotik besitzen, d. h. in den Kanälen auslaufende Kugelwellen enthalten und damit zum Fluß im Unendlichen beitragen. Der Operator Q erfaßt mit den Komponenten $|\Psi_Q\rangle$ alle restlichen Anteile, die einen im Wechselwirkungsgebiet lokalisierten Zustand des Gesamtsystems beschreiben. Die Zustände $|\Psi_Q\rangle$ fallen in den Kanälen exponential ab. Wir setzen die Zerlegung (10.440) des Zustandsvektors $|\Psi\rangle$ in die Schrödinger-Gleichung ein, multiplizieren von links mit P bzw. Q und erhalten unter Beachtung der Eigenschaften der Projektionsoperatoren

$$P + Q = 1\,, \quad P^2 = P\,, \quad Q^2 = Q\,, \quad PQ = QP = 0 \tag{10.441}$$

ein gekoppeltes Gleichungssystem zur Bestimmung von $|\Psi_P\rangle$ und $|\Psi_Q\rangle$

$$(E - H_{PP})\,|\Psi_P\rangle = H_{PQ}\,|\Psi_Q\rangle\,, \tag{10.442}$$

$$(E - H_{QQ})\,|\Psi_Q\rangle = H_{QP}\,|\Psi_P\rangle\,. \tag{10.443}$$

Dabei wurde die abkürzende Schreibweise $PHP = H_{PP}$, $PHQ = H_{PQ}$ usw. verwendet. Der Wirkungsquerschnitt einer Kernreaktion folgt aus der asymptotischen Form von $|\Psi_P\rangle$. Wir eliminieren deshalb $|\Psi_Q\rangle$ in (10.442), indem wir die formale Lösung von (10.443)

$$|\Psi_Q\rangle = \frac{1}{E - H_{QQ}} H_{QP}|\Psi_P\rangle \tag{10.444}$$

in die Gl. (10.442) einsetzen. Es ergibt sich eine Gleichung für $|\Psi_P\rangle$ in der Form

$$\left(E - H_{PP} - H_{PQ} \frac{1}{E - H_{QQ}} H_{QP}\right)|\Psi_P\rangle = 0\,. \tag{10.445}$$

Die für die Kernreaktion relevante Funktion $|\Psi_P\rangle$ folgt also aus einer Schrödinger-Gleichung mit dem effektiven Hamilton-Operator

$$H_{\text{eff}} = H_{PP} + H_{PQ} \frac{1}{E - H_{QQ}} H_{QP}\,. \tag{10.446}$$

Der erste Summand enthält nur die Wechselwirkung in den offenen Kanälen, da seine Matrixelemente, die im Q-Raum liegen oder den P- und den Q-Raum verknüpfen, wegen $PQ = 0$ verschwinden,

$$\begin{aligned} \langle\Psi_Q| H_{PP} |\Psi_Q\rangle &= \langle\Psi| QPHPQ |\Psi\rangle = 0\,, \\ \langle\Psi_Q| H_{PP} |\Psi_P\rangle &= \langle\Psi| QPHPP |\Psi\rangle = 0\,. \end{aligned} \tag{10.447}$$

Der zweite Term beschreibt Prozesse, in denen das System aus dem Unterraum P in den Unterraum Q übergeht (H_{QP}), sich dort nach dem Propagator $1/(E - H_{QQ})$ entwickelt und schließlich durch H_{PQ} wieder an offene Kanäle gekoppelt wird. Hierbei werden also Zwischenzustände des Gesamtsystems erreicht, die sich zu einem Compoundkernzustand entwickeln können.

3. Wir illustrieren die Anwendung dieser Theorie auf den Fall einer (isolierten) Resonanz, deren Niveaubreite Γ sehr viel kleiner als der mittlere Abstand zweier benachbarter Resonanzen ist. Die Zustände des Compoundkerns $|\Phi_\lambda\rangle$ befolgen in erster Näherung die Gleichung

$$(\varepsilon_\lambda - H_{QQ})\,|\Phi_\lambda\rangle = 0\,. \tag{10.448}$$

Diese Gleichung gilt, wenn man in Gl. (10.443) die rechte Seite unterdrückt, also die Möglichkeit des Zerfalls durch die Kopplung von $|\Psi_Q\rangle$ und $|\Psi_P\rangle$ vernachlässigt. In dieser Näherung besitzt der Compoundkern eine unendlich große Lebensdauer, das Niveau also eine verschwindende Breite.

Mit Hilfe des durch (10.448) definierten vollständigen Satzes von Funktionen $|\Phi_\lambda\rangle$ können wir den effektiven Hamilton-Operator darstellen durch

$$H_{\text{eff}} = H_{PP} + \sum_\lambda |H_{PQ}\Phi_\lambda\rangle \frac{1}{E - \varepsilon_\lambda} \langle\Phi_\lambda H_{QP}|\,. \tag{10.449}$$

Liegt die Einschußenergie E in der Nähe der Resonanzenergie ε_r, $E \approx \varepsilon_r$, dann kommt der Hauptbeitrag zur Summe vom Term $\lambda = r$,

$$\begin{aligned} H_{\text{eff}} &= H_{PP} + \sum_{\lambda \neq r} |H_{PQ}\Phi_\lambda\rangle \frac{1}{E - \varepsilon_\lambda} \langle\Phi_\lambda H_{QP}| + \frac{|H_{PQ}\Phi_r\rangle\,\langle\Phi_r H_{QP}|}{E - \varepsilon_r} \\ &\equiv H' + \frac{|H_{PQ}\Phi_r\rangle\,\langle\Phi_r H_{QP}|}{E - \varepsilon_r}\,. \end{aligned} \tag{10.450}$$

Die beiden Anteile in H_{eff} besitzen eine unterschiedliche Energieabhängigkeit; während H' auch in der Umgebung von ε_r schwach mit E variiert, ändert sich der zweite Summand dort stark.

Die Bestimmungsgleichung für $|\Psi_P\rangle$ kann damit in der Form

$$(E - H')\,|\Psi_P\rangle = \frac{|H_{PQ}\Phi_r\rangle\,\langle\Phi_r|\,H_{QP}\,|\Psi_P\rangle}{E - \varepsilon_r} \tag{10.451}$$

geschrieben werden. Wir lösen diese Gleichung mit der in Abschnitt 10.3.3. benutzten Technik. Die Lösung der homogenen Gleichung für den Kanal α mit der Randbedingung „auslaufende Kugelwelle" bezeichnen wir mit $|\Psi_\alpha^{(+)}\rangle$,

$$(E - H')\,|\psi_\alpha^{(+)}\rangle = 0\,. \tag{10.452}$$

Die formale Lösung der inhomogenen Gleichung (10.451) lautet dann

$$|\Psi_P^{(+)}\rangle = |\psi_\alpha^{(+)}\rangle + \frac{1}{E - H' + \mathrm{i}\varepsilon}\,\frac{|H_{PQ}\Phi_r\rangle\,\langle\Phi_r|\,H_{QP}\,|\Psi_P^{(+)}\rangle}{E - \varepsilon_r}\,. \tag{10.453}$$

Die komplexe Zahl $\langle\Phi_r|\,H_{QP}\,|\Psi_P^{(+)}\rangle/(E - \varepsilon_r)$ können wir in anderer Form schreiben, indem wir für $|\Psi_P^{(+)}\rangle$ den Ausdruck (10.453) einsetzen,

$$\frac{\langle\Phi_r|\,H_{QP}\,|\Psi_P^{(+)}\rangle}{E - \varepsilon_r} = \frac{\langle\Phi_r|\,H_{QP}\,|\psi_\alpha^{(+)}\rangle}{E - \varepsilon_r} + \left\langle\Phi_r\left|\,H_{QP}\,\frac{1}{E - H' + \mathrm{i}\varepsilon}\,H_{PQ}\,\right|\Phi_r\right\rangle \times \langle\Phi_r|\,H_{QP}\,|\Psi_P^{(+)}\rangle/(E - \varepsilon_r)^2\,. \tag{10.454}$$

Daraus ergibt sich

$$\frac{\langle\Phi_r|\,H_{QP}\,|\Psi_P^{(+)}\rangle}{E - \varepsilon_r} = \frac{\langle\Phi_r|\,H_{QP}\,|\psi_\alpha^{(+)}\rangle}{E - \varepsilon_r - \left\langle\Phi_r\left|\,H_{QP}\,\dfrac{1}{E - H' + \mathrm{i}\varepsilon}\,\right|\Phi_r\right\rangle}\,. \tag{10.455}$$

Die gesuchte Lösung $|\Psi_P^{(+)}\rangle$ läßt sich damit vollständig mit Hilfe der Zustände $|\Phi_r\rangle$, $|\psi_\alpha^{(+)}\rangle$ angeben:

$$|\Psi_P^{(+)}\rangle = |\psi_\alpha^{(+)}\rangle + \frac{1}{E - H' + \mathrm{i}\varepsilon}\,\frac{\langle\Phi_r|\,H_{PQ}\,|\psi_\alpha^{(+)}\rangle}{E - \varepsilon_r - \left\langle\Phi_r\left|\,H_{QP}\,\dfrac{1}{E - H' + \mathrm{i}\varepsilon}\,\right|\Phi_r\right\rangle}\,|H_{PQ}\Phi_r\rangle\,. \tag{10.456}$$

Für das T-Matrixelement des Übergangs $\alpha \to \beta$, $\alpha \neq \beta$ mit dem Compoundkernniveau r als Zwischenzustand erhält man wegen $T \sim \langle\psi_\beta^{(-)}\,|\,\Psi_P^{(+)}\rangle$ (vgl. Gln. (10.115) und (10.117a)),

$$T_{\beta\alpha} = T_{\beta\alpha}^{(P)} + \frac{\langle\psi_\beta^{(-)}|\,H_{PQ}\,|\Phi_r\rangle\,\langle\Phi_r|\,H_{QP}\,|\psi_\alpha^{(+)}\rangle}{E - \varepsilon_r - \left\langle\Phi_r\left|\,H_{QP}\,\dfrac{1}{E - H' + \mathrm{i}\varepsilon}\,H_{PQ}\,\right|\Phi_r\right\rangle}\,. \tag{10.457}$$

Der erste Term beschreibt den „direkten" Übergang vom Kanal α in den Kanal β; er ist schwach energieabhängig. Der zweite Term stellt eine Resonanzamplitude dar, die mit der Einführung von Parametern, die die partielle und totale Breite des Compoundkernniveaus und eine Resonanzverschiebung bedeuten,

$$\Gamma_{\alpha r} = |\langle\Phi_r|\,H_{PQ}\,|\psi_\alpha^{(+)}\rangle|^2 = |\langle\psi_\alpha^{(-)}|\,H_{PQ}\,|\Phi_r\rangle|^2\,, \tag{10.458}$$

$$\left\langle\Phi_r\left|\,H_{QP}\,\frac{1}{E - H' + \mathrm{i}\varepsilon}\,H_{PQ}\,\right|\Phi_r\right\rangle = \Delta_r - \mathrm{i}\Gamma_r/2 \tag{10.459}$$

in Breit-Wigner-Form geschrieben werden kann,

$$T_{\beta\alpha} = T_{\beta\alpha}^{(P)} + \frac{(\Gamma_{\beta r})^{1/2}\,(\Gamma_{\alpha r})^{1/2}}{E - (\varepsilon_r + \Delta_r) + \mathrm{i}\Gamma_r/2}\,. \tag{10.460}$$

4. Die Feshbach-Theorie ist auch geeignet, einen formalen Ausdruck für das phänomenologisch eingeführte optische Potential abzuleiten.

Wir gehen aus von dem Hamilton-Operator

$$H = T + H_{\mathrm{T}}(\xi) + V(\boldsymbol{r}, \xi)\,, \tag{10.461}$$

der die Streuung eines Nukleons an einem Kern beschreibt. Wie in Gl. (10.334) ist T der Operator der kinetischen Energie der Relativbewegung, $H_{\mathrm{T}}(\xi)$ der Hamilton-Operator des Targetkerns, der auf die inneren Koordinaten ξ wirkt. Die Kopplung der Koordinate $\boldsymbol{r}$ des Inzidenznukleons an die innere Nukleonenbewegung im Target wird durch den Operator $V(\boldsymbol{r}, \xi)$ vermittelt. Die Eigenfunktionen des Targets seien bekannt,

$$H\,|\Phi_n\rangle = E_n\,|\Phi_n\rangle\,, \qquad E_0 = 0\,. \tag{10.462}$$

Dann können wir mit Hilfe der Operatoren

$$P = |\Phi_0\rangle\langle\Phi_0|\,, \qquad Q = \sum_{n=1}^{\infty} |\Phi_n\rangle\langle\Phi_n| \tag{10.463}$$

eine Projektion auf den elastischen Kanal vornehmen. Für die Komponente $P|\Psi\rangle$ erhalten wir aus der Schrödinger-Gleichung $(T + H_{\mathrm{T}} + V)\,|\Psi\rangle = E|\Psi\rangle$ mit den gleichen Schritten, die zu Gl. (10.445) führten, die Bestimmungsgleichung

$$\left(E - T - \langle\Phi_0|\,V\,|\Phi_0\rangle - \langle\Phi_0|\,VQ\frac{1}{E - (T + H + QVQ) + \mathrm{i}\varepsilon}\,QV\,|\Phi_0\rangle\right) P\,|\Psi\rangle = 0\,. \tag{10.464}$$

Diese Gleichung bedeutet, daß die Relativbewegung des Inzidenzteilchens im elastischen Kanal durch eine Einteilchenfunktion $\chi_0(\boldsymbol{r})$ beschrieben werden kann, die sich mit Hilfe eines mittleren Potentials U berechnen läßt,

$$(E - T - U)\,\chi(\boldsymbol{r}) = 0$$

$$U = \langle\Phi_0|\,V\,|\Phi_0\rangle - \langle\Phi_0|\,VQ[\mathrm{E} - (T + H + QVQ) + \mathrm{i}\varepsilon]^{-1}\,QV\,|\Phi_0\rangle\,.$$

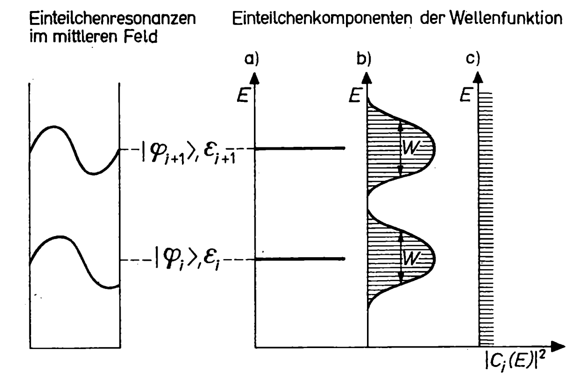


Abb. 10.102
Verteilung der Stärke der Einteilchenkomponente $|c_i(E)|^2$ über die Anregungsenergie E des Compoundkerns (schematisch)
a) verschwindende Kopplung, b) schwache Kopplung, c) starke Kopplung

Der erste Anteil in U stellt die Mittelung des Wechselwirkungspotentials über den Grundzustand des Targets dar. Er ist reell. Einen geringen Betrag zum Realteil liefert auch der zweite Term, der alle Anregungen des Targets als Zwischenzustände der Reaktionen erfaßt. Durch den komplexen inversen Operator $[E - (T + H + QVQ) + \mathrm{i}\varepsilon]^{-1}$ entsteht außerdem ein Imaginärteil des mittleren Potentials. Da in den inversen Operator auch die Einschußenergie E eingeht, werden sowohl Real- als auch Imaginärteil des optischen Potentials energieabhängig.

Die Einteilchenbewegung im mittleren Potential des Targetkerns wird durch die Kopplung an komplexe Konfigurationen gedämpft, so daß eine bestimmte Einteilchenkomponente $|\varphi_i\rangle$ der Energie ε_i in einem Compoundkernzustand $|\Phi_E\rangle$ der Energie E nur mit geringer Wahrscheinlichkeit $|c_i(E)|^2$ realisiert ist,

$$|\Phi_E\rangle = c_i(E)\,|\varphi_i\rangle + |\Phi_E(\mathrm{Rest})\rangle\,, \qquad |c_i(E)|^2 \ll 1\,. \tag{10.465}$$

Bei einer starken Kopplung wäre jeder Einteilchenzustand i über alle Compoundkernzustände gleichmäßig verteilt. Liegt eine schwache Kopplung vor, dann tritt die Einteilchenkomponente i nur in Compoundkernzuständen auf, die in einem Energieintervall der Breite W um die Einteilchenresonanz gruppiert sind. Man kann zeigen, daß W dem Imaginärteil im optischen Potential entspricht. Diese Kopplungsverhältnisse sind in Abb. 10.102 schematisch dargestellt.

Literaturhinweise zu Kapitel 10

Aus 70, Bas 80, Bec 64, Bet 78, Bla 52, Boc 79/80, Bod 72/78, Boh 69/75, Brow 64, Dav 58, End 59, Glä 72, Gol 67, Her 60/66, Hod 63, Mah 69, Mar 71, Muc 74, New 66, Nör 76, Pas 69, Pol 77, Pre 62, Rin 80, Šir 72, Seg 53, Tob 61, Vol 82, Wla 59

11. Kernphysikalische Grundlagen der Kernenergetik

11.1. Grundlegende Bedingungen für den Ablauf der Kettenreaktion

11.1.1. Vervielfachungskoeffizient

1. Bei einer Energieausbeute pro Spaltung von 200 MeV sind etwa $3{,}1 \cdot 10^{13}$ Spaltereignisse pro Sekunde zur Erzeugung von 1 kW erforderlich. Um Energie in makroskopischen Maßstäben aus der Kernspaltung zu gewinnen, müssen einerseits eine sehr hohe Spaltrate und andererseits ein geringer Energieaufwand für die Auslösung eines Spaltereignisses realisiert sein. Erzeugt man die Neutronen zur Auslösung der Spaltung mittels Beschleuniger, so ist letztere Bedingung nicht erfüllt: Nur ein Bruchteil aller beschleunigten geladenen Teilchen erzeugt Neutronen, der Energieaufwand pro erzeugtes Neutron ist daher wesentlich größer als 200 MeV. Hieraus folgt, daß nur eine Kettenreaktion es ermöglicht, makroskopische Energiemengen aus der Kernspaltung zu erzeugen.

Wir nehmen zunächst an, daß jedes der ν Spaltneutronen wiederum die Spaltung eines Urankernes auslöst. Dann wächst die Anzahl der Neutronen von einer zur nächsten „Generation" um den Faktor ν. Bei einer anfänglichen Zahl N_0 würden in der m-ten Generation

$$N_m^{\mathrm{n}} = N_0^{\mathrm{n}}(\nu)^m \tag{11.1}$$

Neutronen vorhanden sein. Wird die mittlere Lebensdauer einer Generation T_G eingeführt, so kann wegen $t = mT_G$ die Zahl der Neutronen als Funktion der Zeit angegeben werden:

$$N^{\mathrm{n}}(t) = N^{\mathrm{n}}(0)\,(\nu)^{t/T_G}\,. \tag{11.2}$$

In typischen Anordnungen liegt T_G im Bereich $10^{-4} \dots 10^{-8}$ s, d. h. pro Hundertstel Sekunde würde die Anzahl der Neutronen um mehr als das 10^{40}-fache anwachsen!!

2. Diese Betrachtung ist jedoch nicht realistisch: Infolge von Neutronenverlusten durch Strahlungseinfang und Entweichen aus dem Spaltmaterialbereich (aktive Zone), ist das Verhältnis der Anzahl von Neutronen in zwei aufeinanderfolgenden Generationen kleiner als ν. Es wird Vervielfachungskoeffizient (auch Multiplikationsfaktor) k der Neutronen in der konkreten Anordnung genannt. Ist $k = 1$, so wird die Anordnung als kritisch bezeichnet, bei $k \lessgtr 1$ — entsprechend als unter- bzw. überkritisch.

Gleichung (11.2) lautet also richtiger

$$N^{\mathrm{n}}(t) = N^{\mathrm{n}}(0)\,(k)^{t/T_G}\,. \tag{11.3}$$

In einer kritischen Anordnung verläuft die Kettenreaktion stationär, $N^{\mathrm{n}}(t) = \mathrm{const.}$ Diese Bedingung ist in einer Kernenergieanlage sehr genau einzuhalten. Bereits eine Erhöhung von k auf $1 \cdot 01$ führt bei $T_G = 10^{-4}$ s innerhalb einer Sekunde theoretisch zur Entstehung von $1 \cdot 6 \cdot 10^{43} \cdot N^{\mathrm{n}}(0)$ Neutronen (praktisch würde die Anordnung infolge der riesigen freigesetzten Energiemenge bereits vorher explodieren bzw. verdampfen).

3. Wodurch wird die Größe des Vervielfachungskoeffizienten bestimmt?
— Zunächst ist k proportional der Anzahl der Spaltneutronen (siehe Tabelle 10.9).

— In jedem Fall tritt Strahlungseinfang von Neutronen in den Urankernen in Konkurrenz zur Spaltung auf, dies verringert k um die Spaltwahrscheinlichkeit

$$P_f = \frac{\sigma_{nf}}{\sigma_{n\gamma} + \sigma_{nf}} = \frac{1}{1+\alpha}, \quad \text{mit} \quad \alpha \equiv \frac{\sigma_{n\gamma}}{\sigma_{nf}}. \tag{11.4}$$

Pro im Spaltmaterial absorbiertes Neutron werden somit

$$\eta \equiv \nu P_f = \frac{\nu\sigma_n}{\sigma_{n\gamma} + \sigma_n} = \frac{\nu}{1+\alpha} \tag{11.5}$$

Spaltneutronen erzeugt. Diese Größe ist der wichtigste kernphysikalische Parameter, der die Eignung eines Nuklids für die Kernenergiegewinnung charakterisiert. Er ändert sich sowohl von Nuklid zu Nuklid als auch in Abhängigkeit von der Neutronenenergie (siehe Tabelle 11.1.)

Tabelle 11.1
Anzahl sekundärer Spaltneutronen pro absorbiertes Neutron für die drei Brennstoffnuklide

	$^{233}_{92}U$	$^{235}_{92}U$	$^{239}_{94}Pu$
$\eta(E_T)$*)	2,28	2,07	2,09
$\eta(E_n)$**)	2,45	2,30	2,70

*) $E_n = E_T = 0{,}025$ eV
**) $E_n = 1$ MeV

— In realen kritischen Anordnungen sind in der Regel neben den Brennstoffnukliden auch Fremdnuklide (Konstruktionsmaterialien, Moderatoren, Spaltprodukt-Kerne, Kühlmittel u. a.) vorhanden. Der Strahlungseinfang an diesen Nukliden verringert k nochmals. Wir bezeichnen mit $P_\gamma \leqq 1$ die Wahrscheinlichkeit für die Neutronen, dem Strahlungseinfang an Fremdnukliden zu entgehen.
— Schließlich können aus der aktiven Zone endlicher Dimension Neutronen entweichen. Die Wahrscheinlichkeit nicht zu entweichen wird mit $P_E \leqq 1$ (Entweichfaktor) bezeichnet. Sie hängt von Zusammensetzung, Form und Dimension der aktiven Zone und der sie umgebenden Reflektormaterialien ab.

Zusammengefaßt gilt

$$k = \eta \cdot P_\gamma \cdot P_E = k_\infty \cdot P_E \tag{11.6}$$

mit den Vervielfachungskoeffizienten k_∞ einer unendlich ausgedehnten aktiven Zone gleicher Zusammensetzung.

4. In der Natur vorkommende spaltende Nuklide sind $^{232}_{90}Th$, $^{235}_{92}U$ und $^{238}_{92}U$. Davon ist nur das mit 0,7% im natürlichen Isotopengemisch des Urans vorhandene $^{235}_{92}U$ thermisch spaltbar (siehe Abb. 4.22) und damit als Kernbrennstoff geeignet.

Da in der Regel mit Isotopengemischen spaltender Nuklide gearbeitet wird, wird üblicher Weise η in (11.5.) durch den effektiven Wert $\eta^{(5)}_{eff}$ für ein bestimmtes Verhältnis der Konzentration von $^{238}_{92}U : ^{235}_{92}U = N^{(8)} : N^{(5)}$ und eine bestimmte Energieverteilung der Neutronen angegeben,

$$\eta^{(5)}_{eff} = \frac{\nu^{(5)}\sigma^{(5)}_{nf}}{\sigma^{(5)}_{nf} + \sigma^{(5)}_{n\gamma} + \frac{N^{(8)}}{N^{(5)}}\sigma^{(8)}_{n\gamma}}, \tag{11.7}$$

mit den Bezeichnungen

$\sigma_{nf}^{(5)}, \sigma_{n\gamma}^{(5)}$ — Spalt- und Einfangsquerschnitt für $^{235}_{92}U$,

$\sigma_{n\gamma}^{(8)}$ — Einfangsquerschnitt für $^{238}_{92}U$.

Die Größe gibt die Anzahl entstehender Spaltneutronen pro im Uran (beide Isotope) absorbiertes Neutron an.

Infolge der starken Energieabhängigkeit von σ_{nf} und $\sigma_{n\gamma}$ ist η_{eff} ebenfalls eine Funktion von E_n und wird daher für jede Energie oder als gemittelter Wert für definierte Energieverteilungen (z. B. Spaltspektrum, thermisches Spektrum) angegeben.

Für thermische Neutronen (siehe 11.2.) und natürliches Uran gelten die Zahlenwerte

$$\sigma_{nf}^{(5)} = 585\,b, \quad \sigma_{n\gamma}^{(5)} = 100\,b, \quad \sigma_{n\gamma}^{(8)} = 2{,}8\,b, \quad \frac{N^{(8)}}{N^{(5)}} = 140;$$

damit wird

$$\eta_{eff}^{(U)}(E_T) = \eta_{eff}^{(5)}(E_T) = \frac{2{,}4 \cdot 585}{585 + 100 + 140 \cdot 2{,}8} = 1{,}30.$$

Trotz der großen Verdünnung des $^{235}_{92}U$ ist also eine Kettenreaktion möglich, vorausgesetzt, es gelingt den Verlustfaktor $P_\gamma \cdot P_E \leqq 0{,}76$ zu halten.

Im Gebiet schneller Neutronen sind für die über das Spaltspektrum (siehe Abb. 10.82) gemittelten Werte

$$\langle \nu^{(5)} \rangle = 2{,}65, \quad \langle \sigma_{nf}^{(5)} \rangle \cong 2\,b, \quad \langle \sigma_{n\gamma}^{(5)} \rangle \cong \langle \sigma_{n\gamma}^{(8)} \rangle \cong 0{,}1\,b$$

einzusetzen. Hieraus folgt

$$\eta_{eff}^{(5)}(\langle E_n \rangle_{ss}) \cong \frac{2{,}65 \cdot 2}{2 + 0{,}1 + 140 \cdot 0{,}1} \cong 0{,}33.$$

Hinzu kommt in diesem Fall noch die Spaltung von $^{238}_{92}U$ durch schnelle Neutronen oberhalb der Schwellenergie $E_{schw} = 1{,}5$ MeV (siehe Tab. 10.7).

Infolge von vorliegenden Energieverlusten lösen nur etwa 12% der Spaltneutronen eine Spaltung von $^{238}_{92}U$ aus, was den zusätzlichen Anteil

$$\eta_{eff}^{(8)}(\langle E_n \rangle_{ss}) \cong 2{,}5 \cdot 0{,}12 = 0{,}3$$

liefert, so daß für Natururan im Spaltspektrum

$$\eta_{eff}^{(U)}(\langle E_n \rangle_{ss}) = \eta_{eff}^{(5)}(\langle E_n \rangle_{ss}) + \eta_{eff}^{(8)}(\langle E_n \rangle_{ss}) \cong 0{,}63$$

gilt. Eine Kettenreaktion mit schnellen Neutronen ist in natürlichen Uran folglich ausgeschlossen.

Reines $^{235}_{92}U$ besitzt dagegen, ebenso wie künstlich erzeugtes $^{239}_{92}Pu$ mit

$$\eta^{(5)}(\langle E_n \rangle_{ss}) = \frac{2{,}65 \cdot 2}{2 + 0{,}1} \cong 2{,}52$$

bzw.

$$\eta^{(9)}(\langle E_n \rangle_{ss}) = \frac{3{,}1 \cdot 2}{2 + 0{,}1} \cong 2{,}95$$

einen ausreichenden Neutronenüberschuß zur Realisierung der Kettenreaktion mit schnellen Neutronen, ist jedoch auch noch mit

$$\eta^{(5)}(E_T) = \frac{2{,}40 \cdot 585}{585 + 100} \cong 2{,}05$$

im thermischen Gebiet sehr gut geeignet.

5. Ist für ein vervielfachendes Medium $k_\infty > 1$, so existiert eine kritische Dimension bzw. Masse der aktiven Zone, welche durch die Bedingung

$$P_E^{(\mathrm{krit})} = \frac{1}{k_\infty}$$

gegeben ist, mit deren Erreichen eine Anordnung kritisch wird. Wie unterschiedlich diese Massen sein können, sollen folgende drei Beispiele zeigen:

— Die ersten Kernreaktoren (FERMI 1942, KURTSCHATOV 1946) bestanden aus natürlichem metallischem Uran, das in Graphitschichten als Moderator eingelagert wurde.
  Um die Neutronenabsorption durch die Reaktion $^{10}B(n, \alpha)$ (siehe Abb. 4.26) zu vermeiden, mußten höchste Anforderungen an die Reinheit des Graphits gestellt werden. Kritizität wurde erst erreicht, nachdem 50 t Uran gitterförmig in einem Graphitwürfel mit der Kantenlänge von etwa 5 m verteilt worden waren!
— Isotopenreines $^{235}_{92}U$ wird ohne Moderator bei kugelförmiger Anordnung mit einer Masse von ca. 50 kg kritisch, das entspricht einem Volumen von etwa 2,7 Litern.
— Durch Anordnung von reinem $^{235}_{92}U$ in Polyäthylen-Moderatorschichten kann die kritische Masse des eingesetzten Urans bis auf weniger als 300 g reduziert werden.

6. Die vorangegangenen Ausführungen zeigen, daß der Einsatz von Natururan zur Energieerzeugung zwar denkbar ist, in diesem Fall jedoch höchste Anforderungen an die Reinheit des als Moderator eingesetzten Graphits gestellt werden müssen. Als Alternative kommt der Einsatz des relativ teuren schweren Wassers D_2O, das eine geringe Neutronenabsorption besitzt, in Frage. In jedem Falle bleibt der Nachteil, daß mit Natururan nur geringe Reserven des Vervielfachungsfaktors k erreichbar sind.

Der Hauptweg der Kernenergetik besteht daher im Einsatz von angereichertem Uran, in dem der Anteil von ^{235}U auf 2 ... 20 % (in seltenen Fällen auch darüber) erhöht wurde.

Die Isotopentrennung erfolgt in Massentrennern, Thermodiffusionsanlagen oder Ultrazentrifugen und ist technisch sehr aufwendig.

11.1.2. Kernbrennstoff — Brüten

1. Einer allein auf den Einsatz von $^{235}_{92}U$ aus Isotopentrennanlagen orientierten Kernenergetik sind in der perspektivischen Entwicklung enge Grenzen gesetzt. Die Kernbrennstoff-Vorräte wären in einigen Jahrzehnten erschöpft, der Hauptanteil des Urans müßte ungenutzt bleiben.

Die Natur hat auch hier einen Ausweg offen gelassen: Der Neutroneneinfang an $^{232}_{92}Th$ oder $^{238}_{92}U$ tritt zwar im Neutronenhaushalt der kritischen Anordnung als Verlustfaktor auf, er führt jedoch über β-Zerfälle der Produktkerne

$$n + {}^{232}_{90}Th \rightarrow {}^{233}_{90}Th \xrightarrow[22\,\mathrm{min}]{\beta^-} {}^{233}_{91}Pa \xrightarrow[27\,\mathrm{d}]{\beta^-} {}^{233}_{92}U \tag{11.8}$$

bzw.

$$n + {}^{238}_{92}U \rightarrow {}^{239}_{92}U \xrightarrow[23\,\mathrm{min}]{\beta^-} {}^{239}_{93}Np \xrightarrow[2{,}3\,\mathrm{d}]{\beta^-} {}^{239}_{94}Pu\,. \tag{11.9}$$

Zu den künstlichen, thermisch spaltenden Brennstoffnukliden $^{233}_{92}U$ bzw. $^{239}_{94}Pu$, der im Reaktor verbrauchte Kernbrennstoff wird durch den neu „erbrüteten" teilweise reproduziert. Die Nuklide $^{232}_{90}Th$ und $^{238}_{92}U$ werden daher auch als Brutmaterial oder Spaltrohstoff bezeichnet.

2. Betrachten wir die Neutronenbalance in einem Reaktor aus Brennstoff-Brutmaterial-Moderator-Gemisch bei Einsatz von angereichertem Uran. Im stationären Betrieb muß für

jeden fixierten Zeitraum die Anzahl der entstehenden gleich der Anzahl der verbrauchten Neutronen sein:

$$\nu^{(5)}S_5 + \nu^{(8)}S_8 = S_5 + E_5 + S_8 + E_8 + E_M + L\,. \tag{11.10}$$

Hierin bedeuten

S_5, S_8 — Anzahl der Spaltereignisse beider Uran-Isotope; E_5, E_8, E_M — Anzahl der Einfangsereignisse im Uran und Moderator (sowie Konstruktionsmaterial u. Kühlmittel); L — Anzahl der entwichenen Neutronen (Leckage).

Wird der Zeitraum so gewählt, daß $S_5 + E_5 = 1$ gilt, also ein Neutron im $^{235}_{92}U$ absorbiert wird, so verbindet (11.10) die (mit kleinen Buchstaben bezeichneten) Wahrscheinlichkeiten der übrigen Prozesse miteinander:

$$\nu^{(5)}s_5 + \nu^{(8)}s_8 = 1 + s_8 + e_8 + e_M + l\,. \tag{11.11}$$

Nach der Definition (11.5) bzw. (11.7) gilt

$$\nu^{(5)}s_5 = \eta^{(5)}_{\text{eff}}(\langle E_n\rangle_{RS})\,,$$

wobei hier die Mittelung über das gesamte Reaktorspektrum gemeint ist. Damit kann (11.11) als

$$e_8 = \eta^{(5)}_{\text{eff}}(\langle E_n\rangle_{RS}) - 1 + (\nu^{(8)} - 1)\,s_8 - e_M - l \tag{11.12}$$

umgeschrieben werden.

Als Brutrate K_B wird das Verhältnis von neu erzeugten Brennstoffkernen zu verbrauchten Brennstoffkernen bezeichnet. In unseren Fall gilt

$$K_B \equiv \frac{E_8}{S_5 + E_5} = e_8 = \eta^{(5)}_{\text{eff}}(\langle E_n\rangle_{RS}) - 1 + (\nu^{(8)} - 1)\,s_8 - e_M - l\,. \tag{11.13}$$

Für $K_B = 1$ erzeugt der Reaktor ebensoviele Brennstoffkerne wie er selbst verbraucht. Wenn $K_B > 1$ wird, tritt eine erweiterte Reproduktion ein. Aus (11.13) folgt, daß hierzu

$$[\eta^{(5)}_{\text{eff}}(\langle E_n\rangle_{RS}) - 2] + (\nu^{(8)} - 1)\,s_8 \geqq e_M + l \tag{11.14}$$

erfüllt sein muß.

Da Gl. (11.14) auch auf andere Gemische angewandt werden kann und der Beitrag aus der Spaltung von $^{238}_{92}U$ im Spektrum des thermischen Reaktors klein ist, folgt hieraus allgemein, daß nur Kernbrennstoffe mit

$$\eta_e(\langle E_n\rangle_S) - 2 > 0 \tag{11.15}$$

für die erweiterte Reproduktion von Kernbrennstoff geeignet sind, wobei η den Wert 2 deutlich überschreiten muß, damit Verluste ausgeglichen werden können.

Laut Tabelle 11.1. ist dies im thermischen Energiebereich nur für $^{233}_{92}U$, welches selbst aus $^{232}_{90}Th$ gewonnen werden muß, erfüllt. Im Bereich schneller Neutronen besitzen alle drei Brennstoffnuklide einen zur erweiterten Reproduktion ausreichenden Neutronenüberschuß. Auf der Basis thermischer Reaktoren wird in breitem Maße mit $K_B < 1$ als Nebenprodukt $^{239}_{94}Pu$ produziert, welches bei der Aufbereitung der verbrauchten Brennstäbe auf chemischen Wege vom Uran abgetrennt und als neuer Kernbrennstoff eingesetzt werden kann. Trotz der prinzipiell vorhandenen Möglichkeiten des Einsatzes aller drei Brennstoffnuklide ist gegenwärtig das noch dominierende Verfahren der Reaktorbetrieb mit angereichertem $^{235}_{92}U$. Mit der Realisierung des Brennstoffzyklus auf der Basis schneller Brutreaktoren (siehe 11.3.) würde sich der Einsatz von $^{239}_{92}Pu$ in thermischen Reaktoren verstärken. Die Technologie des U-Pu-Brennstoffzyklus ist sicherheitstechnisch jedoch sehr problematisch.

11.2. Beschreibung von Neutronenfeldern

11.2.1. Einführung des Neutronenfeld-Begriffes

1. Die Berechnung der Nuklearprozesse in kernenergetischen Anlagen erfordert die Angabe der zeitlichen, räumlichen und energetischen Verteilung der Neutronen im Medium mit definierter Verteilung von Quellen, Streu- und Absorptionszentren. Quellen sind die spaltenden Brennstoffnuklide, es können aber auch zusätzliche äußere Neutronenquellen (radioaktive Neutronenquellen, Beschleunigertargets) vorhanden sein. An allen Nukliden der Anordnung findet elastische und unelastische Streuung statt, die beide zu einer Verringerung der Neutronenenergie führen sowie unerwünschte Einfangs- und andere Absorptionsprozesse. Bedenkt man die Vielfalt der Strukturen in den Anregungsfunktionen der Wirkungsquerschnitte in dem in Frage kommenden Energiebereich 10^{-2} eV ... 10^7 eV einerseits und die Variationsmöglichkeiten der geometrischen Anordnungen von Brennstoff, Moderator und Konstruktionselementen andererseits, so wird die Kompliziertheit des Problems einer vollständigen Beschreibung der Nuklearprozesse verständlich. Dennoch wurden sehr genaue Lösungsmethoden für dieses Problem entwickelt und in die Praxis eingeführt.

Zur makroskopischen Beschreibung der Neutronenverteilung im Medium werden makroskopische Streu-, und Absorptions- und totale Wirkungsquerschnitte

$$\begin{aligned} \Sigma_S/\mathrm{m}^{-1} &= N_v^A \cdot \sigma_S, \\ \Sigma_a/\mathrm{m}^{-1} &= N_v^A \cdot \sigma_a, \\ \Sigma_t &= \Sigma_a + \Sigma_s = N_v^A \cdot \sigma_t \end{aligned} \tag{11.16}$$

verwendet, welche die Wahrscheinlichkeit der Streuung bzw. Absorption pro Wegeeinheit angeben. Hierbei ist zu beachten, daß in Σ_s sowohl elastische wie auch unelastische Streuprozesse eingehen, $\sigma_s = \sigma_{el} + \sigma_{nn'}$ und der Absorptionsquerschnitt nur einen Teil des Reaktionsquerschnitts darstellt, $\sigma_a = \sigma_R - \sigma_{nn'}$.

Die Transmission durch eine Materialschicht der Stärke X ist nach (10.73) mit

$$T(X) = \exp\left[-N_v^A \sigma_t \cdot x\right] = \exp\left[-\Sigma_t x\right] = \exp\left[-\frac{x}{\lambda}\right] \tag{11.17}$$

gegeben, mit der freien Weglänge der Neutronen im Medium

$$\lambda/\mathrm{m} \equiv \frac{1}{\Sigma_t} = \frac{1}{\Sigma_{el} + \Sigma_a}. \tag{11.18}$$

Entsprechend werden partielle freie Weglängen λ_s und λ_a für die Streuung und Absorption eingeführt,

$$\lambda_s \equiv \frac{1}{\Sigma_s}, \qquad \lambda_a \equiv \frac{1}{\Sigma_a}, \tag{11.19}$$

so daß (11.18) auch in der Form

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda_s} + \frac{1}{\lambda_a} \tag{11.20}$$

geschrieben werden kann.

Bewegen sich die Neutronen mit konstanter Geschwindigkeit v_n, so ist die mittlere Zeit zwischen zwei Stößen gleich

$$\tau/\mathrm{s} = \frac{\lambda}{v_n}, \tag{11.21}$$

und die Stoßrate beträgt:

$$\frac{1}{\tau}/\mathrm{s}^{-1} = \frac{v_\mathrm{n}}{\lambda} = v_\mathrm{n}\Sigma_\mathrm{t}\,. \tag{11.22}$$

Im Medium finden bei einer räumlichen Dichte der Neutronen $N_\mathrm{V}^\mathrm{n}/\mathrm{m}^{-3}$ pro Volumen- und Zeiteinheit

$$\frac{N_\mathrm{V}^\mathrm{n}}{\tau}/\mathrm{m}^{-3}\,\mathrm{s}^{-1} = N_\mathrm{V}^\mathrm{n} v_\mathrm{n}\Sigma_\mathrm{t} \tag{11.23}$$

Streu- plus Einfangsereignisse statt.

2. Die Verteilung der Neutronen im Medium ist im allgemeinen Fall eine Funktion der räumlichen Koordinaten, der Energie und Bewegungsrichtung. Es werden daher zur Beschreibung der Neutronenfelder folgende Größen verwendet, deren physikalischer Sinn ohne weiteres verständlich ist:

— *Differentielle Neutronendichte* $N^\mathrm{n}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{\Omega}, E_\mathrm{n})/\mathrm{m}^{-3}\,\mathrm{Sr}^{-1}\,\mathrm{eV}^{-1}$: Die Zahl der Neutronen im Volumenelement $\mathrm{d}V$ und Energiebereich $E_\mathrm{n} \dots E_\mathrm{n} + \mathrm{d}E_\mathrm{n}$, die sich im Raumwinkelintervall $\mathrm{d}\Omega$ um die Richtung des Vektors $\boldsymbol{\Omega}$ bewegen, ist gleich (siehe Abb. 11.1)

$$N^\mathrm{n}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{\Omega}, E_\mathrm{n})\,\mathrm{d}E_\mathrm{n}\,\mathrm{d}\Omega\,\mathrm{d}V; \tag{11.24}$$

— *Vektordichte* $N^\mathrm{n}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{\Omega})/\mathrm{m}^{-3}\,\mathrm{sr}^{-1}$:

$$N^\mathrm{n}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{\Omega}) = \int_0^\infty N^\mathrm{n}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{\Omega}, E_\mathrm{n})\,\mathrm{d}E_\mathrm{n} \tag{11.25}$$

— *Neutronendichte* $N^\mathrm{n}(\boldsymbol{r})/\mathrm{m}^{-3}$:

$$N^\mathrm{n}(\boldsymbol{r}) = \int_{4\pi} N^\mathrm{n}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{\Omega})\,\mathrm{d}\Omega = \int_{4\pi}\int_0^\infty N^\mathrm{n}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{\Omega}, E_\mathrm{n})\,\mathrm{d}E_\mathrm{n}\,\mathrm{d}\Omega \tag{11.26}$$

(diese Größe ist mit der bisher verwendeten Volumendichte N_V^n identisch).

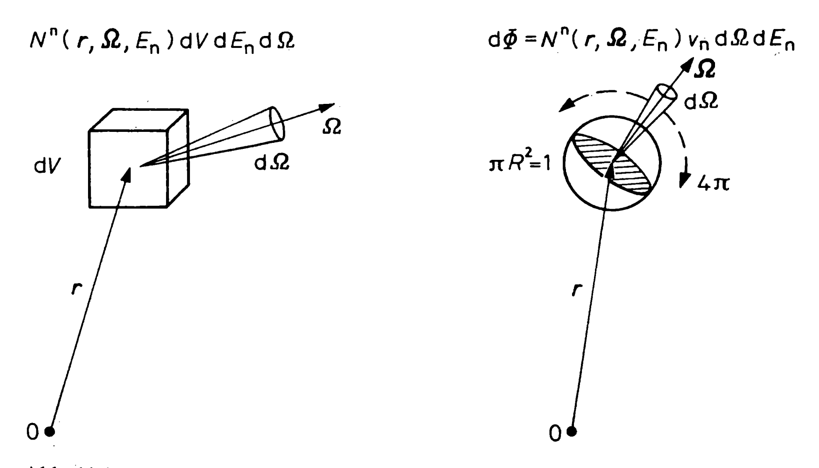


Abb. 11.1
Zur Definition der differentiellen Neutronendichte und der Flußdichte

— *Differentielle Flußdichte* der Neutronen $\Phi(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{\Omega}, E_n)/\mathrm{m^{-2}\,sr^{-1}\,s^{-1}\,eV^{-1}}$: Die Zahl der Neutronen im Volumenelement $\mathrm{d}V$ und Energiebereich $E_n \dots E_n + \mathrm{d}E_n$, die pro Sekunde durch eine Flächeneinheit senkrecht zu $\boldsymbol{\Omega}$ innerhalb des Raumwinkelbereiches $\mathrm{d}\boldsymbol{\Omega}$ hindurchtreten, ist gleich (siehe Abb. 11.2)

$$\Phi(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{\Omega}, E_n)\,\mathrm{d}E_n\,\mathrm{d}\Omega\,\mathrm{d}V\,. \tag{11.27}$$

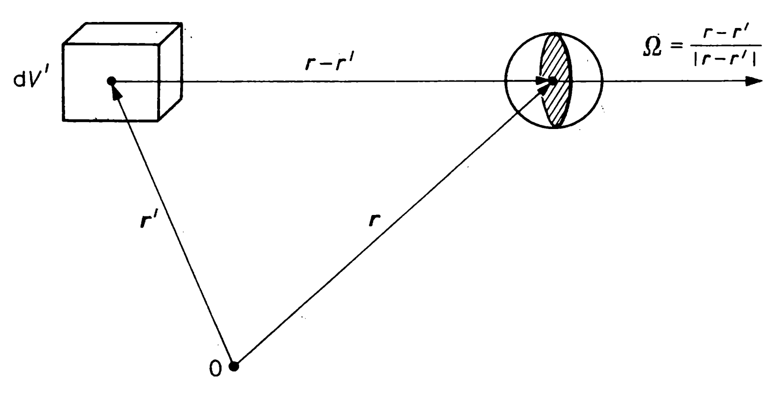


Abb. 11.2
Zur Ableitung der integralen Form der Transportgleichung

Entsprechend der Definition (11.24) sind die differentielle Flußdichte und die differentielle Dichte über die Geschwindigkeit der Neutronen $v_n(E_n)$ miteinander verbunden:

$$\Phi(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{\Omega}, E_n) = N^n(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{\Omega}, E_n)\,v_n\,, \tag{11.28}$$

mit

$$v_n = \left(\frac{2E_n}{m_n}\right)^{1/2}.$$

— *Vektordichte* $\Phi(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{\Omega})/\mathrm{m^{-2}\,sr^{-1}\,s^{-1}}$:

$$\Phi(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{\Omega}) = \int_0^\infty \Phi(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{\Omega}, E_n)\,\mathrm{d}E_n \tag{11.29}$$

sowie die (vollständige) *Flußdichte* $\Phi(\boldsymbol{r})/\mathrm{m^{-2}\,s^{-1}}$

$$\Phi(\boldsymbol{r}) = \int_{4\pi} \Phi(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{\Omega})\,\mathrm{d}\Omega = \int_{4\pi}\int_0^\infty \Phi(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{\Omega}, E_n)\,\mathrm{d}E_n\,\mathrm{d}\Omega$$

$$\Phi(\boldsymbol{r}) = \langle v_n \rangle \int_{4\pi}\int_0^\infty N^n(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{\Omega}, E_n)\,\mathrm{d}E_n\,\mathrm{d}\Omega = \langle v_n \rangle\,N^n(\boldsymbol{r})\,, \tag{11.30}$$

mit der über das Spektrum gemittelten Geschwindigkeit $\langle v_n \rangle$.

Aus Abb. 11.1 wird der physikalische Sinn von $\Phi(\boldsymbol{r})$ klar: es ist die Gesamtzahl der Neutronen, die pro Zeiteinheit durch die Oberfläche einer Kugel mit Einheitsquerschnitt $\pi R^2 = 1\ \mathrm{m}^2$, d. h. mit der Oberfläche $4\pi R^2 = 4\ \mathrm{m}^2$ von außen nach innen hindurchtreten. Da $\Phi(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{\Omega}, E_n)$, wie aus (11.28) ersichtlich, nicht als Vektor parallel zu v_n definiert ist, sondern als skalare Größe, summieren sich die Flüsse durch die Oberfläche von außen nach innen und in umgekehrter Richtung. Ist die Absorption im Inneren der Kugel gering, so tritt die gleiche Anzahl von Neutronen durch die Kugeloberfläche nach außen, die gesamte Flußdichte durch die Kugel-

oberfläche ist also 2Φ (während im Falle vektorieller Addition bei fehlenden Quellen und Senken im Inneren sich Null ergeben würde).

Bei isotroper Vektorflußdichte $\Phi(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{\Omega}) = \frac{1}{4\pi}\Phi(\boldsymbol{r})$ folgt damit, daß durch einen Teil der Kugeloberfläche von 1 m² pro Sekunde $\frac{1}{2}\Phi$ Neutronen hindurchtreten. Durch die ebene Grundfläche der Kugel $\pi R^2 = 1$ m² treten pro Sekunde

$$2\int\limits_{2\pi}\Phi(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{\Omega})\,\mathrm{d}\Omega = \frac{2}{4\pi}\Phi(\boldsymbol{r})\int\limits_{2\pi}\mathrm{d}\Omega = \Phi(\boldsymbol{r})$$

Neutronen in allen Richtungen hindurch. Im allgemeinen Fall sind alle bisher eingeführten Größen (10.24) bis (10.30) auch Funktionen der Zeit. Das Integral der Flußdichte über ein bestimmtes Zeitintervall trägt die Bezeichnung Fluenz.

11.2.2. Allgemeine Transportgleichung

1. Das räumlich-zeitliche Verhalten der so definierten Neutronenfelder kann auf der Basis einer Neutronenbalance-Gleichung beschrieben werden, da die Veränderung der Neutronenzahl $N^{\mathrm{n}}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{\Omega}, E^{\mathrm{n}})\,\mathrm{d}V\,\mathrm{d}\Omega\,\mathrm{d}E_{\mathrm{n}}$ in jeder Elementarzelle $\mathrm{d}V\,\mathrm{d}\Omega\,\mathrm{d}E_{\mathrm{n}}$ nur auf die folgenden Ursachen zurückgeführt werden kann:

— Abfluß von Neutronen aus der Elementarzelle infolge eines Flußdichtegradienten

$$\operatorname{div}\,[\boldsymbol{\Omega}\Phi(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{\Omega}, E_{\mathrm{n}})]\,\mathrm{d}V\,\mathrm{d}\Omega\,\mathrm{d}E_{\mathrm{n}} = \boldsymbol{\Omega}\operatorname{grad}\Phi(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{\Omega}, E_{\mathrm{n}})\,\mathrm{d}V\,\mathrm{d}\Omega\,\mathrm{d}E_{\mathrm{n}}\,; \qquad (11.31)$$

— Zuwachs durch vorhandene Neutronenquellen mit der differentiellen Quelldichte

$$S(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{\Omega}, E_{\mathrm{n}})\,; \qquad (11.32)$$

— Verluste infolge Absorption oder „Herausstreuen" (vgl. Formel (11.23))

$$\Sigma_{\mathrm{t}}\Phi(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{\Omega}, E_{\mathrm{n}})\,\mathrm{d}V\,\mathrm{d}\Omega\,\mathrm{d}E_{\mathrm{n}}\,; \qquad (11.33)$$

— und Zuwachs durch „Hineinstreuen"

$$\int\limits_{4\pi}\int\limits_{0}^{\infty}\Sigma_{\mathrm{s}}(\boldsymbol{\Omega}' \to \boldsymbol{\Omega}, E_{\mathrm{n}}' \to E_{\mathrm{n}})\,\Phi(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{\Omega}', E_{\mathrm{n}}')\,\mathrm{d}\Omega'\,\mathrm{d}E_{\mathrm{n}}'\,\mathrm{d}V\,\mathrm{d}\Omega\,\mathrm{d}E_{\mathrm{n}}\,, \qquad (11.34)$$

mit dem differentiellen Streuquerschnitt $\Sigma_{\mathrm{s}}(\boldsymbol{\Omega}' \to \boldsymbol{\Omega}, E_{\mathrm{n}}' \to E)$ für den Übergang von Neutronen aus der Elementarzelle $\mathrm{d}V\,\mathrm{d}\Omega'\,\mathrm{d}E_{\mathrm{n}}'$ nach $\mathrm{d}V\,\mathrm{d}\Omega\,\mathrm{d}E_{\mathrm{n}}$.

Bei isotroper Streuung im Laborsystem gilt

$$\Sigma_{\mathrm{s}}(\boldsymbol{\Omega}' \to \boldsymbol{\Omega}, E_{\mathrm{n}}' \to E_{\mathrm{n}}) = \frac{1}{4\pi}\Sigma_{\mathrm{s}}(E_{\mathrm{n}}' \to E_{\mathrm{n}})\,. \qquad (11.35)$$

2. Die Änderung der differentiellen Dichte muß gleich der Differenz von Zu- und Abfluß sein, diese generelle Forderung nach Kontinuität führt zur allgemeinen Transportgleichung oder Boltzmann-Gleichung

$$\begin{aligned}\frac{\partial N^{\mathrm{n}}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{\Omega}, E_{\mathrm{n}})}{\partial t} &= \frac{1}{\langle v_{\mathrm{n}}\rangle}\frac{\partial\Phi(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{\Omega}, E_{\mathrm{n}})}{\partial t}\\ &= -\boldsymbol{\Omega}\operatorname{grad}\Phi(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{\Omega}, E_{\mathrm{n}}) - \Sigma_{\mathrm{t}}(E_{\mathrm{n}})\,\Phi(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{\Omega}, E_{\mathrm{n}})\\ &\quad\times\int\limits_{4\pi}\int\limits_{0}^{\infty}\Sigma_{\mathrm{s}}(\boldsymbol{\Omega}' \to \boldsymbol{\Omega}, E_{\mathrm{n}}' \to E_{\mathrm{n}})\,\Phi(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{\Omega}', E_{\mathrm{n}})\,\mathrm{d}\Omega'\,\mathrm{d}E_{\mathrm{n}}' + S(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{\Omega}, E_{\mathrm{n}})\,,\end{aligned} \qquad (11.36)$$

welche die Flußverteilung in einem beliebigen System als Funktion des Ortes, der Richtung, der Energie und Zeit (7 Koordinaten) für eine gegebene Quellverteilung $S(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{\Omega}, E_n)$ beschreibt.

Zwei Randbedingungen für die Lösung von (11.36) lauten:

— an der Trenngrenze $\boldsymbol{r}_G$ zweier Medien A und B ist die Flußdichte stetig

$$\Phi_A(\boldsymbol{r}_G, \boldsymbol{\Omega}, E_n) = \Phi_B(\boldsymbol{r}_G, \boldsymbol{\Omega}, E_n); \qquad (11.37)$$

— an der Grenze des Mediums zum Vakuum erfolgt kein Rückfluß von Neutronen aus dem Vakuum

$$\Phi(\boldsymbol{r}_G, \boldsymbol{\Omega}_{VM}, E_n) = 0, \qquad (11.38)$$

hier bedeuten $\boldsymbol{\Omega}_{VM}$ alle Richtungen aus dem Vakuum in das Medium.

3. In vielen Fällen genügen einfachere Spezialfälle der Transportgleichung (11.36) zur Lösung der gestellten Aufgabe:

— Fehlen Energie- und Zeitabhängigkeit, so geht (11.36) zur Gleichung

$$\boldsymbol{\Omega} \operatorname{grad} \Phi(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{\Omega}) + \Sigma_t \Phi(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{\Omega}) = \int_{4\pi} \Sigma_s(\boldsymbol{\Omega}' \to \boldsymbol{\Omega})\, \Phi(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{\Omega}')\, d\Omega' + S(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{\Omega}) \qquad (11.39)$$

über, welche das Feld von monoenergetischen Neutronen in einem Medium mit stationären Quellen und für fehlenden Energieverlust bei der Streuung erfaßt. Diese Gleichung beschreibt z. B. die Diffusion thermischer Neutronen (siehe 11.2.5).

— In einer homogenen, isotropen Anordnung großer Dimension können zeitliche und räumliche Abhängigkeiten vernachlässigt werden; aus (11.36) wird dann

$$\Sigma_t \Phi(E_n) = \int_0^\infty \Sigma_s(E'_n \to E_n)\, \Phi(E'_n)\, dE'_n + S(E_n), \qquad (11.40)$$

wobei $\Phi(E_n)/\mathrm{m}^{-3} \cdot \mathrm{eV}^{-1}$ die räumliche konstante Flußdichte der Neutronen im Energieintervall $E_n \ldots E_n + dE_n$ ist. Mit Gleichung (11.40) kann die Abbremsung im homogenen Medium mit gleichmäßiger Quellverteilung beschrieben werden.

— Häufig findet (11.36) Anwendung zur Berechnung von stationären Neutronenfeldern bei nichthomogener Anordnung von Brennstoff und Moderatoren. Sie lautet dann

$$\boldsymbol{\Omega} \operatorname{grad} \Phi(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{\Omega}, E_n) + \Sigma_t \Phi(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{\Omega}, E_n) = \int_{4\pi} \int_0^\infty \Sigma_s(\boldsymbol{\Omega}' \to \boldsymbol{\Omega}, E'_n \to E_n)\, \Phi(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{\Omega}', E'_n) \times d\Omega'\, dE'_n + S(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{\Omega}, E_n). \qquad (11.41)$$

4. Gelegentlich wird die Transportgleichung in integraler Form angewandt. Ihre Ableitung soll hier unter folgenden vereinfachenden Annahmen gezeigt werden:

— es fehlen Energie- und Zeitabhängigkeit;

— die Streuung erfolgt isotrop $\Sigma_s(\boldsymbol{\Omega}' \to \boldsymbol{\Omega}) = \frac{1}{4\pi} \Sigma_s$;

— die Quellen strahlen isotrop $S(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{\Omega}) = \frac{1}{4\pi} S(\boldsymbol{r})$.

Wir betrachten die Zahl der Neutronen, die aus dem Elementarvolumen dV' kommend eine Einheitskugel $\pi R^2 = 1$ durchsetzen (siehe Abb. 11.2). Die Kugel ist von dV' aus unter dem Raumwinkel

$$d\Omega_k = \frac{\pi R^2}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|^2} = \frac{1}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|^2}$$

zu sehen. In diesem Raumwinkelbereich werden

$$\frac{\Sigma_s}{4\pi}\,\Phi(\boldsymbol{r}')\,\mathrm{d}V'\,\mathrm{d}\Omega_k = \frac{\Sigma_s}{4\pi}\,\Phi(\boldsymbol{r}')\,\frac{\mathrm{d}V'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^2}$$

Neutronen eingestreut und zusätzlich aus vorhandenen Quellen

$$\frac{1}{4\pi}\,S(\boldsymbol{r}')\,\mathrm{d}V'\,\mathrm{d}\Omega_k = \frac{1}{4\pi}\,S(\boldsymbol{r}')\,\frac{\mathrm{d}V'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^2}$$

Neutronen entsandt. Infolge Streuung und Absorption auf der Strecke $|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|$ wird dieser Fluß um den Faktor $\exp[-\Sigma_t\,|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|]$ geschwächt, so daß aus $\mathrm{d}V'$

$$\mathrm{d}\Phi(\boldsymbol{r}) = [\Sigma_s\Phi(\boldsymbol{r}') + S(\boldsymbol{r}')]\,\frac{\exp[-\Sigma_t\,|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|]}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^2}\,\mathrm{d}V'$$

Neutronen in die Kugel eindringen.

Der gesamte Neutronenfluß am Ort $\boldsymbol{r}$ beträgt somit

$$\Phi(\boldsymbol{r}) = \int_{V'} [\Sigma_s\Phi(\boldsymbol{r}') + S(\boldsymbol{r}')]\,\frac{\exp[-\Sigma_t\,|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|]}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^2}\,\mathrm{d}V'\,, \tag{11.42}$$

wobei die Integration über das gesamte Medium zu führen ist. Das ist die gesuchte integrale Transportgleichung, welche in erweiterter Form auch ohne die oben gemachten einschränkenden Bedingungen abgeleitet werden kann.

11.2.3. Abbremsung der Neutronen

1. Spaltneutronen entstehen als schnelle Neutronen mit Maximalwerten der Energie bis über 10 MeV und dem Mittelwert $\langle E_n\rangle_{ss} \cong 2$ MeV (siehe Abb. 10.82). Der gewünschte Übergang in den Energiebereich langsamer Neutronen mit dem großen Spaltquerschnitt $\sigma_{nf}^{(5)}(E_T) = 580\,\mathrm{b}$ erfolgt vorzugsweise durch elastische Stöße mit den leichten Moderatorkernen H, D, Be, C und O, teilweise auch durch unelastische Streuung an Uran und schwereren Konstruktionsmaterialien (Cr, Fe, Ni, Mn, ...). Die Transportgleichung für die Abbremsung im unendlichen, homogenen und isotropen Medium ist bereits bekannt (siehe Gl. (11.40)), sie stellt eine einfache Bilanzgleichung für die Neutronen im Einheits-Energieintervall um E_n dar. Die Lösung dieser Gleichung erfordert die Kenntnis des Streuquerschnitts für bestimmte Energieübertragung $\Sigma_s(E_n' \to E_n)$, eine Größe die aus der Stoßkinematik und im Falle der unelastischen Streuung auch aus der Kernstruktur folgt.

2. Wir betrachten im folgendem nur die Abbremsung durch elastische Stöße. Die Kinematik des nicht relativistischen elastischen Stoßes ist ausführlich im Anhang B. behandelt worden. Aus den dortigen Ausführungen folgt für das Verhältnis der kinematischen Energien E_n und E_n' des Neutrons vor bzw. nach dem Stoß an einem Kern der Massenzahl A

$$\frac{E_n'}{E_n} = \frac{A^2 + 2A\cos\Theta + 1}{(A+1)^2} \tag{11.43}$$

mit dem Streuwinkel Θ im M-System.

Der Kosinus des Streuwinkels ϑ im L-System ist gleich

$$\cos\vartheta = \frac{A\cos\Theta + 1}{(A^2 + 2A\cos\Theta + 1)^{1/2}}\,. \tag{11.44}$$

Mit den Hilfsgrößen

$$\beta = \left(\frac{A-1}{A+1}\right)^2; \qquad \alpha = \frac{4A}{(A+1)^2}; \qquad \alpha + \beta = 1 \tag{11.45}$$

läßt sich Gl. (11.43) in die Form

$$\frac{E_n'}{E_n} = \frac{1}{2}\left[(1+\beta) + \alpha\cos\Theta\right] \tag{11.46}$$

umschreiben. Maximaler Energieverlust tritt bei frontalem Stoß $\Theta = 180°$ auf, hierbei ist $\frac{E_n'}{E_n} = \beta$. Für Wasserstoff ist $\beta = 0$, d. h., bei frontalem Stoß wird das Neutron vollständig abgebremst.

3. Die Verteilungsfunktion des Energieverlustes der Neutronen $g(E_n' \to E_n')$ ist als Folge der Beziehung (11.46) eindeutig mit dem Kosinus des Streuwinkels Θ verknüpft:

$$g(E_n \to E_n')\,\mathrm{d}E_n' = p(\cos\Theta)\,\mathrm{d}\cos\Theta\,. \tag{11.47}$$

Von praktischem Interesse ist der mittlere Energieverlust bei einer großen Anzahl von Stößen. Da bis über $E_n \cong 1$ MeV annähernde Isotropie der Streuung im M-System gefunden wird (für Streuung an Wasserstoff sogar bis 10 MeV!), kann die Verteilungsfunktion $p(\cos\Theta)$ durch den mittleren Wert des $\cos\Theta$

$$\overline{p(\cos\Theta)} = \overline{\cos\Theta} = \frac{1}{2}$$

ersetzt werden, und für die Verteilungsfunktion der Energie gilt mit (11.46) und (11.47)

$$g(E_n \to E_n') = \begin{cases} p(\cos\Theta)\,\dfrac{\mathrm{d}\cos\Theta}{\mathrm{d}E_n'} = \dfrac{1}{(1-\beta)\,E_n}; & \beta E_n \leqq E_n' \leqq E_n\,, \\ 0; \quad E_n' < \beta E_n \quad \text{und} \quad E_n' > E_n\,. \end{cases} \tag{11.48}$$

Der mittlere logarithmische Energieverlust der Neutronen ξ (logarithmisches Dekrement)

$$\xi \equiv \overline{\ln E_n - \ln E_n'} = \overline{\ln\frac{E_n}{E_n'}} \tag{11.49}$$

kann aus der Verteilerfunktion (11.48) als

$$\xi = \int\limits_{\beta E_n}^{E_n} \ln\frac{E_n}{E_n'}\,g(E_n \to E_n')\,\mathrm{d}E_n' = \int\limits_{\beta E_n}^{E_n} \ln\frac{E_n}{E_n'}\,\frac{\mathrm{d}E_n'}{(1-\beta)\,E_n} = 1 + \frac{\beta}{1-\beta}\ln\beta \tag{11.50}$$

bestimmt werden.

Für Massenzahlen $A > 10$ ist (11.50) durch

$$\xi \cong \frac{1}{A + 2/3} \tag{11.51}$$

zu approximieren. Für Wasserstoff ($A = 1$) ergibt der Grenzübergang $\beta \to 0$ in (11.50) den Wert $\xi = 1$, d. h., im Mittel sinkt die Neutronenenergie pro Streuakt um den Faktor $1/e$.

Mit Hilfe von ξ kann die mittlere Anzahl von Stößen abgeschätzt werden, die zur Abbremsung von der Anfangsenergie E_{n0} bis zu einem vorgegebenen Wert E_n erforderlich ist. Es gilt offensichtlich

$$n\,\xi = \ln\left(\frac{E_{n0}}{E_n}\right),$$

woraus

$$n = \frac{\ln\,(E_{n0}/E_n)}{\xi} \tag{11.52}$$

folgt.

In Tabelle 11.2 sind die charakteristischen Werte β, ξ und n, letztere für die Abbremsung von $\langle E_n \rangle_{ss} = 2$ MeV auf $E_T = 0{,}0253$ eV, für einige typische Nuklide aufgeführt.

Tabelle 11.2
Abbremseigenschaften verschiedener Nuklide

Element	A	β	ξ	n
Wasserstoff	1	0	1,000	18
Deuterium	2	0,111	0,725	25
Beryllium	9	0,640	0,209	86
Kohlenstoff	12	0,716	0,158	114
Uran	238	0,983	0,008 38	2172

4. Bei isotroper Streuung im M-System ist die Streuung im L-System nicht isotrop, sondern nach vorwärts gerichtet. Der mittlere Kosinus $\overline{\cos\vartheta}$ kann aus (11.44) bestimmt werden:

$$\overline{\cos\vartheta} = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{4\pi} \cos\vartheta\,\mathrm{d}\Omega = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi} \frac{(A\cos\Theta + 1)\cos\Theta}{(A^2 + 2A\cos\Theta + 1)^{1/2}}\,\mathrm{d}\Theta = \frac{2}{3A}. \tag{11.53}$$

Die Anisotropie ist erwartungsgemäß umgekehrt proportional der Massenzahl A der Moderatorkerne.

5. In den Moderatoren gehen die Nuklide teilweise als chemische Verbindung ein. Außerdem werden neben einem hohen mittleren Energieverlust weitere Forderungen an den Moderator gestellt, deshalb läßt Tabelle 11.2 noch keine umfassende Wertung von Moderatoren zu. Hierzu werden weitere Größen eingeführt: Als Bremsvermögen bezeichnet man das Produkt aus der Streuwahrscheinlichkeit Σ_s mit dem mittleren logarithmischen Energieverlust ξ. Je größer das Produkt $\xi\Sigma_s$, desto schneller erfolgt die Abbremsung. Neben einem hohen Bremsvermögen

Tabelle 11.3
Bremsvermögen und Bremskoeffizienten einiger Moderatorenmaterialien

Moderator	$\xi\Sigma_s/\mathrm{m}^{-1}$	$\xi\Sigma_s/\Sigma_a$
H_2O	135	71
D_2O	17,6	5670
Graphit	6,0	192
Beryllium	15,8	143

soll der Moderator einen geringen Absorptionsquerschnitt Σ_a besitzen. Die Größe $\xi\Sigma_s/\Sigma_a$, Bremskoeffizient genannt, charakterisiert daher in noch umfassenderen Sinne die Eignung einer Substanz als Moderator. In Tabelle 11.3 sind entsprechende Werte für einige typische Moderatoren aufgeführt. Aus ihnen werden die hervorragenden Eigenschaften von schwerem Wasser und in geringerem Maße von Graphit ersichtlich, die es ermöglichen, auch für Natururan kritische Anordnungen aufzubauen. Reaktoren mit Leichtwasser können nur bei Einsatz von angereichertem Uran kritisch werden, da zu viele Neutronen im Wasserstoff eingefangen werden.

6. Im unendlich ausgedehnten, isotropen, nicht absorbierenden Medium sollen mit konstanter Quelldichte $S_0/\mathrm{m}^{-3}\,\mathrm{s}^{-1}$ Neutronen der Energie E_{n0} erzeugt werden. Die Anzahl der Neutronen $q(E_n)$, die pro Zeiteinheit eine vorgegebene Energiegrenze $E_n < E_{n0}$ bei der Abbremsung unterschreiten, wird Bremsdichte genannt. Bei fehlender Absorption ist $q(E_n) = \mathrm{const}$.

Ein schmales Energieintervall $E_n \dots E_n + \mathrm{d}E_n$ verlassen pro Zeiteinheit $N^n(E_n)\, v_n \Sigma_s\, \mathrm{d}E_n = \Phi(E_n)\, \Sigma_s\, \mathrm{d}E_n$ Neutronen infolge von Streuprozessen. Da stationäre Verhältnisse vorliegen, werden ebensoviele Neutronen aus dem darüberliegenden Energiebereich $E_n \dots E_n/\beta$ nach $\mathrm{d}E_n$ eingestreut. Ein schmaler Energiebereich $\mathrm{d}E_n^*$ trägt zur Einstreuung in $\mathrm{d}E_n$ die Zahl

$$\Phi(E_n^*)\, \Sigma_s^*\, \mathrm{d}E_n^* \cdot \frac{\mathrm{d}E_n}{E_n^* - \beta E_n^*}$$

bei (siehe Abb. 11.3). Wird über alle Energien E_n^* im Bereich $E_n < E_n^* < E_n/\beta$ integriert, so erhält man für die gesamte Einstreuung nach $\mathrm{d}E_n$

$$\Phi(E_n)\, \Sigma_s\, \mathrm{d}E_n = \mathrm{d}E_n \int\limits_{E_n}^{E_n/\beta} \Phi(E_n^*)\, \Sigma_s^*\, \frac{\mathrm{d}E_n^*}{E_n^* - \beta E_n^*}\,. \qquad (11.54)$$

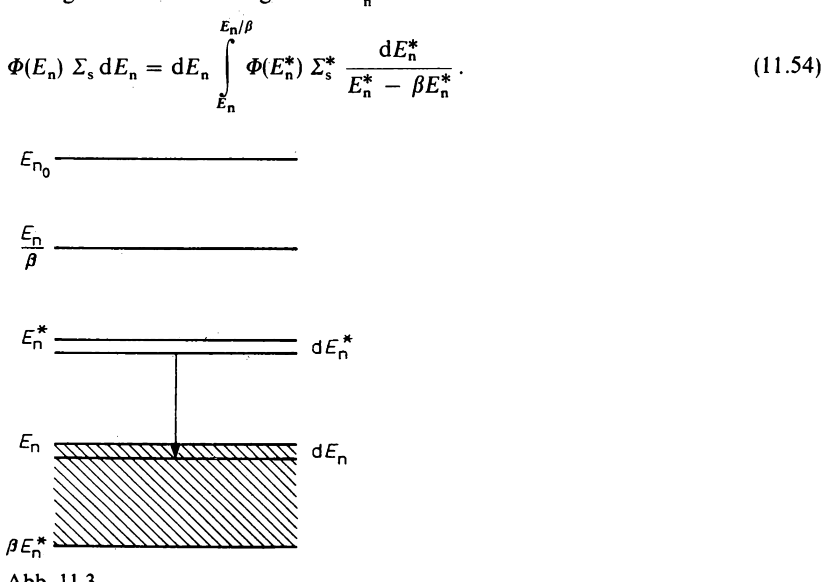


Abb. 11.3
Energetisches Diagramm zur Berechnung der Abbremsdichte $q(E_n)$

Durch Einsetzen ist leicht zu prüfen, daß die Lösung von (11.54)

$$\Phi(E_n)\, \Sigma_s = \frac{c}{E_n} \qquad (11.55)$$

lautet.

Zur Ermittlung der Konstante c in (11.55) betrachten wir die Abbremsdichte $q(E_n)$ quantitativ: Die Rate der Neutronen, welche aus dE_n^* kommend die Energiegrenze E_n passieren, ist gleich

$$\Phi(E_n^*)\,\Sigma_s^*\,dE_n^*\,\frac{E_n - E_n^*\beta}{E_n^* - E_n^*\beta};$$

insgesamt passieren diesen Energiewert

$$q(E_n) = \int_{E_n}^{E_n/\beta} \Phi(E_n^*)\,\Sigma_s^*\,dE_n^*\,\frac{E_n - E_n^*\beta}{E_n^* - E_n^*\beta} \tag{11.56}$$

Neutronen. Wird in (11.56) die Flußdichte entsprechend (11.55) eingesetzt, so ergibt die Integration

$$q(E_n) = q = c\left(1 + \frac{\beta}{1-\beta}\ln\beta\right) = c\xi\,, \tag{11.57}$$

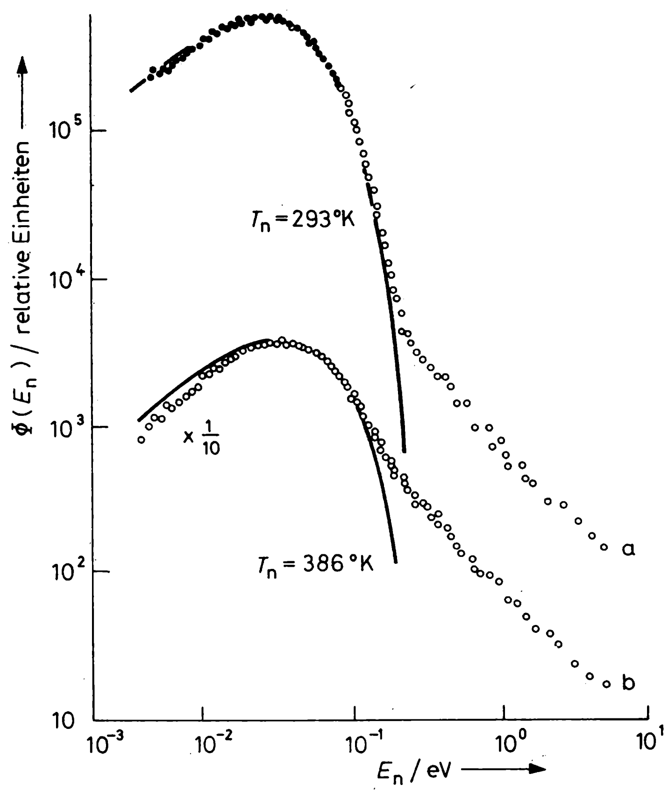


Abb. 11.4
Spektren der abgebremsten Neutronen einer Quelle im Wasser bei $T = 293$ K Wassertemperatur
a) reines H_2O ($\Sigma_a = 0{,}33$ b für Wasserstoff)
b) H_2O + Borsäure (der effektive Absorptionsquerschnitt beträgt, bezogen auf ein Proton, 4,3 barn); Maxwell-Verteilungen mit den angegebenen Temperaturen

d. h. eine von E_n unabhängige Abbremsdichte. Da Absorption vernachlässigt wurde, muß $q(E_n) = q = S_0$ sein, und wir erhalten aus (11.57) und (11.55)

$$\Phi(E_n) = \frac{S_0}{\xi \Sigma_S} \cdot \frac{1}{E_n} \sim \frac{1}{\Sigma_s E_n}. \tag{11.58}$$

Da im epithermischen Gebiet $E_n = 1$ eV ... 100 keV der Streuquerschnitt praktisch konstant ist, folgt aus (11.58), daß die Flußdichte in diesem Gebiet proportional $1/E_n$ ist.

Dieses $1/E_n$-Gesetz bestimmt tatsächlich die Spektrenform in thermischen Reaktionen über einen weiteren Energiebereich (siehe Abb. 11.4). Im Falle eines nicht homogenen und absorbierenden Mediums ist $q = q(E_n, \boldsymbol{r})$ und das $1/E_n$-Gesetz gilt nur noch näherungsweise.

7. Neben der energetischen Verteilung ist auch die räumliche Verteilung der Neutronen bei der Abbremsung von Interesse. Im Falle bekannter, sphärisch-symmetrischer Abbremsdichte

$$q(E_n, \boldsymbol{r}) = q(E_n, r)$$

kann der Abbremsprozeß durch das mittlere Quadrat des Abstandes von der Quelle $\overline{r^2_{E_n}}$, bei welchem die Neutronen die Energiegrenze E_n passieren, beschrieben werden

$$\overline{r^2_{E_n}} \equiv \frac{\int_0^\infty r^2 q(E_n, r)\, 4\pi r^2\, dr}{\int_0^\infty q(E_n, r)\, 4\pi r^2\, dr}. \tag{11.59}$$

Gelegentlich werden noch zwei andere Größen zur Charakterisierung der räumlichen Verteilung herangezogen: L_s — die sogenannte Bremslänge und τ_{E_n} — das sogenannte „Alter" der Neutronen. Diese sind mit $\overline{r^2_{E_n}}$ über

$$\overline{r^2_{E_n}} = \sigma L_s^2 = \sigma \tau_{E_n} \tag{11.60}$$

verknüpft.

Nur wenig unterscheidet sich $\overline{r^2_{E_n}}$ vom Wert des mittleren Abstandsquadrates von der Quelle $\overline{r^{*2}_{E_n}}$, bei dem die Neutronen die Energie E_n besitzen,

$$\overline{r^{*2}_{E_n}} \equiv \frac{\int_0^\infty r^2 \Phi(r, E)\, 4\pi r^2\, dr}{\int_0^\infty \Phi(r, E)\, 4\pi r^2\, dr}. \tag{11.61}$$

Wie weit sich die Neutronen vom Quellpunkt entfernen, hängt in erster Linie von der Größe der freien Streu-Weglänge $\lambda_s = \frac{1}{\Sigma_s}$ ab, aber auch von der Anisotropie der Streuung $\overline{\cos \vartheta}$ (11.53). Eine besondere Rolle spielt dabei die freie Bewegung des Neutrons bis zum ersten Stoß, da sie in jedem Falle von der punktförmigen Quelle radial wegführt. Ohne hier näher auf die Ableitung einzugehen, seien die Ergebnisse für $\overline{r^2_{E_n}}$ und $\overline{r^{*2}_{E_n}}$ angegeben:

$$\overline{r^2_{E_n}} = 2\lambda_s^2(E_{n0}) + \frac{2}{\xi\left(1 - \frac{2}{3A}\right)} \int_{E_n}^{E_{n0}} \lambda_s^2(E_n^*) \frac{dE_n^*}{E_n^*}, \tag{11.62}$$

$$\begin{aligned}\overline{r^{*2}_{E_n}} &= 2\lambda_s^2(E_{n0}) + \frac{2}{\xi\left(1 - \frac{2}{3A}\right)} \int_{E_n}^{E_{n0}} \lambda_s^2(E_n^*) \frac{dE_n^*}{E_n^*} + 2\lambda_s^2(E_n) \\ &= \overline{r^2_{E_n}} + 2\lambda_s^2(E_n).\end{aligned} \tag{11.63}$$

Der Unterschied zwischen beiden Größen besteht lediglich in dem Korrekturglied $2\lambda_s^2(E_n)$, welches die freie Wegstrecke der Neutronen, die bis auf E_n abgebremst wurden, berücksichtigt. Ist $\overline{r_{E_n}^2}$ bzw. $\overline{r_{E_n}^{*2}}$ bekannt, so kann die räumliche Verteilung der Neutronen mit bestimmter Energie im Medium um die Quelle angegeben werden. Für eine monoenergetische Punktquelle lautet sie

$$\Phi(E_n, r) \sim \exp\left[-\frac{r^2}{4\tau_{E_n}}\right]. \tag{11.64}$$

Durch Superposition der Felder vieler Punktquellen ist aus (11.64) leicht der allgemeine Fall nichtmonoenergetischer, räumlich verteilter Quellen abzuleiten.

Eine häufig praktizierte Methode zur Bestimmung der räumlichen Verteilung abgebremster Neutronen ist die Aktivationsmessung mit Indiumfolien. Infolge einer starken Absorptionsresonanz bei $E_n = 1{,}46$ eV werden praktisch nur Neutronen dieser Energie registriert. Meßergebnisse des Neutronenalters $\tau_{1,46}/\text{cm}^2$ in Wasser für verschiedene Quellen sind in Tabelle 11.4 zusammengestellt. Diese Tabelle läßt Rückschlüsse auf die erforderliche Dimensionierung der Moderatorschichten im Reaktor zu, wenn man fordert, daß bei Eintritt in benachbarte Brennstoffzonen die Neutronenenergie möglichst unter den Wert der Einfangsresonanzen in $^{238}_{92}$U (bei $E_r = 6{,}67$ eV und 20,6 eV) reduziert sein soll.

Tabelle 11.4
Alter des Neutronenflusses im Wasser
(für die Indiumresonanz $E_r = 1{,}46$ eV)

Quelle	$\langle E_{no}\rangle$/MeV	$\tau_{1,46}/\text{cm}^2$
D(d, n) ^{3}He	2,6	34,6 ± 2,2
Ra—Be	5	54,4 ± 2,5
Po—Be	5	57,3 ± 2,5
T(d, n) ^{4}He	14,1	150 ± 6

11.2.4. Thermische Neutronen

1. Selbst in einem unendlichen, nicht absorbierenden Medium kann die Abbremsung nicht bis zum absoluten Energieverlust führen, vielmehr stellt sich ein Gleichgewicht zwischen der Neutronenenergie und den thermischen Schwingungen der Moderatormoleküle ein. Die Energieverteilung der Neutronen ist dann gleich der Maxwellschen Verteilung bei der Temperatur des Moderators. In Analogie zur Thermodynamik spricht man von einem Neutronengas. Da praktisch stets eine schwache Absorption vorhanden ist, die nach dem $1/V$-Gesetz (siehe Kap. 10.1.) bevorzugt Neutronen geringster Energie betrifft, ist die effektive Temperatur des Neutronengases meist etwas höher als die Temperatur des Moderators.

2. Nach der Maxwellschen Verteilung ist die partielle Dichte der Neutronen im Energieintervall $E_n \dots E_n + \mathrm{d}E_n$ gleich

$$\mathrm{d}N^n = N^n(E_n)\,\mathrm{d}E_n = \frac{2\pi N^n}{(\pi k T_n)^{3/2}} \exp\left[-E_n/kT_n\right] \sqrt{E_n}\,\mathrm{d}E_n \tag{11.65}$$

mit der totalen Dichte

$$N^n = \int_0^\infty N^n(E_n)\,\mathrm{d}E_n\,. \tag{11.66}$$

Aus diesen Beziehungen folgt, daß die mittlere Energie der thermischen Neutronen gleich

$$\langle E_n \rangle_T \equiv \frac{\int_0^\infty E_n N^n(E_n)\,dE_n}{\int_0^\infty N^n(E_n)\,dE_n} = \int_0^\infty \frac{2}{\sqrt{\pi}} \exp\left[-E_n/kT_n\right]\left(\frac{E_n}{kT_n}\right)^{3/2} dE_n$$

ist. Wegen $E_n = \frac{m_n V_n^2}{2}$ und $dE_n = m_n V_n \, dV_n$ ist die Geschwindigkeitsverteilung

$$\frac{N^n(V_n)\,dV_n}{N^n} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \exp\left[-m_n V_n^2/2kT_n\right] \frac{m_n V_n^2}{2kT_n} \sqrt{\frac{m_n}{2kT_n}}\, dV_n \tag{11.67}$$

Die wahrscheinlichste Geschwindigkeit ist gleich

$$V_T = \sqrt{\frac{2kT_n}{m_n}}, \tag{11.68}$$

sie entspricht der Energie

$$E_T = kT_n = \frac{m}{2} V_L^2 . \tag{11.69}$$

Bei $T_n = 293{,}6$ K (20,4 °C) ist $E_T = kT_n = 0{,}0253$ eV und $V_T = 2200 \text{ m s}^{-1}$ — diese Werte werden üblicherweise mit dem Begriff „thermische Energie" bzw. „Geschwindigkeit" verbunden.

Die mittlere Geschwindigkeit im thermischen Spektrum

$$\langle V_n \rangle \equiv \frac{\int_0^\infty V_n N^n(V_n)\,dV_n}{\int_0^\infty N^n(V_n)\,dV_n} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \exp\left[-\left(\frac{V}{V_T}\right)^2\right]\left(\frac{V}{V_T}\right)^3 dV$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}} V_T \cong 1{,}128\, V_T \tag{11.70}$$

ist in etwa 13% höher als die thermische Geschwindigkeit. Bemerkenswert ist auch der Zusammenhang $\langle V_n^2 \rangle = \frac{3}{2} V_T^2$.

Die Flußdichteverteilung thermischer Neutronen ist gegeben durch

$$\frac{\Phi(E_n)\,dE_n}{\Phi} = \exp\left[-\frac{E_n}{E_T}\right] \frac{E_n}{E_T} \frac{dE_n}{E_T} \tag{11.71}$$

bzw.

$$\frac{\Phi(V_n)\,dE_n}{\Phi} = 2 \exp\left[-\left(\frac{V_n}{V_T}\right)^2\right]\left(\frac{V_n}{V_T}\right)^3 \frac{dV_n}{V_T}, \tag{11.72}$$

mit

$$\Phi = \int_0^\infty N^n(V_n)\, V_n \, dV_n = N^n \cdot \langle V_n \rangle = \frac{2}{\sqrt{\pi}} N^n \cdot V_T . \tag{11.73}$$

Die Flußdichteverteilung in Wasser um eine radioaktive Neutronenquelle ist auf Abb. 11.4 dargestellt. Sie ist durch den dominierenden Anteil thermischer Neutronen mit der Spektral-

verteilung (11.71) und dem sich zu höheren Energien anschließenden $1/E_n$-Bereich nach (11.58) geprägt.

Die effektive Temperatur der Maxwell-Verteilung hängt von der Größe des Absorptionsquerschnitts ab. Während für reines H_2O dieser Wert nahe der Wassertemperatur $T = 293$ K liegt, wird bei einem Borsäure-Wasser-Gemisch (das einem Absorptionsquerschnitt von 4,2 barn pro Proton entspricht) das thermische Spektrum in der absoluten Höhe verringert und zu höheren Temperaturen verschoben.

11.2.5. Diffusion

1. Gleichung (11.39) war bereits als Diffusionsgleichung für monoenergetische Neutronen bei zeitlich konstanten Quellen charakterisiert worden. In Worten ausgedrückt lautet sie: Der Abfluß von Neutronen aus der Elementarzelle $\mathrm{d}V\,\mathrm{d}\Omega$ infolge des Gradienten der Vektorflußdichte sowie durch Streuung und Absorption ist gleich der Einstreuung von Neutronen in diese Elementarzelle plus der differentiellen Neutronenquellstärke in ihr.

Durch mathematische Umformungen kann (11.39) für isotrope Quellen und Medien in die bekanntere Form der Diffusionsgleichung

$$\nabla^2\Phi(\boldsymbol{r}) - \frac{1}{L^2}\,\Phi(\boldsymbol{r}) + \frac{S(\boldsymbol{r})}{D} = 0 \tag{11.74}$$

umgewandelt werden, mit dem Diffusionskoeffizienten D

$$D = \frac{1}{3(\Sigma_{\mathrm{tr}} + \Sigma_{\mathrm{a}})} \tag{11.75}$$

und der Diffusionslänge L

$$L = \sqrt{\frac{D}{\Sigma_{\mathrm{a}}}} = \frac{1}{\sqrt{3\Sigma_{\mathrm{a}}(\Sigma_{\mathrm{tr}} + \Sigma_{\mathrm{a}})}}\,. \tag{11.76}$$

Der in (11.75) und (11.76) eingehende Transportquerschnitt Σ_{tr} ist definiert durch

$$\Sigma_{\mathrm{tr}} \equiv \Sigma_{\mathrm{s}}(1 - \overline{\cos\vartheta}) = \frac{1}{\lambda_{\mathrm{tr}}}\,; \tag{11.77}$$

er berücksichtigt die Anisotropie der Streuung im L-System. Tatsächlich geht für isotrope Streuung mit $\cos\vartheta = 0$ der Transportquerschnitt in den integralen Streuquerschnitt über und

$$D = \frac{1}{3(\Sigma_{\mathrm{s}} + \Sigma_{\mathrm{a}})} = \frac{1}{3\Sigma_{\mathrm{t}}}\,.$$

2. Wir betrachten als Anwendungsbeispiel für die Diffusionsgleichung (11.74) eine punktförmige Quelle S_0 am Ort $r = 0$ im unendlichen, homogenen und isotropen Medium.

In Kugelkoordinaten gilt wegen der Raumsymmetrie $\Phi(\boldsymbol{r}) = \Phi(r)$, und (11.74) lautet für $r > 0$

$$\frac{1}{r^2}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\,\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}r}\right) - \frac{1}{L^2}\,\Phi = 0\,. \tag{11.78}$$

Durch Substitution $\Phi(r) = \dfrac{U(r)}{r}$ entsteht die neue Differentialgleichung

$$\frac{\mathrm{d}^2U}{\mathrm{d}r^2} - \frac{1}{L^2}\,U = 0\,, \tag{11.79}$$

deren Lösung die Form

$$U(r) = A \exp\left(-\frac{r}{L}\right) + B \exp\left(\frac{r}{L}\right) \tag{11.80}$$

besitzt. Da der zweite Term für $r \to \infty$ nach unendlich geht, besitzt nur der erste Term eine physikalische Bedeutung, und wir erhalten

$$\Phi(r) = \frac{A}{r} \exp\left(-\frac{r}{L}\right). \tag{11.81}$$

Die Konstante A läßt sich aus der Quellstärke S_0 bestimmen, da die Gesamtzahl der im Medium absorbierten Neutronen gleich der Quellstärke sein muß:

$$S_0 = \int_V \Sigma_a \Phi(r)\, dV = A\Sigma_a \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\vartheta\, d\vartheta \int_0^{\infty} r^2 \frac{\exp\left(-\frac{r}{L}\right)}{r}\, dr$$

$$= 4\pi A \Sigma_a / L^2 ; \tag{11.82}$$

hieraus folgt

$$A = \frac{S_0}{4\pi D};$$

das endgültige Ergebnis lautet

$$\Phi(r) = \frac{S_0}{4\pi D} \cdot \frac{\exp\left(-\frac{r}{L}\right)}{r}. \tag{11.83}$$

Aus (11.83) wird die Bedeutung des Begriffes Diffusionslänge L ersichtlich: Für $\Sigma_a \to 0$ geht $L \to \infty$, und die Neutronenflußdichteverteilung nähert sich der allein durch geometrische Verhältnisse vorgegebenen Abhängigkeit $\Phi(r) \sim \frac{1}{r}$.

3. Welche Antwort gibt uns die Diffusionsgleichung (11.74) auf die Frage nach den Dimensionen einer kritischen Anordnung? Wir betrachten ein homogenes, isotropes Kernbrennstoff-Moderator-Gemisch. Die stationäre Diffusionsgleichung lautet nunmehr

$$\nabla^2 \Phi(r) - \frac{1}{L^2} \Phi(r) + \frac{1}{D} \nu \Sigma_f \Phi(r) = 0, \tag{11.84}$$

wobei der Spaltquerschnitt Σ_f sowohl in den Absorptionsterm

$$\Sigma_a = \Sigma_\gamma + \Sigma_f$$

als auch in den Quellterm eingeht. Die Umstellung von Gl. (11.84) ergibt

$$\nabla^2 \Phi(r) + \frac{1}{D}(\nu \Sigma_f - \Sigma_a)\, \Phi = 0. \tag{11.85}$$

Die Frage lautet: Gibt es für eine Kugel mit endlichem Radius R eine positive Lösung von (11.85)?

Für den Fall $(\nu\Sigma_f - \Sigma_a) = -L_{eff}^2 < 0$ ist die Lösung von der gleichen Form wie für (11.78), sie lautet

$$\Phi(r) = \frac{A \exp\left[-\frac{r}{L_{eff}}\right]}{r} = \frac{A \exp\left[-\left(\frac{D}{\Sigma_a - \nu\Sigma_f}\right)^{1/2} r\right]}{r}. \tag{11.86}$$

Wegen des Fehlens einer zentralen Quelle ist jedoch nach (11.82) $A = 0$, d. h., es gibt keine positive Lösung des Problems! Das ist physikalisch verständlich, da den freigesetzten Neutronen eine größere Zahl absorbierter Neutronen im gleichen Volumenelement gegenübersteht.

Für $\nu\Sigma_f > \Sigma$ ist die im Volumenelement entstehende Zahl von Neutronen größer als die absorbierte, der Überschuß kann den Abfluß durch die Oberfläche einer kritischen Anordnung ausgleichen, es wird ein endlicher kritischer Radius R_0 möglich.

Gleichung (11.78) lautet nun

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{d\Phi}{dr}\right) + \varkappa^2\Phi = 0\,, \tag{11.87}$$

mit $\varkappa^2 \equiv (\nu\Sigma_f - \Sigma_a) > 0$.

Die allgemeine Lösung dieser Gleichung lautet

$$\Phi(r) = A\frac{\sin \varkappa_r}{r} + B\frac{\cos \varkappa_r}{r}\,, \tag{11.88}$$

da für $r \to 0$ die Lösung endlich bleiben soll, ist $B = 0$ zu setzen, und die physikalisch bedeutungsvolle Lösung lautet

$$\Phi(r) = A\frac{\sin \varkappa_r}{r}\,. \tag{11.89}$$

Entsprechend Gl. (11.38) gilt als Randbedingung an der Grenze der Kugel, daß der Abfluß infolge Diffusion

$$-D\left(\frac{d\Phi}{dr}\right)_{r=R}$$

gleich der halben Flußdichte sein muß:

$$\frac{\Phi(R)}{2} + D\left(\frac{d\Phi}{dr}\right)_{r=R} = 0\,. \tag{11.90}$$

Dies führt bei Einsetzen von (11.89) zur transzendenten Gleichung

$$F(\varkappa R) = [\sin(\varkappa R) - \varkappa R\cos(\varkappa R)]/\varkappa R\sin(\varkappa R) = \frac{1}{2\varkappa D}\,. \tag{11.91}$$

Für $\varkappa R = 0$ gilt $\lim\limits_{\varkappa R\to 0} F(\varkappa R) \to 0$.

Im Bereich $\varkappa R > 0$ besitzt $F(\varkappa R)$ Polstellen bei $\varkappa R = k\pi$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Im Stetigkeitsintervall $0 < \varkappa R < \pi$ wächst die Funktion monoton von Null bis ∞, so daß bei einem einzigen Wert $R = R_0$

$$F(\varkappa R_0) = \frac{1}{2\varkappa D} = \frac{1}{\varkappa R_0} - \cot(\varkappa R_0) \tag{11.92}$$

erfüllt ist, das ist zugleich der kritische Radius der Anordnung. Für $R < R_0$ lautet die triviale Lösung $\Phi(r) = 0$. Für $R > R_0$ ist die stationäre Lösung $\Phi(r)$ unstabil, die Kettenreaktion führt zum lawinenartigen Anwachsen der Flußdichte Φ.

In einem schwach absorbierenden Medium besitzt das abgebremste Neutronenspektrum überall die gleiche Form (11.71) wie sie für Wasser auf Abb. 11.4. gezeigt wurde. Die orts- und energieabhängige Flußdichte, die sich immer dann einstellt, wenn Quellen und Moderatoren heterogen verteilt sind, läßt sich dann annähernd als Produkt einer orts- und energieabhängigen Funktion

$$\Phi(\boldsymbol{r}, E_n) = \Phi(\boldsymbol{r}) \frac{E_n}{(kT_n)^2} \exp\left[-\frac{E_n}{kT_n}\right] \tag{11.93}$$

darstellen. Durch Einsetzen von (11.93) in die stationäre Transportgleichung (11.41) kann gezeigt werden, daß auch dann eine Diffusionsgleichung ähnlich der für monoenergetische Neutronen (11.39) bzw. (11.74) gilt, in der jedoch D und Σ_a durch die gemittelten Werte

$$\langle D \rangle = \int_0^\infty \frac{1}{3\Sigma_t(E_n)} \frac{E_n}{(kT_n)^2} \exp\left[-\frac{E_n}{kT_n}\right] dE_n \tag{11.94}$$

und

$$\langle \Sigma_a \rangle = \int_0^\infty \Sigma_a(E_n) \frac{E_n}{(kT_n)^2} \exp\left[-\frac{E_n}{kT_n}\right] dE_n \tag{11.95}$$

zu ersetzen sind.

Die mathematische Behandlung der Diffusion thermischer Neutronen gleicht damit der für eine schmale Energiegruppe. Mehr noch: nur im thermischen Energiebereich gewinnt die Anwendung der Diffusions-Gleichungen (11.39) bzw. (11.74) echte physikalische Bedeutung, da nur hier im Mittel keine Veränderung der Neutronenenergie bei der Streuung stattfindet. Erweitert man die Berechnung auf den gesamten Energiebereich, so sind streng genommen die Transport-Gleichungen für viele, miteinander verkoppelte Energiegruppen zu lösen.

11.3. Thermische Reaktoren

11.3.1. Prinzipieller Aufbau und Klassifizierung

1. Hinsichtlich des konstruktiven Aufbaus unterscheiden sich homogene und heterogene Reaktoren grundsätzlich voneinander. Im homogenen Reaktor ist der Kernbrennstoff gleichmäßig mit dem Moderator gemischt, wobei Lösungen von Uransalzen, Suspensionen von Uranoxyden in leichtem oder schwerem Wasser, geschmolzene Salze oder feste Moderatoren mit gleichmäßig verteilt eingelagertem Uran verwendet werden. Das homogene Gemisch dient gleichzeitig als Brennstoff, Moderator und Wärmeträger (Kühlmittel).

Für Leistungsreaktoren werden bisher praktisch ausschließlich heterogene Anordnungen verwendet, mit getrennter Anordnung von Brennstoff und Moderator. Dies bringt Vorteile sowohl für den Neutronenhaushalt als auch, infolge des Einschlusses der hochradioaktiven Spaltprodukte in Brennstoffkassetten, für den Strahlenschutz. Der prinzipielle Aufbau eines heterogenen thermischen Reaktors ist auf Abb. 11.5 dargestellt.

Er enthält als prinzipielle Elemente
- zu Kassetten zusammengefaßte Brennstäbe,
- den Moderator,
- das Kühlmittel und -system,
- den Reflektor um die aktive Zone,
- das Reaktorgehäuse
- und die äußere biologische Abschirmung.

In Experimentierreaktoren sind weiterhin Kanäle aus der aktiven Zone durch die Abschirmung hindurch sowie eine „thermische Säule" aus Graphit vorgesehen.

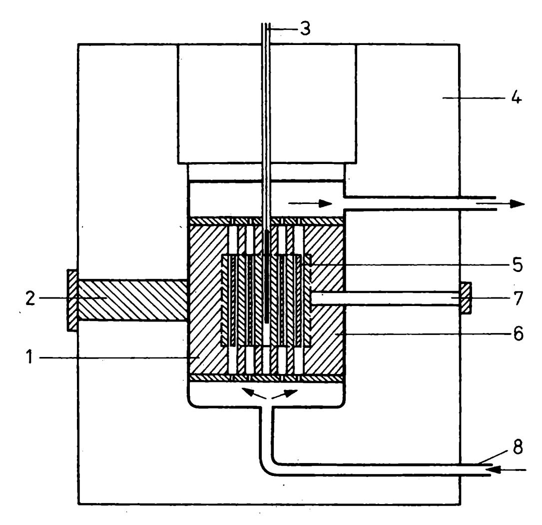


Abb. 11.5
Konstruktionsschema eines Kernreaktors mit thermischen Neutronen;
1 Reaktorgefäß, 2 thermische Säule (Graphit), 3 Regelstab, 4 Betonabschirmung, 5 Brennstäbe, 6 Reflektor, 7 Experimentierkanal, 8 Kühlkreislauf

2. Wesentliche Unterschiede bestehen zwischen verschiedenen heterogenen Reaktoren hinsichtlich der Verwendung von Moderatoren und Kühlmittel. Gebräuchlich sind die Kombinationen
- Wasser—Wasser,
- Wasser—Graphit,
- Gas (Helium, Co_2)—Graphit.

Seltener werden organische Verbindungen oder flüssiges Metall als Wärmeträger verwendet.

3. Als Kernbrennstoff finden u. a. metallisches Uran, UO_2, Legierungen von Uran mit anderen Metallen und PuO_2 Anwendung. Die größte Verbreitung fanden bisher Brennelemente aus UO_2-Keramik, die eine Schmelztemperatur von 2800 °C besitzt und auch bei hohen Temperaturen keine chemischen Reaktionen mit den Elementen der Kassette eingeht.

Nur bei Graphit- und D_2O-Moderatoren kann Natururan eingesetzt werden, während in Leichtwasserreaktoren eine Anreicherung von ^{235}U bis zu10% erforderlich ist.

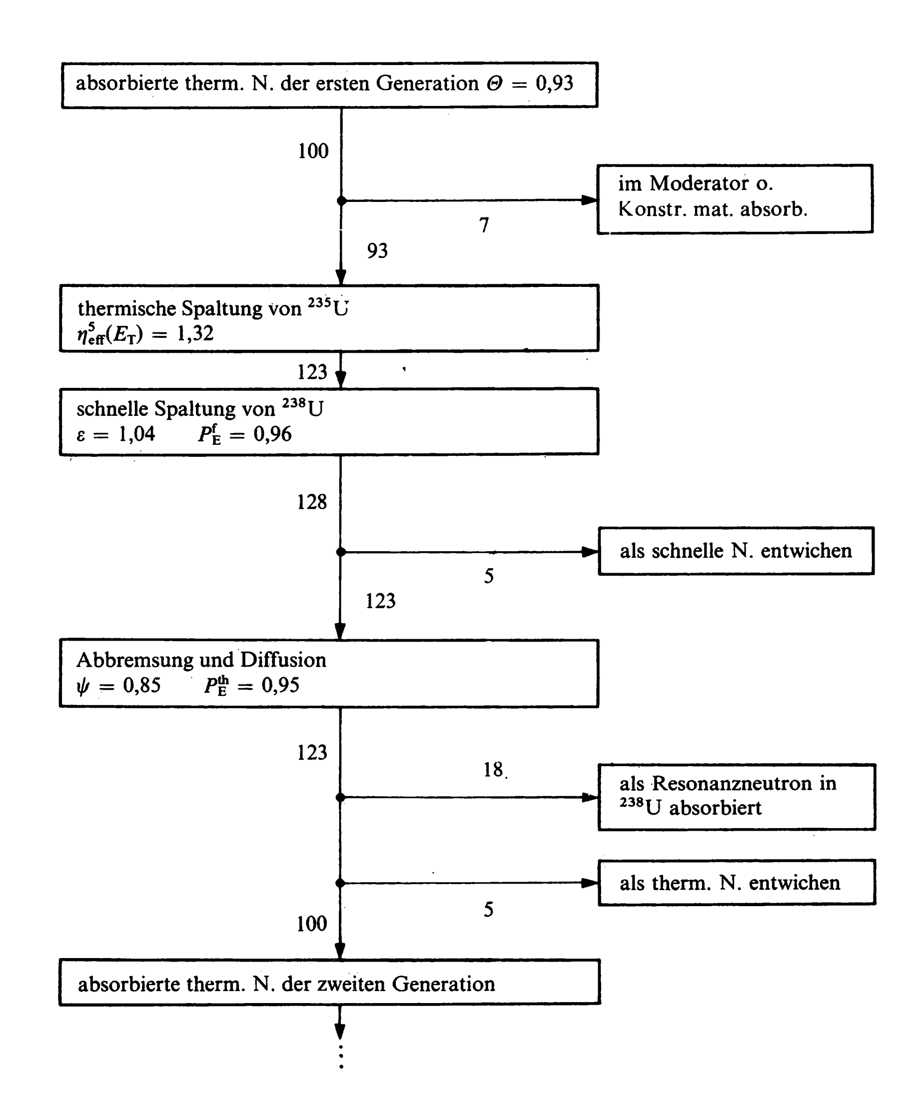
Als Konstruktionsmaterialien finden die schwach absorbierenden Materialien Aluminium, Magnesium, Zirkonium, aber wegen deren Korrosionsbeständigkeit auch nichtrostende Stähle Verwendung.

Die Regelstäbe werden häufig aus Borstahl (bis zu 5% Borgehalt), B_4C oder unter Verwendung von Kadmium und Hafnium hergestellt.

11.3.2. Vier-Faktoren-Formel

Für den thermischen Reaktor mit angereichertem Uran wird der Vervielfachungskoeffizient (siehe Gl. (11.6)) in der folgenden, spezifizierten Form, Vier-Faktoren-Formel genannt, angegeben:

$$k_\infty = \psi \cdot \varepsilon \cdot \eta \cdot \Theta\,. \tag{11.96}$$



Hierbei bedeuten

η — die in Gl. (11.7) eingeführte Größe $\eta_{\text{eff}}^{(5)}(E_T)$, mit dem der Anreicherung entsprechenden Verhältnis $N^{(8)}/N^{(5)}$,

ε — Vervielfachungskoeffizient für schnelle Neutronen, der die Erhöhung der Zahl von Spaltneutronen infolge schneller Spaltung von ^{238}U und ^{235}U berücksichtigt,

ψ — Wahrscheinlichkeit, dem Resonanzeinfang zu entgehen,

Θ — Ausnutzungskoeffizient thermischer Neutronen, der die Wahrscheinlichkeit der Absorption thermischer Neutronen im Uran angibt.

Der Entweichfaktor P_E kann nunmehr als das Produkt der beiden Größen P_E^f und P_E^{th} dargestellt werden, welche jeweils die Wahrscheinlichkeit des „Nichtentweichens" als schnelles bzw. thermisches Neutron bedeuten. Somit erhält man für eine endliche Anordnung den effektiven Vervielfachungskoeffizienten

$$k_{\text{eff}} = \eta_{\text{eff}}^{(5)}(E_T) \cdot \varepsilon \cdot \psi \cdot P_E^f P_E^{th} . \tag{11.97}$$

Zur Illustration dieser Formel ist in dem Schema auf S. 701 die typische Neutronenbilanz in einem thermischen Reaktor auf der Basis von Natururan mit $k_{\text{eff}} = 1$ dargestellt. Das Schema beginnt mit der willkürlich festgelegten Zahl von 100 thermischen Neutronen der ersten Generation.

11.3.3. Reaktivität und Reaktorperiode

1. Die Veränderung der Leistung des Reaktors, sein Betriebszustand, wird mit der relativen Änderung des Vervielfachungskoeffizienten, Reaktivität ϱ genannt, beschrieben:

$$\varrho \equiv \frac{k_{\text{eff}} - 1}{k_{\text{eff}}} \approx k_{\text{eff}} - 1 . \tag{11.98}$$

Im Moment $t = 0$ soll die Reaktivität sprunghaft von 0 auf $\varrho \ll 1$ anwachsen. Wie verändert sich dabei die Leistung des Reaktors? Da die Reaktorleistung proportional der Neutronenzahl ist, gilt nach (11.3) für die Leistung $P(t)$

$$P(t) = P(0)\, k_{\text{eff}}^{t/\tau_G} ; \tag{11.99}$$

daraus folgt

$$\ln \frac{P(t)}{P(0)} = \frac{t}{\tau_G} \ln k_{\text{eff}} \approx \frac{t}{\tau_G}\, \varrho . \tag{11.100}$$

Demnach kann der Leistungszuwachs auch als

$$P(t) = P(0) \exp\left[\frac{\varrho}{\tau_G}\, t\right] \tag{11.101}$$

ausgedrückt werden. Im Zeitintervall $T_R = \tau_G/\varrho$ erhöht sich P jeweils um das e-fache, daher wird T_R auch Reaktorperiode genannt. Die Verdopplungszeit der Leistung T_2 hängt mit T_R durch die Beziehung $T_2 = 0{,}693\, T_R$ zusammen.

Die Lebensdauer der prompten Spaltneutronen im thermischen Reaktor τ_p setzt sich aus der Abbremszeit $\tau_B \cong 10^{-4}$ s und Diffusionszeit $\tau_D \cong 10^{-4} \ldots 10^{-3}$ s zusammen

$$\tau_p = \tau_B + \tau_D \cong \tau_D \cong 10^{-4} \ldots 10^{-3}\ \text{s} .$$

(Die Diffusionszeit kann leicht aus $\tau_D = \lambda_a/V_T$ abgeschätzt werden.)

2. Würden nur prompte Spaltneutronen emittiert, so würde im Falle $\tau_D = 5 \cdot 10^{-4}$ s und $\varrho = 0{,}0025$ die Reaktorperiode $T_R = 5 \cdot 10^{-4}/2{,}5 \cdot 10^{-3} = 0{,}2$ s betragen, was einer Leistungserhöhung von $P(1)/P(0) = e^5 = 150$ pro Sekunde entspricht.

Eine automatische Steuerung des Reaktors über Regelstäbe wäre praktisch unmöglich.

Hier kommt die Tatsache zu Hilfe, daß ein kleiner Teil $\beta\nu \ll \nu$ der Spalt-Neutronen verzögert emittiert wird (siehe 10.7.) mit einer mittleren Lebensdauer von $\langle\tau_v\rangle = 12{,}4$ s. Die mittlere Lebensdauer aller Spaltneutronen ist also

$$\langle\tau\rangle = \frac{(1-\beta)\,\nu\tau_p + \beta\nu\langle\tau_t\rangle}{\nu} \approx \tau_p + \beta\langle\tau_t\rangle\,, \tag{11.102}$$

mit $\tau_p = 5 \cdot 10^{-4}$ s, $\beta = 0{,}0064$, $\langle\tau_v\rangle = 12{,}4$ s ist $\beta\langle\tau_v\rangle = 0{,}08$ s und $\langle\tau\rangle \approx \beta\langle\tau_v\rangle = 0{,}08$ s. Die Reaktorperiode $T_R = \dfrac{8 \cdot 10^{-2}}{2{,}5 \cdot 10^{-3}} \cong 32$ s, d. h., innerhalb einer Sekunde wächst die Leisung nur um 3,1 %. Der Reaktor kann leicht automatisch gesteuert werden.

Ein solches Verhalten gilt jedoch nur solange, wie der Vervielfachungskoeffizient für prompte Neutronen $k_{eff}(p)$, der aus $k_{eff} = k_{eff}(1-\beta) + k_{eff}\beta = k_{eff}(p) + k_{eff}(v)$ gegeben ist kleiner als eins bleibt, da sich somit die Kettenreaktion allein auf der Grundlage der prompten Neutronen sehr schnell entwickelt.

3. Die Reaktivität des Reaktors hängt von dessen Temperatur ab. Im Prozeß der Erwärmung des Reaktors ändert sich z. B. die Dichte der Reaktormaterialien und Wärmeträger. Es wächst die Neutronentemperatur. Damit kommt es zur Ausdehnung des Reaktorgefäßes usw. Die Verringerung der Dichte führt zur Erhöhung der Diffusions- und Streulänge. Die Neutronenverluste durch Abfluß werden größer, damit verringert sich die Reaktivität des Reaktors. Der Resonanzeinfang ψ und der Ausnutzungskoeffizient Θ sind ebenfalls temperaturabhängig. Insgesamt werden die Abhängigkeiten durch den sogenannten Temperaturkoeffizienten

$$\alpha \doteq \frac{d\varrho(T)}{dT} \tag{11.103}$$

erfaßt.

Angestrebt und realisiert wird in der Regel ein negativer Temperaturkoeffizient, der einen stabilen und sicheren stationären Betrieb des Reaktors mit einer bestimmten thermischen Leistung gewährleistet.

Besonders hoch sind die negativen Temperaturkoeffizienten in Reaktoren des Typs WWER, für die im Bereich

$$\alpha = -2 \cdot 10^{-4} \cdots -4 \cdot 10^{-4}\ \text{grd}^{-1}$$

liegt. Dies ist auf die Verringerung der Dichte des Kühlwassers bei Erwärmung des Reaktors zurückzuführen.

11.3.4. Veränderungen in den Brennstäben

1. Infolge der Spaltung und des Strahlungseinfangs wird im Laufe einer Reaktorkampagne der Teil ΔM des insgesamt eingesetzten Kernbrennstoffes M verbraucht. Die relative Menge des verbrauchten Kernbrennstoffes heißt Ausbrand Z

$$Z \equiv \frac{\Delta M}{M}\,. \tag{11.104}$$

Im thermischen Reaktor wird zur Erzeugung einer Energiemenge von 1 MW × Tag eine Menge von $a_{th} = 1{,}31 \text{ g MW}^{-1}\text{ d}^{-1} = 1{,}31 \cdot 10^{-6} \text{ t MW}^{-1}\text{ d}^{-1}$ ^{235}U verbraucht. Pro Kompagne τ_{RK}/Tage wird bei einer mittleren Leistung von P/MW die Masse

$$\Delta M = a_{th} P \cdot \tau_{RK} \tag{11.105}$$

verbraucht; mit (11.104) ergibt das

$$Z = a_{th} \cdot \frac{P}{M} \cdot \tau_{RK}\,, \tag{11.106}$$

mit der spezifischen Leistung $\frac{P}{M}$/MW · t^{-1} des Reaktors. Die Erhöhung des Ausbrandes verlängert bei gleicher Leistung die Kampagnedauer und ist daher ökonomisch sehr vorteilhaft. Praktisch sind nur relativ kleine Werte von Z erreichbar — in thermischen Leistungsreaktoren bis etwa 3 %.

2. Eine wesentliche Ursache hierfür ist die Aussammlung von Spaltprodukten mit hohen Einfangsquerschnitten in den Brennstäben, die als „Vergiftung" des Reaktors bezeichnet wird. In diesem Zusammenhang ist insbesondere das Nuklid ^{135}Xe hervorzuheben, welches den extrem hohen thermischen Einfangsquerschnitt von 3,5 · 10^6 barn besitzt. Es entsteht zu 5% direkt als Spaltprodukt und zu 95% in der Zerfallskette

$$^{135}\text{Te} \xrightarrow{\beta^-} {}^{135}\text{I} \xrightarrow{\beta^-} {}^{135}\text{Xe} \xrightarrow{\beta^-} {}^{135}\text{CS} \xrightarrow{\beta^-} {}^{135}\text{Ba}$$

Die Halbwertszeiten von ^{135}I und ^{135}Xe betragen 6,7 h bzw. 9,2 h.

3. Im stationären Leistungsbetrieb stellt sich ein Gleichgewicht zwischen Bildung von radioaktiven ^{135}Xe und seiner Vernichtung infolge radioaktiven Zerfalls und der Neutronenabsorption ein. Wird der Reaktor abgeschaltet, so hört der Abbau von ^{135}Xe durch Strahlungseinfang auf. Infolge des weitergehenden Zerfalls von ^{135}I kommt es zu einer Konzentrationserhöhung von ^{135}Xe in den Brennstäben, was eine Verringerung der Reaktivität des Reaktors für die Dauer einiger Halbwertszeiten des Zerfalls von ^{135}Xe bewirkt. Dieser Effekt tritt bei hohen Flüssen $\Phi \cdot 10^{18}$ m^{-2} s^{-1} auf und wird als „Jod-Mulde" bezeichnet (siehe Abb. 11.6).

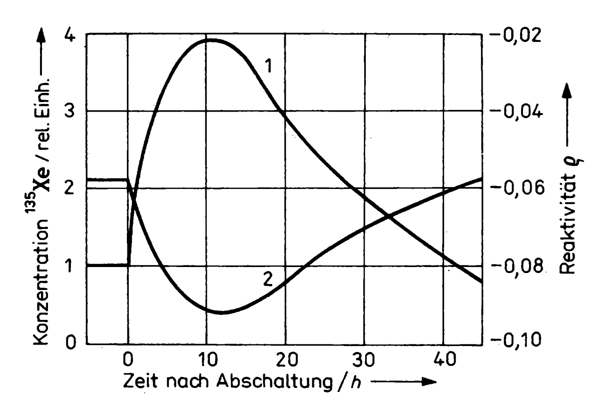


Abb. 11.6
Abhängigkeit der ^{135}Xe-Konzentration (1) und der Reaktivität (2) von der Zeit nach Abschaltung des Reaktors

11.3.5. Kernkraftwerke auf der Basis von thermischen Reaktoren

1. Die überwiegende Zahl von Kernkraftwerken in der Welt ist mit Wasser-Wasser-Reaktoren ausgerüstet, zu denen auch der Reaktor vom Typ WWER-440 gehört.
Einige Charakteristika dieses Reaktors sind in Tabelle 11.5 aufgeführt. Die thermische Leistung beträgt 1370 MW, der erste Kreislauf umfaßt sechs Zirkulationsschleifen, die jeweils aus der Hauptumwälzungspumpe, Dampferzeuger und zwei Schiebern bestehen. In den zweiten Kreisläufen sind zwei Dampf-turbinen zu je 220 MW el. Leistung angeschlossen.

Tabelle 11.5
Einige Parameter der Leistungsreaktoren vom Typ WWER

phys. Größe	WWER-440	WWER-1000
thermische Leistung/MW	1375	3000
elektrische Leistung/MW	2 × 220	2 × 500
Wirkungsgrad/%	32	33
Druck im ersten Kreislauf/atm	125	160
Dampfdruck/atm	44	60
Wassertemperatur bei Eintritt/°C	269	289
Erwärmung im Reaktor/°C	31	35
aktive Zone Φ/m	2,88	3,12
h/m	2,50	3,50
Brennstoffeinsatz (Uran)/t	42	66
Ausbrand/MW · d · $(kg)^{-1}$	28,6	26—40
Anreicherungsgrad/%	3,5	3,3—4,4
Zahl der Regelmechanismen	37	109
spezifische Energiedichte in der aktiven Zone/kW · l^{-1}	83	111

Im ersten Kreislauf befindet sich Wasser unter 125 atm. Druck. In der aktiven Zone ($\Phi = 2{,}28$ m, $h = 2{,}5$ m) befinden sich 349 Kassetten, davon 276 mit Brennstoff gefüllte; die übrigen Kassetten werden zur Steuerung und Regelung genutzt. Jede der Brennstoffkassetten enthält 126 zylindrische Brennstäbe mit 9,1 mm Durchmesser. Die Wände der Brennstäbe sind aus Zirkonlegierungen gefertigt. Als Brennstoff kommt angereichertes Uran (3,3% ^{235}U) in Form von UO_2 zum Einsatz, was eine Kampagnedauer von etwa drei Jahren ermöglicht.

Abb. 11.7. zeigt die schematische Darstellung eines Kernkraftwerkes mit Druckwasserreaktor.

2. Die Kernenergetik der nächsten Jahrzehnte wird durch noch größere Reaktoreinheiten geprägt sein, es sind dies z. B. Druckwasserreaktoren vom Typ WWER-1000, deren wichtigste Parameter ebenfalls Tabelle 11.5 zu entnehmen sind. Das prinzipielle wärmetechnische Schema des KKW auf der Basis eines WWER-1000 unterscheidet sich wenig von dem WWER-440. Alle Aggregate müssen jedoch bedeutend leistungsfähiger ausgelegt sein; so kommen zwei Turbinen zu je 500 MW pro Reaktorblock zum Einsatz. Brennstoff ist wiederum gesintertes UO_2 in Kassetten aus Zirkonium-Legierungen. Die Zahl der Brennstäbe pro Kassette wird auf 330 erhöht.

3. Eine Alternative zum Druckwasserreaktor stellt der sogenannte Siedewasserreaktor dar, der nur einen Kreislauf hat. Der Dampf wird unmittelbar im Reaktordruckgefäß erzeugt und direkt den Turbinen zugeleitet. Der Reaktorkern bleibt stets mit Wasser bedeckt, das gleich-

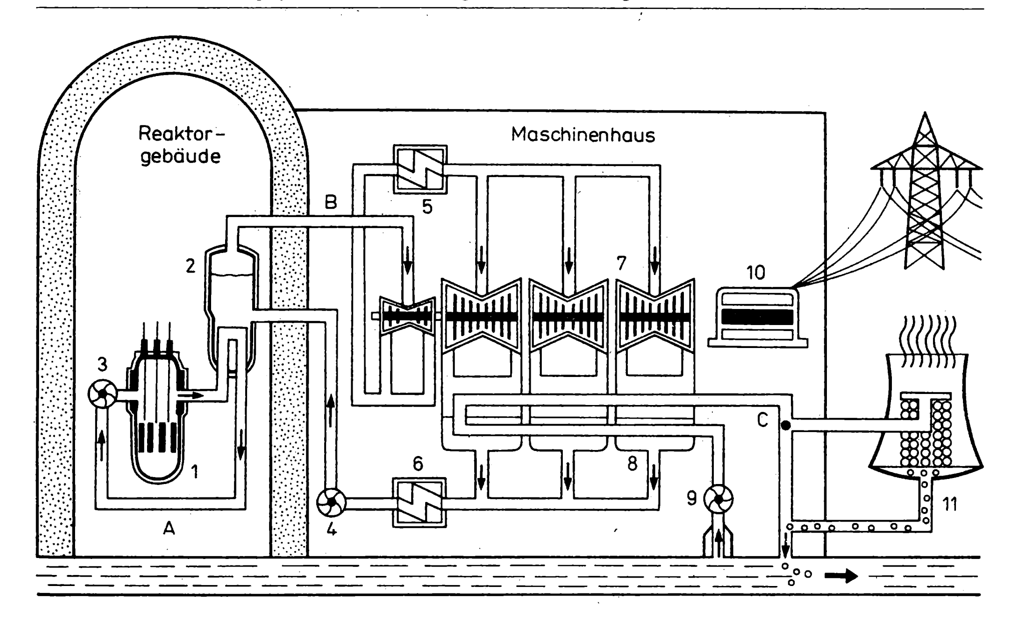


Abb. 11.7
Schematische Darstellung eines Kernkraftwerks mit Druckwasserreaktor
A Primärkreislauf, B Sekundärkreislauf, C Kühlkreislauf, 1 Reaktordruckgefäß, 2 Dampferzeuger, 3 Hauptkühlmittelpumpe, 4 Speisewasserpumpe, 5 Zwischenüberhitzer, 6 Vorwärmer, 7 Turbinen, 8 Kondensator, 9 Kühlwasserpumpe, 10 Generator, 11 Kühlturm

zeitig die Funktion als Kühlmittel und Moderator übernimmt. Nachteilig ist in diesem System die mögliche radioaktive Verseuchung der Turbine, weshalb bei höheren Leistungen dem DWR der Vorzug gegeben wird.

11.4. Schneller Brutreaktor

11.4.1. Spezifik des Neutronenhaushalts

1. Schnelle Brutreaktoren (SBR) werden mit dem Ziel entwickelt, die höheren η-Werte im Bereich schneller Neutronen (siehe Tabelle 11.1) zur Erzielung von Brutraten $K_B > 1$ zu nutzen. Damit kann ein solcher Reaktor nicht nur den Eigenbedarf an Kernbrennstoff erbrüten, sondern darüber hinaus $^{239}_{94}$Pu für den Einsatz in thermischen Reaktoren erzeugen. Voraussetzung ist die Realisierung eines geschlossenen Brennstoffzyklus, der aus Bestrahlung, chemischer Aufbereitung, neuer Produktion von Brennstäben und deren Wiedereinsatz besteht.

Im Gegensatz zum thermischen Reaktor sind leichte Moderatoren prinzipiell zu vermeiden; damit scheidet auch Wasser als Kühlmittel aus. Eine gewisse Abbremsung der Spaltneutronen verbleibt infolge der unelastischen Streuung, so daß das Reaktorspektrum eine mittlere Energie im Bereich 100 ... 500 keV besitzt (siehe Abb. 11.8).

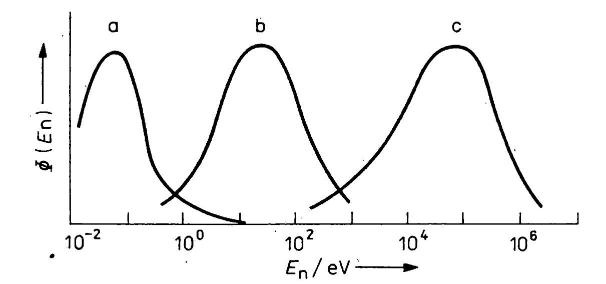


Abb. 11.8
Typische spektrale Verteilungen der Neutronenflußdichten in verschiedenen Reaktortypen
a) „thermischer" Reaktor, b) „intermediärer" Reaktor, c) „schneller" Reaktor

2. Der Vervielfachungskoeffizient einer unendlich ausgedehnten Anordnung ist durch

$$k_\infty = \eta(\langle E_n \rangle_{RS}) \cdot \Theta_f \tag{11.107}$$

mit dem Anteil der im Uran absorbierten schnellen Neutronen Θ_f, gegeben.

Es gilt ebenfalls Gl. (11.13) für den Brutfaktor, jedoch entfällt hier die Absorption im Moderator, so daß e_M nur die Bedeutung einer parasitären Absorption in Konstruktionsmaterialien und Kühlmittel behält. Infolge des härteren Spektrums ist der Beitrag aus der Spaltung des ^{238}U zum Neutronenhaushalt größer als im thermischen Reaktor.

3. Im ersten Produktionszyklus seien ΔM/kg Spaltmaterial verbraucht worden; dann sind im gleichen Zeitraum $K_B \cdot \Delta M$/kg neuer Kernbrennstoff erbrütet worden. Das Verbrennen von $K_B \cdot \Delta M$/kg ergibt im zweiten Zyklus bereits $(K_B^2) \cdot \Delta M$/kg neuen Kernbrennstoff usw.; nach dem n-ten Zyklus ist damit die gesamte verbrauchte Brutmaterialmenge

$$M_n = K_B \cdot \Delta M + (K_B)^2 \cdot \Delta M + \cdots + (K_B)^n \cdot \Delta M\,; \tag{11.108}$$

für $K_B < 1$ strebt die Reihe (11.108) für $n \to \infty$ zu

$$M = \frac{\Delta M}{1 - K_B}\,. \tag{11.109}$$

Bei einem Brutfaktor $K_B = 0{,}8$ kann folglich die fünffache Menge an $^{238}_{92}U$ im Vergleich zum ursprünglichen Einsatz von $^{235}_{92}U$ verbrannt werden.

Ist $K_B > 1$, so kann bereits nach einer endlichen Zahl von Brennstoffzyklen der gesamte Vorrat an Natururan (oder Thorium) zur Kernenergiegewinnung genutzt werden. In Anbetracht der relativ großen Uran- und Thoriumvorräte ist somit die Schaffung schneller Brutreaktoren von grundlegender Bedeutung für die langfristige Energie-Strategie.

Die Anhäufung von Kernbrennstoff durch den schnellen Brutreaktor wird durch die sogenannte Verdopplungszeit charakterisiert. Es ist der Zeitraum, innerhalb dessen sich die Brennstoffmenge und damit die zu installierende Leistung der KKW auf der Basis des erbrüteten Brennstoffes verdoppeln kann. Neben der Brutrate K_B hängt sie von der Kampagne, dem Ausbrand Z und der für die Brennstab-Wiederaufbereitung erforderlichen Zeit ab.

Für Hochleistungs-Brutreaktoren liegt K_B im Bereich 1,4 ... 1,7 und $Z \simeq 10\%$; das ergibt Verdopplungszeiten im Bereich von 6 ... 8 Jahren. Damit könnte der erwartete Zuwachs des Energieverbrauchs auf lange Sicht auf der Basis von Uran- und Thoriumvorkommen abgedeckt werden. Dieser verlockenden Perspektive stehen jedoch immense sicherheitstechnische Anforderungen und Risiken der SBR gegenüber, was ihre Verbreitung bisher begrenzt.

11.4.2. Konstruktive Besonderheiten des schnellen Brutreaktors

1. Aus offensichtlichen Gründen werden Moderatornuklide in der aktiven Zone nur insofern eingesetzt, wie sie in den chemischen Verbindungen des Kernbrennstoffes (UO_2, UC, PuO_2 usw.) vorliegen. Da der Spaltquerschnitt im Bereich schneller Neutronen mit $\sigma_{nf} \simeq 2\,\text{b}$ viel kleiner als im thermischen Bereich ist, sind eine um Größenordnungen höhere Konzentration des Spaltmaterials und eine höhere Anreicherung des Kernbrennstoffes zur Realisierung der Kettenreaktion im Vergleich zum thermischen Reaktor erforderlich.

Dies bewirkt extrem hohe thermische Energiedichten bis über 1000 W/cm^3, was an die Effektivität der Kühlung höchste Anforderungen stellt. Diesen Anforderungen werden besonders flüssige Metalle, unter ihnen an erster Stelle flüssiges Natrium, gerecht. Letzteres besitzt ausgezeichnete Wärmeübertragungseigenschaften, einen geringen Einfangsquerschnitt für schnelle Neutronen, erfordert relativ geringe elektrische Leistung der Umwälzpumpen und ist relativ billig. Demgegenüber steht die hohe chemische Aggressivität des Natrium, insbesondere in Berührungen mit Wasser oder Dampf. Ein weiterer Nachteil ist die starke Aktivierung des Natrium im ersten Kühlkreislauf, welche die Installation von drei Kühlkreisläufen (Natrium-Natrium-Wasser) erforderlich macht. Trotz der enormen Anforderungen die hieraus für die Reaktorsicherheit folgen, hat sich die Kühlung schneller Brutreaktoren mit flüssigem Natrium bisher als das aussichtsreichste Verfahren erwiesen.

Auch die übrigen Reaktorelemente weisen Besonderheiten auf: Da es für schnelle Neutronen prinzipiell keine herausragenden Neutronenabsorber gibt, erfolgt die Steuerung durch bewegliche Brennstäbe oder Reaktorelemente.

Als Reflektoren kommen nur schwere Elemente in Frage. Häufig werden hierzu wiederum $^{238}_{92}U$ oder $^{232}_{90}Th$ eingesetzt, so daß auch in der Reflektorzone neuer Kernbrennstoff erbrütet wird.

2. Auf Abb. 11.9 ist die schematische Darstellung der Kühlkreisläufe von „Schnellen Brütern" mit Natriumkühlung zu sehen. Bei Abb. 11.9a handelt es sich um den Reaktor BN 350, für welchen zwei Natriumkreisläufe vorgesehen sind, die sich in verschiedenen Containments

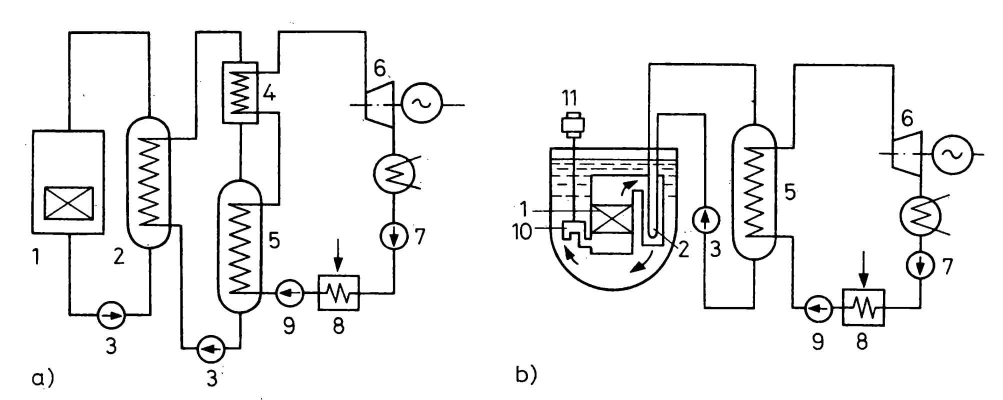


Abb. 11.9
Prinzipschema von Kernkraftwerken auf der Basis schneller Reaktoren
a) Schleifen-Bauweise (BN 350), b) integrale Bauweise (BN 600)
1 Reaktor, 2 Wärmetauscher, 3 Na-Umwälzpumpe, 4 Dampfüberhitzer, 5 Dampferzeuger, 6 Dampfturbine, 7 Kondensatpumpe, 8 Regenerator, 9 Speisepumpe, 10 im Reaktorgefäß eingebaute Umwälzpumpe für Na, 11 Antrieb

Tabelle 11.6
Einige Parameter der schnellen Reaktoren BN-350 und BN-600

Größe	BN-350	BN-600
thermische Leistung, MW	1000	1470
elektrische Leistung, MW	350	600
Temperatur des Natriums im ersten Kreislauf		
Eingang, °C	300	377
Ausgang, °C	500	550
Umlaufmenge des Natriums im ersten Kreislauf/t · h^{-1}	250	1000
Dimensionen der aktiven Zone		
Durchmesser/m	1,50	2,05
Höhe/m	1,06	0,75
Zahl der Regelstäbe	12	27
Ausbrand/%	5	10
Kampagne/d	50	150

befinden. Dagegen zeigt Abb. 11.9b die im Falle des BN-600 vorgesehene Unterbringung des Primär- und Sekundärkreislaufs in einem Gefäß. Die Tabelle 11.6 enthält einige wichtige Parameter der Reaktoren BN-350 (vergleichbar mit SNR-300) und BN-600.

Die gezeigten konstruktiven Besonderheiten des BN-600 haben den Vorteil, daß das gesamte radioaktive, auf 550 °C erhitzte Natrium innerhalb des Reaktorgefäßes verbleibt und der zweite Kreislauf nur wenig aktiviert wird. Brennstoff in beiden Reaktoren ist hochangereichertes UO_2. Die mittlere Energiedichte in der aktiven Zone liegt bei 60 ... 1000 W/cm^3!

11.5. Hochtemperaturreaktoren

Bei höheren Temperaturen lassen sich in thermodynamischen Prozessen höhere Wirkungsgrade der Energieumwandlung erreichen. Außerdem erfordert der Einsatz der Kernenergie für stoffumwandelnde Prozesse der Chemie ebenfalls sehr hohe Temperaturen. Aus diesem Grunde

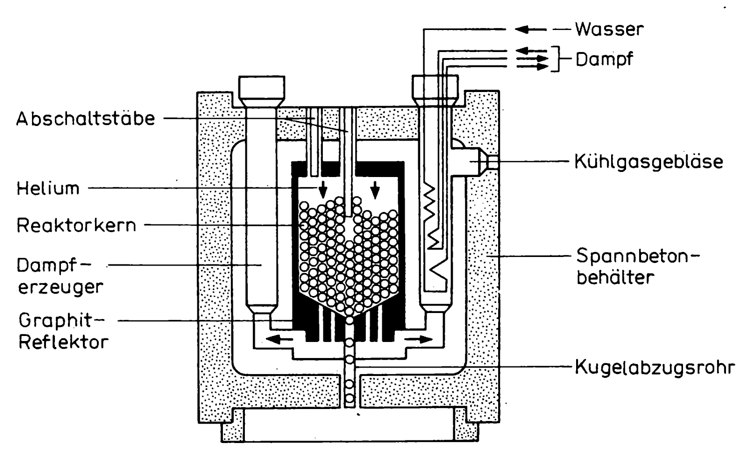


Abb. 11.10
Schnitt durch den Hochtemperaturreaktor THTR-300

werden spezielle Hochtemperaturreaktoren entwickelt. Der Hochtemperaturreaktor ist vom Wirkprinzip her ein thermischer Reaktor. Als Moderator wird Graphit, zur Kühlung gasförmiges Helium verwendet. In der Anlage THTR-300 wird als Brennstoff ein Gemisch aus Uran und Thorium in Form kleiner Kügelchen von nur 0,7 mm Durchmesser verwendet, die mit einem Kohlenstoffüberzug zur Absorption der Spaltprodukte versehen sind. Beim Durchströmen des Kugelhaufens wird das Helium von 250 °C auf 750 °C erhitzt. Der bei der Dampferzeugung erzielbare Wirkungsgrad liegt deutlich über dem der Druckwasserreaktoren. Das Reaktorschema ist auf Abb. 11.10 zu sehen. Die Technologie beschichteter Brennstoffpartikel weist einen hohen inhärenten Sicherheitsstandart auf.

11.6. Kernbrennstoffbrüten an Beschleunigern

Die Erzeugung von überschüssigem Spaltmaterial im schnellen Brutreaktor beruht auf dem erhöhten Neutronenüberschuß in der Kettenreaktion mit schnellen im Vergleich zu thermischen Neutronen. Daher ist der Gedanke naheliegend, mittels Beschleuniger erzeugte Neutronen zum Brüten von Spaltmaterial einzusetzen.

Dies kann prinzipiell nur dann energetisch vorteilhaft sein, wenn zur Erzeugung pro Neutron weniger Energie aufgewendet werden muß, als bei der Spaltung eines erbrüteten Brennstoffkernes freigesetzt wird, d. h. etwa 200 MeV (siehe 10.8.).

Günstig hierfür erscheint zunächst die Reaktion T(d, n)^{4}He, da sie bereits bei geringen Einschußenergien einen hohen Wirkungsquerschnitt (siehe Abb. 10.4) und darüber hinaus einen großen Q-Wert besitzt. Selbst in diesem Fall müssen jedoch im Mittel etwa 2000 MeV Energie pro Neutron aufgebracht werden, da von den auf 200 keV beschleunigten Deuteronen nur jedes 10^4te die gewünschte Kernreaktion auslöst. Ähnlich oder sogar noch ungünstiger verhält es sich mit allen anderen neutronenproduzierenden Kernreaktionen bei Einschußenergien unter 100 MeV.

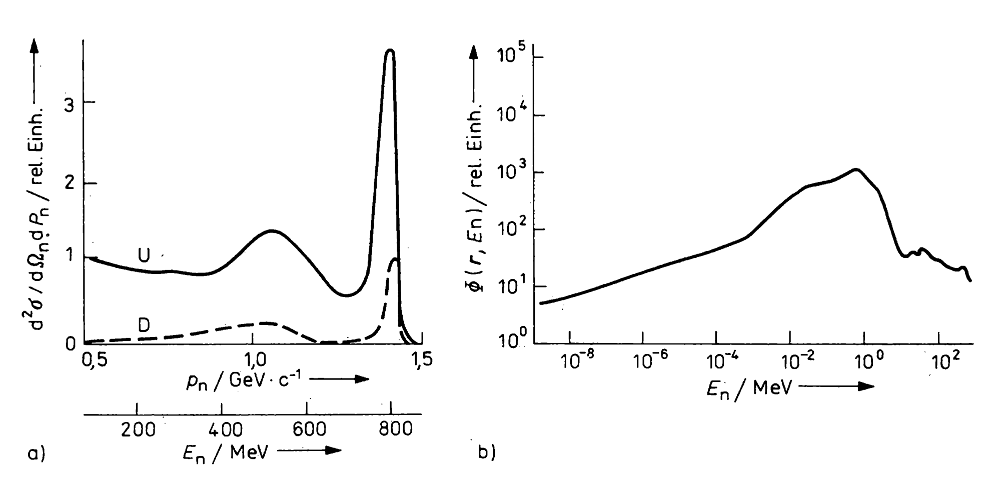


Abb. 11.11
Neutronenproduktion aus der Spallation;
a) Hochenergetischer Teil des Neutronenspektrums aus Uran- bzw. Deuteriumtargets bei Beschuß mit 800 MeV-Protonen;
b) Typische Neutronenflußdichte in einem Uranblock um ein Spallationstarget

Prinzipiell anders ist die Situation bei Einschußenergien oberhalb einiger Hundert MeV: Die Reichweite der eingeschossenen Teilchen im Targetmaterial ist dann so groß, daß praktisch jedes eingeschossene Teilchen einen Kern trifft und in Spallationsreaktionen vom Typ A(p, $xnyp$)B zahlreiche sekundäre Neutronen und Protonen sowie darüber hinaus auch schwerere Kernbruchstücke entstehen. Auf Grund der Einschußenergie haben direkte Reaktionen mit großer Impulsübertragung (s. Pkt. 10.5.) dabei einen hohen Anteil, ebenso treten jedoch auch Teilchenemissionen aus anderen Vergleichgewichtsprozessen (vgl. 10.7.) sowie Verdampfungsneutronen (vgl. 10.4.) mit großer Wahrscheinlichkeit auf. Auf Abb. 11.11 a ist der hochenergetische Teil der unter 0° zu einem einfallenden 800 MeV-Protonenstrahl beobachteten Neutronenspektren für ein Deuterium- bzw. Urantarget gezeigt. Neben dem deutlich hervortretenden Peak infolge direkter, vollständiger Impulsübertragung ist zu geringeren Energien eine breite spektrale Verteilung der entstehenden Neutronen zu erkennen, ebenso wie die Zunahme der Neutronenausbeute mit der Massenzahl des Targetmaterials. Auf diese Weise können bei $E \simeq 1$ GeV an schweren Kernen, wie W, Pb, Bi, Th oder U im Mittel $x = 25 \ldots 40$ Spallationsneutronen erzeugt werden. Das bedeutet einen Energieaufwand von „nur“ 25 ... 40 MeV pro Neutron — damit wird deren Nutzung zum Kernbrennstoffbrüten aus energetischer Sicht attraktiv.

Dies erfolgt, indem das Beschleunigertarget mit einer Anordnung von Brutmaterial (Thorium bzw. natürliches oder abgereichertes Uran) umgeben wird, in der infolge vielfältiger nuklearer Wechselwirkungsprozesse, insbesondere der Kernspaltung bzw. (n, 2n)- oder (n, 3n)-Reaktionen, eine weitere Neutronenmultiplikation und über die Einfangsreaktionen (11.8) bzw. (11.9) das Brüten der Brennstoffnuklide $^{233}_{92}$U bzw. $^{239}_{94}$Pu stattfindet. Ein typisches Neutronenspektrum in einer derartigen Anordnung ist auf Abb. 11.11 b gezeigt. Bis auf den erhöhten Anteil extrem schneller Neutronen ist es dem auf Abb. 11.8c dargestellten Spektrum im schnellen Brutreaktor sehr ähnlich.

Für zukünftige Anlagen dieser Art werden die typischen Zielparameter Protonenenergie 1 GeV und -stromstärke 1 A angegeben. Hierbei würden am Target

$$\frac{1/A}{1{,}6 \cdot 10^{-19}\,\text{As}} \times (25 \ldots 40) \simeq (1{,}5 \ldots 2{,}5) \cdot 10^{20}\,\text{s}^{-1}$$

Neutronen erzeugt. Damit könnten, einschließlich einer 10fachen Neutronenvervielfachung theoretisch (2 ... 3) kg Brennstoff pro Betriebsstunde erzeugt werden!

Der Realisierung derartiger Vorhaben stellen sich jedoch enorme Schwierigkeiten entgegen, von denen hier nur zwei genannt seien:

— Bei den hierfür in Frage kommenden Linearbeschleunigern der erforderlichen Energie sind die derzeitigen Entwicklungen auf die Erreichung von Stromstärken im mA-Bereich gerichtet (siehe 3.2.2.). Um 10^3fach höhere Werte zu erreichen, sind grundsätzlich neue Lösungen der Beschleunigertechnik erforderlich.
— Allein der Protonenstrahl besitzt eine elektrische Leistung von 1000 MW; der gesamte Elektroenergieverbrauch der Anlage einschließlich der erforderlichen Brennstoffaufbereitung würde noch weit höher liegen.

Demgegenüber steht jedoch ein erzeugtes, immer noch bis zu 10fach höheres „nukleares Energiepotential“, das über thermische Leistungsreaktoren genutzt werden kann, und den enormen Aufwand rechtfertigen könnte.

Das hier beschriebene, häufig elektro-physikalische Methode genannte, theoretisch denkbare Verfahren der Kernbrennstoffgewinnung wird insbesondere auch als künftig vorteilhafter Weg zur Realisierung verlustarmer Energieübertragung über sehr große Entfernungen empfohlen: an die Stelle kostspieliger und verlustreicher Stromübertragungsnetze tritt der wesentlich ökonomischere Transport geringer Kernbrennstoffmassen.

Die Antwort auf die Frage, inwieweit diese Methode in der künftigen Kernenergetik in bestimmten Fällen als reale Alternative zum schnellen Brutreaktor tatsächlich an Bedeutung gewinnt, bleibt der weiteren Entwicklung überlassen.

11.7. Energiegewinnung auf der Basis der Kernfusion

11.7.1. Wichtigste Nuklearprozesse in Fusionsreaktoren

1. Neben dem über die Kernspaltung gibt es einen zweiten Weg der Energiegewinnung auf der Basis von Kernprozessen, der ebenfalls auf den Besonderheiten des Verlaufs der spezifischen Bindungsenergie der Kerne als Funktion der Massenzahl beruht (siehe Abb. 6.14 und 6.15): Im Gebiet $A < 40$ nimmt E_B mit steigendem A zu, wobei besonders hohe Bindungsenergien für gg-Kerne mit $A = 4, 8, 12, 16$ usw. auftreten. Durch Verschmelzung leichtester Kerne kann folglich Kernenergie freigesetzt werden.

2. Aus der Fülle denkbarer exothermer Fusionsreaktionen leichter Kerne sind wenige infolge ihres hohen Wirkungsquerschnitts bei geringen Energien und großen Q-Wertes besonders gut geeignet. Der Brennstoff von Fusionsreaktoren der ersten Generation wird aus heutiger Sicht mit großer Wahrscheinlichkeit ein gleichanteiliges DT-Gemisch sein. Das ist insbesondere auf die hervorragenden Eigenschaften der Reaktion

$$^2_1\mathrm{D} + {}^3_1\mathrm{T} \rightarrow {}^4_2\mathrm{He} + \mathrm{n} + 17{,}6\ \mathrm{MeV} \qquad (11.110)$$

— dem hohen Q-Wert und dem resonanzartigen Verlauf des Reaktionsquerschnitts mit einem Maximalwert von 5 barn bei 100 KeV (siehe Abb. 10.4) zurückzuführen, dank dessen auch Deuteronen und Tritonen mit einer kinetischen Energie im Gebiet um 10 keV noch mit endlicher Wahrscheinlichkeit verschmelzen.

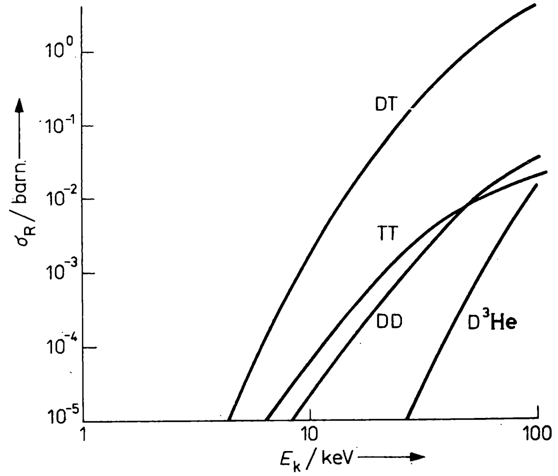


Abb. 11.12
Wirkungsquerschnittsverlauf von Fusionsreaktionen unterhalb von 100 keV Wechselwirkungsenergie

3. Diese Reaktion wird stets begleitet von den mit wesentlich geringerer Wahrscheinlichkeit ablaufenden Prozessen zwischen allen anderen im Brennstoffgemisch vorhandenen bzw. entstehenden Reaktionspartnern, d. h. den Reaktionen

$$\mathrm{D} + \mathrm{D} \rightarrow \mathrm{T} + \mathrm{p} + 4{,}03\ \mathrm{MeV}\,, \tag{11.111}$$

$$\mathrm{D} + \mathrm{D} \rightarrow {}^{3}\mathrm{He} + \mathrm{n} + 3{,}27\ \mathrm{MeV}\,, \tag{11.112}$$

$$\mathrm{D} + {}^{3}\mathrm{He} \rightarrow {}^{4}\mathrm{He} + \mathrm{p} + 18{,}1\ \mathrm{MeV}, \tag{11.113}$$

$$\mathrm{T} + \mathrm{T} \rightarrow {}^{4}\mathrm{He} + 2\mathrm{n} + 11{,}3\ \mathrm{MeV}\,. \tag{11.114}$$

Prinzipiell möglich ist auch die Verwendung von reinem Deuterium als Brennstoff. Ein wesentlicher Vorteil dieses Brennstoffs ist seine praktisch unerschöpfliche Verfügbarkeit in der natürlichen Umwelt, da Deuterium mit etwa 0,015 % im natürlichen Wasserstoff vorhanden ist und Verfahren zu seiner Gewinnung ausgearbeitet sind. Die Hauptprozesse für diesen Fall (11.111) und (11.112) sind jedoch infolge ihres um Größenordnungen geringeren Wirkungsquerschnitts gegenüber der Reaktion (11.110) bei Energien unter 50 keV wesentlich ungünstiger, so daß trotz der noch zu besprechenden beträchtlichen Nachteile des DT-Fusionsgemisches letzterem vorerst der Vorzug gegeben werden muß (siehe Abb. 11.12).

Insgesamt sind darüber hinaus noch mehr Kernreaktionen für die Energiegewinnung aus der Fusion von Interesse. Bis zur Massenzahl $A = 11$ sind die in Frage kommenden Reaktionspartner und einige Eigenschaften dieser Reaktionen in den Tabellen 11.7 und 11.8 zusammengestellt.

4. Worin bestehen die beiden größten Nachteile des Einsatzes von DT-Brennstoff in Fusionsreaktoren?

Erstens: Tritium ist radioaktiv; es zerfällt über β-Zerfall mit einer Halbwertszeit von 12,3 Jahren. Daher kommt es in der Natur in verwertbaren Mengen nicht vor, sondern muß künstlich aus den Kernprozessen

$${}^{6}_{3}\mathrm{Li} + \mathrm{n} \rightarrow {}^{4}_{2}\mathrm{He} + \mathrm{T} + 4{,}80\ \mathrm{MeV} \tag{11.115}$$

oder

$${}^{7}_{3}\mathrm{Li} + \mathrm{n} \rightarrow {}^{4}_{2}\mathrm{He} + \mathrm{T} + \mathrm{n} - 2{,}47\ \mathrm{MeV} \tag{11.116}$$

Tabelle 11.7
Kombinationen von Reaktionspartnern bis A = 11 für bedeutsame Fusionsprozesse
(A — Hauptfusionsreaktionen; B — Nebenreaktionen; C — zukünftig mögliche Fusionsreaktionen)

	p	D	T	^{3}He	^{4}He	^{6}Li	^{7}Li	^{9}Be	^{10}B	^{11}B
p						A	C	A		A
D		A	A	A	B	A	C			
T			B		B					
^{3}He				A		B		C	C	
^{4}He						B				B
^{6}Li						B				

Tabelle 11.8
Mögliche Fusionsreaktionen bis A = 11

Nr.	Reaktion	Produkte
1.	D + D	→ T + p + 4,03 MeV (50%)
		→ ^{3}He + n + 3,27 MeV (50%)
2.	p + T	→ ^{3}He + n − 0,765 MeV
3.	D + T	→ ^{4}He + n + 17,6 MeV
4.	T + T	→ ^{4}He + 2n + 11,3 MeV
5.	D + ^{3}He	→ ^{4}He + p + 18,3 MeV
6.	T + ^{3}He	→ ^{5}Li + n + 12,1 MeV (51%) → ^{4}He + p + n
		→ ^{4}He + d + 14,3 MeV (43%)
		→ ^{5}He + p × 14,3 MeV (6%) → ^{4}He + n + p
7.	^{3}He + ^{3}He	→ ^{4}He + 2p + 12,8 MeV
		→ ^{5}Li + p + 11,0 MeV → ^{4}He + 2p
8.	D + ^{4}He	→ ^{4}He + n + p − 2,2 MeV
9.	p + ^{6}Li	→ ^{3}He + ^{4}He + 4,0 MeV
10.	D + ^{6}Li	→ 2 ^{4}He + 22,4 MeV
		→ ^{7}Be + n + 3,4 MeV
		→ ^{7}Li + p + 5,0 MeV
		→ ^{4}He + T + p + 2,6 MeV
		→ ^{4}He + ^{3}He + n + 1,8 MeV
11.	^{3}He + ^{6}Li	→ 2 ^{4}He + p + 16,8 MeV
		→ p + n + ^{7}Be − 2,1 MeV
		→ D + ^{7}Be + 0,1 MeV
12.	^{6}Li + ^{6}Li	→ 3 ^{4}He + 20,9 MeV
		→ 2 ^{4}He + T + p + 1,1 MeV
		→ 2 ^{4}He + ^{3}He + n + 0,3 MeV
		→ ^{11}B + p + 12,2 MeV
		→ ^{7}B + ^{4}He → n + 1,9 MeV
		→ ^{11}C + n + 9,4 MeV
		→ ^{10}B + D + 3,0 MeV
		→ ^{9}B + T + 0,8 MeV
		→ ^{7}Li + ^{5}Li
		→ ^{10}Be + 2p
13.	p + ^{7}Li	→ 2 ^{4}He + 17,3 MeV (20%)
		→ ^{7}Be + n − 1,6 MeV (80%)
14.	D + ^{7}Li	→ 2 ^{4}He + n + 15,0 MeV
15.	p + ^{9}Be	→ 2 ^{4}He + D + 0,6 MeV (50%)
		→ ^{6}Li + ^{4}He + 2,1 MeV (50%)
16.	p + ^{10}B	→ ^{7}Be + ^{4}He + 1,15 MeV
17.	p + ^{11}B	→ 3 ^{4}He + 8,68 MeV
		→ ^{11}C + n − 2,76 MeV
18.	^{4}He + ^{11}B	→ ^{14}C + p + 0,8 MeV
		→ ^{14}N + n + 0,2 MeV

gewonnen werden (siehe Abb. 4.26). Der Einsatz der im Reaktor benötigten großen Tritiummengen erfordert einerseits umfangreiche Strahlen- und Umweltschutzvorkehrungen, andererseits stellt die ständige Regenerierung des Tritiumbestandes während des Betriebes eines Fusionsreaktors weitere einschneidende Forderungen an dessen Aufbau und zu verwendende Materialien.

Zweitens: Während in Kernspaltungsreaktoren bei einem Energiegewinn von $Q \simeq 200$ MeV pro Spaltereignis im Mittel $\langle v \rangle \simeq 2{,}5$ Neutronen mit einer mittleren Energie $\langle E_n \rangle \simeq 2$ MeV freigesetzt werden (siehe 10.8), entspricht einem fast monoenergetischen DT-Neutron mit 14,1 MeV Energie ein Q-Wert von nur 17,6 MeV. Bei gleicher thermischer Leistung entstehen im Fusionsreaktor folglich 4mal mehr Neutronen mit 7fach höherer mittlerer Energie als im Spaltungsreaktor. Für 1000 MW thermische Leistung sind das etwa $3 \cdot 10^{20}$ Neutronen pro Sekunde. Dabei wird der überwiegende Teil der freiwerdenden Energie, wiederum im Gegensatz zur Kernspaltung, als kinetische Energie der durchdringenden 14,1 MeV-Neutronenstrahlung vom Ort ihrer Entstehung weit weg transportiert. Dies bewirkt einerseits enorme Strahlungsflüsse durch die Wand des Reaktorgefäßes und schafft andererseits thermodynamische Probleme, da ein Teil der freiwerdenden Energie zur Aufrechterhaltung der Fusionsreaktion benötigt wird (siehe 11.7.2.). Vor allem entstehen in den die Reaktionszone umgebenden Strukturen des Reaktors beträchtliche Probleme hinsichtlich der Strahlenschäden in Konstruktionsmaterialien und der Strahlenabschirmung. Die Materialien dieser Strukturen werden im DT-Fusionsreaktor stark aktiviert. Vorteilhaft gegenüber Spaltreaktoren bleibt dabei jedoch das Fehlen langlebiger, hochaktiver Spaltprodukte. Die im Fusionsreaktor entstehenden Aktivitäten sind größtenteils kurzlebig. Neben alledem ist es erforderlich, die entstehenden Fusionsneutronen zur ausreichenden Tritiumproduktion entsprechend den Reaktionsgleichungen (11.115) und (11.116) zu nutzen, was in lithiumhaltigen Materialzonen, die das Fusionsgebiet umschließen, den sogenannten Blankets, geschieht.

Das sich daraus ergebende prinzipielle Schema des Brennstoff- und Energieflusses eines DT-Fusionsreaktors ist in Abb. 11.13 dargestellt.

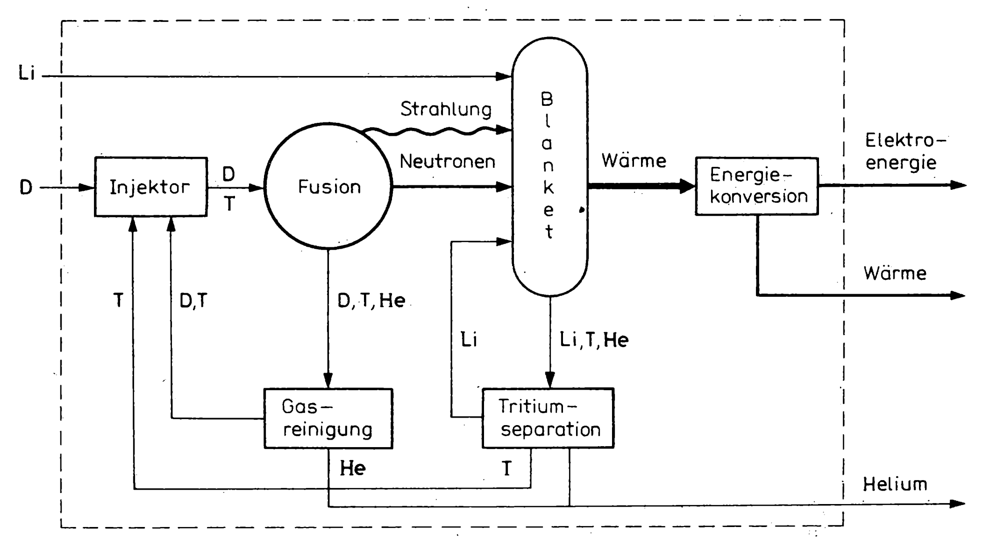


Abb. 11.13
Verbrauch und Produktion eines Fusionsreaktors (schematisch)

Aus den genannten immensen Schwierigkeiten, die aus der Verwendung der DT-Reaktion erwachsen, wird klar, warum für die langfristige Lösung des Energieproblems der Wunsch nach Erschließung von anderen Brennprozessen (siehe Tab. 11.8) besteht. Bei Verwendung der DD-Reaktion würde das Problem des Tritium-Brütens im Blanket entfallen. Da über die Reaktion (11.111) jedoch ständig in der Fusionszone Tritium entsteht, welches über die DT-Reaktion praktisch sofort wieder verbrennt, bleiben die Probleme der Strahlenschäden, der Aktivation und des Strahlenschutzes jedoch ähnlich denen des DT-Fusionsreaktors. Weitere Vorteile würde die Realisierung von Fusionsprozessen in p-Li-, p-^{9}Be- oder p-^{11}B-Gemischen bringen, bei denen bedeutend weniger oder keine Neutronen entstehen und die aus diesem Grunde als „sauber" bezeichnet werden. Auf Grund der geringen Wirkungsquerschnitte kann dies jedoch erst in den folgenden Fusionsreaktorgenerationen erwartet werden. Alle weiteren Betrachtungen beziehen sich deshalb ausschließlich auf das DT-Brennstoffgemisch.

5. Wenden wir uns nun der Frage zu, warum für die großtechnische Realisierung der Energiegewinnung aus der Kernfusion der Verlauf des Wirkungsquerschnitts bei geringsten Wechselwirkungsenergien (siehe Abb. 11.12) von so entscheidender Bedeutung ist: Zwar lassen sich alle in Tabelle 11.8 aufgeführten Reaktionen ohne Schwierigkeiten an Beschleunigern realisieren. Wie bereits in 11.6 ausgeführt, ist dabei die für ein Reaktionsereignis aufzuwendende Energie um ein Vielfaches höher als der Q-Wert der betreffenden Reaktion, so daß eine Energieerzeugung in makroskopischen Maßstäben auf diesem Wege prinzipiell ausscheidet. Der Ausweg besteht darin, die Reaktionspartner infolge der thermischen Bewegung vielfache Stöße miteinander ausführen zu lassen, solange bis das gewünschte Reaktionsereignis eintritt. Dies erfordert jedoch ausreichend hohe Temperaturen um die erforderlichen Wechselwirkungsenergien der thermischen Stöße in der Größenordnung von 10 keV zu erreichen (einer Energie von 1 keV entspricht die Temperatur $1{,}16 \cdot 10^7$ K).

Das auf diese Temperatur erhitzte Fusionsgemisch stellt ein vollständig ionisiertes Plasma dar. Hinsichtlich der extrem komplizierten Herstellung und Halterung dieses Hochtemperaturplasmas unterscheiden sich die unterschiedlichen Typen von Fusionsreaktoren. An dieser Stelle sei darauf hingewiesen, daß es sich bei der Kernfusion im Plasma nicht um eine Kettenreaktion handelt, also auch keine kritische Masse vorhanden ist. Theoretisch können beliebig kleine Mengen des DT-Gemisches zur Reaktion gebracht werden, wenn sie nur ausreichend erhitzt und komprimiert werden. Je geringer der Wirkungsquerschnitt der Reaktion, desto höhere Temperaturen sind erforderlich.

11.7.2. Leistungsbilanz. Das Lawson-Kriterium

1. Entsprechend den im Kapitel 10.1 eingeführten Begriffe gilt für die Reaktionsrate der DT-Reaktion

$$\dot{N}^{\mathrm{DT}} = N^{\mathrm{T}} \cdot N^{\mathrm{D}} \cdot v \cdot \sigma_{\mathrm{DT}}\,, \tag{11.117}$$

mit N^{D}, N^{T} — den Dichten der Deuterium- bzw. Tritiumionen im Plasma
und v — der Relativgeschwindigkeit der stoßenden Teilchen.

Da die Teilchen einer Maxwellschen Geschwindigkeitsverteilung $N^{\mathrm{D}}(v_{\mathrm{D}})\,\mathrm{d}v_{\mathrm{D}}$ bzw. $N^{\mathrm{T}}(v_{\mathrm{T}})\,\mathrm{d}v_{\mathrm{T}}$ unterliegen (vgl. (11.67) für Neutronengas), ist in (11.117) der in diesem Feld gewichtete Wirkungsquerschnitt $\langle v\sigma_{\mathrm{DT}}\rangle$, der auch als Reaktivität bezeichnet wird, einzusetzen:

$$\dot{N}^{\mathrm{DT}} = N^{\mathrm{T}} \cdot N^{\mathrm{D}} \langle v\sigma_{\mathrm{DT}}\rangle\,. \tag{11.118}$$

In ähnlicher Weise sind die Reaktionsraten für die begleitenden DD- bzw. TT-Reaktionen bestimmbar:

$$\dot{N}^{DD} = (N^D)^2 \langle v\sigma_{DD} \rangle , \tag{11.119}$$

$$\dot{N}^{TT} = (N^T)^2 \langle v\sigma_{TT} \rangle . \tag{11.120}$$

Die gesamte Leistungsdichte eines gleichanteiligen thermonuklearen Plasmas der Dichte $N/2 = N_D = N_T$ beträgt somit

$$p_{DT} = N^T N^D \langle v\sigma_{DT} \rangle Q_{DT} = \frac{1}{4} N^2 \langle v\sigma_{DT} \rangle Q_{DT} , \tag{11.121}$$

wobei allerdings der größere Teil dieser Leistung durch die 14 MeV-Neutronen abtransportiert und nur der dem geladenen α-Teilchen entsprechende Anteil $Q_{DT}^{\alpha} < Q_{DT}$ im Plasma direkt in Wärme umgesetzt wird

$$p_{DT}^{Pl} = \frac{1}{4} N^2 \langle v\sigma_{DT} \rangle Q_{DT}^{\alpha} . \tag{11.122}$$

Die Temperaturabhängigkeit der Leistungsdichte wird einerseits durch den Anstieg der Reaktivität $\langle v\sigma_{DT} \rangle$ und andererseits durch das Absinken der Plasmadichte

$$N \sim \frac{1}{T} \tag{11.123}$$

bestimmt, so daß, bei einem bestimmten Plasmadruck ein relatives Maximum der Leistungsdichte bei einer bestimmten Temperatur auftritt (siehe Abb. 11.14). Eine unbegrenzte Selbsterhitzung des Fusionsplasmas ist damit ausgeschlossen, vielmehr tritt eine Selbststabilisierung auf. Die Vorzüge des DT-Plasmas sind evident.

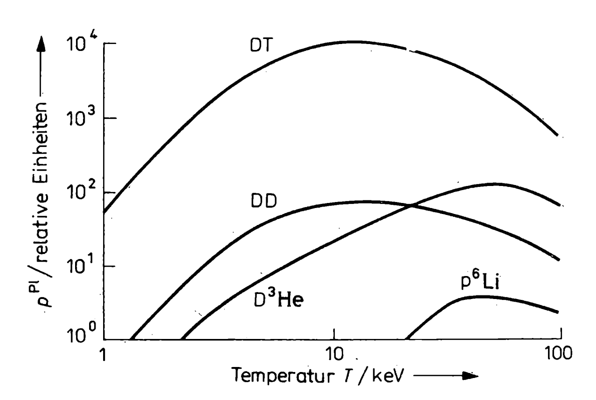


Abb. 11.14
Leistungsdichte im Fusionsplasma bei verschiedenen Brennstoffgemischen und konstantem Plasmadruck als Fuktion der Temperatur

2. Wichtigster Verlustfaktor, der durch die im Plasma freigesetzte Leistungsdichte p^{Pl} kompensiert werden muß, sind die elektromagnetischen Strahlungsverluste p^V in Form von Röntgen- und Bremsstrahlung, die von den im Plasma vorhandenen Elektronen ($N_e \simeq N$) ausgehen und mit der Elektronentemperatur E_e nach

$$p^V = b N_e^2 T_e^{1/2} , \tag{11.124}$$

mit einer Konstante b, ansteigen. Bei magnetisch gehalterten Plasmen (siehe 11.7.3) treten zusätzlich sogenannte Zyklotronverluste auf. Erst wenn $p^{Pl} > p^{V}$ wird, d. h. oberhalb einer bestimmten Temperatur, kann das thermonukleare Plasma „zünden". Für das DT-Plasma liegt dieser Wert bei etwa 5 keV.

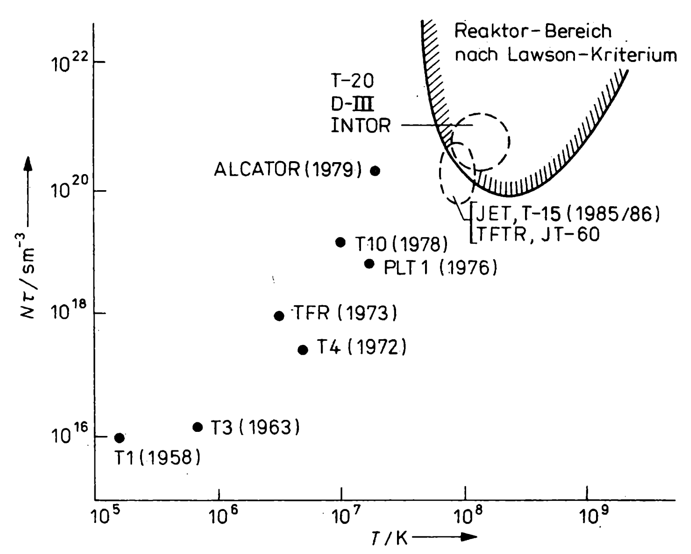


Abb. 11.15
Parameter einiger bereits in Betrieb befindlicher bzw. projektierter TOKAMAK-Anlagen im Vergleich zum Lawson-Kriterium

3. Wir betrachten ein gleichanteiliges DT-Plasma der Temperatur T, das für die Zeitdauer τ aufrechterhalten wird. Die im Plasma verfügbare Energie soll mit dem Wirkungsgrad η dazu genutzt werden, dem Plasma die zur Aufrechterhaltung des Brennprozesses erforderliche Energie wieder zuführen zu können. Für diesen Fall eines ohne Gewinn elektrischer Energie arbeitenden Fusionsreaktors gilt nach Lawson die Bilanzgleichung.

$$\left[\frac{1}{4} N^2 \langle v\sigma_{DT}\rangle Q_{DT}\tau + \frac{3}{2}(N + N_e) kT + bN_e^2 T^{1/2}\tau\right]\eta$$
$$= \frac{3}{2}(N + N_e) kT + bN_e^2 T^{1/2}\tau\,. \tag{11.125}$$

In dieser Gleichung bedeuten

- $\frac{1}{4} N^2 \langle v\sigma_{DT}\rangle Q_{DT}\tau$ — die abgegebene Gesamtenergie der Fusionsreaktionen, entsprechend (11.121);
- $\frac{3}{2}(N + N_e) kT$ — der thermische Energiegehalt der Ionen und Elektronen;
- $bN_e^2 T^{1/2}\tau$ — die abgegebene Bremsstrahlungsenergie, entsprechend (11.124).

Der Wirkungsgrad η setzt sich zusammen aus der Effektivität des Carnot-Prozesses zur Umwandlung der thermischen in elektrische Energie und der Effektivität η_I der Energieinjektion in das Plasma. Für ein neutrales DT-Plasma, d. h. $N_e = N$, kann aus (11.125) die Bedingung

$$N\tau = \frac{3kT}{\frac{1}{4}\langle v\sigma_{DT}\rangle Q_{DT}\frac{\eta}{1-\eta} - bT^{1/2}} \tag{11.126}$$

abgeleitet werden. Dies ist das sog. Lawson-Kriterium, welches ein Maß dafür ist, inwieweit ein Fusionsplasma mehr Energie erzeugt, als es zu seiner Aufrechterhaltung selbst benötigt. Neben der Überschreitung der Zündtemperatur ($T \approx 5 \dots 6$ keV) ist also weiterhin ein Mindestwert des Produktes $N\tau$ zu überschreiten, um aus der Kernfusion Nettoenergie gewinnen zu können. Für $T = 10$ keV und $\eta = 33\%$ muß z. B. das Produkt $N\tau$ mindestens 10^{20} s m^{-3} betragen. Bei einer Teilchendichte von 10^{21} m^{-3} erfordert das eine Brenndauer (Einschlußzeit des Plasmas) von 0,1 s.

Auf Abb. 11.15 ist das Lawson-Kriterium gezeigt im Vergleich mit einigen existierenden und geplanten Plasmaanlagen.

Die bisher genannten und zahlreiche weitere einschneidende Bedingungen lassen die auf den ersten Blick einfach erscheinende makroskopische Energiegewinnung auf der Basis der Kernfusion zu einem extrem schwierigen und außerordentlich komplexen Problem werden, zu dessen Lösung voraussichtlich noch Jahrzehnte intensiver Forschung und Entwicklung erforderlich sind.

11.7.3. Systeme mit Magnethalterung

11.7.3.1. TOKAMAK-Reaktoren

1. Aus den im vorigen Punkt besprochenen Plasmabedingungen geht hervor, daß wichtigste Vorbedingung für die Realisierung von Fusionsreaktoren die Erzeugung und stabile Halterung eines Hochtemperaturplasmas ist. Eine Möglichkeit, das Plasma von der Reaktorgefäßwand fernzuhalten, ist sein Einschluß in spezielle Magnetfeldkonfigurationen, aus denen die Ionen und Elektronen des Plasmas nicht austreten können. Größte Bedeutung haben hierfür toroidale Magnetfelder erlangt, wie sie in den TOKAMAK-Anlagen verwendet werden (siehe Abb. 11.16).

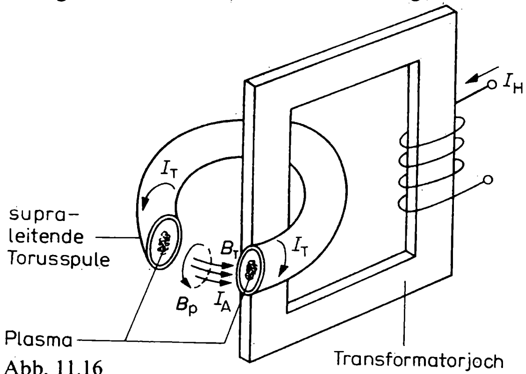


Abb. 11.16
Prinzipieller Aufbau der Magnetfeldkonfiguration eines TOKAMAK-Reaktors

Neben der Torus-Spule, welche das toroidale Führungsmagnetfeld erzeugt, wird ein zeitlichveränderliches poloidales Magnetfeld zur Plasmaerhitzung benötigt. Die Plasmazone im Inneren des Torus bildet praktisch die Sekundärentwicklung des Transformators, so daß hohe Plasmaströme induziert werden können. Zusätzliche Plasmaerhitzung ist durch Einschuß von Neutralteilchen oder HF-Energie in das Plasma möglich. Die Abb. 11.15 gibt eine Übersicht über einige bereits realisierte oder im Bau befindliche TOKAMAK-Plasmaanlagen hinsichtlich der Erreichung des Lawson-Kriteriums.

2. Die aus Abb. 11.15 ersichtlichen kontinuierlichen Fortschritte bei der Entwicklung von Plasmaanlagen haben die Ausarbeitung von Fusionsreaktor-Projekten hoher Leistung stimuliert. Der prinzipielle Aufbau der die Fusionszone umgebenden Strukturen eines solchen Reaktors sind auf Abb. 11.17 dargestellt.

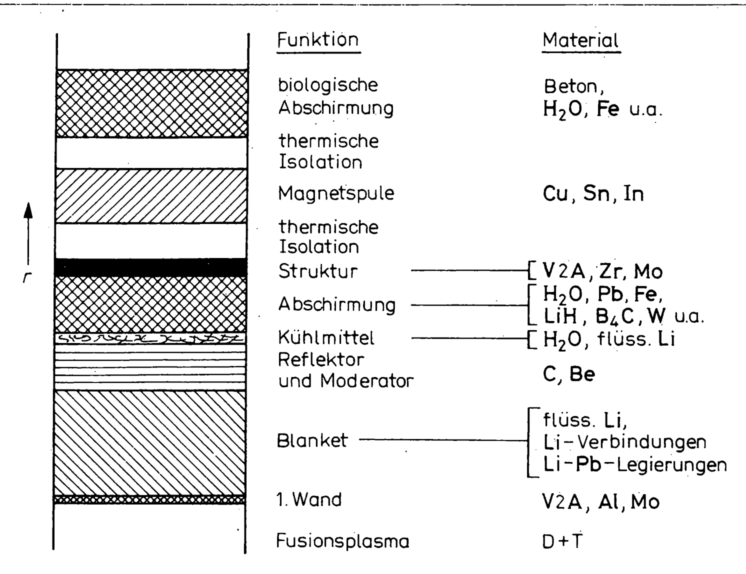


Abb. 11.17
Schematischer Aufbau eines Fusionsreaktors; Schichtfolge um die Fusionszone

Die dargestellten Materialien sind als Beispiele zu verstehen, ebenso die relative Schichtanordnung. Häufig gehen die Funktionen der Schichten ineinander über, so wird in einer Reihe von Projekten flüssiges Lithium gleichzeitig als Blanketmaterial und Kühlmittel vorgesehen, und das Konstruktionsmaterial V2A dient gleichzeitig als Abschirmung usw. Die genannte Schichtstärke des Materials um den Plasmatorus innerhalb der Magnetspulen liegt im Bereich 1 ... 2 m.

3. Die Vielfalt nuklearer und atomarer Prozesse, die den sukzessiven Übergang von Strahlungs- zur Wärmeenergie im Blanket bewirken, sind auf Abb. 11.18 dargestellt. Sie machen die

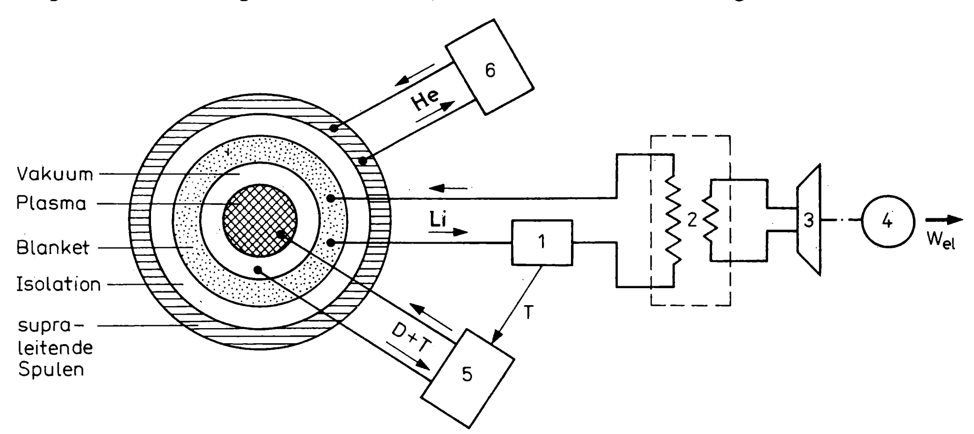


Abb. 11.19
Funktionsschema eines Kraftwerkes auf TOKAMAK-Basis, mit supraleitenden Magneten
1 Tritiumabscheider, 2 Wärmetauscher, 3 Turbine, 4 Generator, 5 Gaswirtschaft, 6 Kühlaggregat für flüssiges Helium

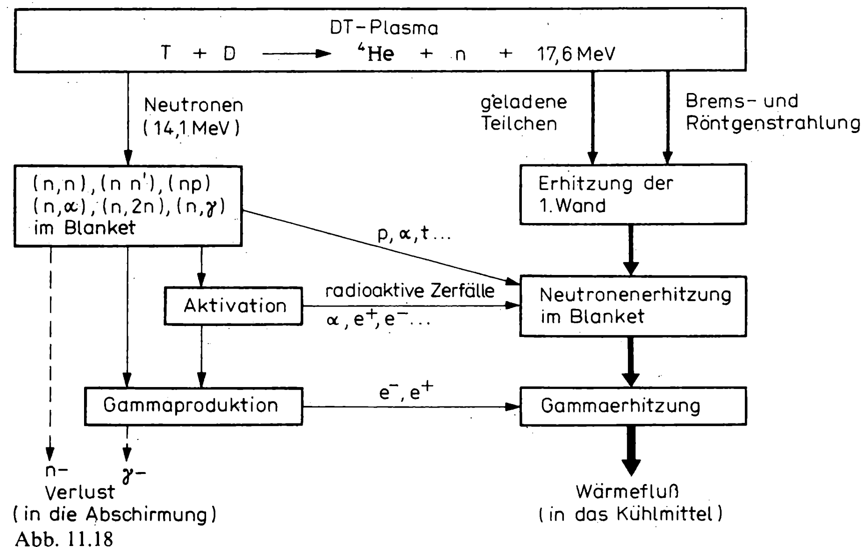


Abb. 11.18
Schema der Umwandlung von Fusionsenergie in Wärme im Fusionsreaktor

Kompliziertheit thermodynamischer Berechnungen von Fusionsreaktoren deutlich. Das Funktionsschema eines Fusionskraftwerkes (Abb. 11.19) enthält neben den fusionstypischen Komponenten — wie den Kreislauf für flüssiges Lithium zur Kühlung des Blankets und Tritiumproduktion sowie flüssiges Helium für den Betrieb der supraleitenden Torusspulen — auch die konventionellen kraftwerkstechnischen Komponenten.

11.7.3.2. Hybridreaktoren

1. Der Konzeption sogenannter Spalt-Fusions-Hybridreaktoren (SFHR) liegt die Zielstellung zugrunde, die im DT-Fusionsreaktor entstehenden 14 MeV-Neutronen zur zusätzlichen Energieproduktion infolge Kernspaltung und vor allem zur Brennstoffproduktion für Spaltungsreaktoren zu verwenden. Werden 14 MeV-Neutronen auf Uran oder Thorium geschossen, so findet eine wesentlich höhere Neutronenvervielfachung als bei thermischen Energien statt. Die Ursachen sind sowohl die mit beträchtlicher Wahrscheinlichkeit ablaufenden (n, 2n)- und (n, 3n)-Prozesse als auch die erhöhte mittlere Zahl von Spaltneutronen ν pro Spaltakt (vgl. Abb. 10.82) sowie der geringere Einfangquerschnitt. Damit ergibt sich eine mittlere Neutronenausbeute pro absorbiertes DT-Neutron von $\eta_{eff} \simeq 3{,}1$ (vgl. Beziehung (11.5)) — also wesentlich mehr als selbst im schnellen Brutreaktor. Berücksichtigt man, daß davon ein Neutron zur Tritiumreproduktion durch Absorption in Lithium (vgl. Beziehung (11.115)) benötigt wird, so stehen $(\eta_{eff} - 1)$ Neutronen für die Brennstoffproduktion entsprechend den Beziehungen (11.9) zur Verfügung. Gleichzeitig wird eine mittlere Energie von $Q_{eff} \simeq 130$ MeV in Form von Wärme freigesetzt. Es entsteht also im Uranblock pro Fusionsneutron wesentlich mehr Energie als aus dem DT-Fusionsprozeß selbst.

Neben dem Vorteil der Brennstoffproduktion für Spaltreaktoren ergibt sich damit auch eine Modifizierung des Lawson-Kriteriums: Der Reaktor ist bereits dann selbsterhaltend, wenn die Konversion der im Plasma und im Uranmantel insgesamt erzeugten Wärmemenge in Elektroenergie ausreichend zur Aufrechterhaltung der Zündbedingungen des Plasma ist. Es scheint folglich technisch wesentlich einfacher, die durch das Lawson-Kriterium gekennzeichnete Grenze der „energetischen Wirtschaftlichkeit" des Reaktors zu überschreiten, d. h., die Forderungen an die zu erreichenden Plasmaparameter werden einfacher erfüllbar.

2. Der Aufbau des Blankets eines Hybridreaktors sieht folglich, im Unterschied zu der auf Abb. 11.17 dargestellten Schichtanordnung, eine zusätzliche Schicht von Spaltmaterial — Uran oder Thorium mit einer Stärke von etwa 20 cm — zwischen der ersten Wand und der Tritiumbrutzone vor. Die Parameter eines Hybridreaktor-Konzepts die in Tabelle 11.9 vorgestellt werden, geben einen Eindruck von der Spezifik solcher Systeme: Hohe thermische Gesamtleistung bei relativ geringer Plasmaleistung und hohe Produktionsrate von Plutonium.

Tabelle 11.9
Zielparameter eines TOKAMAK-Hybridreaktorprojektes

Thermische Leistung	6900 MW
Elektrische Leistung (brutto)	2500 MW
Eigenverbrauch (elektrisch)	570 MW
davon für Plasmaaufheizung	200 MW
Hauptradius des Torus	6,4 m
Plasmavolumen	575 m^3
Magnetfeld im Torus	6 T
Uranmenge im Blanket	1110 t
Lithiummenge im Blanket	160 t
Blanketstärke	1,4 m
Plutoniumproduktion	4200 kg/a
Tritiumproduktion	38,7 kg/a
Tritiumverbrauch	37,2 kg/a
Neutronenfluß durch die erste Wand	$5 \cdot 10^{13}/cm^{-2} \cdot s^{-1}$

In der künftigen Kernenergetik wird als wesentliche Aufgabe der Hybridreaktoren die Versorgung von thermischen Kernspaltungsreaktoren mit Kernbrennstoff angesehen. Mit einem SFHR können bis zu vier Kernkraftwerke gleicher Leistung auf der Basis thermischer Kernreaktoren versorgt und damit im Prinzip der Brennstoffbedarf der Energetik auf lange Sicht auf der Basis des Natururans bzw. Thoriums gesichert werden.

Dabei muß jedoch bemerkt werden, daß auch die im Vergleich zum „reinen" Fusionsreaktor reduzierten Plasmaforderungen noch einen immensen technischen Aufwand erfordern. So stellt z. B. die Aufrechterhaltung der Supraleitung in der Torusspule in unmittelbarer Nachbarschaft einer riesigen Wärme- und Strahlungsquelle nur ein solches Problem dar. Die Realisierung derartiger Anlagen erfordert daher auf jeden Fall noch einen Zeitraum von Jahrzehnten und würde sicher nach dem Beginn der großtechnischen Nutzung der schnellen Brüter (siehe 11.4) liegen. Ebenso wie bei letzterem tritt beim SFHR das Problem der Entstehung langlebiger radioaktiver Spaltprodukte mit all seinen Folgen auf, wodurch ein sicherheitstechnischer Vorteil der Fusionsreaktoren aufgegeben werden müßte.

11.7.3.3. Weitere Systeme

1. Neben der Verwendung von Torusspulen zur Plasmahalterung, wie sie in TOKAMAK-Anlagen realisiert wird, sind auch andere Magnetfeldkonfigurationen für den Einschluß des Hochtemperatur-Fusionsplasma geeignet. Bekanntlich bewegen sich Teilchen, die eine Geschwindigkeitskomponente $V_\perp$ senkrecht zur Richtung des Magnetfeldes $\boldsymbol{B}$ besitzen, in diesem auf einer Bahn mit dem Krümmungsradius

$$r = \frac{m}{e} \frac{V_\perp}{B}, \qquad (11.127)$$

Nimmt die Feldstärke in Bewegungsrichtung $V_{\parallel}$ zu, so wird der Krümmungsradius immer kleiner, das Teilchen wird am Magnetfeld reflektiert und läuft zurück. Werden derartige Magnetspiegel an beiden Enden eines Magnetfeldes erzeugt, so entsteht im Inneren dieses Magnetfeldes ein Raumgebiet, aus dem die Ionen und Elektronen des Plasmas nicht entweichen können. Auf Abb. 11.20 ist der Plasmaeinschluß in einem Magnetspiegel-System schematisch dargestellt.

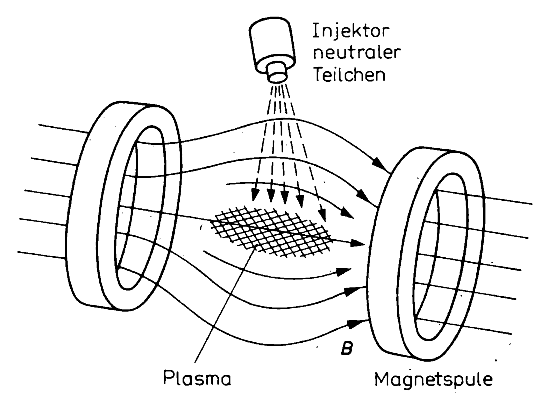


Abb. 11.20
Plasmaeinschluß in einem Magnetspiegel-System

Die bisher in diesen Anlagen erreichten Plasmaparameter liegen jedoch unter denen von TOKAMAK-Anlagen.

2. Eine räumliche Begrenzung von Plasmakonfigurationen ist auch durch den Pinch-Effekt möglich. Der durch ein Plasma fließende elektrische Strom erzeugt ein Magnetfeld, das eine Kompression der stromleitenden Plasmasäule bewirkt, die dadurch zu einer dünnen Plasmaschnur bei gleichzeitiger Temperaturerhöhung zusammengedrückt wird. In den sogenannten Pinch-Anlagen wird dieser Effekt zur Halterung des Fusionsplasmas genutzt. Die bisher erreichten Plasmaparameter liegen ebenfalls unter denen von TOKAMAK-Anlagen.

11.7.4. Systeme mit Inertialhalterung

1. Die, wie oben erläutert, technisch komplizierte Plasmahalterung durch Magnetfelder läßt sich umgehen, wenn die Aufheizung des Plasmas sehr schnell erfolgt. In diesem Fall kann ein Teil der Wasserstoffkerne verschmelzen, ehe das Fusionsgemisch sich räumlich stark ausdehnt. Dieses sogenannte Prinzip der Trägheits- oder Inertialhalterung wird in Kombination mit der Impulsaufheizung durch kurzzeitige Laser-, Elektronen- oder Schwerionenstrahlen diskutiert.

2. Neben der TOKAMAK-Fusion wird insbesondere die Laserfusion intensiv erforscht. Reaktorkonzepte dieser Art (siehe Abb. 11.21) basieren darauf, daß ein sehr kleines Pellet aus gefrorenem D-T-Gemisch durch Absorption von intensiven, von vielen Seiten konzentrisch auf das Pellet gerichteten Laserimpulsen in einer Zeit zur Fusionszündung gebracht wird, die klein gegenüber der Zerfallszeit dieses Pellets ist. Von entscheidender Bedeutung ist dabei die starke Kompression des Pellets infolge der Druckerhöhung auf etwa 10^7 atm, die mit einer Erhitzung des Pelletmaterials und Ablauf der thermonuklearen Synthese innerhalb von 10^{-10} s verbunden ist.

In der auf Abb. 11.21 dargestellten Fusionsanlage werden Blanket und erste Wand durch geschmolzenes Lithium gebildet, das zugleich Kühlmittel und Brutmaterial für die Tritiumproduktion darstellt. Die immensen Forderungen an die Laserleistung im MJ-Bereich, höchste optische Präzision bei enormen mechanischen und thermischen Impulsbelastungen — ein typischer Wert der Energiefreisetzung aus einem Pellet beträgt 100 MJ — das entspricht der Explosion von 23 kt hochexplosiven Sprengstoffs! — machen die Realisierung der Laserfusion nicht einfacher als die in TOKAMAK-Anlagen.

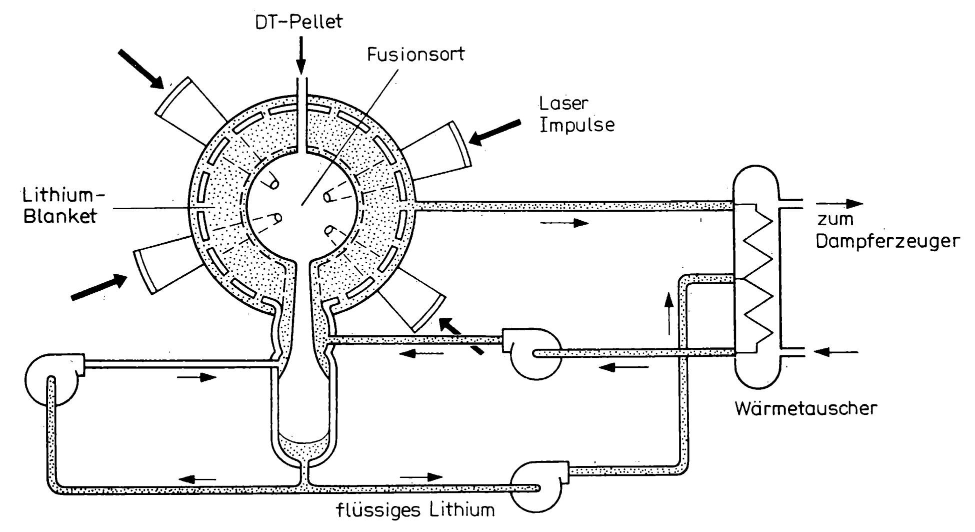


Abb. 11.21
Funktionsschema eines konzeptionellen DT-Laserfusionsreaktors

11.8. Thermoelektrische Generatoren auf der Basis radioaktiver Nuklide

1. Neben den bisher besprochenen Verfahren der Elektroenergiefreisetzung auf der Basis nuklearer Prozesse können auch radioaktive Zerfälle hierfür genutzt werden. Dies geschieht in

Tabelle 11.10
Charakteristika einiger Radionuklide für thermoelektrische Generatoren in metallischer Form

Nuklid	Schmelztemperatur [°C]	Zerfallstyp	$T_{1/2}$ [a]	spezif. Leistung [kW/kg]
^{90}Sr	770	β^-	28,6	0,936
^{144}Ce	804	β^-	0,78	26,7
^{137}Cs	28,5	β^-	30,17	0,411
^{60}Co	1495	β^-	5,27	17,5
^{210}Po	254	α	0,38	144
^{238}Pu	640	α	87,7	0,58

thermoelektrischen Generatoren, in denen die radioaktive Zerfallsenergie mit einem typischen Wirkungsgrad von etwa 10 % in elektrische Energie umgewandelt wird. Da die Radionuklidproduktion selbst ein sehr energieaufwendiger Prozeß ist, handelt es sich dabei allerdings nicht um Verfahren zur großtechnischen Energieerzeugung, sondern eher um Verfahren zur Speicherung von relativ kleinen Energiemengen.

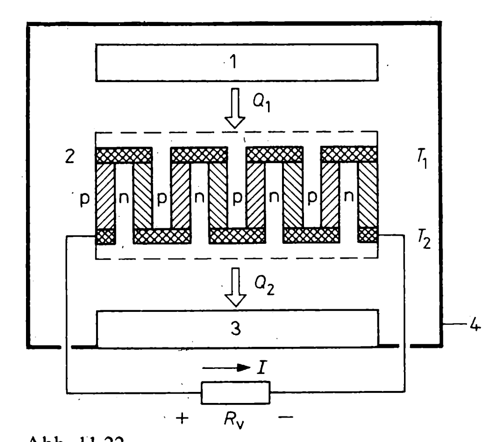


Abb. 11.22
Prinzipieller Aufbau einer thermoelektrischen Radionuklidbatterie
1 Radionuklidblock; 2 in Reihe geschaltete Thermopaare; 3 Kühlblock (Radiator); 4 Hülle

2. Der prinzipielle Aufbau eines thermoelektrischen Generators auf Radionuklidbasis ist auf Abb. 11.22 dargestellt. Im Radionuklidbehälter 1 wird die Wärmemenge Q_1 freigesetzt und an das „warme Ende" der Thermobatterie 2 geleitet. Vom „kalten Ende" dieser Batterie wird die Wärmemenge Q_2 an den Kühler 3 (z. B. in Form von Radiatoren) geleitet. Der Differenzbetrag $Q = Q_1 - Q_2$ wird in der Thermobatterie in Elektroenergie gewandelt. Brennstoff ist ein Metall oder eine chemische Verbindung mit hoher spezifischer Aktivität, hoher Temperaturleitfähigkeit und geringer Schmelztemperatur (um 500 °C). Häufig gelangen chemische Verbindungen der Radionuklide wie $SrTiO_3$ der $Ce_2(MoO_4)_3$ zum Einsatz. Tabelle 11.10 enthält Angaben zu einigen geeigneten Nukliden.

Die Thermobatterie stellt eine in Reihe geschaltete Anordnung von Thermopaaren dar. In der Regel werden hierfür p- und n-Halbleiter in Reihe geschaltet. Die am warmen und kalten Ende gebildete Zahl von Ladungsträgern ist unterschiedlich, dadurch kommt es zur Entstehung einer EMK an den Enden der Batterie. Häufig werden für die Herstellung der Thermoelemente die Materialkombinationen Bi_2Te_3—Sb_2Te_3 sowie Legierungen von Pb mit Te und die Kombination Si—Ge eingesetzt.

3. Die wesentlichsten Parameter solcher Generatoren sind — ihre elektrische Leistung p_{el}, Lebensdauer τ, Ausgangsspannung U und Wirkungsgrad η. Die Lebensdauer liegt meist im Bereich (0,1 ... 1) $T_{1/2}$, bei Halbwertszeiten im Bereich 100 d ... 100 a. Die typische elektrische Leistung dieser Anlagen liegt im Bereich bis 100 W bei Spannungen von (4 ... 12) V. Anlagen dieser Art dienen zur Energieversorgung in meteorologischen Stationen und auf kosmischen Flugkörpern.

Literaturhinweise zu Kapitel 11

Abr 84, Ale 84, Bat 82, Bat 85, Bec 64, Cho 81, Dol 82, Fra 71, Ger 82, Hag 77, Har 81, Her 62, Jud 81, Kes 83, Luk 75, Pas 69, Pet 73, Pet 81, Sch 80, Uzy 85, Zem 83

12. Anwendungen der Kern- und Elementarteilchenphysik

Kern- und Elementarteilchenphysik haben einen gewaltigen Erkenntnisgewinn über die Bausteine, die Struktur, die Umwandlungen und die Wechselwirkungen innerhalb der subatomaren Materie sowie über deren Einfluß und Einflußmöglichkeiten auf die atomare, molekulare, kondensierte und organisierte Materie gebracht. Die Zahl der Anwendungen ist fast unüberschaubar geworden. Da sie heute in allen Natur- und Technikwissenschaften sowie in der Technik und der Technologie anzutreffen sind, werden in speziellen Darstellungen zielgerichtete Abgrenzungen nach Wissenschafts- oder Technikgebieten vorgenommen. Neben den klassischen und manchen kaum in diesem Zusammenhang vermuteten Wissenschaftszweigen, wie Archäologie, Kriminalistik, Agronomie, um nur einige zu nennen, befinden sich solche neu entstandenen, wie Radio- und Strahlenchemie, nukleare Festkörperphysik, Nukleargeologie, Strahlenbiologie, Nuklearmedizin und viele andere. In diesem Kapitel sollen die Breite der Anwendungsmöglichkeiten und ihre Leistungsfähigkeit sichtbar gemacht sowie grundsätzliche Methoden vorgestellt werden. Dazu eignet sich eine Einteilung in methodische Grundlagen, in Wirkungen von Kernstrahlungen auf Stoffe, wobei Stoffgehalte, Stoffstrukturen und Stoffeigenschaften geändert werden, in Wirkungen von Stoffen auf Kernstrahlungen, wobei die Eigenschaften der Strahlungen geändert werden, so daß eine Stoff- und Prozeßanalyse bis hin zur BMSR-Technik möglich ist. Die Umwandlung der Kernenergie in andere Energieformen im kleinen sowie im volkswirtschaftlichen Maßstab wurden bereits im Kapitel 11 behandelt. Da bei allen Forschungen und Anwendungen von Kernstrahlungen die Gefahr der Schädigung von Mensch und Umwelt besteht, werden auch die Grundlagen des unbedingt zu beachtenden Strahlenschutzes dargelegt.

12.1. Kernstrahlungsgrößen und -quellen

12.1.1. Kernstrahlungsgrößen

1. Ausgangsgröße für viele Anwendungen ist die Kenntnis der Aktivität. In 9.2.1., Punkt 2, wurde bereits darauf hingewiesen, daß eine der wichtigsten und immer wieder vorkommenden experimentellen Aufgaben darin besteht, sie zu bestimmen. Neben dem dort besprochenen Verfahren der Messung einer einzigen Zerfallsrate ist ein zweites Verfahren von Interesse, das bei Radionukliden einsetzbar ist, die mindestens zwei verschiedene Strahlungen gleichzeitig emittieren, also z. B. eine β- und eine γ-Strahlung oder zwei γ-Strahlungen verschiedener Energie. Beispiele sind der Zerfall solcher Standardnuklide, wie ^{137}Cs (Abb. 9.17a), ^{22}Na (Abb. 9.17b) und ^{60}Co (Abb. 9.32). Der Nachteil der Messung einer einzigen Zerfallsrate besteht in der Notwendigkeit der Berücksichtigung mehrerer Korrekturfaktoren in (9.5). Der Vorteil der hier zu besprechenden Koinzidenzmethode besteht gerade darin, daß sich diese Korrekturen bis auf die Untergrundkorrekturen wegkürzen. Wenn jeder der beiden gemäß Abb. 5.5 auf Koinzidenz arbeitenden Detektoren nur eine einzige der ausgewählten Strahlungen registriert, dann kann man

für die auf Untergrund korrigierten Zählraten als Funktion der Aktivität und der Effektivität schreiben

$$\dot{N}_1 = \frac{A}{\eta_1}; \qquad \dot{N}_2 = \frac{A}{\eta_2}. \tag{12.1}$$

Die Koinzidenzrate ist

$$\dot{N}_{1,2} = \frac{A}{\eta_1 \eta_2}, \tag{12.2}$$

so daß sich für die Aktivität

$$A = \frac{\dot{N}_1 \dot{N}_2}{\dot{N}_{1,2}} \tag{12.3}$$

ergibt. Nach der Korrektur der gemessenen Zählraten $\dot{N}_1'$, $\dot{N}_2'$ und $\dot{N}_{1,2}'$ auf den Nulleffekt $\dot{N}_{0,1}'$, $\dot{N}_{0,2}'$ und $\dot{N}_{0,1,2}'$ sowie auf die Rate der zufälligen Koinzidenzen

$$\dot{N}_z = 2\tau \dot{N}_1' \dot{N}_2', \tag{12.4}$$

wobei τ die Auflösungszeit der Koinzidenzschaltung ist, bestimmt man die Aktivität zu

$$A = \frac{(\dot{N}_1' - \dot{N}_{0,1})(\dot{N}_2' - \dot{N}_{0,2})}{\dot{N}_{1,2}' - \dot{N}_{0,1,2} - \dot{N}_z}. \tag{12.5}$$

Die Aktivitätsbestimmung mit der Koinzidenzmethode gehört zu den Absolutmethoden. In 12.3.5. wird die meist verwendete Relativmessung beschrieben.

2. Ein oft gebrauchtes Maß für die in einer Fläche absorbierten Teilchen ist die Teilchenfluenz. Man versteht darunter die Anzahl der Teilchen dN, die in einer bestimmten Zeit eine Kugel mit der Querschnittsfläche dS durchdringen, dividiert durch dS:

$$\Phi = \frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}S}; \qquad [\Phi] = \mathrm{m}^{-2}. \tag{12.6a}$$

Die SI-Einheit ist das m^{-2}, meist verwendet man cm^{-2}. In der Neutronenphysik entspricht die Teilchenfluenz der Größe nvt, wobei n die Zahl der Neutronen pro Volumeneinheit, v ihre mittlere Geschwindigkeit und t die Bestrahlungszeit sind:

$$\Phi_\mathrm{n} = nvt. \tag{12.6b}$$

3. Als Maß für die von ionisierender Strahlung an ein Medium pro Masseneinheit abgegebene Energie dient die Energiedosis D. Sie wird von der Strahlung auf das Medium in Anregungs-, Ionisations- oder Kernumwandlungsprozessen übertragen. Man berechnet sie aus der Differenz der Summe der Energien aller in dm eintretenden sowie austretenden Teilchen:

$$D = \frac{\mathrm{d}E_\mathrm{D}}{\mathrm{d}m}; \qquad [D] = \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}} = 1\ \mathrm{Gy}. \tag{12.7}$$

Die Einheit der Energiedosis ist das Gray. Mit der früher verwendeten Einheit rad steht das Gray in dem Zusammenhang 1 rd = 10^{-2} Gy. In den meisten Fällen ist die Energiedosis nicht unmittelbar meßbar, so daß sie aus der Wirkung bestimmt werden muß.

4. Die Beschreibung der indirekten Ionisation durch Neutronen oder Quanten kann mit einer eigens eingeführten Energiedosis erfolgen. Sie wird Kerma genannt, was von den Anfangsbuchstaben von „kinetic energy released in matter" herrührt. Die Definition lautet:

$$K = \frac{\mathrm{d}E_\mathrm{k}}{\mathrm{d}m}; \qquad [K] = \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}} = 1\ \mathrm{Kerma}. \tag{12.8}$$

Die Größe dE_k ist die Summe aller kinetischen Anfangsenergien, der durch das nur indirekt ionisierende Teilchen freigesetzten ionisierenden Teilchen im Massenelement dm.

5. Eine andere spezielle, die Wirkung der Strahlung charakterisierende Größe ist die Expositionsdosis X. Sie wird vor allem für Quantenstrahlung in Luft verwendet, was aber nicht konsequent eingehalten wird. Wenn dQ_x die Summe der elektrischen Ladungen aller Ionen eines Vorzeichens ist, die durch Quanten in einem Massenelement Luft freigesetzt werden, dann ist für Quanten bis etwa 3 MeV

$$X = \frac{dQ_x}{dm}; \quad [X] = \frac{C}{kg}. \tag{12.9}$$

Die SI-Einheit C/kg steht mit der früher benutzten Einheit Röntgen in dem Zusammenhang $1\,R = 2{,}58 \cdot 10^{-4}$ C/kg. Da X leicht gemessen werden kann, läßt sich auch die Energiedosis in Luft gemäß

$$D_L = XW_L \tag{12.10}$$

berechnen, wobei $W_L = 5{,}28 \cdot 10^{-18}$ J die mittlere zur Bildung eines Ladungsträgerpaares erforderliche Energie ist. Für andere Stoffe läßt sich die Energiedosis durch Multiplikation mit dem Quotienten aus dem Massenschwächungskoeffizineten des Stoffes μ' und der Luft μ'_L berechnen:

$$D = D_L \frac{\mu'}{\mu'_L}. \tag{12.11}$$

Es leuchtet ein, daß die Exposition X proportional ist zur Aktivität A einer punktförmigen γ-Strahlungsquelle und zur Expositionszeit t und wegen des Abstandsgesetzes für Quantenstrahlung proportional zu r^{-2}. Daraus ergibt sich

$$X = \Gamma_\gamma A \frac{t}{r^2}. \tag{12.12}$$

Der Proportionalitätsfaktor Γ_γ wird γ-Strahlungskonstante genannt. Mit seiner Hilfe wird die Energie und die Spektrenform der γ-Strahlung des Radionuklids berücksichtigt. Die Werte sind tabelliert. Für ^{60}Co und ^{137}Cs ergaben sich $2{,}50 \cdot 10^{-18}$ bzw. $0{,}60 \cdot 10^{-18}$ Cm^2/kg Bq s. Manchmal wird auch die Einheit Gy m^2/Bq s angegeben.

6. Für die biologische Wirkung der ionisierenden Strahlung verwendet man die Äquivalenzdosis als Maß. Da unterschiedliche Strahlenarten auch unterschiedliche Wirkungen verursachen können, mußten Qualitätsfaktoren eingeführt werden, die die Bezeichnung relative biologische Wirksamkeit (RBW) erhalten haben. Dabei handelt es sich um dimensionslose Zahlen, die den Zusammenhang zwischen der Energiedosis der verschiedenen Strahlenarten und -energien und einer bestimmten biologischen Wirkung angeben. Da diese nicht immer hinreichend exakt erfaßt werden können, lassen sich die RBW nur näherungsweise angeben. Die RBW wird hauptsächlich durch die Ionisationsdichte bestimmt, die eine Teilchenart im biologischen Objekt verursacht. Als Bezugsgröße verwendet man γ-Strahlung einer bestimmten Energie, z. B. 200-keV- oder ^{60}Co-γ-Strahlung. Mit den Energiedosen D_γ für diese γ-Strahlung und D_i für die Strahlung i in dem betreffenden biologischen Stoff gilt

$$\text{RBW} = q = \frac{D_\gamma}{D_i}. \tag{12.13}$$

Tabelle 12.1
Relative biologische Wirksamkeit für verschiedene Strahlenarten

Strahlenart	RBW
Röntgenstrahlung	1
Gammastrahlung	1
Betastrahlung aller Energien	1
Schnelle Neutronen und Protonen ($E_k \leqq 10$ MeV)	10
Alphastrahlung (natürliche α-Strahlen)	10
Schwere Rückstoßkerne	20

Tabelle 12.2
Relative biologische Wirksamkeit in Abhängigkeit von der Ionisierungsdichte

Ionisierungsdichte (Ionenpaare je µm in H_2O)	Energieübertragung (10^{-16} J je µm in H_2O)	RBW
100	5,6	1
100— 200	5,6— 11,2	1— 2
200— 650	11,2— 36,8	2— 5
650—1500	36,8— 84,9	5—10
1500—5000	84,9—280,3	10—20

In Tabelle 12.1. sind RBW für einige Strahlenarten aufgeführt. Die Tabelle 12.2 zeigt die Abhängigkeit von der Ionisationsdichte. Die Energiedosis ergibt sich mit diesem Qualitätsfaktor q zu

$$H = qD\,; \qquad [H] = \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}} = 1\ \mathrm{Sv}\,. \tag{12.14}$$

Die SI-Meßeinheit ist das Sievert. Sie steht mit der früher benutzten Einheit rem in dem Zusammenhang 1 Sv = 100 rem. Die effektive Äquivalenzdosis von Personen entsteht als Mittelwert über die Äquivalenzdosen der Organe und Gewebe unter Berücksichtigung von Wichtungsfaktoren.

7. Beim Durchgang von Strahlung durch Stoff wird die Energie portionsweise im Ergebnis von vielen Stößen übertragen. Die Wahrscheinlichkeit für die Stöße hängt, wie in Kapitel 4 gezeigt wurde, von der Ladung, der Masse und der Geschwindigkeit der ionisierenden Teilchen ab. Das ist die Ursache für die unterschiedliche Ionisierungsdichte der verschiedenen Teilchenarten. Je größer die Ladung und je geringer in gewissen Grenzen die Geschwindigkeit ist, desto größer ist die Wechselwirkungswahrscheinlichkeit mit den Hüllenelektronen, also auch der spezifische Energieverlust pro Wegeinheit, das Bremsvermögen $\mathrm{d}E/\mathrm{d}x$. Da sich die Ionisationsdichte auf dem Weg durch den Stoff ändert, bei den Ionen gemäß der Braggschen Kurve, bei den γ-Strahlen nach einem Exponentialgesetz, gibt man für praktische Rechnungen einen Mittelwert an, die lineare Energieübertragung LET (Energietransmission):

$$L = \frac{\mathrm{d}E_\mathrm{L}}{\mathrm{d}x}\,, \tag{12.15}$$

Tabelle 12.3
Lineare Energietransmission für verschiedene ionisierende Strahlungen

Strahlung	E/MeV	LET/ keV µm^{-1}	Strahlung	E/MeV	LET/ keV µm^{-1}
Röntgen-Str.	0,2	1,79			
γ-Strahlen			α-Teilchen		
^{137}Cs	0,66	0,39		1	190
^{60}Co	1,25	0,27		3	180
β-Strahlen			Elektronen		
^{3}He	0,018	2,6		1	0,24
^{90}Sr	0,54	0,27		3	0,20
^{32}P	1,74	0,21		10	0,19
Neutronen					
	1	43			
	3	21			
	10	8,3			

LET für Wasser in keV/μm	RBW
3,5	1
3,5— 7,0	1— 2
7,0— 23	2— 5
23 — 53	5—10
53 —175	10—20

Tabelle 12.4
Lineare Energietransmissionen und relative biologische Wirksamkeit

wobei dE_L die von einem geladenen Teilchen bestimmter Energie dem Stoff auf der Wegstrecke dx im Mittel örtlich übertragene Energie ist. Als Einheit verwendet man meist keV/μm. In Tabelle 12.3. sind einige Werte angegeben, aus Tabelle 12.4. ist der Zusammenhang mit der RBW zu entnehmen. Die LET und der spezifische Energieverlust dE/dx unterscheiden sich, da beim Bremsvermögen der gesamte Energieverlust des betrachteten ionisierenden Teilchens berücksichtigt wird, bei der LET aber nur der örtlich auf dx zugeführte. Aus praktischen Gründen verwendet man daher meist LET_∞, was mit dem Bremsvermögen gleichgesetzt werden kann.

12.1.2. Kernstrahlungsquellen

12.1.2.1. Beschleuniger

1. Alle bekannten Beschleunigerarten werden in der Anwendung eingesetzt. Ihre Verbreitung hängt von den Anforderungscharakteristika ab. Da Elektronen in den Anwendungen am häufigsten vorkommen, gibt es mehr Elektronen- als Ionenbeschleuniger. Neben den Strahlungscharakteristika sind bei der Auswahl für den praktischen Einsatz auch solche Eigenschaften wichtig, wie Zuverlässigkeit. Anschaffungs- und Betriebskosten. Andere Entscheidungsgrößen sind Raumbedarf und Beweglichkeit.

Unter den Elektronenbeschleunigern stehen hinsichtlich ihrer Verbreitung die Linear-, Resonanz- und Linear-Induktionsbeschleuniger an erster Stelle. Die Energien liegen zwischen 1 und 50 MeV, die Strahlleistungen gehen bis zu 20 kW. Die Haupteinsatzgebiete sind die Strahlentechnik, -technologie, -therapie und -defektoskopie. Neben den seit vielen Jahren benutzten Betatrons haben neuerlich die Mikrotrons an Bedeutung gewonnen, insbesondere in der Aktivationsanalyse über die Photokernreaktionen. Im Zusammenhang mit der Erzeugung von Synchrotronstrahlung sind Elektronensynchrotrons und Elektronenspeicherringe in Synchrotronstrahlungszentren aufgebaut worden.

Zur Beschleunigung von Ionen werden hauptsächlich Van-De-Graaff-Generatoren zum Teil als Tandemgeneratoren sowie Zyklotrone eingesetzt. Erstere zeichnen sich durch große Monochromazität und Stabilität aus, letztere durch größere Ströme. Daher werden die elektrostatischen Generatoren nur zu analytischen Zwecken verwendet, während die Zyklotrone auch zur Produktion von Radionukliden dienen. Die Energien und Ströme betragen bei den elektrostatischen Beschleunigern einige MeV sowie μA bis mA, bei den Zyklotronen einige bis 50 MeV sowie mA bis 100 mA.

Die Erzeugung von Pionen und Myonen setzt Synchrozyklotrone voraus. Neuere Verfahren zur Tumordiagnostik und -therapie beruhen auf der Anwendung von Ionen im GeV-Bereich, sind also an das Vorhandensein von Synchrophasotronen oder Protonensynchrotronen gebunden.

In der Elementanalyse mit Neutronen sind Cockroft-Walton-Generatoren zur Beschleunigung von Deuteronen stark verbreitet.

2. Die Nutzung der Primärstrahlung von Beschleunigern zur Erzeugung von Sekundärstrahlungen wurde in 4.2.3. am Beispiel der Bremsstrahlung erwähnt. Neben der Maximalenergie der

Bremsstrahlung, die an die Energie der Elektronen heranreicht, ist die Richtungsverteilung von Bedeutung. Sie ist in Abb. 12.1 für übliche Elektronenenergien dargestellt. Die Intensität der Bremsstrahlung ist gemäß (4.31) proportional zu Z^2. Da im Target zur Erzeugung der Bremsstrahlung der größte Teil der Elektronenenergie in Wärme umgesetzt wird, verwendet man meist Materialien mit hohem Schmelzpunkt, wie Tantal und Wolfram. Oft muß darauf geachtet werden, daß nicht gleichzeitig große Neutronenflüsse entstehen. Die Schwellwertenergie der Neutronenerzeugung beträgt in Wolfram 8 MeV, in Beryllium 1,7 MeV.

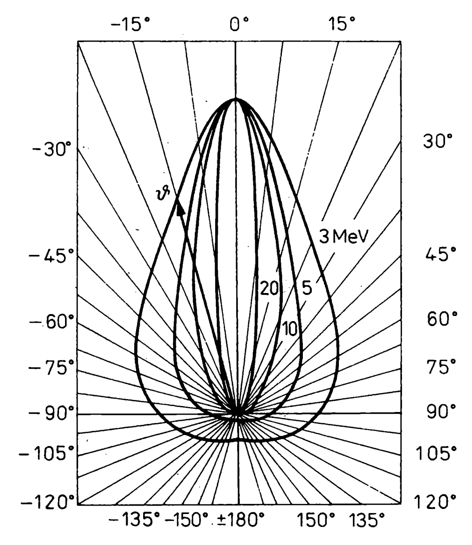


Abb. 12.1
Winkelverteilung der Bremsstrahlung am Elektronenbeschleuniger. Die Länge des Vektors ist das Intensitätsmaß

3. Zur Erzeugung von 14-MeV-Neutronen wird meist die T(d, n)^{4}He-Reaktion mit etwa 150-keV-Deuteronen genutzt, die bei der Resonanzenergie von 110 keV einen Wirkungsquerschnitt von $5 \cdot 10^{-24}$ cm^2 hat. Die Neutronenenergie kann mit (B.87) berechnet werden. Andere Neutronenerzeugungsreaktionen sind die D(d, n)^{3}He- und die ^{9}Be(d, n)^{10}B-Reaktionen. Die Reaktionsenergien der drei Reaktionen betragen 17,6; 3,28 und 4,36 MeV.

4. Die Erzeugung von Myonen erfolgt in einem Dreistufenprozeß. Durch Bestrahlung mit Protonen von mehreren hundert MeV wird ein Target im oder am Synchrozyklotron bestrahlt, in dem Pionen entstehen. Bei deren Zerfall entstehen dann die Myonen. Die Trennung der verschiedenen Teilchen erfolgt durch geeignete Magnetfelder.

5. Bei der Besprechung des Betatrons in 3.3.2.1. wurde darauf hingewiesen, daß beschleunigte Elektronen auf Kreisbahnen gemäß (3.77) Energieverluste durch Synchrotronstrahlung erleiden. Bei den Elektronenkreisbeschleunigern tritt dieser Effekt als Begrenzungsfaktor für den Übergang zu höheren Energien auf. Die Synchrotronstrahlung zeichnet sich allerdings durch Eigenschaften aus, die zu ihrem verbreiteten Einsatz in den unterschiedlichsten Anwendungen geführt haben.

Unter dem Aspekt der Erzeugung von Synchrotronstrahlung betrachtet, sind die Elektronenkreisbeschleuniger effektive Wandler der HF-Energie des Beschleunigers aus dem Dezimeter- oder Meterwellenbereich in den kurzwelligen Bereich zwischen den infraroten bis zu den Rönt-

gen-Strahlen. Die physikalische Ursache für diese Umwandlung ist die magnetisch bewirkte Bewegung der Elektronen auf der Kreisbahn, die mit einer ständigen Richtungsänderung der Elektronen zum Kreismittelpunkt hin verbunden ist. In Analogie zur elektrischen spricht man daher hier von magnetischer Bremsstrahlung. Bei kleinen Energien der Elektronen mit $v_e \ll c$ strahlen die Elektronen vorwiegend in der Tangentialebene ab. Wenn relativistische Energien erreicht sind, also für $v_e \simeq c$, erfolgt die Abstrahlung der Synchrotronstrahlung nur noch in einem kleinen Winkelbereich tangential zur momentanen Geschwindigkeitsrichtung, wie es die Abb. 12.2 zeigt. Der halbe Öffnungswinkel ergibt sich zu $\alpha \approx E_0(e)/E_k(e) \approx \gamma^{-1}$. In modernen Anlagen werden γ-Werte von 2000 bis 40000 erreicht. In diesem kleinen Winkel besteht einer der Vorteile der Synchrotronstrahlung. Ein weiterer ist die vollständige Polarisation der Synchrontronstrahlung. Der elektrische Vektor liegt in der Bahnebene, in der lineare Polarisation vorliegt, während außerhalb davon elliptische Polarisation vorhanden ist.

Besonders wichtig ist auch der große Spektralbereich der Synchrontronstrahlung. In Abb. 12.3 ist die Intensitätsverteilung als Funktion von der Energie dargestellt. Sie überdeckt je

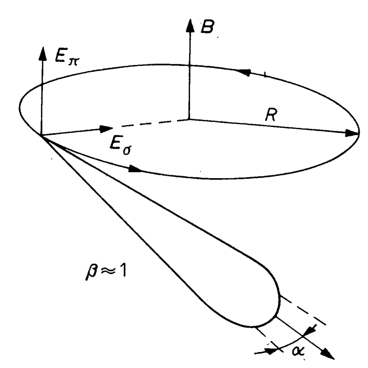


Abb. 12.2
Synchrotronstrahlung bei $v_e \lesssim c$

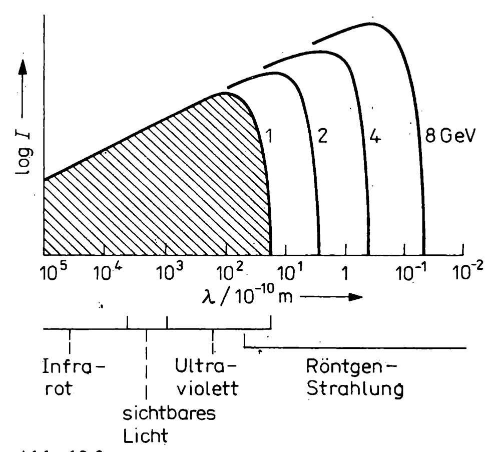


Abb. 12.3
Spektrale Intensitätsverteilung der Synchrotronstrahlung für Elektronen mit 1, 2, 4 und 8 GeV

nach der Elektronenenergie mehrere Größenordnungen der Strahlungswellenlänge. Im Infrarotgebiet von 100 bis 1000 μm ist die erreichbare Intensität an einem Elektronenspeicherring von 100 mA etwa mit der von einem schwarzen Körper üblicher Temperatur erhältlichen vergleichbar. Konkurrenz entsteht der Synchrotronstrahlung in diesem Gebiet auch durch den Infrarotlaser. Im Gebiet des sichtbaren Lichts haben sowohl moderne Lichtquellen, als auch Laser hohe Intensitäten. Beginnend bei Wellenlängen des UV-Gebiets bietet die Synchrotronstrahlung zu kleinen Wellenlängen hin zunehmend Vorteile hinsichtlich Intensität und Spektralbreite. Die Breitbandigkeit erlaubt das Ausblenden schmaler Spektralbereiche mit Hilfe von Monochromatoren. Im Röntgenbereich werden auf diese Weise Intensitäten erzeugt, die 1000mal größer sind, als von herkömmlichen Röntgenquellen erwartet werden kann.

Die bewußte Erzeugung der Synchrotronstrahlung erfolgt nicht im Elektronensynchrotron, sondern im Speicherring, weil sich die Bahn der Elektronen hier durch große Stabilität auszeichnet und infolge des Ultrahochvakuums der Strahlstrom über Stunden und Tage nicht merklich abnimmt bzw. der Verlust reproduziert werden kann. Das hat unter anderem den Vorteil, daß die abgestrahlte Intensität sehr genau berechnet werden kann und somit eine absolut geeichte Strahlenquelle zur Verfügung steht. Zur Abstrahlung werden spezielle Magnete im Strahlengang des Speicherrings aufgestellt, in denen die magnetische Induktion impulsförmig oder kontinuierlich erhöht werden kann. Da die abgestrahlte Intensität proportional ist zum Quadrat der magnetischen Induktion und umgekehrt proportional zum Bahnkrümmungsradius, kann man eindeutig zeitlich und räumlich fixierte Quellpunkte schaffen. Ein verbreitet angewendeter Magnettyp ist der in Abb. 12.4 dargestellte Schlangen- oder Wigglermagnet (von wackeln, schlängeln). Der Vorteil der Schlangenmagnete besteht auch in der mit ihnen erzielbaren Interferenzverstärkung der Intensität der Synchrotronstrahlung um einen Faktor γ^2 bei $\omega = L/(1 + \beta)\,\gamma^2$, wobei L die Periode des Magneten ist. Für $L = (1 - 2)$ cm und $\gamma = 10^2$ bis 10^3 kann man bereits im UV-Gebiet hohe Intensitäten erzeugen.

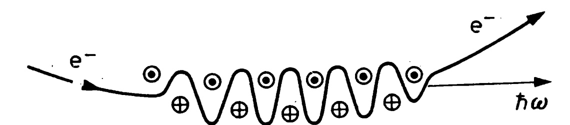


Abb. 12.4
Elektronenbahn in einem Schlangenmagneten zur Erzeugung von Synchrotronstrahlung

12.1.2.2. Kernreaktoren

1. Für die Aufgabenstellungen der Anwendungen, die meist auf die Bestrahlung von Materialien und die Erzeugung von Radionukliden hinauslaufen, werden spezielle Kernreaktoren verwendet, die hinsichtlich des Neutronenflusses und der Bestrahlungsmöglichkeiten optimiert sind, nicht aber zur Erzeugung von Energie. Je nach der hauptsächlichen Bestimmung bezeichnet man sie als Forschungs-, Materialprüfungs- und Hochflußreaktoren. Solche Reaktoren sind mit Bestrahlungskanälen ausgestattet, die die Einführung von Proben oder die Herausführung von Neutronenstrahlen ermöglichen. Dabei unterscheidet man zwischen horizontalen, vertikalen, zentralen und tangentialen Kanälen, je nach ihrer Anordnung bezüglich der aktiven Zone. In den Kanälen der thermischen Forschungsreaktoren werden in der Nähe der aktiven Zone oder des Reflektors Neutronenflußdichten von 10^{14} cm^{-2} s^{-1} erreicht. Mit den gewöhnlichen Reaktorkonzeptionen ist eine Flußdichtenerhöhung nur proportional zur Leistungserhöhung möglich, so daß man bei weiteren Steigerungen auf ökonomische Grenzen stößt. In den Hochflußreaktoren macht man vom sogenannten Flußfallenprinzip Gebrauch, mit dem eine Erhöhung der Flußdichten um einen Faktor 100 möglich wird. Dazu werden kompakte Kernbrennstoffringe aus

hochangereichertem Spaltstoff in der Nähe der aktiven Zone aufgestellt, in deren Zentrum sich ein Moderatormaterial befindet. Die schnellen Neutronen aus den Ringen gelangen in die Moderatorzone und werden abgebremst, so daß sich ein thermischer Neutronenfluß ausbildet. Wegen der wesentlich geringeren Absorption der thermischen Neutronen im Moderator, als in der Brennstoffzone, ist die Lebensdauer im Moderator wesentlich größer. Die Folge ist der

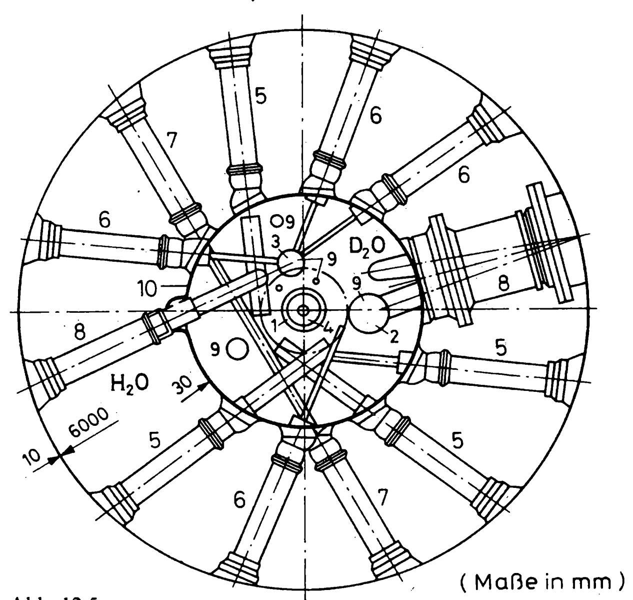


Abb. 12.5
Horizontalschnitt durch den Hochflußreaktor des Instituts MAX VON LAUE-PAUL LANGEVIN in Grenoble
1 Aktive Zone, 2 Kalte Quelle, 3 Heiße Quelle, 4 Kontrollstab, 5 Horizontale, tangierende Kanäle, 6 Neutronenleiter, 7 Durchgehende Kanäle, 8 Zentrale Kanäle, 9 vertikale Kanäle, 10 Reflektor

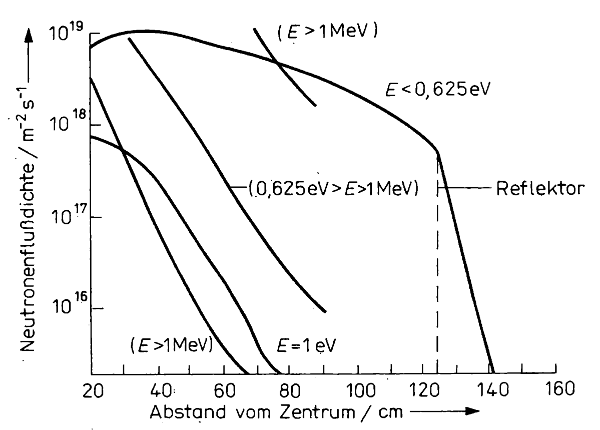


Abb. 12.6
Flußdichteabhängigkeiten des Hochflußreaktors von Abb. 12.5

hohe thermische Fluß. In Abb. 12.5 ist ein Schnitt durch den Hochflußreaktor des Instituts Max von Laue-Paul Langevin in Grenoble mit einer mittleren thermischen Leistung von 57 MW gezeigt, dazu in Abb. 12.6 die Flußdichtenabhängigkeiten. Dieser Reaktor ist auch mit einer kalten Neutronenquelle, die mit flüssigem schwerem Wasserstoff bei 25 K gefüllt ist, ausgerüstet sowie mit einer heißen Neutronenquelle aus Graphit, die bis auf 2400 K erhitzt werden kann. Tabelle 12.5. enthält einige technische Daten dieses Reaktors.

Tabelle 12.5
Einige technische Daten des Hochflußreaktors im Institut Max von Laue-Paul Langevin in Grenoble

Mittlere thermische Leistung/MW	57
Moderator	D_2O
Kühlmittel	D_2O
Horizontale Kanäle und	9
thermischer Neutronenfluß/cm^{-2} s^{-1}	$(5-8) \cdot 10^{14}$
Vertikale Kanäle und	4
thermischer Neutronenfluß/cm^{-2} s^{-1}	$(5-8) \cdot 10^{14}$
Durchgehender tangentialer Kanal	1
und thermischer Neutronenfluß/cm^{-2} s^{-1}	$6 \cdot 10^{14}$

Als Beispiel eines in der Industrie einsetzbaren Reaktors sei der Argus-21 des Moskauer Kurčatov-Instituts genannt. Die Abb. 12.7 zeigt einen Schnitt durch diesen Reaktor, die technischen Daten sind in Tabelle 12.6. enthalten.

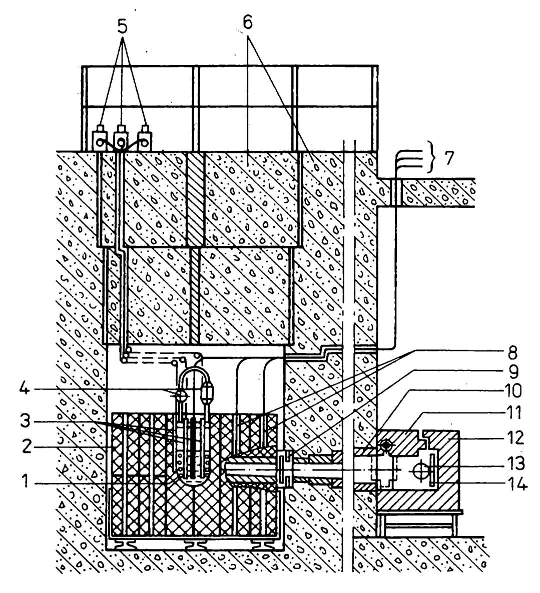


Abb. 12.7
Vertikalschnitt durch den Industriereaktor Argus-21 des Kurčatov-Instituts in Moskau
1 Kühlschlange, 2 Graphitreflektor, 3 Regelorgane, 4 Katalytischer Rekombinator, 5 Regelstabantriebe, 6 Betonabschirmung, 7 Pneumopost, 8 Experimentierkanäle, 9 Strahlformierung, 10 Kollimator, 11 Schieber, 12 Neutronenradiographische Kammer, 13 Probe, 14 Detektor

Tabelle 12.6
Einige Angaben zum Industriereaktor Argus-21 des Kurčatov-Instituts in Moskau

Brennstoff	Wäßrige UO_2SO_4-Lösung
Uran-235-Anreicherung/%	21
Urankonzentration/g · l^{-1}	382
Kritische Beladung an ^{235}U/kg	1,5
Kritisches Volumen/l	18,4
Reaktorleistung/kW	30
Neutronenflußdichte/cm^{-2} s^{-1}	
im Zentralkanal	$7 \cdot 10^{11}$
am Reflektor	$(1,0—3,5) \cdot 10^{11}$
am äußeren Strahl (1°)	$3,0 \cdot 10^{7}$

2. Neben Forschungsreaktoren im stationären Betrieb nimmt der schnelle Impulsreaktor einen wichtigen Platz bei der Untersuchung von Materialstrukturen ein. Aus technischen und ökonomischen Gründen ist es schwierig, mit der Leistung des Forschungsreaktors über 100 MW hinauszugehen, wenn gleichzeitig das Volumen der aktiven Zone klein, also die Flußdichte groß gehalten werden sollen. Außerdem wird beim Arbeiten am stationären Reaktor meist nur etwa 1% des Neutronenflusses genutzt, da die Energie der Neutronen meist mit Hilfe der Flugzeitmethode bestimmt wird, wobei das Verhältnis von Impulsbreite zu Impulsdauer etwa 1:100 beträgt. Für den Impulsreaktor sind gerade Impulsbreiten im geforderten Zeitintervall, kleine mittlere thermische Leistungen und höchste Impulsleistungen typisch. Der erste Impulsreaktor wurde 1960 als IBR-1 in Dubna in Betrieb genommen. Die verbesserte Variante IBR-30 war durch eine mittlere thermische Leistung von 30 kW bei einer Impulsleistung von 150 MW gekennzeichnet. Beim IBR-2 beträgt die mittlere thermische Leistung 4 MW, die Impulsleistung 10 GW. In Tabelle 12.7. sind einige Daten des IBR-30 und des IBR-2 aufgeführt. Die Abb. 12.8 zeigt den prinzipiellen Aufbau.

Tabelle 12.7
Einige Angaben zu den Impulsreaktoren IBR-30 und IBR-2 des Vereinigten Instituts für Kernforschung in Dubna mit schnellen Neutronen

	IBR-30	IBR-2
Mittlere thermische Leistung/kW	30	4000
Impulsleistung bei 5 Hz/MW	150	8300
Impulsleistung bei 50 Hz/MW		800
Kühlmittel	Luft	Na, 300—400 °C
Volumen der aktiven Zone/l	3	20
Kritische Masse		100 kg PuO_2
Impulsdauer bei 5 Hz/μs	50	100
Impulsfolgefrequenz/Hz	5—50	5—50
Schneller Neutronenfluß im Impulsmaximum/cm^{-2} s^{-1}	$5 \cdot 10^{16}$	
Langsamer Neutronenfluß im Impulsmaximum/cm^{-2} s^{-1}	10^{14}	10^{17}

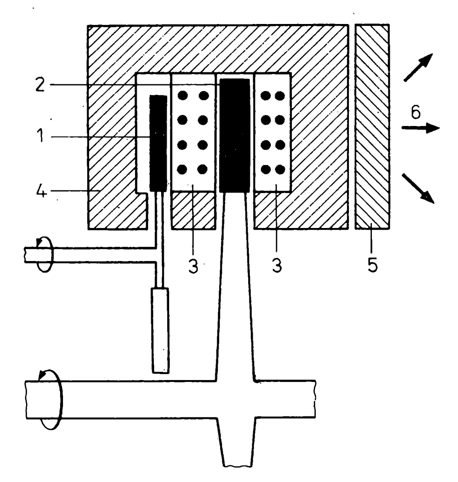


Abb. 12.8
Prinzipieller Aufbau des Impulsreaktors IBR-30 des Vereinigten Instituts für Kernforschung in Dubna
1 Kleine rotierende Hilfsscheibe mit ^{235}U-Einsatz, 2 Große rotierende Hauptscheibe mit ^{235}U-Einsatz, 3 Feststehender Teil der aktiven Zone mit ^{239}Pu, 4 Reflektor, 5 Moderator, 6 Langsame Neutronen

Das Prinzip des Impulsreaktors wurde 1955 von D. I. BLOCHINCEV vorgeschlagen. Beim IBR-30 ist die aktive Zone in drei Teile untergliedert, von denen einer fest steht, während die anderen zwei mit unterschiedlicher Umdrehungszahl durch den feststehenden Teil rotieren. Der Reaktor wird nur dann überkritisch, wenn es zur Koinzidenz aller drei Teile kommt. Der IBR-2 mit unbeweglicher aktiver Zone wird nur dann überkritisch, wenn die mit unterschiedlicher Frequenz rotierenden Reflektoren, von denen der eine drei, der andere zwei Arme hat, mit der aktiven Zone koinzidieren.

12.1.2.3. Radionuklidquellen

1. Radionuklide werden in den verschiedensten Kernreaktionen an Beschleunigern und Reaktoren erzeugt. Die Grundlagen dazu wurden in 9.3. behandelt. Die Bestrahlung der Targets kann an inneren oder äußeren Bestrahlungsorten vorgenommen werden. Beim Reaktor sind die inneren Kanäle wegen der viel höheren Neutronenflußdichten vorzuziehen. Bei Beschleunigern ist das nicht immer möglich, weil als Folge der hohen Wärmeentwicklung im Target von bis zu einigen kW/cm^3 die Targetmaterialverdampfung das Vakuum in der Beschleunigungskammer stört. Was die Auswahl der Radionuklide betrifft, so ergänzen Reaktor und Beschleuniger einander. Im Reaktor mit thermischen Neutronen herrschen die (n, γ)-Reaktionen vor. Dabei bilden sich neutronenangereicherte Isotope des Targetelements. In Reaktionen mit Ionen bilden sich meistens neutronendefizite Isotope anderer Elemente. Das hat Bedeutung bei der Herstellung trägerfreier Radionuklidquellen in anschließenden chemischen Abtrennungen der Makromenge des Targetmaterials von der Mikromenge der Reaktionsprodukte. Nach der (n, γ)-Reaktion befinden sich die Atome der Radionuklide meist in dem gleichen chemischen Zustand, wie die Makromenge der Atome des Targetelements. Sie lassen sich daher nicht auf chemischem Wege abtrennen. Solche trägerbehafteten Quellen können bei der Untersuchung von Vorgängen mit markierten Atomen eingesetzt werden, in denen die Bewegung von Makromengen typisch ist, oder aber auch als Quellen, in denen die Absorption der Strahlung keine

Tabelle 12.8
Häufig verwendete Radionuklidquellen für α-, β- und γ-Strahlung

Mutter-nuklid	Zer-falls-art	$T_{1/2}$	Nutz-strahlung; E/MeV	Zusätz-liche Strahlung	Mutter-nuklid	Zerfalls-art	$T_{1/2}$	Nutzstrahlung E/MeV	Zusätz-liche Strahlung	Γ_γ/ 10^{-18} cm² kg⁻¹ Bq⁻¹ s⁻¹
^{210}Po	α	138 d	α; 5,29	—	^{60}Co	β^-	5,26 a	γ; 1,333; 1,117	β^-	2,50
^{226}Ra	α	1620 a	α; 4,59	β, γ	^{65}Zn	EE, β^+	244 d	γ; 1,12	β^+, KX	0,585
^{238}Pu	α	88 a	α; 5,50		^{125}J	EE	60 d	γ; 0,035	—	0,00041
^{3}H	β^-	12,3 a	β^-; 0,018	—	^{137}Cs	β^-	30 a	γ; 0,662	β^-, KX	0,60
^{22}Na	β^+	2,58 a	β^+; 0,55	γ	^{144}Ce	β^-	284 d	γ; 0,012—0,134	β^-	0,0077
^{32}P	β^-	14,3 d	β^-; 1,71	—	^{170}Tm	EE, β^-	127 d	γ; 0,084	β^-, KX	0,0019
^{35}S	β^-	87 d	β^-; 0,167	—	^{182}Ta	β^-	115 d	γ; 0,046—1,45	β^-	0,118
^{85}Kr	β^-	10,7 a	β^-; 0,67	γ	^{192}Ir	EE, β^-	74,3 d	γ; 0,296—0,613	β^-, KX	0,90
$^{90}Sr^+$	β^-	28 a	β^-; 0,55	—	^{226}Ra	α	1620 a	γ; 0,6—2,4	α	1,81
^{90}Y	β^-	64,4 h	β^-; 2,27	—						
$^{144}Ce^+$	β^-	284 d	β^-; 0,32	γ	^{241}Am	α	433 a	γ; 0,060	α	0,122
^{144}Pr	β^-	17,3 min	β^-; 3,0	γ						
^{137}Pm	β^-	2,62 a	β^-; 0,22	α						

Rolle spielt. Die spezifische Aktivität solcher Quellen ist nicht besonders groß. Radionuklidquellen aus Reaktorbestrahlungen mit Einelementtargets sind daher, aber auch wegen der kürzeren Bestrahlungszeiten, billiger als Radionuklidquellen aus Zyklotronbestrahlungen. Letztere können dafür durch chemische Abtrennung trägerfrei hergestellt werden. Trägerfreie Radionuklidquellen können allerdings auch bei Reaktorbestrahlungen erhalten werden, wenn die Targetatome in Moleküle eingebunden sind, aus denen sie durch die Reaktion oder durch den Rückstoß bei der Emission von γ-Strahlung herausgestoßen werden. Man spricht vom Szilard-Chalmers-Effekt. Die „heißen Atome" lassen sich dann in geeigneten chemischen Reaktionen abtrennen. Der Vorteil der Bestrahlung von Einelementtargets im Reaktor geht dabei jedoch verloren. In der Praxis haben sich die Bezeichnungen Zyklotron- und Reaktornuklide eingebürgert.

Daß in Kernreaktionen nur Mikromengen an Reaktionsprodukten entstehen, kann mit Hilfe von (9.13) leicht nachgeprüft werden. Man erhält für die Masse m_i des Nuklids i mit der relativen Atomzahl $A_{r,i}$, der Halbwertszeit $T_{1/2}(i)$ und der Avogadro-Konstante N_A bei der Aktivität A_i

$$m_i = 2{,}396 \cdot 10^{-24} A_{r,i} \cdot A_i \cdot T_{1/2,i} \cdot \qquad (12.16)$$

Für den konkreten Fall ^{18}F mit $T_{1/2} = 112$ min, $A_r = 18$ und $A_i = 2{,}70 \cdot 10^7$ Bq (= 1 m Ci) ergibt sich $7{,}7 \cdot 10^{-12}$ g. Man sieht aus diesem Wert auch, daß ohne Träger sehr hohe spezifische Aktivitäten möglich sind. In Tabelle 12.8. sind Radionuklide angeführt, die aus Reaktor- und Beschleunigerbestrahlungen gewonnen und verbreitet eingesetzt werden.

Aus Strahlenschutzgründen müssen Radionuklidquellen streng in geschlossene und offene radioaktive Präparate eingeteilt werden. Die geschlossenen sind von einer dichten inaktiven Hülle allseitig und ständig umschlossen, die nur für die Strahlung, nicht aber für die radioaktiven Atome durchlässig ist. Beim Arbeiten mit offenen radioaktiven Präparaten sind neben den für geschlossene radioaktive Präparate vorgeschriebenen Schutzmaßnahmen zusätzlich Maßnahmen zu ergreifen, die eine Inhalation oder Ingestion, also Inkorporation verhindern.

2. Die Zahl der in Tabelle 12.8. aufgeführten Radionuklide ist gering, verglichen mit der im Prinzip erzeugbaren Zahl. Trotzdem ist man in der Praxis oft mit der Tatsache konfrontiert, daß kein geeignetes Radionuklid zur Verfügung steht. Das betrifft besonders auch kurzlebige Radionuklide. Da diese in der Medizin von Bedeutung sind, trifft man hier verstärkt auf den Einsatz von Zyklotronen.

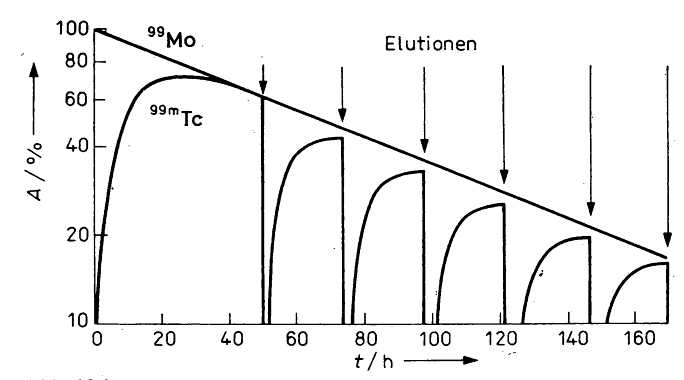


Abb. 12.9
Aktivitätsverlauf von Mutter- und Tochternuklid in einem Radionuklidgenerator mit ^{99}Mo und ^{99m}Tc

In vielen Fällen kann mit Nuklidgeneratoren gearbeitet werden, mit deren Hilfe die durch Zerfall eines langlebigen Mutternuklids entstehende Aktivität eines kurzlebigen Tochternuklids in bestimmten Zeitabständen „abgemolken" oder eluiert werden kann. Das Mutternuklid ist an einen Adsorber gebunden, aus dem das Tochternuklid durch ein Elutionsmittel abgelöst wird. Damit das Mutternuklid nicht in das Präparat gelangt, wird ein spezielles Filter zwischengeschaltet. Nach jeder Elution sammelt sich das Tochternuklid von neuem an und strebt gemäß (9.18) einem radioaktiven Gleichgewicht mit dem Mutternuklid zu. Im allgemeinen erfolgt die nächste Elution nach drei bis vier Halbwertszeiten des Tochternuklids. Die Abb. 12.9 zeigt den Verlauf der Aktivität von ^{99}Mo und ^{99m}Tc in einem Technetiumgenerator. Tabelle 12.9 enthält Angaben über einige Radionuklid-Generatorpaare.

Tabelle 12.9
Angaben über einige Radionuklid-Generatorpaare

Mutter-nuklid	Zerfallsart	Halbwertszeit	Tochter-nuklid	Zerfallsart	Halbwertszeit
^{68}Ge	EE	275 d	^{68}Ga	β^+, γ	1,1 h
^{87}Y	EE, β^+	3,3 d	^{87m}Sr	γ	2,8 h
^{99}Mo	β^-	2,8 d	^{99m}Tc	γ	6 h
^{113}Sn	EE	115 d	^{113m}In	γ	1,7 h
^{123}J	EE	13,2 h	^{123}Xe	β^+, γ	1,85 h
^{132}Te	β^-	3,2 d	^{132}J	β^-, γ	2,3 h
^{137}Cs	β^-	30 a	^{137m}Ba	γ	2,6 min
^{140}Ba	β^-	13 d	^{140}La	γ	40 h

Tabelle 12.10
Radionuklid- sowie Beschleuniger-Neutronenquellen für industrielle Anwendungen

Radio-nuklid	Auslösende Strahlung	Halbwertszeit	Target-nuklid	Spezifische Ausbeuten		Ausbeuten
				10^4 Ci^{-1}	10^9 mg^{-1}	s^{-1}
$^{226}_{88}$Ra	α	1600 a	$^9_4$Be	148		
$^{210}_{84}$Po	α	138 d	$^9_4$Be	216		
$^{240}_{94}$Pu	α	6600 a	$^9_4$Be			10^9
$^{241}_{95}$Am	α	458 a	$^9_4$Be	162		10^9
$^{24}_{11}$Na	γ	15 h	$^9_4$Be	14		10^8
$^{24}_{11}$Na	γ	15 h	D_2O	29		10^8
$^{88}_{39}$Y	γ	107 d	$^9_4$Be	10		10^8
$^{124}_{51}$Sb	γ	60,9 d	$^9_4$Be	19		10^8
$^{252}_{98}$Cf	Spontane	2,65 a	—	—	2,7	10^{11}
Unterkritische Anordnungen						$> 10^{11}$
D-T-Generatoren						10^{11}
γ-n-Generatoren						10^{11}

3. Besondere Aufmerksamkeit verdienen die Radionuklid-Neutronenquellen. Man kann sie in drei Gruppen einteilen, in Alpha-, Gamma- und Spontanspaltungs-Neutronenquellen, weil die Neutronen entweder in (α, n)-, (γ, n)- oder in spontanen Spaltprozessen freigesetzt werden. Bei der Herstellung der (α, n)-Quellen ist eine gute Durchmischung der beiden Komponenten der Quelle α-Strahler und Targetmaterial wichtig, weil die Reichweite der α-Strahlen sehr gering ist und die Ausbeute der Reaktion davon abhängt, ob der gesamte α-Teilchenweg im Targetmaterial liegt. Da die α-Teilchen infolge der Energieverluste bei der Wechselwirkung mit den Hüllenelektronen Energie verlieren bevor es zu einer Kernreaktion kommt und die Neutronenenergie gemäß (B.87) von der α-Teilchen-Energie abhängt, liefern solche Quellen ein kontinuierliches Neutronenspektrum. Ganz im Unterschied dazu zeichnen sich die Photo-Neutronenquellen mit monochromatischen γ-Strahlen durch ein nahezu monochromatisches Neutronenspektrum aus. Als Targetnuklide kommen hier nur ^2D und ^9Be in Frage, weil nur sie hinreichend kleine Schwellwertenergien von 2,23 und 1,67 MeV haben. Das Neutronenspektrum der Spaltneutronenquellen ist ein für den Spaltprozeß typisches Verdampfungsspektrum. In Tabelle 12.10 sind Angaben über einige verbreitet angewendete Radionuklid-Neutronenquellen enthalten, im Vergleich dazu Ausbeuten, wie sie an kritischen Anordnungen und Neutronengeneratoren erhalten werden.

Sehr intensive Neutronenquellen stellen Explosionen von Kernsprengkörpern dar. Dabei werden 10^{24} bis 10^{25} Neutronen frei. Da die Zeitdauer solcher Explosionen nur 10^{-7} s beträgt, stehen hier Ströme von 10^{32} s^{-1} zur Verfügung.

12.2. Stoffumwandlungen durch Kernstrahlungen

12.2.1. Physikalische Wirkungen

1. Die einfachste Wirkung der ionisierenden Strahlung liegt in Gasen vor. Da die Ausbeute der Kernreaktionen meist nur klein ist, wird der größte Teil der Strahlungsenergie zur Anregung und Ionisierung der Atome verbraucht. In Tab. 5.1 sind einige Zahlenwerte angegeben. Selbst wenn die Energie der Strahlung größer ist als zur Ionisation eines Atoms oder Moleküls benötigt wird, so ist der mittlere Energieaufwand etwa doppelt so groß, weil zur Anregung ebensoviel wie zur Ionisation verbraucht wird.

Auf der Grundlage dieses Effekts sind wichtige Anwendungen entstanden, darunter die Gasionisationsdetektoren zum Nachweis der Kernstrahlungen, die in 5.3. besprochen wurden. Eine weitere Anwendung, die ebenfalls in der Technik Eingang gefunden hat, sind die Aerosolionisationsdetektoren. Sie bestehen meist aus einer Ionisationskammer mit eingebauter Radionuklidquelle zur Ionisation des Gases und der Aerosole. Die Erzeugung von Kleinionen und deren Anlagerung an Aerosole wird zum Rauchgasnachweis, zur Staubmessung, zur Gaschromatographie und zur Analyse und Steuerung von Prozessen genutzt. Eine andere Anwendung ist die Ionisation der Luft zur Vermeidung von elektrostatischen Aufladungen in Produktionsabläufen oder zur Vernichtung von Bakterien und anderen Schädlingen.

2. Auch in kondensierter Materie wird der Hauptteil der Strahlungsenergie zur Anregung und Ionisation verbraucht. Die Folgen der Einwirkung ionisierender Strahlungen sind hier aber viel weitreichender als bei den Gasen, weil innere und Oberflächenstrukturen vorhanden sind, die verändert werden können. Die Abb. 12.10 liefert einen Überblick über die wichtigsten Strahlenauswirkungen auf feste Stoffe.

Zu den Oberflächeneffekten gehören die Abtragung, die Rückstreuung und die Zerstäubung. Durch Abtragung entstehen topographische Veränderungen und Oberflächenreinheiten, wie

sie in der Festkörper-, insbesondere in der Halbleiterphysik, einschließlich der Mikroelektronik, erforderlich sind. Wenn sie von beschleunigten Ionen verursacht werden, spricht man von Ionenätzen. Rückstreuung liegt vor, wenn die Geschoßteilchen relativ zur Einschußrichtung in einem Winkel zwischen 90 und 270° gestreut werden. Die wichtigste Ursache der Rückstreuung ist für geladene Teilchen die Rutherford-Streuung, für Quantenstrahlungen die Compton-Streuung, bei den Neutronen sind es die mechanischen Stöße. Der endgültige Wert des Austrittswinkels ist um so mehr das Ergebnis von Vielfachstreuungen, je tiefer die Primärstrahlung eindringt.

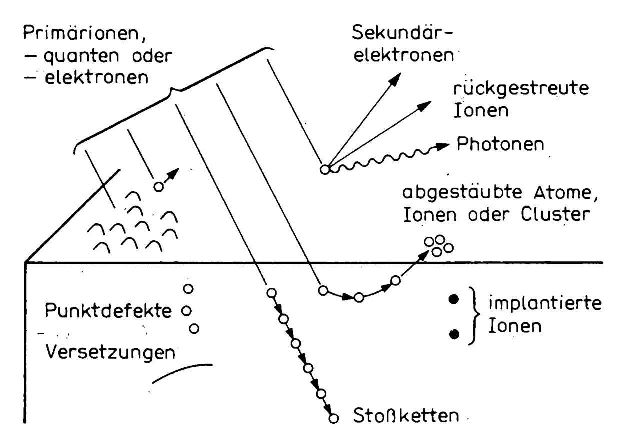


Abb. 12.10
Wechselwirkungseffekte energiereicher Strahlung mit Festkörpern

Die Strukturveränderungen werden oft unter der Sammelbezeichnung Strahlenschäden zusammengefaßt, insbesondere wenn sie unumkehrbar sind. Zu ihnen gehören Punktdefekte, wie Leerstellen oder Vakanzen und Zwischengitterplatzbesetzungen sowie Versetzungen von Gitteratomen in der Form von ein-, zwei- oder dreidimensionalen Fehlordnungen. Bei den Punktdefekten unterscheidet man zwischen Frenkel- und Schottky-Defekten. Bei ersteren nimmt ein von einem Gitterplatz gestoßenes Atom einen Zwischengitterplatz ein und bildet mit einer Leerstelle ein Frenkel-Paar. Beim Schottky-Defekt bleiben nur Leerstellen zurück, während die von ihren Plätzen gestoßenen Atome nach der Oberfläche oder an andere Grenzflächen abwandern. Man unterscheidet drei Mechanismen, die zu den Strahlenschäden führen:

a) Unter der Wirkung der ionisierenden Strahlen werden Atome von ihren Gitterplätzen gestoßen, von Neutronen und geladenen Teilchen im direkten oder Coulomb-Stoßprozeß, von Quantenstrahlungen über die Photo-, Compton- und Paarelektronen. Wenn die Energie der Stoßteilchen wesentlich größer ist als die zur Verschiebung der Atome erforderliche Wigner-Energie, dann können ganze Stoßreihen ausgelöst werden. Wenn sie in einer Gittergeraden bleiben, spricht man von fokussierenden Stößen. Im Ergebnis kommt es entweder lediglich zu Energietransport, wenn die Atome ihre ursprünglichen Plätze wieder einnehmen, oder zu Materietransport, wenn das primär angestoßene Atom seinen Platz verläßt. Am Ende des Fokussierungsstoßes haben die Gittergeraden ein Zwischengitteratom. Durch 1-MeV-Neutronen können im fokussierenden Stoß in Eisen 390, in Graphit 900 Atome verschoben werden. Die versetzten Atome sind zunächst ionisiert. Wenn sie nach der Seite geraten, werden sie aufgrund ihrer Ladung schnell abgebremst und verbleiben auf Zwischengitterplätzen. Wenn auch nach der Seite Stöße stattfinden, entstehen zwei- oder dreidimensionale Fehlordnungen. Bei der-

artigen Strukturveränderungen an der Oberfläche können sogar Atomgruppen abgesprengt werden. Man nennt das Zerstäubung.

b) Die Bestrahlung mit Kernstrahlungen kann zum Auftreten neuer Atomarten im Gitter führen. Das ist einmal durch Beschuß mit geeigneten Ionen möglich, man nennt den Vorgang Implantation, oder aber durch Auslösung von Kernreaktionen an Gitteratomen. Durch Implantation können meist nur dünne Schichten erfaßt werden, da die Reichweite der Ionen bei den meist zur Verfügung stehenden Energien sehr gering ist. Die Abb. 12.11 zeigt die Eindringtiefe verschiedener Ionen in Silizium als Funktion von der Energie. Durch Auslösung von Kernreaktionen mit Neutronen oder γ-Quanten als Inzidenzteilchen sind auch dicke Schichten erfaßbar.

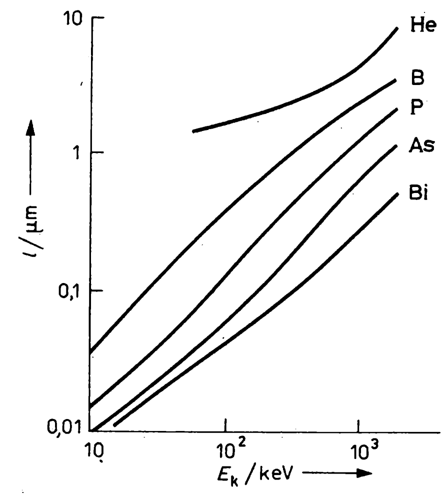


Abb. 12.11
Energieabhängigkeit der Eindringtiefe von He, B, P, As und Bi in Silizium als Funktion von der Energie

c) Ein direkter Einfluß auf das Gitter ist in manchen Fällen auch durch Ionisation möglich, z. B. in Ionenkristallen. So kann ein Cl-Atom in einem NaCl-Kristall infolge Ionisation zweifach positiv werden, wonach es durch die elektrostatischen Kräfte von seinem Gitterplatz geschoben wird.

Die Einwirkung der ionisierenden Strahlung auf Festkörper weist auch in Abhängigkeit davon Besonderheiten auf, ob es sich um Einkristalle, polykristalline oder amorphe Körper handelt. Für die Kristalle ist die Richtung der Gitterebenen von Bedeutung, da sich die Teilchen über relativ weite Strecken zwischen den Ebenen bewegen können, ohne einen Zusammenstoß zu erleiden. In diesem Falle spricht man vom Kanalisierungseffekt oder von Kanalleitung (siehe 4.2.5.). Die Reichweite geladener Teilchen in Einkristallen ist daher eine Funktion der Einschußrichtung.

Die zusammenfassende Bezeichnung Strahlenschäden für die verschiedenen Struktur- und Oberflächeneffekte deutet zunächst auf Veränderungen in die Richtung von Verschlechterungen der Materialeigenschaften hin. Heute nutzt man jedoch diese Stoffveränderungen in vielen Anwendungen bewußt zur Verbesserung und Erzeugung gewünschter Materialeigenschaften. Die mikroskopischen Strukturänderungen haben bei hinreichend großen Strahlenfluenzen und -dosen und beim Einsatz geeigneter Strahlungen auch makroskopische Struktur- und Eigenschaftsänderungen zur Folge, darunter Änderungen mechanischer, elektrischer, optischer und

thermischer Eigenschaften. Die Streu- und Rückstreustrahlungen primären und sekundären Ursprungs können zur Analyse der Festkörper eingesetzt werden.

3. Eine Betrachtung des Effekts der Energieübertragung an Gitteratome infolge elastischen Stoßes mit ionisierenden Strahlungen, auch Wigner-Effekt genannt, vermittelt einige wichtige Einsichten. Die Wigner-Energie beträgt für die Metalle zwischen 10 und 40 eV, in Diamant z. B. 80 eV. Die maximale Energie, die einem Atom im elastischen Stoß übertragen werden kann, ist über (B.43a, b) berechenbar. Man erkennt daraus, daß in vielen Fällen, in denen sich die Ruhenergien von stoßendem und gestoßenem Teilchen stark unterscheiden, nur dann größere Energieportionen übertragen werden können, wenn die kinetische und die Ruhenergie der Stoßteilchen groß ist. Während z. B. ein 2-MeV-Neutron durch elastische Streuung einem C-Atom 0,5 MeV und einem U-Atom 0,033 MeV übertragen kann, sind es bei einem 2-MeV-Elektron nur 1 keV bzw. 0,05 keV. Für Quanten der gleichen Energie sind diese Beträge dreimal kleiner, als beim Elektron. In Übereinstimmung mit diesem Umstand können mit γ-Strahlung und Elektronen nur wenige Punktdefekte erzeugt werden, es sei denn, man geht zu sehr hohen Energien über. Mit Neutronen, Protonen und α-Teilchen können hingegen große Defektdichten verursacht werden. Wegen ihrer großen Ruhenergie rufen beschleunigte schwere Ionen die größten Defektdichten hervor. Wenn ein Neutron mit einer Energie von 1 MeV in Eisen 10^{-21} Verschiebungen von Gitteratomen pro Atom verursacht, so sind es bei C- und Fe-Ionen mit der gleichen Energie pro Nukleon 10^{-17} bzw. $3 \cdot 10^{-16}$, d. h. zehntausende Male mehr.

Damit die gewollten Reaktionen gegenüber anderen Reaktionen, die gleichzeitig ablaufen können, vergleichbare Ausbeuten ergeben, müssen ihre Wirkungsquerschnitte größer oder mindestens gleich groß sein. Für Neutronen z. B. sind die Wirkungsquerschnitte der elastischen Stöße von der Größenordnung einiger 10^{-24} cm^2 (barn), also vergleichbar mit denen der unelastischen Streuung. Für Elektronen liegen sie im Bereich einiger 10^{-24} cm^2, während die Ionisations- und Anregungsquerschnitte um einige Zehnerpotenzen größer sind. Für Quanten mit einer Energie von einigen MeV hat, wie man aus Abb. 4.19 über (4.65, 66) schließen kann, der Compton-Effekt den größten Wirkungsquerschnitt.

4. Zu den Veränderungen der mechanischen Materialeigenschaften gehört die Porenbildung unter dem Einfluß schwerer geladener Teilchen in Mineralien, Plasten und Gläsern entlang des Bremsweges durch schlauchförmige Gitterzerstörungen. Man nutzt diesen Effekt seit langem zum Teilchennachweis im Festkörperspurendetektor, in der Dosimetrie z. B. als Fluenzmesser. Damit die zerstörten Gebiete besser unter dem Mikroskop sichtbar werden, behandelt man das bestrahlte Material mit einem chemischen Ätzmittel. Dadurch entstehen an den Schadstellen Ätzgruben. Wenn es sich um dünne Plastefolien mit durchgehenden Schädigungen handelt, dann können sehr saubere durchgehende Löcher erhalten werden, indem zuerst die Radikale mit einem Oxidationsmittel zum Aufbau von Säuren benutzt

Tabelle 12.11
Größe von Mikroobjekten

Objekt	Maß/µm
Mit dem bloßen Auge sichtbar	40
Rote Blutkörperchen	7
Bakterien	0,2 — 8
Fetteilchen in der Milch	0,1 —10
Rauch von brennendem Öl	0,03 — 1
Tabaksrauch	0,01 — 1
Viren	0,02 — 0,25
Ribosomen	0,01 — 0,04
Eiweiße	0,004— 0,015

werden, diese durch eine Lauge in Salze verwandelt werden, die sich leicht mit Wasser herauslösen lassen. Die so entstehenden Mikroporensiebe werden als Nuklearfilter bereits in großem Umfange in Wissenschaft und Technik eingesetzt. Am besten eignen sich beschleunigte schwere Ionen. Mit ihnen lassen sich auf Grund ihrer eindeutigen Masse und Ladung Poren mit sehr kleinen Werten des Schwankungsquadrats der Porenradien herstellen. Gegenwärtig werden je nach den gewählten Bedingungen Porendurchmesser zwischen 10 nm und 10 µm erzeugt. In Tabelle 12.11 sind einige Objektdurchmesser angegeben. Man kann die Nuklearfilter auch mit Hilfe von Spaltprodukten aus dünnen Uranfolien, die mit Neutronen beschossen werden und auf den Folien aufliegen, erzeugen. Trotz des großen Variationsbereiches der Masse und der Ladung der Spaltprodukte sind die mittleren Schwankungsquadrate der Porenradien wesentlich kleiner als bei den konventionellen chemischen Filtern.

In Metallen können diese Spuren nicht entstehen, da infolge der Metallbindung immer genügend Elektronen vorhanden sind, mit denen die ionisierten Atome sofort rekombinieren können.

Mechanische Wirkungen werden an Oberflächen, durch Ionenzerstäubung und durch Implantation erzeugt, d. h. durch Abtragung von Oberflächenschichten und durch Einbringung von Fremdatomen. Das Ziel solcher Verfahren sind meist Passivierungen, Korrosionsbekämpfung und Härtung. Ein bekanntes Beispiel der Oberflächenhärtung ist die Nitrierung. Der Einbau von Stickstoffatomen in Stahloberflächen ist auf chemischem Wege nur bei hohen Temperaturen möglich. Die Ionennitrierung in Plasmaentladungen mit Stickstoff als Restgas ist ein einfaches Verfahren. Auf dem Wege der Ionenimplantation können Legierungen hergestellt werden, die durch andere Methoden nicht oder nur schwer entstehen können. Darunter sind auch Legierungen mit nichtstöchiometrischer Zusammensetzung. Man sucht auf diesem Wege nach Legierungen, die bei höheren Temperaturen supraleitend sind. Zu den bekanntesten durch Ionenimplantation hergestellten Legierungen gehören solche Halbleitermaterialien, wie SiC. Bekannte Beispiele für Oberflächenpassivierung und Korrosionsschutz sind der Einbau von Kalzium in Titan, von Eisen oder Nickel in Zirkonium und von Argon in Uran.

Durch Kernstrahlungen kann auch die Symmetrie von Kristallgittern geändert werden. Das monokline Gitter des ZrO_2 geht z. B. durch intensive Neutronenbestrahlung am Reaktor in die kubische Modifikation über. Die Folgen können schwerwiegend sein. So verringert sich die Dichte von Quarz bei einer Reaktorneutronenfluenz von 10^{20} cm^{-2} um 15 %. Monokristalle der α-Modifikation des metallischen Urans mit ihrer niedrigen rhombischen Symmetrie ziehen sich bei Bestrahlung mit Reaktorneutronen in einer Richtung zusammen, in einer anderen dehnen sie sich aus. Die Änderungen der Abmessungen können in einem Verhältnis von bis zu 1:2 stehen. Bei sehr hohen Fluenzen wird das Kristallgitter vollständig zerstört, und es entstehen amorphe Stoffe. Die Widerstandsfähigkeit der Kristallarten ist unterschiedlich. So wird das Quarzgitter bei Fluenzen von 10^{21} cm^{-2} Reaktorneutronen fast vollständig zerstört, das Diamantgitter hingegen kaum beeinflußt.

Unter der Einwirkung ionisierender Strahlungen ändern sich auch solche Materialeigenschaften, wie Festigkeitsmodule, Fließgrenzen und Wärmefestigkeit. Für den Einsatz von Werkstoffen in Kernenergieanlagen sind die Abhängigkeiten von Neutronenfluenzen besonders wichtig. Allgemein kann gesagt werden, daß bei Neutronenfluenzen von mehr als 10^{17} cm^{-2} die Konstruktionsmaterialien spröder werden, d. h. die Streckgrenze zu, die Strecklänge abnimmt. Bei gewöhnlichem kohlenstoffhaltigem Stahl nimmt die Fließgrenze nach Fluenzen von 10^{20} cm^{-2} von 450 auf 1100 MPa zu, die Streckgrenze von 22 auf 4 % ab. Die Ursache sind die Zwischengitteratome, die zu den in realen Kristallen immer vorhandenen Dislokationen wandern, wo sie deren Verankerung bewirken. Bei plastischen Veränderungen ist die Bewegung der Versetzungen behindert.

Eine charakteristische Folge der Bestrahlung von Metallen mit schnellen Neutronen und mit Ionen großer Fluenzen ist die Blasenbildung und die damit im Zusammenhang stehende Materialausdehnung, also Dichteverringerung. Durch Neutralisation entstehen aus den eingeschossenen Ionen Atome, die von den Zwischengitterplätzen, auf denen sie sich zunächst meist befinden, wegdiffundieren. An den Dislokationen werden sie festgehalten und sammeln sich in solchen Mengen an, daß Gasdrücke entstehen, die dazu ausreichen, das Material in der Umgebung zu deformieren, oder, wenn es sich um Oberflächenabschnitte handelt, die darüberliegenden Metallschichten abzuheben oder zum Platzen zu bringen. Die Größe der Blasen oder Poren kann bis zu einigen µm betragen, die damit zusammenhängende Volumenschwellung einige Prozente. Dabei handelt es sich um einen Effekt, der bei der Entwicklung der schnellen und der Fusionsreaktoren einen außerordentlichen Aufwand zur Entwicklung neuer Materialien erfordert. Zur Illustration betrachten wir einen austhenitischen nichtrostenden Stahl. Bei einer Neutronenfluenz von $3{,}5 \cdot 10^{22}$ cm^{-2} und einer Temperatur von 800 K beträgt der relative Anteil

des Blasenvolumens 20%, bei $3 \cdot 10^{23}$ cm^{-2} bereits 70%. Die Ausdehnung des Werkstoffs, der z. B. als Umhüllung für die Brennelemente eingesetzt wird, beträgt für Fluenzen von $7 \cdot 10^{22}$ cm^{-2} bei 634 K 2,7%, bei 723 K 6%. Bei der Entwicklung neuer strahlenbeständiger Materialien werden zur Prüfung neben schnellen Reaktorneutronen auch beschleunigte schwere Ionen eingesetzt. Die Atome des austhenitischen nichtrostenden Stahls erfahren bei einer 70-keV-Argonionenfluenz von $2 \cdot 10^{17}$ cm^{-2} im Mittel je 50 Verschiebungen. Ein Teil der verschobenen Gitteratome wird an den Dislokationen gebunden. Auf diese Weise entstehen durch Anhäufung von Vakanzen ebenfalls Poren, hier $3 \cdot 10^{16}$ cm^{-3}, und mit einem mittleren Durchmesser von 22 nm. Sie nehmen 20 bis 40% des Raumes ein. Durch Erhöhung des Nickelanteils auf 45% konnte die Porengröße auf 10 nm und die Porenbildung auf 0,5% verringert werden.

Die durch Strahleneinwirkungen verursachten Strukturänderungen an Werkstoffen sind sehr beständig. Ihre Ausheilung kann meist erst bei Temperaturen erreicht werden, die in der Nähe der Rekristallisationstemperatur liegen. Bei dem hier betrachteten austhenitischen nichtrostenden Stahl sind etwa 1400 K erforderlich.

5. Die auf kondensierte Materie durch Absorption von Strahlung übertragene Energie wird zu 95% in Wärme umgewandelt. In einigen technischen Anwendungen macht man von diesem Effekt Gebrauch, meistens jedoch hat man von ihm verursachte technische Schwierigkeiten zu überwinden. Zu den Anwendungen gehören z. B. die Übertragung der kinetischen Energie der Spaltprodukte auf den Träger des Spaltmaterials im Kernreaktor, die Erzeugung von Elektroenergie in Radionuklidbatterien sowie die Messung von Strahlendosen mit Hilfe von Thermodetektoren. Schwierigkeiten treten gewöhnlich bei den großen Strahlendosen auf, wie sie für die Kernenergetik charakteristisch sind, d. h., wenn die in Punkt 4 besprochenen Effekte der Poren- und Blasenbildung sowie der Volumenschwellung auftreten. Da die Erwärmung ungleichmäßig erfolgt, kann es zu erheblichen mechanischen Spannungen kommen, die zu Mikro- und Makrorissen in Konstruktionselementen führen. Die unmittelbare Ursache solcher Rißbildungen können Wärmeexplosionen sein. Bei Fluenzen von $3 \cdot 10^{21}$ cm^{-2} wird in Graphit durch Akkumulation von Wigner-Energien in vielen Elementarprozessen der Störstellenbildung eine makroskopische potentielle Energie, die Selbstenergie, in Höhe von 2600 J/mol aufgespeichert. Beim Ausheilungsprozeß, der durch Erhitzung oder durch Bestrahlung hervorgerufen werden kann, wird diese Selbstenergie frei, wobei Temperaturen von mehr als 1000 K auftreten können. Bei Temperaturen ab 200 °C können spontane Wärmeexplosionen einsetzen.

Eine weitere Wärmewirkung der Kernstrahlungen in kondensierter Materie ist die Verringerung der Wärmeleitfähigkeit. Sie wird im Rahmen des Phononenmodells der Wärmeleitfähigkeit verständlich, da Punktdefekte Streuzentren für die Phononen sind, also zu einer Erhöhung des Widerstandes der Wärmeleitung Anlaß geben.

6. Eine der ausgeprägtesten Strahlenauswirkungen in Festkörpern ist die Änderung der elektrischen Leitfähigkeit. In den Metallen wird auf diese Weise der Restwiderstand, d. h. der nicht von der Temperatur abhängige Anteil, erhöht. So wie der Widerstand allgemein durch die Streuung der Ladungsträger an verschiedenen Streuzentrenarten verursacht wird, so sind es beim Restwiderstand die Leerstellen und Zwischengitteratome, die je nach ihrer Struktur als geladene oder ungeladene Streuzentren wirken. In den Isolatoren kann die Bestrahlung zu Elektronen-Loch-Paaren mit Überführung der Elektronen in das Leitungsband führen und damit zur Erhöhung der Ladungsträger, also der Leitfähigkeit. Wenn die angelegte Spannung viel kleiner ist als die Durchschlagsspannung, dann wächst die durch Bestrahlung erzeugte Leitfähigkeit proportional zur Intensität der Strahlung, weil die Zahl der erzeugten Photo- und Compton-Elektronen proportional zu ihr ist. Es können aber durch die Bestrahlung auch komplexe Störungen auftreten, die als Einfangszentren für die Elektronen wirken, sogenannte Elektronenfallen, so daß die Leitfähigkeit sinkt.

Besonders intensiv wirkt sich die Bestrahlung auf die Leitfähigkeit der Halbleiter aus, weil die Leerstellen und Zwischengitteratome, ähnlich wie die durch Dotierung eingebrachten Fremdatome, als Donatoren oder Akzeptoren dienen können. Sehr nachteilig können sich solche Defekte auswirken, die zu Ladungsträgerfallen werden, also Atome mit Termen im Innern der verbotenen Zone zwischen Valenz- und Leitungsband. Sie verringern die mittlere Lebensdauer der Ladungsträger und so die Leitfähigkeit. Außerdem können sich an manchen Störstellen durch Ansammlung von Ladungen Raumladungszonen ausbilden, die das elektrische Feld im Halbleiter verzerren. Die meisten Störstellen, die durch Bestrahlung mit Elektronen und Quanten entstehen, lassen sich durch Temperaturerhöhung ausheilen. Bei den durch Neutronen und Ionen erzeugten ist ein Teil der Störungen nicht ausheilbar.

Durch Bestrahlung von Halbleitern mit Kernteilchen können auch Kernreaktionen ablaufen, die zu chemischen Fehlordnungen, also Auftreten von Fremdatomen auf Gitterplätzen führen, auf sogenannte Substitutionsstörstellen. Man nutzt diesen Effekt zum Dotieren von Si- und Ge-Halbleitermaterialien aus. Durch Beschuß mit thermischen Reaktorneutronen können sehr homogene Verteilungen der Dotierung erreicht werden. In Si wird durch Umwandlung des zu 3,1 % enthaltenen ^{30}Si-Isotops in der (n, γ)-Reaktion ^{31}Si erzeugt, das mit $T_{1/2} = 2{,}62$ h in das stabile Phosphorisotop ^{31}P zerfällt. Da Phosphor ein Donator ist, entsteht n-Si. In Ge ist ^{74}Ge mit 36 % das häufigste Isotop. In der (n, γ)-Reaktion wird es in ^{75}Ge verwandelt, das mit $T_{1/2} = 83$ min in ^{75}As zerfällt, einen Akzeptor, also p-Ge erzeugt. Das mit 21 % enthaltene ^{70}Ge wird über ^{71}Ge mit $T_{1/2} = 12$ d in ^{71}Ga umgewandelt, das seinerseits zu den Donatoren gehört, also n-Ge erzeugt.

7. Von den optischen Auswirkungen der Bestrahlung von Festkörpern mit Kernstrahlungen sollen vier vorgestellt werden, die Veränderung des Brechungsindex, des Luminiszenzverhaltens, die Verfärbung und die Fotoschwärzung.

Verschiedene optische Materialien, wie Gläser, Quarz und Plaste ändern unter dem Einfluß von Ionenbestrahlungen den Brechungs- und den Reflexionskoeffizienten n bzw. $r = [(1 - n)/(1 + n)]^2$. In Quarz z. B. ändert sich n mit der Zahl der pro cm^3 implantierten Li-Ionen mit $E_k \leqq 300$ keV gemäß $n = 1{,}458 + 2{,}1 \cdot 10^{-21} N$. Bei sehr großen Fluenzen stellt sich ein Sättigungswert ein, der bei einigen Prozent von n liegt, in Glas bis zu 20 % betragen kann. Durch Anwendung lithographischer Verfahren kann man in optisch dünnen Schichten Kanäle beliebiger Form mit $n_{\text{Kanal}} = n/[1 - 3(\lambda/r)^2]$ herstellen, wobei λ die Wellenlänge des Lichts und r der Kanalradius sind. Auf dieser Grundlage lassen sich optische Mikrobauelemente aufbauen, ähnlich den von der Mikroelektronik bekannten Bauelementen und mit diesen kombinieren.

Unter dem Einfluß ionisierender Strahlung verfärben sich Gläser, Plaste und Alkalihalogenidkristalle. Die Ursache für die Einschränkung des Lichtspektrums sind Punktdefekte oder ihre Kombinationen, die als Farbzentren wirken. Ihre Konzentration muß zwischen 10^{15} und 10^{20} cm^{-3} betragen, damit eine deutliche Färbung eintritt. Im Falle der F-Zentren sind im Anionengitter Lücken entstanden, die von Elektronen aufgefüllt werden. Diese verursachen die charakteristische Absorption. Außer den F- gibt es noch andere Farbzentren. Man nutzt die Erscheinung z. B. zur Färbung von Gebrauchsglas und in der Dosimetrie.

Die Luminiszenzeigenschaften von Stoffen, d. h. die Emission elektromagnetischer Strahlungen nach vorangegangener Anregung, können sehr wesentlich von ionisierenden Strahlungen beeinflußt werden. Man beobachtet sowohl Erzeugung als auch Unterdrückung der Lumineszenz durch Bestrahlung sowie Veränderungen der Luminiszenzspektren in Intensität und Energie. Erfolgt die Abregung innerhalb von 10^{-7} s nach der Anregung, so spricht man von Fluoreszenz, oberhalb von Phosphoreszenz. Bei den anorganischen Kristallen erfolgt die Abregung durch Übergänge zwischen Zuständen des Bändermodells. Sie ist also eine Kristallgittereigenschaft. Bei den organischen Stoffen werden Moleküle abgeregt. Man unterscheidet verschiedene Arten der Lumineszenz. Im Zusammenhang mit Kernstrahlungen spielen die Szintillation, die Thermo- und die Radiophotoluminiszenz eine Rolle. Die Szintillationen sind in 5.5. behandelt worden. Unter Thermoluminiszenz versteht man die Abregung und Lichtemission nach vorangegangener Anregung durch Erwärmung des Luminophors. Während die Elektronen, die bei der Anregung auf Aktivatorterme zwischen Leitungs- und Valenzband gehoben werden, Anlaß zu Fluoreszenzstrahlung geben, sind die auf die langlebigen Haftterme gehobenen für die Phosphoreszenz verantwortlich. Durch Erwärmung gelangen sie in das Leitungsband, um von hier aus entweder mit Aktivatoratomen zu rekombinieren und Thermoluminiszenzlicht zu ermittieren oder erneut auf Haftterme zu fallen. Für die Radiophotoluminiszenz ist die Ausbildung von Luminiszenzzentren, d. h. von Anregungen und Abregungen zwischen Termen innerhalb der verbotenen Zone, also gewöhnliche Photoluminiszenz Voraussetzung. Durch die Einwirkung von Kernstrahlungen können neue Terme erzeugt werden, die so gelagert sind, daß es zu einer Verschiebung des Spektrums der Photoluminiszenz zu längeren Wellenlängen hin kommt.

Eine andere optische Wirkung der ionisierenden Strahlung ist die Schwärzung photographischer Schichten. Es entsteht zunächst ein latentes Bild, das durch Entwickeln sichtbar gemacht werden kann. Die Entstehung des latenten Bildes wird ganz in Analogie zur Ausbildung von Farbzentren in den Alkalihalogenidkristallen verstanden. Dort tritt eine visuelle Verfärbung auf, weil die Abmessungen groß genug sind, um durch Absorptionsveränderungen sichtbar zu werden. In den photographischen Schichten sind die AgBr-Kristalle so klein (0,1 bis 3 μm), daß eine im latenten Bild vorliegede Verfärbung nicht

visuell wahrnehmbar ist. Die Farbzentren im Silberhalogenidkristall können jedoch zueinander diffundieren und größere Bereiche bilden. Bei mehreren nebeneinander liegenden Halogenidfehlstellen, in denen jeweils ein Elektron eingefangen ist, sind Silberionen mit einer entsprechenden Anzahl Elektronen vorhanden. Diese bewirken eine quasimetallische Bindung, so daß ein Metallkeim entsteht. Nach der Ausbildung solcher Keime greift der Entwickler das AgBr-Korn an und reduziert es vollständig. Das bei der Reduktion frei gewordene Brom muß zur Haltbarmachung des Bildes ebenso wie das nicht angegriffene AgBr aus der Schicht durch den Fixier- und Wässerungsprozeß entfernt werden. Die Nutzung der Photoschwärzung zum Teilchennachweis wurde in 5.6.2 besprochen.

12.2.2. Chemische Wirkungen

1. Da zwischen Atomkern und Atomhülle besonders über die elektrischen und magnetischen Eigenschaften sehr direkte Wechselwirkungen bestehen, und da auch die Kernstrahlungen von unmittelbarem Einfluß auf die Hülle sein können, entstand parallel und in enger Beziehung zur Kernphysik die Kernchemie. Sie ging aus der Radiochemie und der Strahlenchemie hervor, die als Teilgebiete angesehen werden können. Die Kernchemie befaßt sich mit den chemischen und physikochemischen Eigenschaften der Stoffe und Erscheinungen, die von den Atomkernen und deren Umwandlungen verursacht werden, und sie nutzt sie zum Studium und zur Lösung chemischer Probleme. Unter Radiochemie versteht man die Chemie aller radioaktiven Elemente, wobei aber nicht der Arbeitsgegenstand, sondern die Arbeitsmethode maßgebend ist, weil die radioaktiven Elemente chemisch ungleichartig sind, sich aber durch das gemeinsame Merkmal auszeichnen, Kernstrahlungen zu emittieren. Der Gegenstand der Strahlenchemie ist die Untersuchung der chemischen Wirkungen hoch energetischer Strahlungen, also nicht nur der Kernstrahlungen, die meist zur Anregung der Atome und Zerlegung der Moleküle führen. Kernchemie und Radiochemie werden in diesem Buch nicht besprochen. Wohl aber müssen die chemischen Wirkungen der Kernstrahlungen behandelt werden und damit einige Aspekte der Strahlenchemie, weil hier wichtige Anwendungen der Kernphysik hingehören.

2. Strahlenchemische Wirkungen der ionisierenden Strahlungen sind seit Ende des vorigen Jahrhunderts durch die Entdeckung der Schwärzung photographischer Schichten bekannt. Den Prozeß der Anregung und Ionisation der Atome und Moleküle kann man als physikalische Phase bezeichnen. Durch Rekombination der Ionen und andere Folgereaktionen der durch die Strahleneinwirkung primär entstandenen Produkte entstehen freie Radikale, und komplizierte Moleküle zerfallen in einfachere. Das sind die Vorgänge der physiko-chemischen Phase. Die Strahlenchemie nutzt in der chemischen Phase die vorher nicht vorhandenen reaktiven Teilchen zur Synthese neuer Verbindungen in Sekundärreaktionen aus. Die freien Radikale, die nicht wieder zu den ursprünglichen Molekülen rekombinieren, diffundieren so lange in der Lösung, bis sie mit einem anderen Molekül reagieren können. Da die Strahlungsenergie weit über der chemischen Bindungsenergie liegt, können sehr feste Bindungen gelöst, d. h. stark endotherme Reaktionen initiiert werden. Auf diese Weise werden Reaktionsprodukte erzeugt, die mit gewöhnlichen chemischen Mitteln kaum entstehen können. Ein wesentlicher Vorteil dieser strahlenchemischen Reaktionen besteht darin, daß weder Katalysatoren noch Wärmezufuhr erforderlich sind. Sie lassen sich in gasförmigen, flüssigen und festen Stoffen bereits bei niedrigen Temperaturen auslösen. Da keine Zusätze erforderlich sind, erhält man sehr reine Stoffe. Man kann diese Reaktionen vor allem in Zersetzungs-, Synthese-, Vernetzungs- und Polymerisationsprozesse einteilen.

3. Eine wichtige Größe der strahlenchemischen Reaktionen ist die strahlenchemische Ausbeute, auch G-Wert genannt. Sie stellt ein Maß für die Energieausbeute der durch die ionisierende Strahlung in Stoffen ausgelösten chemischen Reaktionen dar. Es ist die Anzahl der je 100 eV absorbierter Energie umgewandelten Teilchen der Sorte i. Sie wird über die Konzen-

trationsänderung Δc_i in mol/l der Komponente i als Funktion der Energiedosis-Leistungskonzentration $\dot{D}$/eV s^{-1} l^{-1} bestimmt. Wenn die Bestrahlungszeit t/s währt, dann berechnet sich die Ausbeute dieser Änderung zu

$$G(i) = \frac{\Delta c_i \cdot N_A \cdot 100}{\dot{D} \cdot t}. \qquad (12.17)$$

Die strahlenchemische Ausbeute ist ein Maß für die Geschwindigkeit der strahlenchemischen Reaktion als Funktion von der Energiedosis. Für die Mehrzahl der Reaktionen sind G-Werte von 1 bis 10 üblich, d. h., es werden zwischen 1 bis 10 Moleküle pro 100 eV erzeugt. Für sehr stabile Verbindungen findet man 10^{-1}. In chemischen Kettenreaktionen können Werte zwischen 10^3 und 10^6 erreicht werden, ganz selten bis zu 10^9. Von technischem Interesse sind meist nur Reaktionen mit großen Werten oberhalb von 10^3, es sei denn die betrachtete strahlenchemische Reaktion ist trotz des kleinen G-Wertes noch wirtschaftlich.

Mit Hilfe von G, der Erzeugungsgeschwindigkeit P/kg s^{-1} und der Molmasse M des Reaktionsprodukts läßt sich die erforderliche Leistung W der real zu absorbierenden Strahlungsenergie angeben:

$$W = \frac{100 \cdot N_A \cdot P}{M \cdot G} = \frac{6 \cdot 10^{28} \cdot P}{M \cdot G}. \qquad (12.18)$$

Unter Berücksichtigung der Energie E der benutzten Strahlung pro Primärteilchen berechnet man die erforderliche Aktivität der Quelle zu

$$A = W \cdot E^{-1}. \qquad (12.19)$$

Für industriell interessante Erzeugungsgeschwindigkeiten von mindestens 1 kg/h, d. h. $P = (1/3600)$ kg/s, $M_r = 100$, folgt mit $G = 1$ daraus $W = 1{,}7 \cdot 10^{23}$ eV s^{-1} = 27 kW. Für eine Strahlungsquelle, deren Teilchen die Energie 1 MeV tragen und die total absorbiert werden, weil die Schichtdicke größer ist als die Reichweite der Strahlung in dem Reaktionsmedium, ergibt sich eine Aktivität von $A = 1{,}7 \cdot 10^{23} \cdot 10^{-6} = 1{,}7 \cdot 10^{17}$ Bq.

4. In der Strahlenchemie werden meistens Elektronen, γ-Quanten, Neutronen und Spaltprodukte verwendet, seltener beschleunigte Ionen. Mit Abstand haben ^{60}Co-, ^{137}Cs-Quellen und Elektronenbeschleuniger die größte Verbreitung gefunden. Die Quellstärken der Radionuklid-γ-Quellen liegen zwischen TBq und PBq, die Betriebsleistungen zwischen 0,1 bis 15 kW, die Dosisleistungen bei 0,3 Gy s^{-1}, d. h. bei kGy/h. Die Elektronenbeschleuniger haben Strahlleistungen von bis zu 150 kW, meist einige zehn kW bei Strömen von bis zu 10 mA und Energien bis zu 20 MeV. Die Dosisleistungen liegen hier bei bis zu 30 kGy/s oder 100 MGy/h.

Die γ-Quanten wirken über die Compton- und Photoelektronen auf den chemischen Zustand, d. h. auch über Elektronen. Daher ruft die Bestrahlung mit γ-Quanten äquivalenter Energie die gleichen Prozesse mit den gleichen chemischen Ausbeuten hervor wie mit Elektronen. Allerdings unterscheiden sich beide sehr stark in ihrer Tiefenwirkung. Während die γ-Quanten von ^{60}Co noch in einer Tiefe von 1 m Reaktionen auszulösen vermögen, ist die Anwendbarkeit der Elektronen wegen ihrer geringen Eindringtiefe der Größenordnung 1 cm auf entsprechende Schichtdicken beschränkt.

Typische Einsatzfälle für Elektronen sind Lackhärtung, Textilveredelung durch Pfropfpolymerisation, Strahlenvernetzung von Polymerfolien, Kabelisolierungen und Plastrohren. γ-Bestrahlungsanlagen werden bevorzugt bei Verfahren mit größeren Reaktionsvolumina eingesetzt. Wichtige Beispiele sind die Halogenierung bzw. Sulfochlorierung von Kohlenwasserstoffen und die strahlenchemische Erzeugung von Plastholz durch Strahlenpolymerisation von mit Monomeren getränkten Hölzern. Wegen der relativ geringen zur Verfügung stehenden

Dosisleistungen befriedigen oft die Reaktionsgeschwindigkeiten nicht. Mit Beschleunigern lassen sich größere Dosisleistungen realisieren.

Ionen aller Art haben den Nachteil sehr geringer Eindringtiefen. In kondensierter Materie werden mit den Beschleunigern der industriellen Praxis Werte im µm-Bereich erreicht. Diese Reichweite kann von Vorteil sein, wenn es um ganz dünne Oberflächenschichten geht.

Durch langsame Neutronen, die sehr große Eindringtiefen haben, werden in der (n, γ)-Reaktion γ-Quanten erzeugt, die ihrerseits über die Photo- und Compton-Elektronen chemische Wirkungen hervorrufen. Die Bestrahlung mit schnellen Neutronen führt über die Reaktionen (n, n'γ), (n, p), (n, α) usw. und über die dabei entstehenden Rückstoßatome, die ebenfalls ionisieren und anregen zu strahlenchemischen Reaktionen. So wird in Medien mit wasserstoffhaltigen Molekülen von Neutronen mit einer Energie von 2 MeV etwa die eine Hälfte aller strahlenchemischen Umwandlungen von den Rückstoßprotonen hervorgerufen, die andere von den γ-Quanten der Reaktion H(n, γ)D.

In einer Reihe von Fällen, vor allem wenn sehr stark endotherme chemische Reaktionen ausgelöst werden sollen, ist es vorteilhaft, Spaltprodukte einzusetzen. Sie zeichnen sich durch sehr große kinetische Energien und ungewöhnlich große Ionisationsdichten aus.

5. Als einfaches, für das Verständnis aller in wäßrigen Lösungen ablaufenden Reaktionen wichtiges Beispiel betrachten wir die Radiolyse des Wassers. Sie ist deshalb so wichtig, weil die Radiolyseprodukte des Wassers an den durch Bestrahlung entstandenen Schadstellen anderer Moleküle reagieren und neue Verbindungen bilden. Durch Angabe von mittleren Zeiten kann man zu folgender Einteilung des Prozeßablaufes kommen: Der Primärprozeß der Ionisation führt innerhalb von 10^{-15} s zur Bildung des Ionenpaares $H_2O^+ + e^-$. Das innerhalb von 10^{-13} s thermalisierte Elektron wird etwa zur Zeit 10^{-11} s hydratisiert. Während der gleichen Zeit wird ein Proton vom Ion H_2O^+ gemäß $H_2O^+ + H_2O \rightarrow H_3O^+ + OH$ übertragen. Außerdem kommt es neben der Primärionisation zu Anregungen mit direkter Bildung von Wasserstoffatomen H und Hydroxylradikalen gemäß $H_2O \rightarrow H_2O^* \rightarrow H + OH^*$. Wasserstoffatome entstehen auch durch die für saure Lösungen charakteristischen Sekundärreaktionen der hydratisierten Elektronen $e^- + H_3O^+ \rightarrow H + H_2O$. In Tabelle 12.12. ist der Einfluß der LET auf das Verhältnis der radikalischen und molekularen Zersetzung angegeben. Zu den primären Radiolyseprodukten von Wasser gehören auch solche molekularen Produkte, wie H_2 und H_2O_2 und solche Ionen, wie H^+, O^+, H_2^+ und OH^+. Im Verlaufe der verschiedenen Rekombinationsprozesse treten H_2, O_2, HO_2, OH, H_2O_2 und H_2O auf. Die G-Werte sind für alle Produkte und für verschiedene Strahlungsarten und -energien bestimmt worden. In Abhängigkeit von den Bedingungen können bestimmte Produkte dominieren. So ist für H_2O_2 mit α-Teilchen in von Luft gereinigtem Wasser $G = 0{,}9$. Mit γ-Strahlung läßt sich H_2O_2 in dem gleichen Wasser kaum erzeugen. Setzt man allerdings genügend Luft zu, so können G-Werte von 2 erreicht werden.

Tabelle 12.12
Anteile von radikalisch und molekular zersetzten Wassermolekülen

Strahlung	Mittl. LET in eV je 10^{-10} m	Radikalische Zersetzung in %	Molekulare Zersetzung in %
γ(^{60}Co)	0,02	77	23
β(^{3}H)	0,4	70	30
α(^{210}Po)	7	12	88
α und ^{7}Li aus ^{10}B(n, α)	28	8	92

6. Eine wichtige Gruppe strahlenchemischer Reaktionen ist die Strahlensynthese niedermolekularer Stoffe. Mit der strahleninitiierten Äthylbromidsynthese aus Äthylen und Bromwasserstoff wurde 1963 erstmals ein strahlenchemischer Prozeß in der chemischen Produktion eingesetzt. Die G-Werte liegen zwischen 10^4 und 10^5. Die ^{60}Co-Quelle hatte eine Stärke von $1{,}11 \cdot 10^{14}$ Bq. Damit wurden 1,5 t Äthyl-

bromid, täglich erzeugt. Neben solchen Halogenierungsprozessen sind heute auch strahlenchemische Sulfurierungsprozesse üblich geworden. Außerdem haben die strahlenchemische Oxidation sowie die strahlenchemische Synthese phosphorzinnorganischer Verbindungen weite Verbreitung gefunden. Auch Stickstoffverbindungen werden strahlenchemisch synthetisiert. Ein Beispiel ist Hydrazin, das als Raketentreibstoff strategische Bedeutung erlangt hat. Mit einem chemischen 500-MW-Reaktor lassen sich bei 50prozentiger Ausnutzung von Spaltprodukten jährlich 20000 t wasserfreies Hydrazin relativ billig herstellen.

7. Die größte technische Bedeutung haben die strahlenchemische Synthese, die Modifizierung und der radiolytische Abbau von Hochpolymeren erlangt. An erster Stelle ist hier die strahlenchemische Polymerisation von Monomeren, wie Äthylen und Vinylchlorid zu Polymeren zu nennen, d. h. von niedermolekularen Verbindungen zu Makromolekülen. Die Makromoleküle liegen zunächst meist in der Form von Fadenmolekülen vor. Eine weitergehende Bestrahlung kann zur Vernetzung oder zum Abbau, d. h. zur Kettenspaltung führen. Bei Vernetzung werden hauptvalenzmäßige dreidimensionale Querverbindungen zwischen den Fadenmolekülen erzeugt, so daß dreidimensionale Riesenmoleküle entstehen. Je nach der Dichte der Verknüpfungsstellen entstehen kautschukartige, elastische, weiche bis harte und spröde Stoffe. Mit wachsender Molekülmasse nehmen Erweichungstemperatur, Elastizitätsmodul, Bruchdehnung und Härte zu, während Löslichkeit, Kerbschlagzähigkeit und Rißdehnung abnehmen. Die erforderlichen Strahlungsdosen liegen bei 50 kGy bis 1 MGy. Meist verwendet man Elektronenbeschleuniger oder ^{60}Co-Bestrahlungsanlagen.

Als Konkurrenzprozeß zur Vernetzung geht der strahlenchemische Abbau vor sich. Je nachdem, ob die strahlenchemische Ausbeute der Vernetzung G_V oder des Abbaus G_A größer sind, können sich unterschiedliche Ergebnisse einstellen. Bei $G_A/G_V > 1$ überwiegt der Abbau, bei $G_A/G_V < 1$ die Vernetzung. Zu den vorwiegend vernetzenden Polymeren gehören neben anderen Polyäthylen und Kautschuk. Für Polyäthylen liegen die G-Werte bei 4, die Dosis bei einigen 10^4 Gy. Technische strahlenchemische Polymerisationsverfahren werden für Kabelisolationen, Draht- und Kabelüberzüge, Schrumpfartikel, Folien und Schaumstoffe verbreitet eingesetzt. Bei der Strahlenvulkanisation zur Herstellung von Autoreifen ist die erforderliche Dosis von bis zu $3 \cdot 10^6$ Gy wirtschaftlich gesehen zu hoch. Effektive Zusätze zur Verringerung der Strahlendosis werden gesucht. Auch die strahlenchemische Lackhärtung in Bruchteilen von Sekunden hat in der Technik weitgehend Eingang gefunden. Die Dosisleistungen liegen hier bei 10^4 Gy.

Ein weiteres, verbreitet angewendetes Verfahren ist die strahlenchemische Pfropfpolymerisation, insbesondere von schlagzähen Polymeren. Unter Pfropfung versteht man die Polymerisation eines Pfropfmonomeren auf einer Propfgrundlage, meist einem Polymeren, auf dem das gepfropfte Polymer in Form von Ketten aufwächst. Im Unterschied zur konventionellen chemischen Pfropfung ist die strahlenchemische Pfropfung auch bei trägen Polymeren möglich. Ein Beispiel ist die Pfropfung auf Holz. Als Monomere kommen neben anderen Styrol und Polyester in Betracht. Die Dosis liegt bei $3 \cdot 10^4$ Gy. Es eignen sich besonders ^{60}Co-Bestrahlungsanlagen. Für eine Produktion von $3{,}8 \cdot 10^6$ m^2/a benötigt man eine Quellstärke von $3{,}7 \cdot 10^{17}$ Bq.

Der radiolytische Abbau von Polymeren wird neuerdings gezielt zur Synthese wertvoller Stoffe genutzt. Ein Beispiel ist der strahlenoxidative Abbau von Polyäthylen zu Wachsen.

Die strahlenchemische Bearbeitung der Hochpolymeren hat eine Reihe von Vorteilen. Dazu gehören die großen G-Werte der Polymerensynthese, weil es sich um Kettenreaktionen handelt. Die Vernetzungsreaktionen verlaufen zwar mit niedrigen G-Werten, sie führen aber wegen der hohen relativen Molekülmasse der Polymeren schnell zu den gewünschten Eigenschaften. Da keine Zusätze erforderlich sind, ist die Reinheit der strahlenchemisch synthetisierten Polymere größer. Es ist ein Vorteil, daß die strahlenchemische Polymerisation auch von Makromolekülen möglich ist, die gegenüber konventionellen Reaktionen inert oder träge sind.

12.2.3. Biologische Wirkungen

1. Die biologischen Wirkungen der Kernstrahlungen entstehen als Folge physikalischer und chemischer Prozesse. Primär sind es, wie in Abb. 12.12 dargestellt, die Prozesse der Strahlenabsorption, die hauptsächlich über Photo- und Compton-Effekt, Anregung, Ionisation und

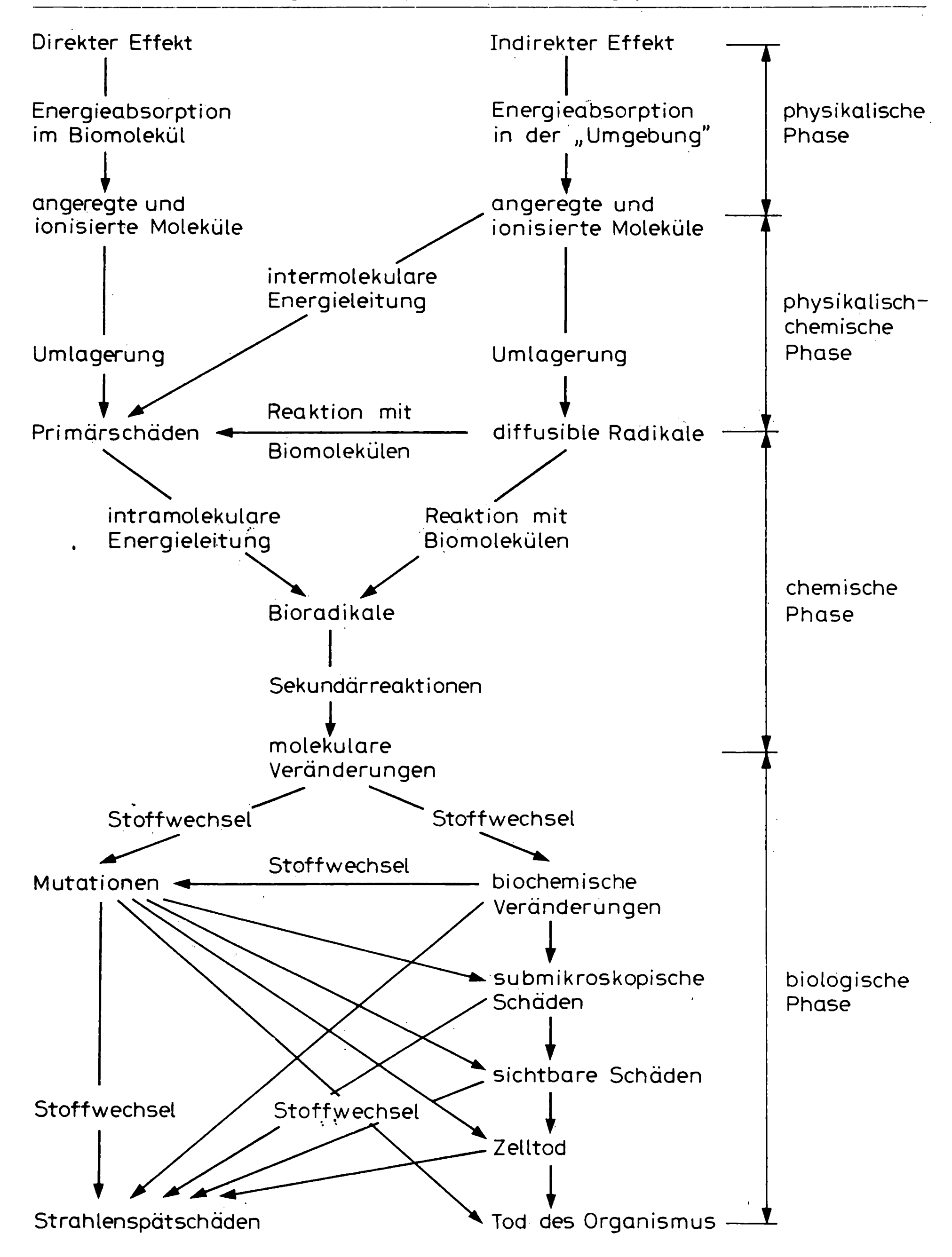


Abb. 12.12
Zeitphasen der Strahlenwirkung in biologischem Gewebe (nach DERTINGER)

Radikalbildung führen. Die eingesetzten Strahlungsenergien liegen meist bei 0,5 bis 5 MeV, d. h., sie übertreffen die Bindungsenergien der Elektronen in den Atomen und die chemischen Bindungsenergien der Moleküle, so daß wie in der Strahlenchemie stark endotherme Prozesse ausgelöst werden können. Sie führen durch intramolekulare Veränderungen in den funktionellen Gruppen der Moleküle, durch Radiolyse biologisch wichtiger Stoffe, wie Umwandlungen oder Abbau von Eiweißen, Peptiden, Glyciden, Nukleinsäuren, Vitaminen, Enzymen und anderen sowie durch submikroskopische Veränderungen der inneren Zellstruktur bis hin zu sichtbaren Veränderungen einzelner Zellen, ja sogar Organe. Die Gesamtheit der Erscheinungen, die physiologische, histologische und genetische Veränderungen beinhaltet, ist noch längst nicht hinreichend erforscht. Mit dieser Problematik befaßt sich die Radiobiologie. Einen Überblick über die biologische im Anschluß an die chemische Phase zeigt ebenfalls die Abb. 12.12.

Da die absorbierte Strahlung zur Anregung von Molekülen, zur Ionisation und zur Freisetzung von Radikalen führt, ist es interessant zu wissen, welche Anteile dieser aktiven Spezies in einer Zelle entstehen. Beim Bezug auf eine absorbierte Dosis von 1 Gy bei einer Dichte von 1 g/cm^3, wie sie für Wasser und weiches Organgewebe charakteristisch ist, ergeben sich 180 Ionenpaare und 540 bis 720 angeregte Moleküle in 1 µm^3. In einer Zelle mit einem Durchmesser von 10 µm entstehen somit $8 \cdot 10^5$ aktive Spezies. Diese Zahl macht deutlich, warum die Effektivität der Strahleneinwirkung auf biologische Objekte so hoch ist. Bei dieser Abschätzung wurde eine homogene Verteilung der Treffstellen der ionisierenden Strahlung angenommen. Tatsächlich ist sie jedoch nicht homogen, so daß örtlich gesehen unterschiedliche, also auch höhere Schädigungen eintreten.

2. Zur Wirkung von Strahlung auf Organismen kann allgemein festgestellt werden, daß bei geringen Strahlendosen eine Stimulierung biologischer Prozesse auftritt, bei großen eine Unterdrückung. In Abb. 12.13 ist eine Einordnung der biologischen Wirkungen als Funktion der

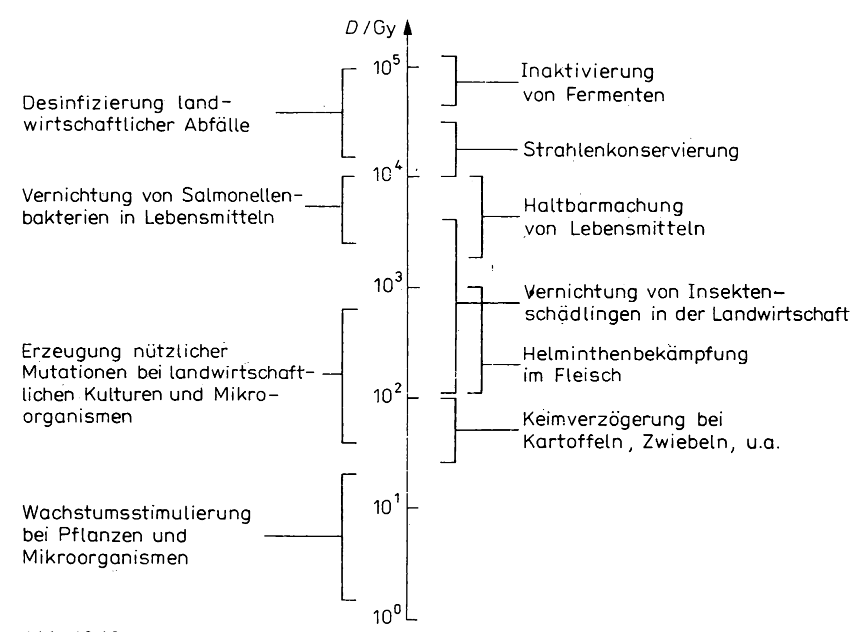


Abb. 12.13
Biologische Strahlenwirkungen als Funktion von der absorbierten Dosis

absorbierten Dosis gezeigt. In diesem Zusammenhang muß bemerkt werden, daß die Bezeichnung große oder kleine Dosis auch zu falschen Vorstellungen führen kann, da die Wirkungen von der Strahlenempfindlichkeit der biologischen Objekte abhängt, und die sind recht unterschiedlich. Die Schädlichkeit der Strahlung wächst mit der Kompliziertheit des Organismus. Einzellige Organismen erleiden eine chemische Beschädigung der Zellbestandteile, die durch eine chemische Ausbeute mit G-Werten von 1 bis 10 gekennzeichnet werden kann. Die Schädigungen sind nachhaltiger, wenn sie den Zellkern, besonders folgenschwer, wenn sie die Chromosomen betreffen. Bei komplizierteren Organismen können kleine Beschädigungen besonders der Nukleinsäuren, Enzyme und anderer Verbindungen zu Funktionsstörungen führen, so daß auch nicht bestrahlte Teile des Organismus in Mitleidenschaft gezogen werden. Dadurch treten Störungen im Zusammenwirken der Zellen auf, d. h., die ursprünglich kleine Strahleneinwirkung wird multipliziert, die Störung kann den ganzen Organismus betreffen. Schließlich kann sie zum Absterben führen.

Ein Maß für die Empfindlichkeit von Organismen gegenüber Strahlung ist die Letaldosis. Bei ihrer Angabe in der Form $LD_{50/30}$ wird ausgesagt, daß 50 % der Organismen innerhalb von 30 Tagen absterben. Die Inaktivierungsdosis LD_{37} gibt an, daß 37 %, d. h. 1/e der Organismen überleben. Die einfachsten Organismen, wie z. B. die Viren, haben eine Letaldosis von 10 bis 100 kGy, kompliziertere einzellige Organismen von 1 bis 10 kGy, hochorganisierte Lebewesen von 1 bis 10 Gy. Bei kurzzeitiger Ganzkörperbestrahlung des Menschen beträgt die Grenzdosis, unterhalb der noch keine klinisch feststellbaren Schädigungen entstehen etwa 0,25 Gy, die Letaldosis LD_{50} ist bei 4 Gy erreicht; bei 6 Gy ist die Sterberate 100 % mit 95 % innerhalb von zwei Wochen. In Tabelle 12.13 sind einige Letaldosen angegeben.

Tabelle 12.13
Letaldosis LD_{50} für verschiedene Organismen bei Ganzkörper-Quantenbestrahlung in Gy

Organismus	LD50	Organismus	LD50
Infusoria	3500	Schnecke	80—200
Amöba	1000	Schildkröte	15
Drosophila	1000	Huhn	7
Hefe	300	Frosch	7
Escherichia	60	Mensch	5

Da die mikrobiologischen Organismen auch das Vermögen der Ausheilung von Strahlenschäden haben, das über bestimmte aktivierende Fermente gesteuert wird, gibt es auch die Möglichkeit der Beeinflussung der Strahlenempfindlichkeit. Wir kommen in Punkt 7 darauf zu sprechen.

3. Die ionisierende Strahlung wird primär zunächst hauptsächlich von den Atomen absorbiert. Der Wirkungsquerschnitt hängt daher nicht von der Molekülstruktur, sondern von der chemischen Ordnungszahl Z der betreffenden Atomsorte ab, mit der er anwächst. Die lebenden Organismen bestehen zu 97 % aus leichten Elementen, insbesondere aus Wasserstoff, Sauerstoff, Kohlenstoff, Stickstoff, Schwefel und Phosphor. Daher unterscheiden sich die Hauptbestandteile dieser Organismen hinsichtlich ihres Absorptionskoeffizienten für ionisierende Strahlung nur wenig. Für Knochen ist die Absorption intensiver als für weiches Gewebe, da dort Kalzium und Eisen, Kobalt, Kupfer, Zink und Jod enthalten sind. Hier wird die Absorption von Quanten- und Elektronenstrahlung durch alle Komponenten bestimmt. Bei Bestrahlung mit Neutronen hängt die Absorption wegen der Rückstoßprotonen vorwiegend von der Menge des enthaltenen Wasserstoffs ab. In Tabelle 12.14 sind die prozentualen Anteile der Energieabsorption in biogenen Produkten angegeben. Der Hauptanteil der Ionisation wird am Wasser verursacht. Die Wassermoleküle sind die Grundlage der Zellstrukturen; in ihm sind die Eiweiße, Nukleinsäuren,

Tabelle 12.14
Relative Energieabsorption für ionisierende Strahlung durch Gewebe und Produkte biogenen Ursprungs in %

Stoff	Weiches tierisches Gewebe	Pflanzen-gewebe	Nahrungsmittel		
			Rindfleisch	Fisch	Kartoffeln
Wasser	70 —85	11 —76	72	82	70 —76
Eiweiße	10 —20	2 —10	20	17	2
Nukleinsäuren	1 — 7	1 — 6	1 —3	1 —5	2
Lipide	2 — 8	0,2— 5	2 —6	0,2—3	0,2
Kohlenwasserstoffe	1 — 5	20 —70	1 —2	1 —2	20
Niedermolekulare Metabolite	0,4— 2	1 — 4	0,4—2	1 —2	2 — 3
Mineralstoffe	2 — 4	2 — 4	1	2	1

die Hauptkomponenten der Zellen gelöst. Ihnen wird die Energie vom Wasser her übertragen. Daher spielt auch hier, wie bei den chemischen Strahlenwirkungen in wäßrigen Lösungen, das Verständnis der in 12.2.2., Punkt 5, behandelten Radiolyse des Wassers eine große Rolle.

4. Die stimulierende Wirkung der ionisierenden Strahlung hat in der Pflanzenzüchtung ein weites Anwendungsfeld gefunden. Aus Abb. 12.13 kann das Dosisintervall entnommen werden. Bei einer Vielzahl landwirtschaftlicher Kulturen wurden bemerkenswerte Ergebnisse erzielt. Wegen der praktischen Handhabbarkeit haben sich für diese Arbeiten γ-Strahlen am geeignetsten erwiesen. Durch Stimulierung mit γ-Strahlung konnten sowohl bei Getreidearten als auch bei Kartoffeln Mehrerträge von bis zu 25% erzielt werden. Damit einher geht eine Erhöhung des Gehalts an verschiedenen wertvollen Substanzen. Von wirtschaftlicher Bedeutung sind solche Effekte, wie

— Erhöhung der Keimfähigkeit von langsam keimenden Samen oder von Samen mit geringer Keimfähigkeit;
— Beschleunigung der Entwicklung und Erhöhung der Ernteerträge durch Bestrahlung des Saatguts vor der Aussaat oder während der Kultivation;
— Beschleunigung der Entwicklung und Erhöhung der Ernteerträge durch Bestrahlen der ausgesetzten Wurzeln, Reiser und sich vegetativ vermehrender Pflanzen, wie z. B. Kartoffeln;
— Verbesserung der Pfropfergebnisse und der weiteren Entwicklung von Reisern im Wein- und Obstbau durch γ-Strahlung.

Auch aus der Tierproduktion sind stimulierende Wirkungen bekannt, z. B. in der Hühnereier- und Fischproduktion. Verbreitet wird die stimulierende Wirkung ionisierender Strahlungen auf die Teilung und Vermehrung von Mikroorganismen, wie Pilze, darunter Schimmel, Produzenten wichtiger Antibiotika, Aminosäuren, Fermente und anderer biologisch aktiver Stoffe eingesetzt.

Über den Mechanismus der Stimulierung gibt es heute relativ feste Vorstellungen. In groben Zügen dargestellt geht man davon aus, daß die Strahlung einerseits die innere Struktur der Zellmembranen ändert und für die von ihnen eingeschlossenen biologisch aktiven Stoffe, wie Enzyme, durchlässig macht, die ihrerseits aktiviert werden. Auf diese Weise wird die Depression des Genoms und damit des Ruhezustandes aufgehoben. Offensichtlich gibt es eine optimale Dosis, wobei die Licht- und Feuchtigkeitsverhältnisse nicht unwesentlich sind. Für verschiedene Saat- und Pflanzgutarten existieren unterschiedliche Optima.

5. Die Strahlenselektion zur Entwicklung neuer wertvoller Sorten landwirtschaftlicher Kulturpflanzen und hochproduktiver Mikroorganismenstämme hat sich als wichtiges praktisches Verfahren durchgesetzt und volkswirtschaftliche Bedeutung erlangt. Bisher wurden weit mehr als 150 verschiedene Pflanzensorten mit solchen Eigenschaften, wie höhere Erträge, bessere Lagerfähigkeit, größere Widerstandsfähigkeit, größerer Eiweißgehalt usw. in die landwirtschaftliche Praxis übernommen, unter ihnen Weizen-, Reis-, Gerste- und Baumwollsorten.

Die Erzeugung neuer Mutanten durch Bestrahlung trägt Wahrscheinlichkeitscharakter. Es entstehen nicht nur gewünschte, sondern auch unerwünschte Mutanten. Wie bei jedem Wahrscheinlichkeitsprozeß, so nimmt auch hier die Zahl der Mutationen mit der Zahl der auslösenden Ereignisse, also mit der Dosis zu. Man wählt die Dosis so, daß 20 bis 70 % der Spezies absterben. In den restlichen 80 bis 30 % ist dann eine große Zahl neuer Mutanten enthalten. Bei den Mikroorganismen läßt man bis zu 95 % absterben. Dabei gibt es je nach der Zielstellung ein Optimum. Das hängt damit zusammen, daß bereits während der Bestrahlung durch spezielle aktivierende Enzyme Ausheilungsprozesse ausgelöst werden.

Zur Auslösung neuer Mutagenesen werden verschiedene Strahlenarten eingesetzt, sowohl mit kleiner LET, als auch mit großer. Bestrahlungen mit kleiner LET, also z. B. mit Röntgenstrahlung, liefert mehr ausheilbare Chromosomenschäden, während solche mit großer LET, z. B. mit Neutronen, tiefer gehende Chromosomenschäden verursacht. Daher ist die genetische Effektivität der Neutronen größer, als die der Quantenstrahlung. Letztere ruft besonders Mutanten mit größerer Widerstandsfähigkeit hervor.

6. Als äußerst wirksames Mittel werden ionisierende Strahlungen in großem Maße zur Bekämpfung von Mikroorganismen eingesetzt. Im Vordergrund stehen die Strahlensterilisierung von Materialien, Abwässern, Abfällen und die Konservierung von Lebensmitteln. Meist kommen Quanten- sowie Elektronenstrahlungen zum Einsatz. Die erforderlichen hohen Dosen sind aus Abb. 12.13 zu ersehen. Damit die Verfahren ökonomisch sind, ist es wichtig, nach Möglichkeiten der Dosisherabsetzung zu suchen. In diesem Zusammenhang spielt die Strahlenempfindlichkeit der Mikroorganismen eine große Rolle bzw. ihr Kehrwert, die Strahlenresistenz.

Der Absterbeprozeß der Mikroorganismen bei Bestrahlung unterliegt entsprechend dem Wahrscheinlichkeitscharakter einem Exponentialgesetz. Wenn N_0 die Gesamtzahl der Mikroorganismen zu Beginn der Bestrahlung ist, N die Zahl der nach der Bestrahlung mit der Dosis D noch nicht betroffenen, dann erhöht sich die Differenz $N_0 - N$, wenn die Dosis um $\mathrm{d}D$ erhöht wird gemäß

$$\frac{\mathrm{d}N}{N} = -S \cdot \mathrm{d}D\,; \qquad N = N_0 \cdot \mathrm{e}^{-SD}\,, \tag{12.20}$$

wobei S ein Proportionalitätsfaktor ist. Für $SD = 1$ wird $N/N_0 = \mathrm{e}^{-1} = 0{,}37$. Man spricht in diesem Falle von letaler Dosis D_0 oder LD_{37}. Je größer D_0 ist, desto größer ist die Resistenz gegen Bestrahlung. Man definiert $R = 1/D_0$ als Strahlungsempfindlichkeit. Wie aus Tabelle 12.13 entnommen werden kann, liegt D_0 bei den meist vorkommenden Mikroorganismen zwischen 10^4 und 10^5 Gy. Diese hohe Resistenz hängt auch mit der bereits erwähnten Eigenschaft einfacher Mikroorganismen zusammen, noch während der Bestrahlung durch Enzyme Ausheilungsprozesse auszulösen. Zu einer Herabsetzung der Dosis kommt man, wenn es ausreicht, nur die Fähigkeit zur Teilung und Vermehrung zu vernichten, was viel früher eintritt als das Absterben. In diesem Falle spricht man vom reproduktiven Absterben.

Eine weitere Herabsetzung der Dosis ist durch Veränderung der Lebensbedingungen möglich. Die meisten Fermente wirken zwischen 30 und 40 °C optimal. Eine Temperaturerhöhung um 10 bis 15 Grad führt daher zu einem effektiven Verlust an Widerstandsfähigkeit gegen Strahlung. Ähnliche Ergebnisse lassen sich durch Zusatz von Sauerstoff erzielen. Auch verschiedene andere Zusätze führen zu dem gewünschten Erfolg. Man spricht von Sensibilisatoren. Zu ihnen zählen z. B. auch solche Radikale, wie OH, NO und Cl.

Sterilisierende Behandlungen werden vor allem bei pharmazeutischen Rohstoffen und Erzeugnissen angewendet, bei chirurgischen Instrumenten, Verbandsmaterialien, biologischem Gewebe, bei Beeren, Obst, Futtermitteln, Fleisch und Fisch. Auf letztere kommen wir in Punkt 8 noch einmal zu sprechen. Die Futtermittelbestrahlung hat besonders in den 70er Jahren große Verbreitung gefunden. Sie richtet sich gegen verschiedene Mikroorganismen, wie Salmonellen und andere pathogene Viren und Parasiten. Da durch infizierte Tiere auch eine Übertragung auf den Menschen möglich ist, dient diese Maßnahme auch der Gesunderhaltung des Menschen. Die Dosen liegen im Bereich von 10 kGy.

7. Wie man aus den Letaldosen der Tabelle 12.13 erkennen kann, lassen sich mit ionisierender Strahlung auch größere Lebenwesen bekämpfen. Zu ihnen zählen solche Parasiten, wie Insekten bei der Lagerung von Getreide, getrockneten und frischen Früchten sowie Trockenfisch, Würmer in Fleisch sowie Algen, Pilze, Milben und Würmer in landwirtschaftlichen Abprodukten, wie Gülle und Mist. Dabei lassen sich drei Hauptmethoden unterscheiden:

a) Unter Ausnutzung der hohen Strahlungsempfindlichkeit der Insekten und Würmer in bestimmten Entwicklungsphasen, kann man einen hohen Vernichtungseffekt durch Unterbindung der Entwicklung und Vermehrung erzielen, indem das zu schützende Gut direkt bestrahlt wird. Dabei bleiben die Nutz-

eigenschaften des Lagerguts erhalten. Typische Beispiele sind die γ-Bestrahlung von Getreidesorten und Mehlwaren gegen Korn- und Reiskäfer vor der Einspeicherung.

Zur Vernichtung von Kakaomotten, einem in allen Getreide- und Mehlspeichern gefürchteten Schädling, sind 3 kGy erforderlich. Die größte Empfindlichkeit gegen γ-Strahlung liegt in den Perioden vor, in denen das Genom aktiviert ist. Die erforderliche Dosis zur Verhinderung des Schlüpfens der Eier beträgt 60 bis 70 Gy. Die unter Berücksichtigung solcher Besonderheiten entstandenen Dosisempfehlungen liegen zwischen 50 und 700 Gy bei den verbreitetsten Getreide- und Mehlschädlingen. Für Würmer, Milben, Algen und Pilze in landwirtschaftlichen Abprodukten existiert ein weites Spektrum der erforderlichen Dosen. Daher liegt die Mindestdosis bei 2,5 kGy. Solche hohen Dosen führen zur Unrentabilität der Methode. Eine Kopplung mit Sensibilisatoren ist daher unbedingt erforderlich, ein verbreitetes Verfahren ist die gleichzeitige Temperaturerhöhung.

b) Auf der Grundlage der großen Strahlenempfindlichkeit der Gonaden im Vergleich zur hohen Strahlenresistenz anderer Gewebe sowie in bestimmten Funktionszeiten der Insekten kann durch γ-Bestrahlung Sterilität bei gleichzeitiger biologischer Aktivität der Männchen erzielt werden. Ihre Aussetzung in von Schädlingen befallenen Gebieten führt in zwei bis drei Jahren zu einer wesentlichen Verringerung des Befalls bis hin zur vollständigen Vernichtung. Ein berühmtes Beispiel ist die Tsetsefliege, der Überträger der Schlafkrankheit und gefürchteter Rinderschädling. Allgemein ist bei dieser Methode zu beachten, daß sie um so effektiver wirkt, je mehr man sterile Männchen im Vergleich zur natürlichen Population aussetzen kann und je mehr diese, verglichen mit den im Befallgebiet vorkommenden Männchen, konkurrenzfähig sind. Beim Apfelwickler, einem der gefährlichsten Obstschädlinge, führen 200 bis 250 Gy zu 54 bis 75% Sterilität, wobei die geschlechtliche Aktivität nur um 5 bis 10% vermindert wird. Die Zahl der Spermatophoren wird dabei nicht geändert. Eine Dosis von 400 Gy ruft 93,5prozentige Sterilität hervor, aber die Lebensdauer verringert sich um 20% und die geschlechtliche Aktivität um 25%. Am günstigsten ist eine Dosis von 120 bis 150 Gy, bei der 50% sterile Männchen mit voller Konkurrenzfähigkeit entstehen. Bei den Untersuchungen zum Apfelwickler hat sich gezeigt, daß für die praktische Arbeit nicht die Dosis allein ausschlaggebend ist, sondern auch die Dosisleistung. Mit der Verringerung der Dosisleistung vergrößert sich der Unterschied zwischen Sterilisierungs- und Letaldosis. Umgekehrt führt eine Erhöhung der Dosisleistung zur Verminderung der Sterilisierungsdosis.

c) Mit Hilfe der mutagenen Wirkung der ionisierenden Strahlung kann man bei Insekten Defekte der Chromosomen in der Form translokativer oder rezessiver letaler Mutationen erzeugen. Eine massenhafte Aussetzung solcher defektiver Insekten im Befallgebiet verringert die Verbreitungsdichte des Befalls über mehrere Generationen. In der Praxis kommen sowohl diese, als auch die Sterilisierungsform in Anwendung.

8. Von außerordentlicher volkswirtschaftlicher Bedeutung ist die Bestrahlung von Lebensmitteln und anderen für die industrielle Verwertung notwendiger pflanzlicher und tierischer Rohstoffe. Man kann drei verschiedene Verfahrensgruppen unterscheiden:

a) Erhöhung der Haltbarkeit und Konservierung;
b) Veränderung der Qualität des Ausgangsmaterials zur Verbesserung der technologischen Verarbeitbarkeit;
c) Beschleunigung langsam ablaufender Prozesse.

Die technische Zweckmäßigkeit und die Unbedenklichkeit der Strahlenbearbeitung hinsichtlich Folgeerscheinungen beim Genuß wurde für die Lebensmittel besonders sorgfältig untersucht. Auf dieser Grundlage konnten sehr wichtige Lebensmittel als Eignungsfälle für die Strahlenkonservierung empfohlen werden, unter ihnen Kartoffeln, Rüben, Möhren, Zwiebeln, Beeren und Früchte, Fruchtsaftkonzentrate, Fische und andere Wasserlebewesen, Fleisch und viele andere kulinarische Erzeugnisse.

Bei Kartoffeln kann man durch γ-Bestrahlung mit Dosen zwischen 1 bis 3 Gy eine Erhöhung und Beschleunigung der Keimfähigkeit hervorrufen. Dosen zwischen 300 und 500 Gy führen zu Keimverzögerungen von 1 bis 2 Monaten. Bei 800 bis 1000 Gy werden Inhibitoren des Zellteilungsmechanismus und Beschädigungen der DNA in den Zellen der Augen in einem Maße erzeugt, daß die Kartoffeln über alle Sommermonate lager- und transportfähig sind ohne daß die Ernährungsqualitäten verloren gehen. Es empfiehlt sich, die Bestrahlung in der für den Weiterverwendungszweck erforderlichen Verpackung vorzunehmen. Toxische Effekte konnten nicht gefunden werden. Zur Konservierung von Zwiebeln benötigt man bei Anwendung von γ-Strahlung 70 bis 100 Gy. Die Keimverzögerung beträgt dabei

90 Tage. Analoge Verzögerungszeiten konnten für Knoblauch (100 bis 120 Gy), Zuckerrüben (100 Gy), Möhren (80 bis 100 Gy) beobachtet werden.

In Beeren und Früchten ist zunächst auch die Infizierung mit Mikroorganismen, wie Sporen und Pilzen wichtig. Darüber wurde in Punkt 7 gesprochen. Darüber hinaus kann die Haltbarkeit durch Strahlenbeeinflussung der chemischen Strukturen und Prozesse in den Zellen wesentlich beeinflußt werden. Bei zu hohen Dosen geht die natürliche Widerstandsfähigkeit verloren, so daß das Verderben gefördert wird. Am geeignetsten sind Dosen zwischen 2 und 3 kGy. So können Erdbeeren, die mit 2,5 kGy γ-bestrahlt wurden nicht nur 5 bis 6, sondern 12 bis 13 Tage bei Temperaturen unterhalb der Zimmertemperatur gelagert werden. Ähnliche Ergebnisse sind auch für andere Beeren und Früchte bekannt. Tabelle 12.15 enthält einige Daten dazu. Gute Ergebnisse sind auch für Tomaten bekannt, die bei 2,5 kGy und einer Lagertemperatur von 8 bis 10 C eine dreimal längere Haltbarkeit zeigen. Die Pasteurisierung von Fruchtsäften wird in Kombination von γ-Bestrahlung (2 bis 8 kGy) und erhöhter Temperatur (50 °C) durchgeführt. Die Konservierungszeiten liegen hier bei einem Jahr.

Tabelle 12.15
γ-Bestrahlungsdosen für Beeren und Früchte zur Verlängerung der Haltbarkeit bei Zimmertemperatur (22—25 °C)

Produkt	D/kGy	Verlängerungsdauer/Tagen	Produkt	D/kGy	Verlängerungsdauer/Tagen
Erdbeeren	2,5—3	2— 5	Aprikosen	2 —3	3— 5
Himbeeren	2,5—3	2— 4	Mandarinen	1,5	10—15
Süßkirschen	2,5	10—15	Apfelsinen	1,5—2	10—15
Sauerkirschen	2,5	5— 7	Weintrauben	2	8—10
Pfirsiche	2 — 3	7— 9			

Für die Strahlenfleischkonservierung kommt nur etwa 3 Tage abgelagertes und auf mindestens 2 bis 4 °C abgekühltes Fleisch in Frage, weil erst dann anfangs aktiv ablaufende Autolyseprozesse abgeklungen sind, die durch γ-Bestrahlung merklich intensiviert und so zu nicht erwünschten Erscheinungen führen würden. Die empfohlene Dosis beträgt dann 5 bis 6 kGy, die Konservierungsdauer bei 0 bis 4 °C und Verpackung in abgeschlossenen Foliebeuteln 6 bis 8 Wochen. γ-Bestrahlungen mit 25 bis 35 kGy führen zur vollständigen Vernichtung der Mikroorganismen, aber der Geruch und der Geschmack ändern sich dabei, und da die autolytischen Fermente erhalten bleiben, gehen die biochemischen Zersetzungsprozesse langsam weiter. Sie können nur gehemmt werden, wenn in Verbindung mit der γ-Bestrahlung z. B. kurzzeitige Wärmebehandlungen einhergehen. Die größten Konservierungszeiten erzielt man mit γ-Bestrahlungen von 35 bis 40 kGy, Lagerung bei —30 °C und Anwendung von Antibiotika.

Für Fische, Krebse, Krabben und andere Lebewesen können durch γ-Bestrahlung mit Dosen von 1 bis 6 kGy und Lagerung bei 0 bis 5 °C die Lagerzeiten um einen Faktor 3 bis 5 vergrößert werden. Auch bei 15 kGy, wo die sterilisierende Wirkung für Mikroorganismen bereits groß ist, bleiben die kulinarischen Eigenschaften erhalten.

Die Veränderung der Eigenschaften tierischer und pflanzlicher Rohstoffe durch γ-Bestrahlung hoher Dosis als Voraussetzung zu ihrer besseren technologischen Verarbeitung im Produktionsprozeß beruht auf der radiolytischen Wirkung der Strahlung auf die komplizierten und hochpolymeren Verbindungen der Zellbestandteile. Bei pflanzlichen Rohstoffen interessiert vor allem die Radiolyse der polymeren Kohlenwasserstoffe der Zellwände, wie der Polysaccharide, Zellulose, Hemizellulose, Stärke und Pektin, der monosacchariden Galaktosen, Pentosen und Fruktosen sowie der schleimartigen Verbindungen aus Polysacchariden und Proteinen, der Mukopolysaccharide. Unter den tierischen Produkten sind es besonders die radiolytische Zerlegung solcher Faserproteine des Stützgewebes, wie Kollagen, Prokollagen, Elastine und Keratine, also Eiweißen, die den wichtigsten Bestandteil der Haut, des Bindegewebes und der Knochen darstellen sowie die radiolytische Veränderung von Lipiden und anderen Eiweißen, die die Grundlage für die Biomembranen der tierischen Zellen sind.

Im Ergebnis solcher Bestrahlungen ändern sich die Eigenschaften der Rohstoffe. Zu ihnen gehören Durchlässigkeit, Anlagerungsfähigkeit, Festigkeit, Extraktionsmöglichkeiten, Quellbarkeit usw. Bei der

Radiolyse von Polysacchariden und Mukopolysacchariden verringert sich z. B. die Viskosität sehr stark, bei der Radiolyse einiger löslicher Eiweiße werden Aggregationen, also Zusammenballungen von Molekülen und Ausfällung beobachtet. Oft wird die Extraktionsmöglichkeit wertvoller Zellprodukte durch die geringe Durchlaßfähigkeit der Zellwände stark behindert. In diesen Fällen kann die Vorbehandlung mit γ-Strahlen wesentlich größere Ausbeuten bringen. Das trifft z. B. auf die Extraktion von Alkaloiden, ätherischen Ölen und Arzneimitteln zu, aber auch auf die Ausbeute an Fruchtsäften aus Beeren und Obst. Die γ-Bestrahlungsdosen liegen in der Größenordnung einiger kGy.

Auf einigen Gebieten der Lebens- und Genußmittelindustrie werden für die Herstellung von Produkten mit hoher Qualität sehr große Herstellungszeiten benötigt. Typische Beispiele sind die mehrjährige Lagerung von Kognaksorten in Eichenfässern, die mehrere Monate dauernde Herstellung bestimmter Schinkensorten, die ebenfalls lange dauernde Nachreifung verschiedener Obst- und Gemüsesorten, die Fermentierung der Tabakblätter und viele andere mehr. In diesen Fällen ist die große Dauer durch die Durchlaßfähigkeit und Extraktionsfähigkeit der Zellwände für die entsprechenden Stoffe verantwortlich, geringe Reaktionsgeschwindigkeiten des Sauerstoffs mit bestimmten Stoffen oder die geringe Aktivität von Fermenten. Durch umfangreiche Untersuchungen konnte gezeigt werden, daß unter dem Einfluß der Bestrahlung sowohl pflanzliche, als auch tierische Gewebe infolge der depolymerisierenden Wirkung auf hochpolymere Stoffe die Durchlaß- und Extraktionsfähigkeit der hier betrachteten Substanzen erleichtert bzw. die Reaktionsgeschwindigkeit erhöht wird. So wurden gute Erfolge bei der Bestrahlung von Eichenspänen für die Kognakherstellung mit Dosen von 200 kGy erzielt. Die Herstellungsdauer beträgt nur noch 20 Tage anstelle von 3 bis 5 Jahren. Diese Richtung der Strahlenbiologie steht heute noch am Anfang. Es ist zu erwarten, daß sie in vielen Gebieten der mikrobiologischen Technologie Eingang finden wird, da in solchen Mikroorganismen, wie Hefe-, Schimmel- und anderen Pilzkulturen sowie in Bakterien durch γ-Bestrahlung eine Reihe metabolischer Prozesse stimuliert werden können, die zur Synthese solcher wertvoller Substanzen, wie Aminosäuren, Antibiotika und Fermenten führen.

9. Sehr verbreitet ist die Anwendung ionisierender Strahlungen in der Medizin. Etwa 70% aller Krebskranken durchlaufen gegenwärtig die Strahlentherapie. Auch bei endokrinen Erkrankungen werden Strahlen intensiv in den Heilungsprozeß einbezogen. Das Ziel der Strahlenbehandlung besteht nicht in der Vernichtung der kranken Zellen, sondern in ihrer Sterilisierung. Die Strahlenempfindlichkeit ist, wie in Punkt 6 erläutert wurde, von Organ zu Organ unterschiedlich. Sie hängt außerdem stark vom Sauerstoffgehalt ab. Der Unterschied kann bis zu einen Faktor 3 ausmachen. Der Erfolg bei der Krebsbekämpfung hängt wesentlich davon ab, ob eine hinreichend große Zahl kranker Zellen betroffen wurde. Da es sich um einen statistischen Prozeß handelt, gilt (12.20). Als Orientierungswert kann für D_0 im Mittel 1,4 Gy angesetzt werden. Wenn eine Geschwulst von 3 cm Durchmesser, die etwa 10^9 Zellen enthält, sterilisiert werden soll, dann sind bei einer angenommenen Überlebensrate von $N = 0{,}1$ gemäß (12.20) ca. 35 Gy erforderlich.

Anfangs wurden meist nur γ-Strahlungen eingesetzt. Dabei entstand der Ausdruck γ-Kanone. Gegenwärtig werden die Möglichkeiten und vor allem auch die klinische Unbedenklichkeit des Einsatzes schwerer ionisierender Teilchen, insbesondere negativer Pionen, Neutronen, Protonen, α-Teilchen und verschiedener schwerer Ionen untersucht. Unter Berücksichtigung des RBW sollten negative Pionen,

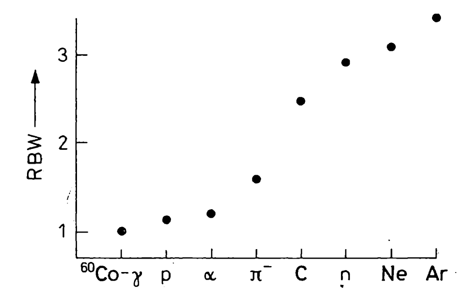


Abb. 12.14
RBW verschiedener ionisierender Teilchen

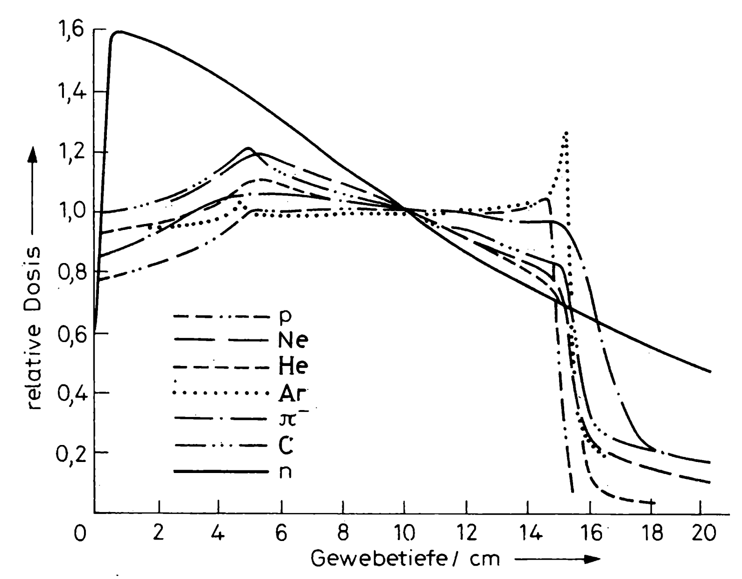


Abb. 12.15
Dosisverteilung in biologischem Gewebe für verschiedene ionisierende Strahlenarten

Neutronen und Ionen vorteilhafter sein. Man erkennt das aus Abb. 12.14. Hinsichtlich der Tiefenverteilung der übertragenen Dosis sind die negativen Pionen, Protonen und besonders die schweren Ionen vorzuziehen. Aus Abb. 12.15 erkennt man, daß die Ursache dafür die gut kollimierte Wirkung der hoch ionisierenden Teilchen ist, was mit der Bragg-Kurve zusammenhängt. Der Einsatz von Neutronen und γ-Quanten, die sich durch nahezu gleiche Absorptionskurven auszeichnen, hat offensichtliche Nachteile. Man versucht sie abzuschwächen, indem der Patient während der Bestrahlung um eine Achse gedreht wird, die durch das Geschwulstzentrum geht, um so eine Art Braggkurve zu simulieren.

Der Übergang zu Strahlungen mit großer LET setzt eine erhöhte Strahlenbeständigkeit des gesamten Gewebes voraus. Man untersucht in diesem Zusammenhang den Einfluß des Sauerstoffgehalts und von Elektronen-Akzeptorsubstanzen, die den Metabolismus der Zelle nicht stören. Andererseits kann man zur Erhöhung der Empfindlichkeit kranker Zellen ihre Eigenschaft nutzen, bestimmte Stoffe anzureichern, z. B. borhaltige Präparate, die zu großen Ausbeuten von Neutronenreaktionen führen. Diese Stoffe gehören in die Gruppe der Nuklearpharmaka. Klinische Erfahrungen liegen hauptsächlich für γ-Strahlung vor und mit Abstand für Protonen. Die Vorteile der Protonen in der klinischen Praxis sind erwiesen. Mit ihnen wurden die verschiedensten Organe mit geringer Ausdehnung behandelt, darunter Gehirntumore, Augengeschwüste, die Hypophyse und die Prostata. Wir kommen darauf in 12.3.2., Punkt 4 zu sprechen.

12.3. Stoff- und Prozeßanalyse mit Kernstrahlungen

12.3.1. Altersbestimmung

1. Wenn bekannt ist, in welcher Menge oder in welchem Verhältnis zu anderen Nukliden ein radioaktives Nuklid bei der Entstehung eines Stoffes in diesen eingebaut worden ist, dann kann man auf Grund der Halbwertszeit und seinem derzeit in diesem Stoff vorhandenen Anteil den

Entstehungszeitpunkt bestimmen. Da es sich meist um sehr langlebige Stoffe handelt, wie z. B. um Mineralien, kann man nicht unmittelbar von der Gleichung des radioaktiven Zerfalls (9.9) mit den Aktivitäten A_0 und A ausgehen, sondern muß A aus der spezifischen Aktivität der Proben bestimmen. Die Abb. 12.16 zeigt eine Zeitskala mit den Mutternukliden, die für die entsprechende Zeitspanne geeignet sind. Die größte Meßgenauigkeit erhält man für $\lambda t' \approx 1$, d. h. für Zeiten in der Größenordnung der Halbwertszeit, weil gemäß (9.19a) das Verhältnis der Aktivitäten $A_2(t)/A_1(t) = e^{\lambda_1 t} - 1$ hier zu großen Änderungen von t führt.

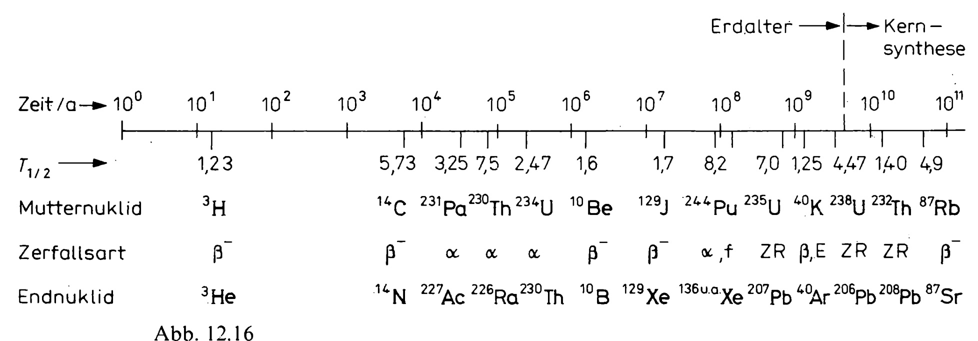


Abb. 12.16
Zeitskala und Zerfallsprozesse zur Datierung mit Hilfe von radioaktiven Nukliden (ZR bedeutet Zerfallsreihe)

2. Sehr bekannt ist die Radiokohlenstoffmethode oder auch Radiokohlenstoffuhr. Man geht davon aus, daß die Kohlenstoffisotope ^{12}C und ^{14}C in organische Stoffe im Mittel und, von einigen durch die Umwelt verursachten Abweichungen abgesehen, für die es in der Zwischenzeit Korrekturfaktoren gibt, im Verhältnis $1{,}5 \cdot 10^{-12}$ eingebaut wurden. Zum Absterbezeitpunkt des Organismus wurde der Einbau unterbrochen. Das darin enthaltene ^{14}C zerfällt mit der Halbwertszeit von 5730 a. Die spezifische Aktivität wird hier meist mit Hilfe von Proportionalzählrohren in speziellen Abschirmungen zur Verringerung des Nulleffekts über die β-Teilchen des Radiokohlenstoffzerfalls bestimmt. Die Methode gestattet die Datierung organischen Materials bis hin zu etwa 10^5 Jahren.

Verbreitet ist auch die Datierung von Wasser über den Gehalt an dem durch die Wechselwirkung der Höhenstrahlung mit den Elementen der Atmosphäre entstehenden Tritium mit $T_{1/2} = 12{,}3$ a. Auf diese Weise werden atmosphärische und Oberflächenwasser, Gletscher, unterirdische Wasserreservoire usw. untersucht.

3. Das Alter des Sonnensystems konnte über die Meteoriten, über Gesteinsproben der Erde und des Mondes mit unterschiedlichen radioaktiven Nukliden ermittelt werden. Es ergibt sich der gleiche Wert von $4{,}6 \cdot 10^9$ Jahren. Dabei haben die thorium- und uranhaltigen Mineralien eine große Rolle gespielt. Hier wurde das Verhältnis der Mengen von ^{235}U und ^{238}U bestimmt sowie die Verhältnisse der Mengen $^{206}Pb/^{238}Pb$, $^{207}Pb/^{235}U$, $^{207}Pb/^{206}Pb$ und $^{208}Pb/^{232}Th$. Weitere Möglichkeiten boten die Verhältnisse $^{129}J/^{129}Xe$ und $^{n}Xe/^{244}Pu$. Für viele verbreitet vorkommende Mineralien eignen sich die Verhältnisse $^{87}Sr/^{87}Rb$ und $^{40}Ar/^{40}K$.

12.3.2. Durchstrahlung

1. Die Schwächung von Kernstrahlungen beim Durchgang durch Stoffe wird in der volkswirtschaftlichen Praxis zur Messung von Dicken, Dichten, Massen, Zusammensetzungen und für Prozeßkontroll-, -steuer- und -regelungsfunktionen genutzt. Die Durchstrahlungsmethode ist

Bestandteil der Radiometrie, in der alle Verfahren zusammengefaßt werden, mit denen Veränderungen integraler Intensitäten oder des Energiespektrums, d. h. differentieller Intensitäten von Kernstrahlungen, bei der Wechselwirkung mit Stoffen über einen Detektor registriert und zur Beschreibung der Stoffe genutzt werden. Die Abb. 12.17 zeigt im Teil a) eine typische Meßanordnung des Durchstrahlungsverfahrens. Oft ist die Spektrometrierung nicht erforderlich, so daß der Vielkanalanalysator entfällt. Die Prozeßüberwachung und -beeinflussung wird dann über die Zählraten im Analogverfahren oder über Pegeleinstellungen im Relaisverfahren realisiert.

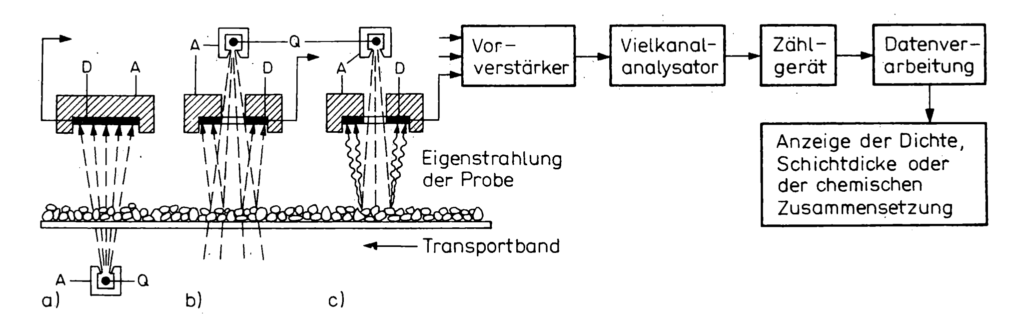


Abb. 12.17
Radiometrische Meßanordnungen: a) Durchstrahlungsmethode, b) Rückstreumethode (hier mit Ringdetektor), c) Aktivierungs- und Anregungsmethode (hier ebenfalls mit Ringdetektor). Bezeichnungen: Q — Quelle, A — Abschirmung, D — Detektor

Je nach der Stoffdicke werden radioaktive α-, β- und γ-Strahlungsquellen, Radionuklidneutronenquellen sowie Neutronen an Kernreaktoren und an Beschleunigern eingesetzt. In geringerem Maße kommen Ionen an Beschleunigern zum Einsatz. Die α-Strahlen, die bereits von sehr dünnen Schichten absorbiert werden, sind für Folien und Papier im Flächenmassenbereich von etwa 0,25 bis 5,5 mg/cm^2 verwendbar. Für Papiererzeugnisse, Textilfasern und -stoffe, Plast- und Metallfolien in dem sich daran anschließenden Bereich bis 100 mg/cm^2 verwendet man β-Strahlung. Bei noch größeren Flächenmassen geht man zu Röntgen- und γ-Strahlung über. Aus Abb. 12.18 kann man die Einsatzbereiche verschiedener Radionuklidstrahler entnehmen.

Als Detektoren werden vorwiegend Ionisationskammern und bei Raumtemperatur arbeitende Halbleiterdetektoren für Elektronen sowie Szintillationsdetektoren für γ-Strahlung und Neutronen eingesetzt. In modernen Geräten zur Sichtbarmachung von Stoffzusammensetzungs-, -struktur- oder Dichteunterschieden auf Bildschirmen von Sichtgeräten werden großflächige Proportional-Koordinatenkammern verwendet.

2. Die theoretische Grundlage der Durchstrahlungsverfahren sind die Absorptionsgesetze. Für α-Strahlen, die für gleiche Energie eine einheitliche mittlere Reichweite haben, gilt die Abhängigkeit (4.12, 13). Trotz unterschiedlicher Wechselwirkungsprozesse haben die Absorptionsgesetze für γ- und Neutronenstrahlung in weiten Energiebereichen die gleiche exponentielle Form (4.63) und (6.26). Auch für β-Strahlung kann man über zwei Zehnerpotenzen hinweg besonders bei kleinen Energien und für Atome mit großem Z ein solches Gesetz formulieren. Damit gilt in bestimmten Grenzen für α-, β-, γ- und n-Strahlung:

$$\dot{N} = \dot{N}_0 \, e^{-\mu x} = \dot{N}_0 \, e^{-\mu' d} , \tag{12.21}$$

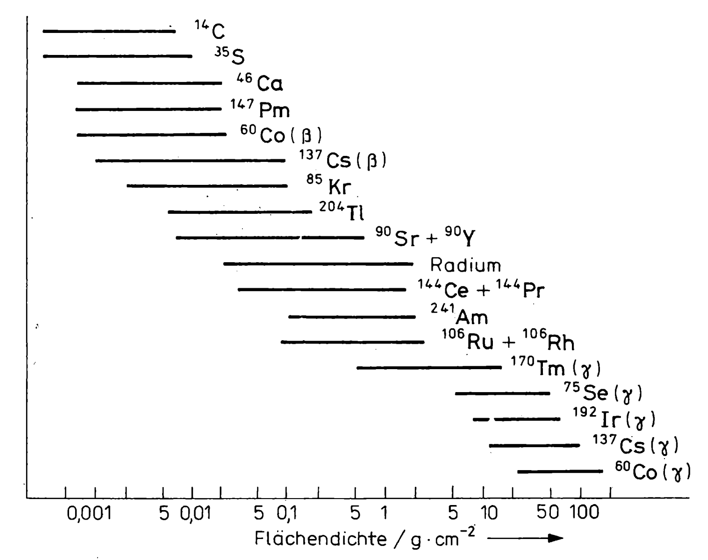


Abb. 12.18
Einsatzbereiche von Radionukliden bei der Flächenmassenbestimmung

wobei μ linearer und $\mu/\varrho = \mu'$ Massenabsorptionskoeffizient genannt werden. Wie in (4.66) ist μ' proportional zur Atomkonzentration und zum atomaren Wirkungsquerschnitt, d. h.

$$\mu' = Z \cdot \sigma_e \cdot \frac{N_A}{A} = \sigma_a \cdot \frac{N_A}{A}. \tag{12.22}$$

Daraus folgt für β-Strahlen und Absorbermaterialien mit niedriger bis mittlerer Ordnungszahl ein nahezu konstanter und von den physikalischen und chemischen Eigenschaften unabhängiger Wert für μ', denn die Z/A-Werte unterscheiden sich hier nur unwesentlich. Für γ-Strahlung ergibt sich im Bereich des Compton-Effekts in Übereinstimmung mit (12.21) und (4.67) die gleiche Situation. Große Z-Abhängigkeiten liegen gemäß (4.50) beim Photoeffekt vor. Ein prinzipieller Unterschied besteht in den Anwendungsmöglichkeiten für energiereiche Teilchen- und Quantenstrahlung im Gebiet der charakteristischen Röntgen-Strahlung, weil hier die Absorptionskanten eine starke Struktur bei der Anregung und der Absorption verursachen. Durch richtige Energiewahl kann das Verhältnis der μ'-Werte einer interessierenden Komponente und des Stoffs als Ganzem optimiert werden.

3. Die Dicke von Materialien kann über die Strahlenabsorption bestimmt werden, wenn die Dichte konstant ist. Von dieser Möglichkeit wird in der automatischen und zerstörungsfreien Material- und Prozeßkontrolle sowie Prozeßsteuerung in der Papier-, Textil-, Plaste- und Metallfolien und -bänderherstellung Gebrauch gemacht. In der Grundstoff- und chemischen Industrie sowie in der Energietechnik wird die Stärke von Ablagerungen und Abtragungen sowie von Korrosionsschichten an den Innenwänden technologischer Kessel und Rohre ermittelt.

4. Bei konstanter Dicke der Objekte kann die Dichte über die Strahlenabsorption bestimmt werden. In der Metallurgie, im Maschinenbau, im Bauwesen und anderen Zweigen der Technik werden auf diese Weise Hohlräume, wie Risse und Lunker oder defekte Schweißnähte nachgewiesen. Da meist γ-Strahlung eingesetzt wird, spricht man von γ-Defektoskopie. In der chemischen Industrie werden die Konzentrationen von Substanzen in Lösungen, der Anteil

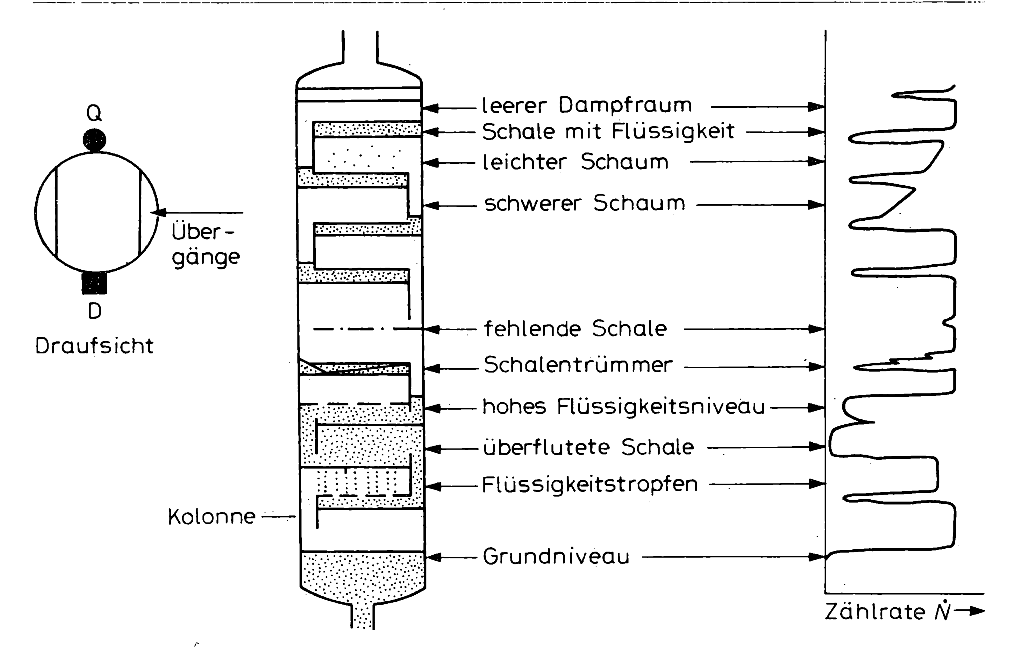


Abb. 12.19
Dichteprofil einer Destillationskolonne. Bezeichnungen: Q — γ-Quelle, D — γ-Detektor

an ungelösten Stoffen, Gasdichten, Dichten als Maß für das Stadium von Prozessen, wie z. B. bei der Polymerisation, gemessen und gesteuert. Die Abb. 12.19 zeigt die Dichteverteilung einer Destillationskolonne als Beispiel für die Defektoskopie und die Funktionskontrolle.

In Flüssigkeiten kann die Ausbildung von Blasen, in Gasen die von Tropfen festgestellt werden. Als weiteres Anwendungsbeispiel sei die Staubmessung in den Abgasen der chemischen und Grundstoffindustrie genannt sowie die Granulometrie auch in zusammengesetzten Stoffen, wie Beton.

5. Die Röntgen-Diagnostik ist als medizinisches Verfahren zur Sichtbarmachung von Dichteunterschieden im menschlichen Organismus seit Beginn unseres Jahrhunderts bekannt. Sie beruht auf der Nutzung des Gesetzes (12.21) für die Röntgen-Strahlung. Von der Methodik her betrachtet handelt es sich um ein Durchstrahlungsverfahren, anfangs als klassische Radiographie, später mit elektronischer Sichtbarmachung. Eine wesentliche Verbesserung hat die Röntgen-Diagnostik durch die Röntgen-Computer-Tomographie erfahren, d. h. durch Bestrahlung und Messung des zu untersuchenden Objekts von mehreren Seiten und rechnerischer Erarbeitung eines räumlichen Gesamtbildes der Absorption. Auf diese Weise können in biologischem Gewebe Dichteunterschiede von 1 % bei ihrer Lokalisierung auf Gebiete mit Abmessungen von einigen mm festgestellt werden. Für geringere Dichteunterschiede müssen unzulässig hohe Bestrahlungsdosen verabreicht werden.

Mit Protonen einer Energie von einigen hundert MeV können in biologischem Gewebe im Durchstrahlungsverfahren und mit Proportional-Koordinatenkammern Dichteunterschiede von 0,01 g/cm^2, d. h. von 0,05 %, sichtbar gemacht werden. Diese Protonenradiographie beruht auf der Absorption der Protonen gemäß (4.6) und mit einer Bragg-Kurve, wie sie die Abb. 4.5 zeigt. Da die Bragg-Kurve mit wachsender Ionenmasse schmaler und steiler wird, wie es die Abb. 12.15 zeigt, sollte der Übergang zu schwereren Ionen Fortschritte bei der Lokalisierungs-

auflösung bringen. Wenn die mittlere quadratische Abweichung der mittleren Protonenreichweite 1 gesetzt wird, so beträgt sie für ^{10}Ne-Ionen nur noch 0,21. In Analogie zu der in 12.2.3., Punkt 9, besprochenen Krebstherapie mit immer schwereren Ionen zur Erhöhung der Lokalisierungsgenauigkeit, hat man auch hier die Möglichkeit, stecknadelgroße Geschwülste zu lokalisieren. Voraussetzung ist, daß die Dichte der Geschwülste eine andere ist, als die des gesunden Gewebes. In Untersuchungen der letzten Jahre wurde gezeigt, daß ein Unterschied von etwa 3% besteht. Während selbst mit modernen Röntgen-Tomographen durch die Schädeldecke hindurch Tumore nicht sichtbar gemacht werden können, ist dies mit Hilfe der Protonen-Tomographie durchaus möglich. Bei Bezug auf Gewebe, das nicht durch Knochen verdeckt ist, wird bei der Protonenradiographie vom Organismus eine um 10 bis 50 mal geringere Dosis absorbiert.

Neue Möglichkeiten der Dichtebestimmung bietet der Einsatz der Synchronstrahlung. In der medizinischen Diagnostik z. B. ist zur Untersuchung der Blutgefäße die Einführung von Kontrastmitteln erforderlich, die wegen des großen Jodgehalts nicht ungefährlich sind. Bei Verwendung monochromatischer Synchrotronstrahlung benötigt man nur noch 1% der früher erforderlichen Kontrastmittelmenge. Man wählt für eine erste Durchstrahlung die Energie so, daß sie gerade unterhalb der K-Absorptionskante des Kontrastmittels liegt, für eine zweite so, daß sie oberhalb zu liegen kommt. Das Bild der Blutverteilung wird aus der Differenz der beiden Teilbilder erhalten, die proportional zur Konzentration des Kontrastmittels ist.

6. Man nutzt die Absorption der γ-Strahlung in den Strahlenrelais oder Strahlenschranken. Das sind Geräte, die Signale von Strahlungsdetektoren auf Über- oder Unterschreitung einer vorgegebenen Zählrate überprüfen. Sie bestehen im einfachsten Falle aus einer Strahlenquelle und einem Strahlungsdetektor sowie einer elektronischen Schaltung. Ein Beispiel ist die Füllstandsmessung. In Abb. 12.20 ist der etwas kompliziertere Fall einer kontinuierlichen Füllstandsmessung ohne die Elektronik dargestellt. Strahlenrelais sind heute in fast allen Zweigen der Volkswirtschaft verbreitet. Als Beispiel kann der Bergbau angeführt werden, wo im automatisierten Betrieb die Kontrolle der Schüttguthöhe bei der Füllung und Leerung von Hunten, Waggons, Trichtern und Bunkern, die Kontrolle der Position von Hunten und Waggons unter Füll- und Entleerungseinrichtungen sowie die Steinortung zur Vermeidung von Schäden auf Transport- und Verarbeitungsanlagen verbreitete Praxis sind.

Als weiteres Beispiel für die Relaisfunktion und gleichzeitig für die Massenbestimmung im Durchstrahlungsverfahren kann die radiometrische „Wägung", auch Nuklearwaage genannt, angeführt werden. Sie wird vor allem an Fließbändern bei der Verpackung von Produkten eingesetzt. Eine bestimmte Masse ist dadurch ermittelbar, daß im Steuergerät eine definierte Impulsdifferenz aus dem Detektor eingestellt wird. Ein automatisch auslösbarer Mechanismus trennt die so festgelegte Masse von der darauffolgenden ab. Solche Waagen haben den Vorteil,

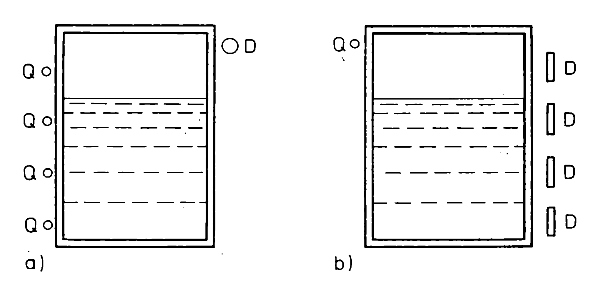


Abb. 12.20
Anordnungen zur Füllstandsmessung. Bezeichnungen: Q — Quelle, D — Detektor

fast überall einsetzbar zu sein, keine beweglichen Teile zu enthalten, die kontinuierliche Arbeit des Bandes oder das Fließen eines Massestromes nicht zu stören und Meßgenauigkeiten von 0,1 % zu ermöglichen.

7. Bei der Durchstrahlung von Stoffen mit Neutronen sind nicht die Hüllenelektronen des Mediums, sondern die Atomkerne die Wechselwirkungspartner. Das hängt mit dem großen Massenunterschied zwischen Elektron und Neutron sowie mit der Ladungslosigkeit des Neutrons zusammen. Formal ergibt sich aber das gleiche Absorptionsgesetz (12.21) mit dem makroskopischen Wirkungsquerschnitt

$$\mu' = N_a \cdot \sigma = N_{a,i} \cdot \sigma_i, \tag{12.23}$$

wobei $N_{a,i}$ die Atomkonzentration der Sorte i und σ_i der mikroskopische oder atomare, für die verschiedenen möglichen Prozesse eingeführte Wirkungsquerschnitt ist. Wenn die Stoffzusammensetzung untersucht werden soll, muß die Materialabhängigkeit des Wirkungsquerschnitts ermittelt sein. Viele Wechselwirkungsprozesse der Neutronen, wie (n, γ), (n, p), (n, α), (n, n'γ) führen auf Anregungen der Kerne oder auf neue Kerne. Sie sollen hier nicht betrachtet werden. Durchstrahlung ohne Stoffänderung liegt lediglich bei der elastischen Streuung vor. Darauf beruht die Anwendung der Neutronen in vielen Durchstrahlungsverfahren. In wasserstoffhaltigen Stoffen geben die Neutronen ihre Energie in wenigen Stößen an die Wasserstoffatome ab, so daß sie auf kurzen Bremswegen von wenigen Zentimetern thermalisiert werden. Aus der Intensität der thermischen Neutronen kann auf den Wasserstoffgehalt geschlossen werden. Als Folge von Thermalisierung und Absorption durchläuft die Rate der thermischen Neutronen nach der Durchstrahlung als Funktion von der Absorberdicke ein ausgesprochenes Maximum. Aussagen über den Gehalt an Wasserstoff müssen daher bei konstanter Schichtdicke durchgeführt werden. Das größte Anwendungsfeld ist die Feuchtigkeitsbestimmung. Ein typisches Beispiel ist die Kontrolle solcher Fertigteile, wie Betonplatten.

Als Neutronenquellen setzt man meist Radionuklid-Neutronenquellen ein. Besonders bewährt haben sich ^{238}Pu-^{9}Be-, ^{252}Cf- und ^{241}Am-^{9}Be-Quellen. Meist verwendete Detektoren sind ^{3}He- und BF_3-Zählrohre sowie Szintillationsdetektoren mit Radiator, z. B. der ^{6}Li-Glas-Szintillator.

12.3.3. Rückstreuung

1. Weit verbreitet ist die Analyse von Oberflächen und oberflächennahen Schichten mit Hilfe der Rückstreuung. In 12.2.1., Punkt 2, wurde bereits darauf hingewiesen. Man nutzt wie bei der Durchstrahlung zu Analysezwecken entweder die durch Rückstreuung verursachte Änderung der integralen Intensität oder der spektrometrischen Zusammensetzung der Strahlung. Eine typische Meßanordnung der in der volkswirtschaftlichen Praxis oft eingesetzten Rückstreumethode zeigt die Abb. 12.17b). Die Detektoren unterscheiden sich nicht prinzipiell von den beim Durchstrahlungsverfahren angewendeten. Allerdings kann mit einer Ringgeometrie des Detektors der Rückstreustrahlung ein größerer Raumwinkel erfaßt werden, wenn die Quelle, wie in der Abb. gezeigt, aufgestellt wird. Auch hier werden vor allem in der volkswirtschaftlichen Praxis Radionuklidquellen bevorzugt eingesetzt.

2. Zur Charakterisierung der Rückstreuintensität hat man den Rückstreukoeffizienten oder -faktor eingeführt:

$$f = \frac{\dot{N}_0 + \dot{N}_R}{\dot{N}_0} = 1 + \frac{\dot{N}_R}{\dot{N}_0}, \tag{12.24}$$

wobei $\dot{N}_0$ die gut kollimierte Einfallsintensität und $\dot{N}_R$ die in den rückwärtigen Raumwinkelbereich gestreute Intensität sind. Man nennt f-1 auch Albedo. Für α-, β- und γ-Strahlung gilt gemeinsam, daß f für wachsende Schichtdicke einem Sättigungswert f_s zustrebt, der bei der Sättigungsdicke erreicht wird. Sie beträgt für α- und β-Strahlung etwa 20% der Reichweite im Rückstreumedium. Wenn der Detektor nur von der rückgestreuten Strahlung getroffen wird, wie in der Abb. 12.17b), dann ist $\dot{N}_R$ proportional zu f-1. Für gut kollimierte β- und γ-Strahlung kann man das exponentielle Schwächungsgesetz (12.21) auf die einfallende und rückgestreute Strahlung mit den Schwächungskoeffizienten μ_0' und μ_r' in der Schichttiefe d ansetzen. Mit einem materialabhängigen Rückstreukoeffizienten d gilt dann

$$d\dot{N}_R = \dot{N}_0 f \, e^{-(\mu_0' + \mu_r') d} \, dd', \tag{12.25}$$

und nach Integration

$$\dot{N}_R = \frac{f \dot{N}_0}{\mu_0' + \mu_r'} \left[1 + e^{-(\mu_0' + \mu_r') d} \right]. \tag{12.26}$$

Für β-Strahlung wird die Sättigungsstreuung bei einem Wert des Exponenten von ca. 3 erreicht. Oberhalb davon hängt die Rückstreuintensität fast nur noch von Z ab, und zwar wächst sie mit Z. Die Abb. 12.21 zeigt die Abhängigkeit des Rückstreufaktors als Funktion von der Ordnungszahl für Strahler mit einer Maximalenergie größer als 0,6 MeV. Die Zunahme mit Z erklärt sich aus der Zunahme der Streuintensität mit Z, d. h. aus der Proportionalität von f zur Elektronendichte ZN_A/A. Das Abbiegen hängt mit der Abhängigkeit von μ_r' von Z zusammen.

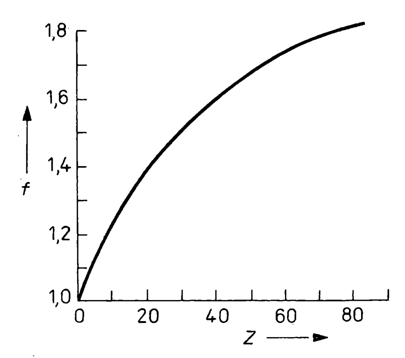


Abb. 12.21
Rückstreufaktor für β-Strahlung aus dicker Schicht als Funktion der Ordnungszahl

Wenn die Rückstreuung der γ-Strahlung nur durch den Compton-Effekt verursacht wird, gilt ebenfalls $f \sim ZN_A/A$. Bei leichten Elementen ist $\mu_0' \approx \mu_r' \approx ZN_A/A$, so daß sich Unabhängigkeit von Z ergibt. Oberhalb von $Z \approx 25$ setzt der Photoeffekt merklich ein, so daß μ_r' eine zu Z^4 proportionale Funktion wird. Daher unterscheidet sich die Rückstreuintensität zwischen Aluminium und Blei um einen Faktor 10. Die Abb. 12.22 zeigt die Abhängigkeit des Albedo als Funktion von der Dicke des Rückstreuers.

3. Häufige Einsatzfälle der β-Rückstreuung sind die Messung der Stärke von Auflageschichten, wie galvanische oder Lackschichten sowie Schmierfilme. Wenn die Auflageschicht einen größeren Z-Wert hat als die Unterlage, dann wächst die Rückstreurate bis zum Sättigungswert an, für kleinere Z-Werte nimmt sie ab. Bei der Bestimmung der Zusammensetzung von Zweistoffgemischen werden die Fehler kleiner, wenn die Z-Werte weit voneinander entfernt liegen.

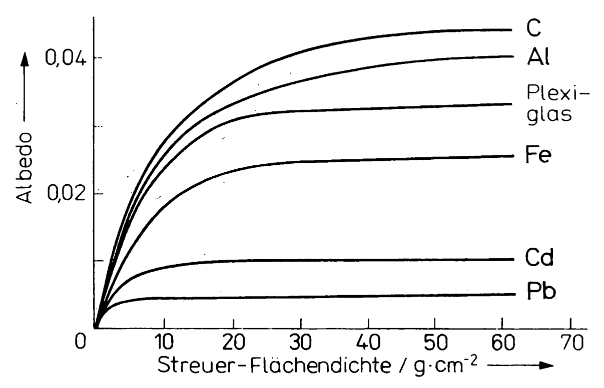


Abb. 12.22
Albedo für ^{60}Co-γ-Quanten als Funktion der Streuerdicke

Die Intensität der Rückstreustrahlung ist naturgemäß abstandsabhängig. In der Anordnung von Abb. 12.23a) hängt sie vom Abstand der beiden Ebenen Quelle—Detektor einerseits und Rückstreumedium andererseits ab. Die Abb. 12.23b) zeigt diese Abstands- und zugleich Z-Abhängigkeit für eine (^{90}Sr + ^{90}Y)-β^--Quelle und einen Si-Detektor. Man nutzt diese Abhängigkeiten in Kernstrahlungssensoren für Roboter. In der Kombination β-Quelle und Halbleiterdetektor mit Vorverstärker lassen sich kleine und robuste Baueinheiten schaffen, die zur Messung von Abständen, Schichtdicken, Oberflächenbeschaffenheiten, geometrischen Verhältnissen usw. im automatisierten Betrieb geeignet sind.

Die γ-Rückstreuung wendet man zur Dickenmessung meist nur an, wenn das Durchstrahlungsverfahren wegen einseitiger Zugänglichkeit ausscheidet. Beispiele sind Rohr- und Kesselwände. Dichtebestimmungen werden mit dem Rückstreuverfahren an Bodenschichten, Straßendecken, Flüssigkeiten in Rohren und Kesseln, geologischen Bohrlöchern, Grenzschichten, wie zwischen Gesteinen oder Abraum und Kohleschichten, sowie zur Aschegehaltsbestimmung von Kohlen durchgeführt.

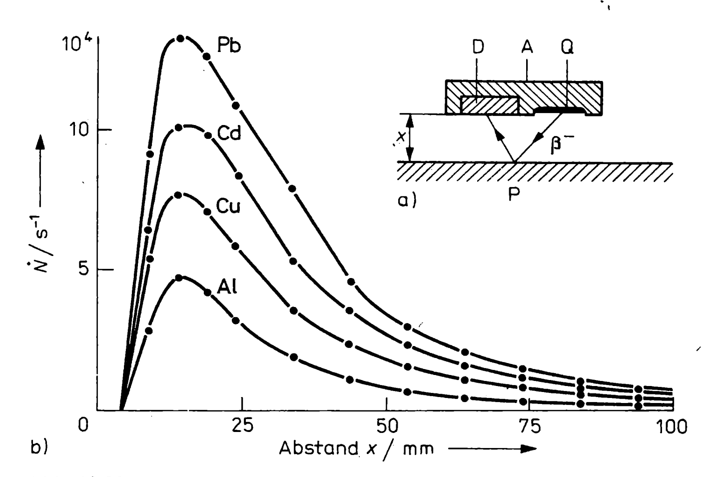


Abb. 12.23
Abstands- und Z-Abhängigkeit der Rückstreuintensität (b) in einem Kernstrahlungssensor (a) mit β-Strahlung (A — Abschirmung, D — Detektor, Q — Quelle)

4. Der bereits in 12.3.2., Punkt 7 besprochene Effekt der Neutronenbremsung wird oft in der Rückstreugeometrie zur Ermittlung des Wasserstoffgehalts benutzt. Zu den bekanntesten Anwendungsfällen gehören die Bestimmung der Feuchtigkeit in Kohle, Erz, Sand, Beton, Erde, Holz, des Kristallwassers in Salzen und Mineralien, des Bitumengehalts in Asphalt sowie die Feststellung der Ausbildung von Eisschichten. Aus der kombinierten Neutronen- und γ-Rückstreuung kann man auf das Volumen von Mikroporen mit Wasser schließen, weil die Intensität der Neutronenstreuung von der Wasserstoffkonzentration abhängt, die der γ-Rückstreuung von der Elektronenkonzentration, also der Dichte. In Abb. 12.24 sind eine Meßanordnung zur Bestimmung des Spiegels zweier übereinander geschichteter Flüssigkeiten sowie die Intensitätsverteilung der rückgestreuten Neutronen dargestellt.

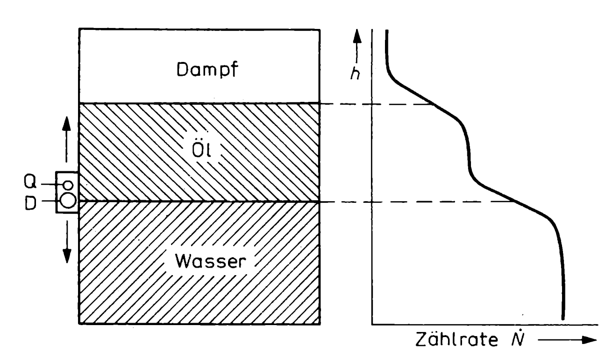


Abb. 12.24
Meßanordnung und Neutronenzählrate zur Bestimmung der Höhe von Flüssigkeitsschichten in einem Kessel. Bezeichnungen: Q — Quelle schneller Neutronen, D — Detektor thermischer Neutronen

5. Die Untersuchung von Oberflächen und oberflächennahen Schichten durch Spektrometrierung der rückgestreuten Teilchen hat in den letzten Jahren vor allem im Zusammenhang mit der Entwicklung der Festkörperphysik und deren Anwendungen weite Verbreitung erfahren. Angewendet werden neben Elektronen besonders verschiedene Ionen. Die Energien reichen vom eV- bis zum MeV-Bereich. Die hier betrachtete Rückstreuung ist nur ein Verfahren der Mikroanalyse von Festkörperoberflächen. Sie kann auf die Rutherford-Rückstreuung (RBS) zurückgeführt werden. Andere Verfahren beruhen auf der Analyse sekundär ausgelöster Teilchen. Im niederenergetischen Bereich ist besonders die Sekundär-Ionen-Massenspektrometrie (SIMS) verbreitet.

Zum experimentellen Aufwand der spektrometrischen Rutherford-Rückstreuung gehören ein fein gebündelter Teilchenstrahl, ein hochauflösendes Halbleiterspektrometer mit der heute üblichen Verarbeitungs- und Auswertetechnik einschließlich einer elektronischen Rechenmaschine. Als Beschleuniger kommen solche mit hoher Energieauflösung oder Monochromazität in Frage, d. h. hauptsächlich elektrostatische Beschleuniger. Wenn der Strahl zusätzlich auf Durchmesser von µm fokussiert wird, spricht man von Mikrosonden und wendet ihn auf Mikrobereiche an. Bei der RBS hängt die Energie der rückgestreuten Teilchen von der Masse der streuenden Atome (B.112) und von der Streutiefe ab. Für eine homogene Probe mit Atomen gleicher Ruhenergie $E_{01}(B)$ und ohne kristalline Orientierung, in deren Oberflächenschicht Atome mit $E_{02}(I) > E_{01}(B)$ implantiert sind, erhält man ein Spektrum, wie es in Abb. 12.25

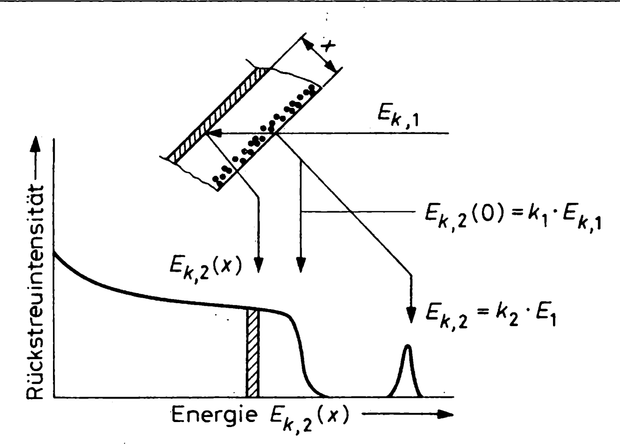


Abb. 12.25
Rückstreuspektrum einer homogenen Probe mit einer in die Oberfläche implantierten Schicht von Atomen, deren Ruhenergie $E_{02}(I)$ größer ist, als die des Basismaterials mit $E_{02}(B)$

gezeigt ist. Da die Streuung an der Oberfläche kaum gestört wird, gilt für die Energie der Teilchen (B.74). Durch Einsetzen von α, k und $\pi/2 < \vartheta_3 < \pi$ erhält man

$$E'_{k,1} = E_{k,1} \cdot \varkappa , \tag{12.27}$$

wobei $\varkappa$ ein kinematischer Faktor ist. Aus seiner Abhängigkeit von $E_{0,2}$ in Abb. 12.26 sieht man, daß große Änderungen besonders für kleine Ruhenergien $E_{0,2}$ auftreten.

Der Anwendungsbereich der spektrometrischen Rückstreuung ist sehr weit. Zusammenfassend kann man eine Einteilung in die Untersuchung der Stöchiometrie und der Dicke von Oberflächenschichten vornehmen, in die Untersuchung der Kristallperfektion epitaktischer Schichten, von Diffusionsvorgängen, der Legierungsbildung, von Vielschichtstrukturen, der Strahlenschäden sowie der Oberflächenrauheit. Als konkretes Beispiel betrachten wir in Abb. 12.27 die Rückstreuspektren von 1,2-MeV-He^+-Ionen bei Beschuß von Silizium in ⟨111⟩-Richtung, nachdem pro $cm^2 \cdot 10^{15}$ Arsen-Ionen mit einer Energie von 65 keV implantiert und thermisch sowie mit Laserlicht ausgeheilt wurde.

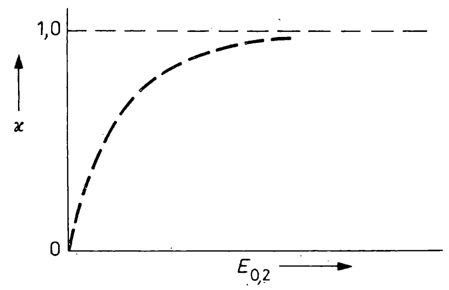


Abb. 12.26
Abhängigkeit des kinematischen Faktors $\varkappa$ von der Ruhenergie der Streuatome

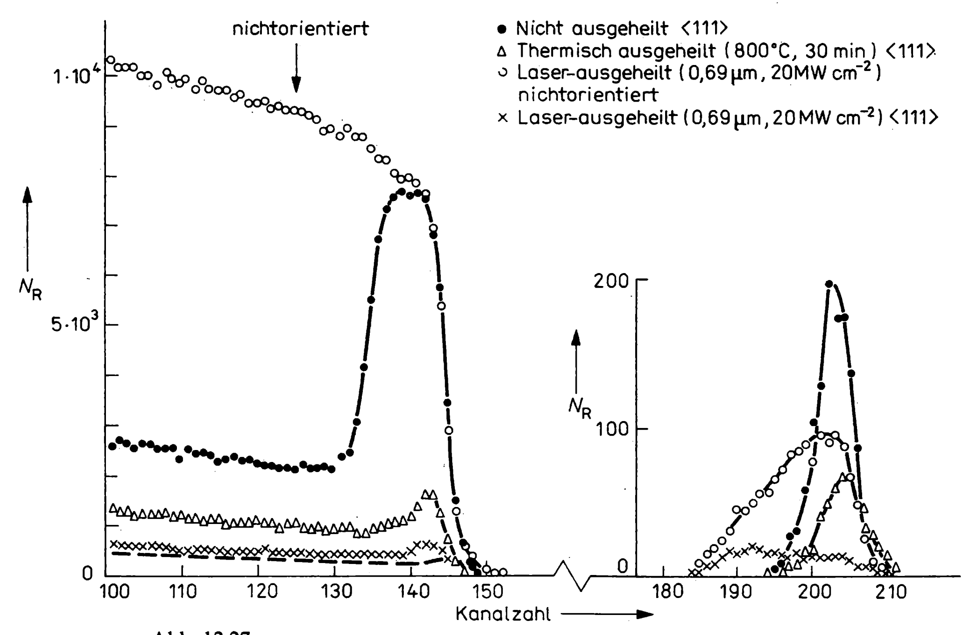


Abb. 12.27
Rückstreuspektren von 1,2-MeV-He^+-Ionen bei Beschuß von Silizium in ⟨111⟩-Richtung nach Implantation von $10^{15}/cm^2$ 65-keV-As-Ionen und thermischer Ausheilung bei 600 °C in 30 Minuten sowie Laserausheilung mit 20 MW/cm^2 und λ = 0,69 µm

12.3.4. Wellenlängen- und energiedispersive Streuung

1. Die Welleneigenschaften der elektromagnetischen und der Teilchenstrahlung werden auf vielfältige Weise zur Untersuchung der Struktur und der Dynamik der Materie genutzt. In 6.2. wurde beispielsweise die Ermittlung von Dichten in den Atomkernen und der Nukleonen mit Hilfe der Streuung schneller Elektronen besprochen. In diesem Abschnitt soll auf die Möglichkeiten hingewiesen werden, die sich aus der Streuung für die Untersuchung von Flüssigkeiten und Festkörpern ergeben. Man nennt das Gebiet Strukturanalyse. Die Aufgabe besteht in der Ermittlung von Dichteverteilungen meist in mikroskopischen Bereichen. Dabei stehen Dichten von elektrischen Ladungen, Massen und magnetischen Dipolen im Vordergrund des Interesses. Der Messung zugänglich sind die verschiedenen Wirkungsquerschnitte. Ihre Auswertung erfolgt auf der Grundlage der Streutheorie und im Rahmen von Modellen über die untersuchte Materiestruktur. Gemessen werden Substanzen in allen Aggregatzuständen. Die Messungen führen zu Korrelationen, die Gegenstand der Auswertung sind.

Zu den am häufigsten eingesetzten Strahlungen gehören Quantenstrahlungen, wie Röntgen-, elektrische und magnetische Bremsstrahlung, Elektronen und besonders Neutronen. Auf Grund der spezifischen Eigenschaften der Strahlungen reagieren sie auf zum Teil unterschiedliche innerstoffliche Felder. Photonen wechselwirken vorwiegend mit den Hüllenelektronen, Elektronen mit den elektrostatischen Feldern der Atome und Neutronen mit den Atomkernen und den magnetischen Feldern. Daher eignen sich Photonen und Elektronen zur Untersuchung von Ladungsdichteverteilungen und Neutronen zur Untersuchung von Massedichteverteilungen sowie Verteilungen des magnetischen Dipolmoments. Alle diese Aufgaben werden über die Auswertung von Diffraktionsspektren gelöst. Da Neutronen auch unelastische Streuungen an

gebundenen Atomen erfahren, lassen sich mit ihrer Hilfe auch die dynamischen Eigenschaften von Stoffen untersuchen. Dazu ist die Spektrometrie der Neutronen erforderlich.

In den Gasen fehlen Korrelationen zwischen den Teilchen. In einatomigen Gasen findet man die Elektronendichteverteilung der Atome, in mehratomigen die der Moleküle. In Lösungen bestimmt man die Form und die Struktur von Molekülen und größeren Teilchen, wie Zellen, Viren usw. In Flüssigkeiten und amorphen Körpern, wo es Korrelationen zwischen den Nachbaratomen gibt, kann die Nahordnung festgestellt werden. Die meisten Informationen lassen sich über Kristalle erhalten. Neben der Nah-, gibt es hier noch die Fernordnung. Es lassen sich die Koordinaten der Atome bestimmen, auch in so komplizierten Stoffen, wie in den Biopolymeren. Störungen der Periodizität äußern sich in Besonderheiten der Streuspektren wie in Satellitenlinien, Untergrundverhältnissen usw. Ihre Analyse ermöglicht sowohl die Ermittlung statischer Störungen, wie Punktdefekte und Dislokationen, als auch dynamischer Störungen, wie Wärmebewegungen, Phononen und Magnonen sowie deren Wechselwirkungen. Statische und dynamische Störungen beeinflussen die physikalischen Eigenschaften der Festkörper, insbesondere solche Transporteigenschaften, wie Wärme- und elektrische Leitfähigkeit sowie Diffusion und solche Grundeigenschaften wie Plastizität und Festigkeit. Zu den Untersuchungsgegenständen gehören auch solche Erscheinungen, wie Poly- und Isomorphismus, Morphotropie, Phasenzusammensetzungen und Phasenübergänge, die damit zusammenhängenden metastabilen Zustände sowie Texturen.

In den Abbildungen 12.28 und 12.29 wird ein Überblick über Wellenlängen und Energien von Quanten- und Neutronenstrahlungen sowie über charakteristische Erscheinungsbereiche gegeben.

2. Eine Voraussetzung für die wellenlängenabhängige Streuung ist die Erfüllung der Beziehung (3.15), wonach die Wellenlänge λ kleiner sein muß, als die zu untersuchende charakteristische Länge d. Diffraktion ergibt sich nur, wenn die gestreuten Wellen interferenzfähig sind. In Abb. 12.30 sind eine typische Meßanordnung und ein Diffraktionsspektrum dargestellt.

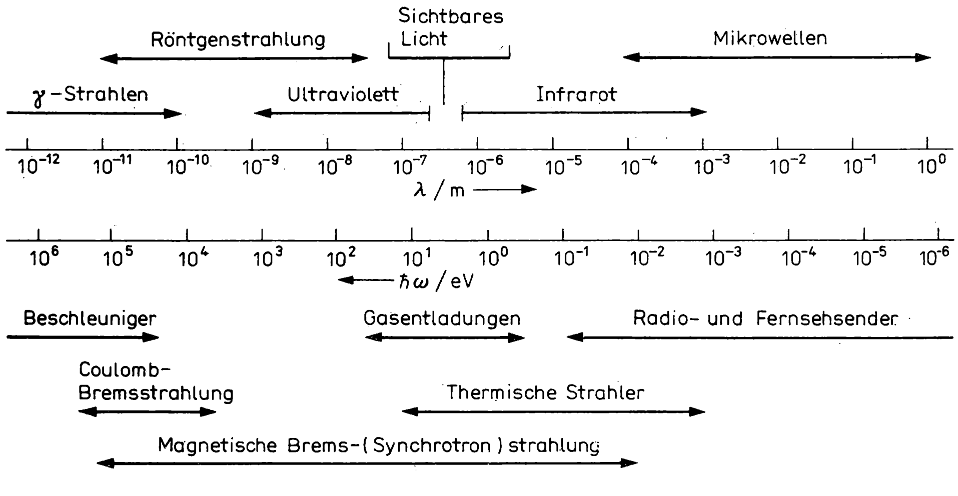


Abb. 12.28
Spektrum der elektromagnetischen Strahlung und Anwendungsgebiete

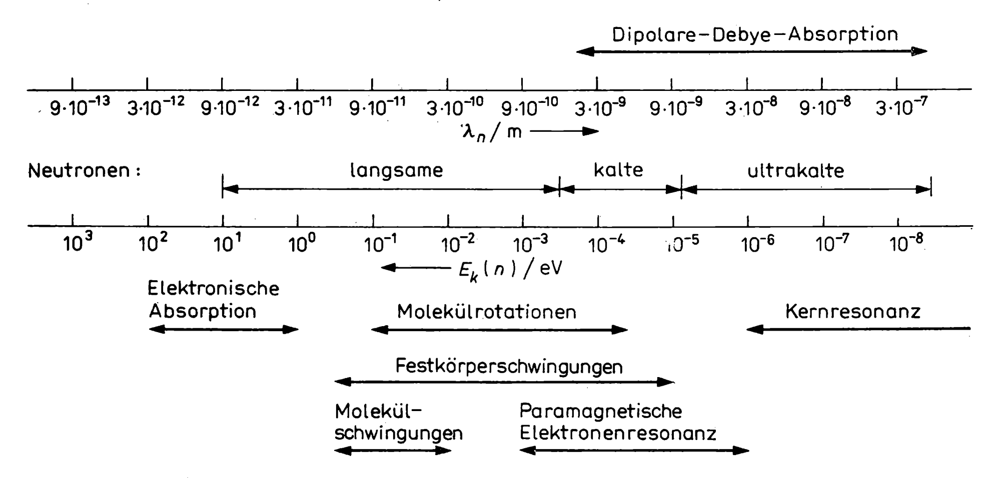


Abb. 12.29
Spektrum der langsamen, kalten und ultrakalten Neutronen sowie typische Energiebereiche verschiedener Erscheinungen

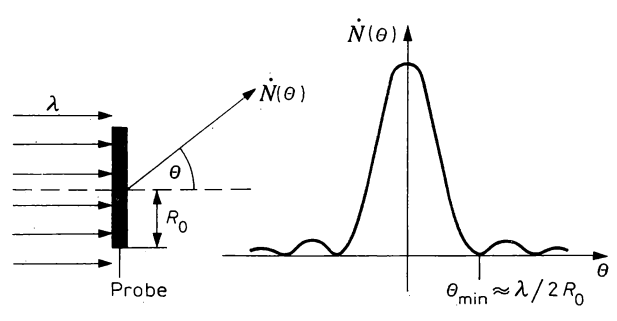


Abb. 12.30
Diffraktionsexperiment: a) Meßanordnung, b) Diffraktionsspektrum (statt I lies $\dot{N}$)

Im Ergebnis der Diffraktion bilden sich deutliche Maxima und Minima der Intensität der gestreuten Strahlung aus. Das erste Minimum, zwischen dem Haupt- und dem ersten Nebenmaximum gelegen, ergibt sich aus

$$\sin \vartheta_{\min} = \frac{D}{d} = 0{,}61 \frac{\lambda}{R_0} \tag{12.28}$$

beim Winkel $\vartheta_{\min}$. Dabei ist D der Abstand zwischen Target und Detektor, d der Abstand zum Zentrum des Beugungsbildes und R_0 der Radius eines kreisförmigen Streuzentrums. Der Winkel $\vartheta_{\min}$ ist ein Maß für die Auflösung des Spektrometers. Daher liefert die Angabe der Größe $\sin \vartheta/\lambda$ einen Überblick über die untersuchbare räumliche Ausdehnung.

Die Abhängigkeit der Streuintensität $\dot{N}(\vartheta)$ wird mit Hilfe des Wirkungsquerschnitts als Funktion von den für die verschiedenen Streuursachen erforderlichen Formfaktoren und Streuamplituden $f(\vartheta)$, die die Gesamtstreuamplitude $F(\vartheta)$ bilden, erklärt. Mit

$$d\sigma = |F(\vartheta, \boldsymbol{k})|^2 \, d\Omega \,, \tag{12.29}$$

wobei $\boldsymbol{k}$ der Wellenvektor ist, gilt

$$\left(\frac{\mathrm{d}\dot{N}}{\mathrm{d}\Omega}\right)_\vartheta = \dot{N}_0 \,\mathrm{d}\sigma(\vartheta, \boldsymbol{k}) \doteq \dot{N}_0 \,|F(\vartheta, \boldsymbol{k})|^2 . \tag{12.30}$$

Die größten Unterschiede in den Eigenschaften der verwendeten Strahlungen bestehen zwischen Photonen und Neutronen. Wir betrachten einige grundlegende Konsequenzen.

3. Quanten- und Neutronenstrahlung unterscheiden sich grundsätzlich hinsichtlich des Verhältnisses von Wellenlänge und Energie sowie der Geschwindigkeiten. In Flüssigkeiten und Festkörpern betragen die charakteristischen Werte der Energien der Schwingungsquanten, der Geschwindigkeiten der Atome und der Abstände zwischen ihnen 10^{-2} eV, 10^3 m/s und 10^{-10} m. Neutronen mit einer Wellenlänge von 10^{-10} m haben gerade diese Geschwindigkeit und diese Energie. Ganz andere Werte ergeben sich für die Photonen. Aus $E_k(\mathrm{n}) = h^2/2m\lambda^2$, $v(\mathrm{n}) = h/m\lambda$, $E_\gamma \doteq hc/\lambda$ und $v_\gamma = c$ ergibt sich für die Energien und Geschwindigkeiten

$$\frac{E_\gamma}{E_k(\mathrm{n})} = \frac{2c}{v(\mathrm{n})} . \tag{12.31}$$

Das bedeutet für Photonen mit einer den Atomabständen angemessenen Wellenlängen eine 10^5mal größere Energie, als die der charakteristischen Anregungsquanten und eine um 10^7mal größere Geschwindigkeit als die der Atome. Die Besonderheiten der atomaren Dynamik in Flüssigkeiten und Festkörpern können daher keinen merklichen Einfluß auf die Streuung der Photonen ausüben. Umgekehrt reagieren die Neutronen sehr empfindlich auf die Besonderheiten, da ihre Energie und ihre Geschwindigkeiten angepaßt sind. Die dabei auftretende unelastische Streuung führt zur Aufspaltung der Erscheinungen und damit zu einem zweiten Anteil des Wirkungsquerschnitts:

$$\sigma = \sigma_{\mathrm{el}} + \sigma_{\mathrm{unel}} . \tag{12.32}$$

Neben der Diffraktometrie liefert also auch die Spektrometrie Aussagen über die Struktur und die Dynamik.

Ein weiterer wesentlicher Unterschied besteht zwischen Quanten- und Neutronenstrahlung durch die Ruhenergie und das magnetische Dipolmoment des Neutrons, die beide beim Photon fehlen. Das ist der Grund dafür, daß Photonen nur über die elektromagnetische Wechsel-

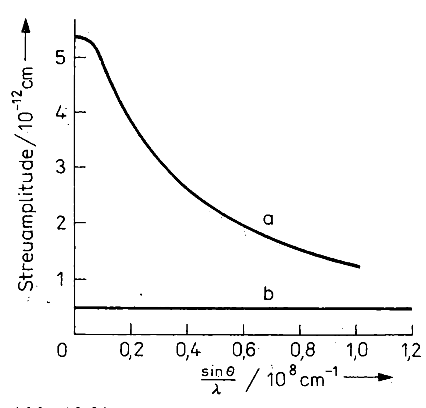


Abb. 12.31
Streuamplituden für Quanten- und Neutronenstrahlung an einem mittleren Element
a) Quantenstreuung an den Hüllenelektronen, b) Neutronenstreuung an den Kernen

wirkung mit den Hüllenelektronen gestreut werden und sich damit zur Untersuchung der Elektronendichte eignen. Neutronen werden hauptsächlich an den Kernen gestreut, an Elektronen nur, wenn diese zum Magnetfeld des Atoms beitragen. Das ist für unpaarige Elektronen durch den Spinmagnetismus gegeben. Daher werden mit langsamen Neutronen Strukturen über die Kerndichteverteilungen und die Dichte des magnetischen Dipolmoments untersucht.

Die Streuamplituden der Quanten- und Neutronenstreuung an den Atomen unterscheiden sich sehr wesentlich. Während die Streuung am Kern wegen der nahezu punktförmigen Ausdehnung des Streuzentrums gemessen an der Neutronenwellenlänge isotrop ist, ergibt sich für die Quanten bei der Streuung an den Hüllen mit einem Durchmesser von 10^{-10} m eine starke Anisotropie, wie sie Abb. 12.31 zeigt.
Die Streuamplituden der Quantenstreuung an den Hüllenelektronen können berechnet werden. Sie sind proportional zu Z, die Wirkungsquerschnitte also proportional zu Z^2. Ganz anders verhält es sich bei den Streuamplituden der Neutronen am Kern. Sie sind der Berechnung nur sehr schwer zugänglich und untzerscheiden sich von Nuklid zu Nuklid zum Teil recht wesentlich; sogar zu benachbarten Isotopen eines Elements gibt es große Unterschiede. Aus Abb. 12.32 kann man den Streubereich zwischen $A = 0$ und $A = 250$ erkennen. Es ergibt sich eine näherungsweise Unabhängigkeit von Z. Man macht von den isotopen Unterschieden der Neutronenstreuung besonders bei kleinen Differenzen in Z, wie bei den Kohlenwasserstoffverbindungen, Gebrauch, aber auch bei sehr unterschiedlichen Z-Werten, wo die Streuung am Element mit großem Z die am Element mit kleinem überdecken kann.

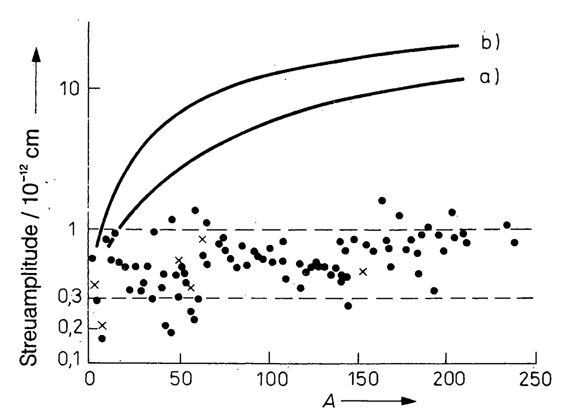


Abb. 12.32
Streuamplituden für Neutronen an Kernen (Punkte und Kreuze) sowie für Quanten an den Hüllenelektronen
a) mit $\sin\Theta/\lambda = 5 \cdot 10^9 \text{m}^{-1}$,
b) mit $\sin\Theta/\lambda = 10^9 \text{m}^{-1}$,
in beiden Fällen für $0 < Z < 250$

Auch die Elektronenstreuung hat gewisse Vorteile im Vergleich zu den beiden anderen bisher betrachteten Teilchenarten. Da die Streuung hier vor allem auf der Wechselwirkung mit dem elektrostatischen Feld der Atome beruht, ist sie sehr intensiv und wird besonders bei der Untersuchung dünner Schichten von etwa 10^{-8} m Dicke eingesetzt.

4. Die Streuung langsamer Neutronen in kondensierter Materie weist eine Reihe von Besonderheiten auf, da sie nicht am einzelnen Atom, sondern vorwiegend an Atomkollektiven stattfindet. Die Wellenlänge ist zwar von der Größenordnung des Abstandes zwischen den Atomen oder kleiner, aber zwischen den Atomen gibt es Bindungen. Wenn die Streuzentren identisch

und in gleichmäßigen Abständen angeordnet sind, also gleiche Streuphasen erzeugen, kommt es durch Interferenz zur Diffraktion. Man spricht von kohärenter Streuung. Im entgegengesetzten Falle, wenn Unregelmäßigkeiten in der Anordnung und in individuellen Eigenheiten der Streuzentren vorhanden sind, kommt es zur nichtinterferenzfähigen inkohärenten Streuung. Der Streuquerschnitt setzt sich somit abermals aus zwei Anteilen zusammen:

$$\sigma = \sigma_{\mathrm{koh}} + \sigma_{\mathrm{ink}} \,. \tag{12.33}$$

Der kohärente Streuanteil entsteht gemäß (12.29) durch Addition der Quadrate der Streuamplituden von N gleichen Streuzentren:

$$\sigma_{\mathrm{koh}} \sim \left(\sum_i^N f_i \right)^2 \sim N^2 \sigma_i \,. \tag{12.34}$$

Die Diffraktion wurde 1914 von W. L. BRAGG durch ein einfaches Modell erklärt, in dem an die Stelle der Überlagerung der kohärenten Wellen von vielen Streuzentren die Reflexion der Wellen an den Gitterebenen gesetzt wurde, wie es die Abb. 4.14 zeigt. Intensitätsmaxima werden nur beobachtet, wenn die Interferenz maximale Verstärkung gibt. Das ist der Fall, wenn die Braggsche Reflexionsbedingung

$$2d \sin \vartheta = n\lambda \tag{12.35}$$

erfüllt ist. Darin sind d der Abstand zwischen benachbarten Gitterebenen, ϑ der Winkel zwischen der Einfallsrichtung der Quanten oder Teilchen und den Gitterebenen und n eine ganze Zahl, die Beugungsordnung. Da gewöhnlich $d \approx 2 \cdot 10^{-10}$ m beträgt, muß $\lambda < 2 \cdot 10^{-10}$ m sein. Bei größeren Werten findet keine Diffraktion mehr statt. Sie bricht bei der Braggschen Sprungwellenlänge $\lambda_B \approx 2d$ ab. Ihr Energieäquivalent, die Braggsche Sprungenergie liegt in Abhängigkeit vom Kristalltyp bei $5 \cdot 10^{-3}$ eV.

Beim inkohärenten Anteil der Streuung ist zu berücksichtigen, daß sich die Quadrate der Streuamplituden einzelner gestreuter Wellen addieren:

$$\sigma_{\mathrm{ink}} \sim \sum_i^N f_i^2 \sim N \sigma_i \,. \tag{12.36}$$

Die Ursache der Störung der kollektiven kohärenten Streuung kann unterschiedlicher Natur sein. Zwei wichtige Gründe sind die isotopen Unterschiede der Kernstreuung, die zur isotopen Inkohärenz führen, und die vom Kernspin abhängigen Unterschiede, die zur Spininkohärenz führen.

Wenn der Streuer nur eine einzige Nuklidart enthält, werden die Neutronen kohärent gestreut. Hat die Nuklidart den Spin I, so können die Neutronen gemäß ihrer Spinprojektion zum Gesamtspin $I + 1/2$ und $I - 1/2$ koppeln. Die zugehörigen Streuamplituden sind im allgemeinen verschieden; wir nennen sie f_+ und f_-. Die Wahrscheinlichkeiten für die Einstellung der einen oder anderen Variante sind wegen der Gesamtzahl der möglichen Einstellungen von $(2I_1 + 1)\,(2I_2 + 1)$ bzw. $(2s + 1)\,(2I + 1)$ für beide Fälle (siehe Seite 227,228)

$$W_+ = \frac{I + 1}{2I + 1} \,, \qquad W_- = \frac{I}{2I + 1} \,. \tag{12.37}$$

Daraus ergibt sich in Übereinstimmung mit (12.29) und (12.33)

$$\mathrm{d}\sigma = (W_+ f_+^2 + W_- f_-^2)\, \mathrm{d}\Omega \,. \tag{12.38}$$

Der Zusammenhang zwischen kohärentem und inkohärentem Wirkungsquerschnitt und (12.38) folgt aus

$$\mathrm{d}\sigma = (f_{\mathrm{koh}}^2 + f_{\mathrm{ink}}^2)\, \mathrm{d}\Omega \tag{12.39}$$

zu

$$d\sigma = \left[(W_+ f_+ + W_- f_-)^2 + \frac{I(I+1)}{(2I+1)^2} (f_+ - f_-)^2 \right] d\Omega \,. \qquad (12.40)$$

Die Größen f_+ und f_- können entgegengesetztes Vorzeichen haben, so daß die verschiedensten Verhältnisse von σ_{koh} und σ_{ink} auftreten können. Beim Wasserstoffatom ist $f_+ = 1{,}04 \cdot 10^{-14}$ m, $f_- = -0{,}47 \cdot 10^{-14}$ m und $I = 1/2$. Daher ist $\sigma_{koh} = 2 \cdot 10^{-28}$ m^2 und $\sigma_{ink} = 81 \cdot 10^{-28}$ m^2.

5. Da die Energie der langsamen Neutronen von der gleichen Größenordnung ist, wie die chemische Bindungsenergie, muß sie Auswirkungen auf die Streuung haben. Das betrifft die Atome in Molekülen von Gasen und Flüssigkeiten ebenso wie die Atome in den Kristallen. In einem Kristallgitter z. B. wechselwirkt ein Neutron, das an einem Kern inkohärent gestreut wurde wegen dieser Bindung ebenso mit der Umgebung oder dem gesamten Gitter. Die Folge davon ist eine außerordentlich große effektive Masse des Streuers, so daß Labor- und Massenmittelpunktsystem identisch werden. In der Bornschen Näherung ist die Streuamplitude proportional zur reduzierten Masse $\mu = A/(A + 1)$. Mit wachsender effektiver Masse geht μ gegen 1. Das führt zu einem kinematischen Effekt, der sich in einer Vergrößerung der Streuamplitude äußert. Aus einer Streuamplitude f_0 wird

$$f = f_0 \frac{A+1}{A} \,. \qquad (12.41)$$

Die Streuung der langsamen Neutronen erfolgt damit an den gebundenen Gitteratomen ohne Änderung ihrer Energie. Es wird zwar Impuls, nicht aber Energie ausgetauscht. Man spricht von inkohärenter elastischer Streuung. Sie ist nicht mit der elastischen Streuung am freien Kern zu verwechseln, weil dort wegen $\mu < 1$ auch Rückstoßenergie vom Stoßpartner aufgenommen wird. In der Hinsicht des Impulsaustausches ohne gleichzeitigen Energieaustausch sind diese Art der elastischen Streuung und der Mößbauer-Effekt einander sehr ähnlich. In gasförmigen oder flüssigen Proben mit Molekülen ist die Bezeichnung elastisch wegen der nicht so intensiven Bindung an eine große Zahl von Kernen des Atomkollektivs der Umgebung durch quasielastisch zu ersetzen. Diese Überlegungen haben auch für die kohärente Streuung Gültigkeit, d. h. für die kohärente elastische Streuung an Kollektiven von Kernen.

6. Die auf eine Probe treffenden monoenergetischen Neutronen stellen eine ebene Welle dar, die die bereits statistisch verteilt schwingenden Atome zu zusätzlichen Schwingungen anregt, d. h., es werden Phononen übertragen. Ein unter einem Streuwinkel aufgestellter Detektor registriert Neutronen, die eine andere als die Einfallsenergie haben, größer oder kleiner, aber gequantelt, weil nur ganzzahlige Vielfache der Phononenenergie übertragen werden können. Da die Energieänderung direkt mit der Bewegung der einzelnen Streuzentren in Zusammenhang steht, ist diese inkohärente unelastische Streuung der Informationsträger über die Bewegung der streuenden Einzelatome, die allerdings nicht isoliert zu betrachten sind, sondern unter dem Einfluß der von allen anderen Atomen ausgehenden Kräften stehen. Während also die kohärente unelastische Streuung die Bewegung der Einzelatome beschreibt, gibt die inkohärente unelastische Streuung Auskunft über die Bewegung des gesamten Kollektivs der Streuzentren. Man nutzt die inkohärente unelastische Streuung, um die Zustandsdichte der Phononen, das Phonenenspektrum $q(\omega)$, die kohärente unelastische Streuung, um die Phononendispersion $\omega(q)$ in den Kristallrichtungen zu bestimmen. Die Streuung wird dabei als Stoßprozeß zwischen Neutronen und Phononen aufgefaßt. Bei einem Einphononenprozeß lautet der Energiesatz

$$\pm \hbar\omega = \frac{\hbar^2}{2m_n} (k_0^2 - k^2) \,, \qquad (12.42)$$

d. h., die Phononenenergie entspricht gerade der vom Neutron abgegebenen oder aufgenommenen Energie. Der Impulssatz lautet dann

$$\hbar(\boldsymbol{k}_0 - \boldsymbol{k}) = 2\pi\hbar\tau - \hbar q\,; \qquad \tau = |d|^{-1}\,, \tag{12.43}$$

wobei $2\pi\tau$ der dem Gitter als Ganzem übertragene Impuls ist und q der dem Phonon übertragene.

7. Die magnetische Streuung der Neutronen an einzelnen Atomen unterscheidet sich von der an Kernen durch die Anisotropie, die ihrerseits, wie in Punkt 3 besprochen, eine Folge des Atomdurchmessers von 10^{-10} m ist. Im Vergleich dazu erscheint der Kern punktförmig. Diese Winkelabhängigkeit wird durch einen Formfaktor berücksichtigt. Er unterscheidet sich wesentlich von dem der Quantenstreuung am Atom, weil zur Neutronenstreuung am Atom nur Elektronen beitragen, die ein von ihrem Spin bedingtes magnetisches Moment besitzen. Meist ist die magnetische Streuung von der gleichen Größenordnung wie die Streuung am Kern. In einigen Fällen ist sie sogar größer. Der Hauptanteil der magnetischen Neutronenstreuung ist elastisch und kohärent, so daß Diffraktionsbilder entstehen. Die unelastische magnetische Streuung muß wegen der geringen Wirkungsquerschnitte der Neutronen mit kalten Neutronen, die keine kohärente Streuung erfahren sowie im Rahmen der Kleinwinkelstreuung untersucht werden. In Analogie zur Neutronen-Phononen-Streuung kann hier die Neutronen-Magnonen-Streuung untersucht werden.

Diese Untersuchungen lassen sich auch mit polarisierten Neutronen durchführen: insbesondere kann die örtliche Verteilung der magnetischen Momente in Kristallgittern einschließlich der Größe und der Richtung relativ zu den Gitterebenen ermittelt werden sowie die Verteilungen in ferro- und antiferromagnetischen Materialien. Die Neutronendiffraktion ist die wichtigste Methode zur Untersuchung dieser Strukturen.

Faßt man die Streumöglichkeiten gemäß (12.32) und (12.33) zusammen, so ergibt sich das folgende Schema der Aufspaltung in verschiedene Streuquerschnitte:

$$\sigma \begin{cases} \sigma_{\text{ink}} \begin{cases} \sigma_{\text{ink, el}} \\ \sigma_{\text{ink, unel}} \end{cases} \\ \sigma_{\text{koh}} \begin{cases} \sigma_{\text{koh, el}} \\ \sigma_{\text{koh, unel}}\,. \end{cases} \end{cases} \tag{12.44}$$

Die Informationen über die Struktur des Streuers sind am stärksten in den kohärenten Streuquerschnitten enthalten, also in den Diffraktionsbildern. Über die Dynamik geben die unelastischen Streuquerschnitte Auskunft, also die Energiespektren der Neutronen.

8. Da bei der Struktur- und Dynamik-Untersuchung mit langsamen Neutronen meist die Winkel- und Energieabhängigkeit der Streuung gemessen wird, läuft die Messung auf die Ermittlung eines zweifach differentiellen Wirkungsquerschnitts hinaus, der in Übereinstimmung mit (12.44) die folgende Form hat:

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2\sigma}{\mathrm{d}\Omega\,\mathrm{d}E}\right) = \left(\frac{\mathrm{d}^2\sigma}{\mathrm{d}\Omega\,\mathrm{d}E}\right)_{\text{koh, el}} + \left(\frac{\mathrm{d}^2\sigma}{\mathrm{d}\Omega\,\mathrm{d}E}\right)_{\text{koh, unel}} + \left(\frac{\mathrm{d}^2\sigma}{\mathrm{d}\Omega\,\mathrm{d}E}\right)_{\text{ink, el}} + \left(\frac{\mathrm{d}^2\sigma}{\mathrm{d}\Omega\,\mathrm{d}E}\right)_{\text{ink, unel}}. \tag{12.45}$$

Bei Strukturuntersuchungen verwendet man in der Regel monoenergetische thermische Neutronen. Die thermische Energie ist größer als die Braggsche Sprungenergie. Diese Wellen werden elastisch und kohärent gestreut. Zur Untersuchung der Dynamik der Atome werden monoenergetische thermische und kalte Neutronen eingesetzt. Die thermischen Neutronen geben dabei Energie ab, die kalten nehmen sie auf.

Aus der Röntgen-Diffraktometrie sind drei Verfahren bekannt, das Laue-, das Drehkristall- und das Pulver- oder Debye-Scherrer-Verfahren. Sie lassen sich alle drei auch für Neutronen einsetzen. Verbreitung haben aber bei den Neutronen nur die letzten beiden gefunden. Die Abb. 12.33 zeigt ein Neutronendiffraktometer für Pulveruntersuchungen. Die aus dem Reaktor austretenden, nahezu maxwellverteilten Neutronen werden durch Bragg-Reflexion an einem Einkristall monochromatisiert. Erst danach treffen sie auf die Probe, um deren Mittelpunkt ein Neutronendetektor auf einem Goniometerarm schwenkbar angeordnet ist. Die relative energetische Auflösung kann durch Differentiation von (12.35) berechnet werden zu

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\Delta E}{E} = \operatorname{ctg} \vartheta \, \Delta\vartheta \,. \qquad (12.46)$$

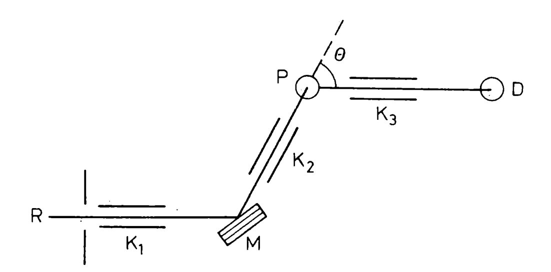


Abb. 12.33
Neutronendiffraktometer für Pulveruntersuchungen: R — Reaktor, K — Kollimator, M — Monochromator, P — Probe, D — Detektor

Die Grenze der energetischen Auflösung wird durch die Mosaikstruktur des Monochromatorkristalls vorgegeben. Sie liegt bei 10 Bogenminuten. Da die Streuquerschnitte für Neutronen 10 bis 100mal kleiner sind als für Photonen, bereiten solche einkanaligen Spektrometer selbst bei großen Probenvolumina Intensitätsschwierigkeiten. Einen gewissen Ausweg stellen Neutronenflugzeit-Spektrometer dar. Man hält den Streuwinkel fest und läßt das gesamte Neutronenspektrum auf die Probe treffen, so daß in die Richtung der Flugstrecke alle die Neutronen mit diskreten Energien gelangen, die für die in der Probe vorkommenden Gitterebenenabstände die Bragg-Bedingung erfüllen. Die Geschwindigkeiten von einigen km/s gestatten an der definierten Laufstreckenlänge zwischen Probe und Detektor eine relativ einfache Flugzeitmessung und damit die Bestimmung von Geschwindigkeit und Energie. Die Flugzeitmethode setzt einen gepulsten Strahl voraus (siehe 5.8.2.). Verbreitet werden mechanische Unterbrecher, sogenannte Chopper, verwendet. Die geringe Zeitausnutzung des kontinuierlichen Strahls, die mit konventionellen Choppern bei weniger als 1 % liegt, ist ein Nachteil, der allerdings von dem Vorteil übertroffen wird, daß alle Streuwinkel und Energieänderungen gleichzeitig erfaßt werden. In diesem Zusammenhang wird die Überlegenheit von Impulsreaktoren besonders deutlich.

Die gleiche Geometrie wird neuerdings auch für Röntgen-Strahlung verwendet, jedoch ohne Flugzeitspektrometer. An die Stelle des Neutronendetektors tritt ein spektrometrischer Halbleiterdetektor vom Typ Si(Li). Die Braggsche Reflexionsbedingung mit $\lambda = \text{const.}$ und $d \sim \sin^{-1} \vartheta$ nimmt nun die Form

$$\vartheta = \text{const.}\,, \qquad d \sim E^{-1} \qquad (12.47)$$

an. Die energetische Auflösung wird hier vom Detektor und dem Rauschen bestimmt. Sie liegt meist zwischen 150 und 250 eV. Man spricht in diesem Falle von energiedispersiver Diffraktometrie, die an die Stelle der wellenlängendispersiven Diffraktometrie der Röntgen-Strahlung getreten ist. Der Vorteil besteht vor allem in den kurzen Meßzeiten und im Weg-

fall des aufwendigen Goniometers. Es wird daran gearbeitet, den Winkelbereich durch positionsempfindliche Detektoren wesentlich zu erweitern.

Zur Untersuchung der unelastischen Neutronenstreuung werden sogenannte Doppelspektrometer benötigt. Wie beim Diffraktometer wird zuerst durch einen Einkristall ein monochromatischer Strahl erzeugt, der dann auf die Probe trifft. Die Analyse der Energieänderung der in die verschiedenen Richtungen gestreuten Neutronen wird mit einem zweiten Spektrometer durchgeführt. Solche Doppelspektrometer lassen sich auch durch Aufstellung eines Kristallspektrometers an einem Neutronendiffraktometer realisieren. Man nennt die Anordnung auch Dreiachsenspektrometer. Die Abb. 12.34 zeigt das Schema eines Dreiachsenspektrometers. Es läßt sich zur Ausmessung von Phononen- und Magnonenspektren verwenden. Dazu hält man z. B. $k_0 - k = \text{const.}$, wie es gemäß (12.43) für die Phononenmessung gefordert wird.

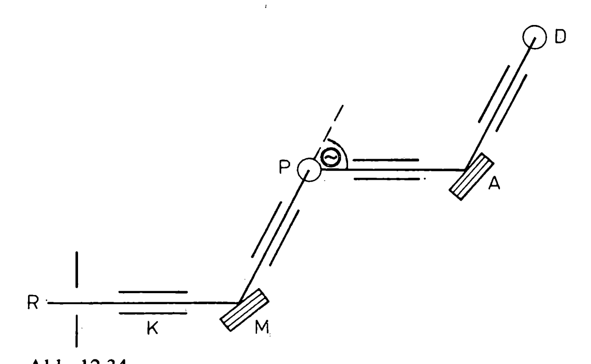


Abb. 12.34
Dreiachsen-Kristallspektrometer zur Untersuchung der unelastischen Neutronenstreuung. Bezeichnungen wie zu Abb. 12.33 und A-Analysator

Doppelspektrometer können auch nach der Flugzeitmethode aufgebaut werden. Dazu wird wieder ein gepulster Neutronenstrahl benötigt. Zum Pulsen kann ein sich schnell drehender Einkristall verwendet werden. Jedesmal, wenn die parallel zur Drehachse liegenden Gitterebenen zusammen mit der Richtung eines Eingangs- und Ausgangskollimators die Bragg-Bedingung erfüllen, wird ein zeitlich kurzer monochromatischer Neutronenimpuls auf die Probe geschossen. Bei nichtrotierendem Einkristall muß ein mechanischer Chopper vorgeschaltet werden.

9. Strukturanalyse mit Röntgen-Strahlen ist ein klassisches Verfahren, das nicht zu den Anwendungen der Kernphysik gezählt werden kann. Es ist aber durch die Anwendungen kernphysikalischer Erkenntnisse und vor allem Methoden wesentlich bereichert worden. Eine dieser Bereicherungen wurde in Punkt 6 erwähnt, die energiedispersive, anstelle der wellenlängendispersiven Röntgen-Diffraktometrie. Durch die Entwicklung von Elektronenbeschleunigern für kernphysikalische Forschungen wurden neben den zur Verfügung stehenden beschleunigten Elektronen auch Möglichkeiten zur Erweiterung des Quantenspektrums für die Strukturanalyse durch die elektrische Bremsstrahlung geschaffen. Eine ganz wesentliche Bereicherung ist durch die Entwicklung von Elektronen-Speicherringen für die Elementarteilchenphysik zustande gekommen, weil an ihnen magnetische Brems- oder Synchrotronstrahlung verfügbar gemacht werden kann. Sie stellt eine ausgezeichnete Ergänzung zur elektrischen Bremstrahlung dar, indem sie extrem scharf gebündelt und von Natur aus polarisiert ist und ein weites Frequenz- und damit Energiespektrum der Photonen überdeckt. Die Grundlagen wurden in 12.1.2.1. besprochen. In Abb. 12.28 ist das Spektrum der Synchrotronstrahlung mit dem anderer Strahlungen vergleichbar dargestellt. Mit Hilfe der Synchrotronstrahlung wurde die Strukturanalyse auf die

Untersuchung im Bereich zwischen dem Ultravioletten und der Röntgen-Strahlung ausgedehnt. Hier liegen viele Resonanzen der Atome und Moleküle, die zu starker Absorption führen. Im Zusammenhang damit stehen für biologische und chemische Strukturuntersuchungen neue Möglichkeiten zur Verfügung. Mit Hilfe der Synchrotronstrahlung wurde es möglich, für die Mikroelektronik lithographische Strukturen mit linearen Abmessungen der Größenordnung 10 nm herzustellen. Bei der Schichtanalyse konnten Tiefenauflösungen von 0,1 nm erreicht werden.

12.3.5. Aktivierung und Anregung

1. Beim Eintritt energiereicher Strahlung in Stoffe werden Innenschalenionisationen der Atomhüllen und Kernreaktionen ausgelöst. Sie sind Grundlage wichtiger zerstörungsfreier, stoffanalytischer Anwendungen, insbesondere der Elementanalyse. Auf den Vakanzbildungen in den Atomhüllen beruht die Röntgen-Emissionsanalyse (REA), auf den Kernanregungen die Analyse der prompten Kernstrahlungen und auf den Kernreaktionen mit Bildung neuer Radionuklide oder Isomere die Aktivierungsanalyse (AA). Eine experimentelle Anordnung zeigt die Abb. 12.17).

Stoffzusammensetzungen nach Elementen lassen sich durch Spektrometrierung der im Gefolge von Anregungs- oder Umwandlungsprozessen emittierten Strahlungen über die Bestimmung der Gehalte an den betroffenen Nukliden ermitteln. Für die quantitative Beschreibung ist die Aktivierungsanalyse der allgemeinste Fall; die Anregungen sind als Spezialfälle enthalten. Wenn die Messung eine Zeit t_M nach Bestrahlungsende beginnt, dann kann die Aktivität durch Multiplikation von (9.22) mit dem, den Zerfall in dieser Zeit beschreibenden Faktor $e^{-\lambda_i t_M}$ berechnet werden. Unter Berücksichtigung von (2.51) und mit t_A als Aktivierungszeit erhält man

$$A_i = N_i \lambda_i = \Delta \dot{N}_i (1 - e^{-\lambda_i t_A}) \cdot e^{-\lambda_i t_M} . \tag{12.48}$$

Dabei wird die Erzeugungsrate

$$\Delta \dot{N}_i = \sigma_i \dot{N}_0 N_S = \sigma_i \Phi \cdot N_{T,\nu,\mu} = \sigma_i \dot{N}_0 \frac{N_A}{A_{r,i}} \tag{12.49}$$

auch Sättigungsaktivität genannt, weil sich nach einer Bestrahlungszeit von einigen Halbwertszeiten Erzeugungs- und Zerfallsrate im Gleichgewicht befinden. Es bedeuten σ_i/m^2 den Erzungsquerschnitt, $\dot{N}_0/\text{s}^{-1}$ den primären Teilchenstrom, $\Phi/\text{m}^{-2}\,\text{s}^{-1}$ die primäre Teilchenflußdichte, $N_S/\text{g m}^{-2}$ die Flächendichte, $N_{T,\nu,\mu}$ die absolute Zahl der im Strahlquerschnitt liegenden durch die Reaktion vom Isotop μ des Elements ν auf das i-te Nuklid führenden Targetkerne. $A_{r,i}$ ist die relative Atommasse des i-ten Nuklids. Da normalerweise die Zusammensetzung der Proben der natürlichen Isotopenhäufigkeit $\eta_{\nu,\mu}$ entspricht, muß diese in

$$N_{T,\nu,\mu} = \eta_{\nu,\mu} N_{T,\mu} \tag{12.50}$$

berücksichtigt werden.

Um mit diesen Gleichungen den Absolutwert von $N_{T,\mu}$ zu ermitteln, müssen auch alle anderen Größen absolut bekannt sein. Diese absolute Aktivierungsanalyse mit Absolutmessung der Aktivitäten gemäß (9.5, 12.5) ist meist nicht erforderlich. In der Relativmessung bestrahlt man gleichzeitig mit der zu untersuchenden Probe ein Standardpräparat, d. h. eine Probe bekannter Zusammensetzung. Die Zeit- und Geometrieverhältnisse der Messungen sowie die chemischen und physikalischen Eigenschaften beider Proben müssen möglichst gut übereinstimmen, die gleiche Matrix haben. Matrixeinflüsse, man spricht von Matrixeffekten, können sich erheblich auswirken, z. B. auf die Nachweisempfindlichkeit. Da die Masse des erzeugten

Radionuklids m_i durch (12.16) berechnet werden kann, ergibt sich für das Verhältnis der Masse des i-ten Nuklids zu der des Standardnuklids aus (12.16) zu

$$m_i = m_{St} \frac{A_i A_{r,i} T_{1/2i}}{A_{St} A_{r_{St}} T_{1/2St}} . \tag{12.51}$$

Diese Gleichung hat allgemeine Gültigkeit. Sie bedeutet, daß sich die Massen zweier radioaktiver Nuklide wie ihre mit A_r und $T_{1/2}$ multiplizierten Aktivitäten verhalten. Prozesse, die auf der Grundlage von (12.51) ausgewertet werden, müssen konstante spezifische Aktivität haben.

Damit das i-te Nuklid noch nachgewiesen werden kann, muß $A_{i,\,\mathrm{min}}$ so groß sein, daß die Zählrate für die zum Nachweis herangezogene Strahlung $\dot{N}_{i,\,\mathrm{min}}$ auf dem Untergrund deutlich erkennbar ist. Somit ist die Nachweisgrenze $N_{T,\,v,\,\mu,\,\mathrm{min}}$ eine Funktion von der erzeugten Aktivität und von der Empfindlichkeit der Meßapparatur. Man führt daher zwei Empfindlichkeiten ein, die Aktivierungsempfindlichkeit $S_A/\mathrm{g}^{-1}\,\mathrm{s}^{-1}$ und die Meßempfindlichkeit S_M. Das Produkt aus beiden ist die Empfindlichkeit $S/\mathrm{g}^{-1}\,\mathrm{s}^{-1}$. Aus (9.5) und (12.48, 49) ergibt sich für die Nachweisgrenze

$$N_{T,\,v,\,\mu,\,\mathrm{min}} = \frac{\dot{N}_{i,\,\mathrm{min}}}{S} , \tag{12.52}$$

$$S = S_A S_M = [\eta_{v,\,\mu} \sigma_i \Phi (1 - e^{-\lambda_i t_A})] [\eta\, e^{-\lambda_i t_M}] . \tag{12.53}$$

Eine obere Grenze erhält man mit der Sättigungsaktivität, d. h. für $t_A = \infty$ und $t_M = 0$ sowie für $\eta = 1$:

$$N_{T,\,v,\,\mu,\,\mathrm{min}} = \frac{\dot{N}_{i,\,\mathrm{min}}}{\sigma_i \Phi} . \tag{12.54}$$

Man kann die Nachweisgrenze in Atomen ausdrücken oder in Atomen pro Volumeneinheit. Meist bezieht man die nachweisbare Masse auf die Masseneinheit, d. h., man gibt sie in g/g an. Manchmal findet man die Angabe auch in %, wobei 1% entspricht 10^{-2} g/g. Man findet auch noch die SI-fremde Angabe ppm (part per million), wobei 1 ppm = 10^{-6} g/g ist. In Tabelle 12.16 sind Beispiele angeführt.

2. In der überwiegenden Mehrzahl der Fälle werden die Aktivitäten und die Nuklidarten über die γ-Strahlung bestimmt, weil wegen der großen Durchdringungsfähigkeit auch dicke Proben insbesondere mit Neutronen als Primärstrahlung zerstörungsfrei untersucht werden können und weil die Linienspektren der γ-Strahlung eindeutige Nuklidzuordnungen ermöglichen. Man nennt diese zerstörungsfreie Aktivierungsanalyse im Unterschied zu der mit chemischer Aufbereitung auch instrumentelle Aktivierungsanalyse. Zur Aufnahme der γ-Spektren steht heute eine fast vollkommene Technik zur Verfügung. Oft genügt als Detektor der NaJ(Tl)-Kristall, bei großem Linienreichtum muß allerdings der Ge(Li)-Detektor eingesetzt werden. Wenn die Analyse alle Nuklide erfassen soll, dann müssen sämtliche kurz- und langlebigen Radionuklide in die Messung einbezogen werden, d. h., es müssen viele Spektren in aufeinanderfolgender Reihe gemessen werden, um die Halbwertszeiten der Linien zu ermitteln.

Viele Möglichkeiten ergeben sich im gepulsten Bestrahlungsbetrieb. Während der Primärteilchenimpulse kann die prompte, in den Pausen die verzögert auftretende Strahlung gemessen werden. Die Abb. 12.35 zeigt als Beispiel die Neutronen- und γ-Intensitäten an einem Target, das mit 14-MeV-Neutronen eines gepulsten Neutronengenerators bestrahlt wurde. Die von einem zeitlich programmiert arbeitenden Vielkanalanalysator aufgenommenen γ-Spektren unterscheiden sich durch Form- und Liniengehalt. Während der Neutronenimpulse treffen auf den NaJ(Tl)-Detektor die prompten γ-Strahlen aus der (n, n'γ)-Reaktion sowie die der Aktivierungs-

produkte aus den Reaktionen (n, p), (n, α) und (n, 2n). In den Bestrahlungspausen können neben letzteren die γ-Strahlen der Produktkerne aus der (n, γ)-Reaktion spektrometriert werden, die ihr Intensitätsmaximum nach einigen μs erreichen, wenn die Neutronen thermalisiert sind.

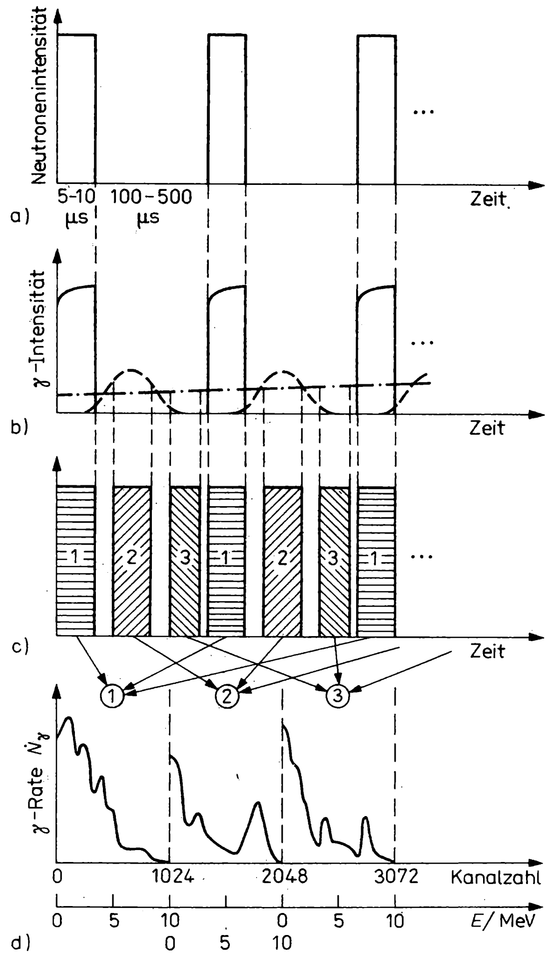


Abb. 12.35
Schematische Darstellung der getrennten Registrierung von Streu-, Einfangs- und Aktivierungsstrahlung bei Verwendung eines gepulsten Stromes schneller Neutronen
a) Gepulster Neutronenstrom, b) Zeitlicher Verlauf der Aktivität der γ-Komponenten, c) Zeitsteuerung des Vielkanalanalysators, d) γ-Spektren

Die γ-Strahlung der in den Aktivierungsreaktionen erzeugten Radionuklide tritt bei der Messung der γ-Strahlung aus der (n, n′γ)-Reaktion oder der Reaktion (n, γ) als Störstrahlung auf. Man spricht in diesem Zusammenhang von Störreaktionen. Ganz allgemein sind Störreaktionen eine Erscheinung, die bei der Stoffanalyse durch Aktivierung Schwierigkeiten bereitet. Neben dem Auftreten von Störstrahlungen anderer Energien gibt es auch die Möglich-

keit, daß ein Radionuklid durch Reaktionen mit verschiedenen Targetnukliden gebildet wird. Ein Beispiel ist die Reaktion $^{56}Fe(n, p)^{56}Mn$ und die an Mn-Beimengungen stattfindende Reaktion $^{55}Mn(n, \gamma)^{56}Mn$. Möglichkeiten der Berücksichtigung der Störstrahlungen aus Störreaktionen bieten sich durch Änderung der Primärteilchenenergie, Ausnutzung unterschiedlicher Halbwertszeiten der Radionuklide, Absorption niederenergetischer Strahlungen und Bestimmung der Konzentration der Störnuklide.

Als Beispiel für Störreaktionen betrachten wir noch die Bestimmung des Sauerstoffgehalts in Materialien über die mit schnellen Neutronen ausgelöste Reaktion $^{16}O(n, p)^{16}N$. Das Radionuklid hat eine Halbwertszeit von 7,3 s, so daß man bereits nach 1 bis 2 min das Meßergebnis erhalten kann. Die Energie der γ-Quanten beträgt 6,13 und 7,14 MeV. Unter den Störnukliden befinden sich vor allem ^{19}F und ^{11}B, die durch die (n, α)- bzw. (n, p)-Reaktion auf ^{16}N und ^{11}B führen. Die Halbwertszeiten der beiden Radionuklide betragen 7,3 bzw. 13,6 s. Die γ-Quanten haben im Falle von ^{16}N die Energie 6,128, bzw. 7,117 MeV, im Falle von ^{11}B sind es 2,125; 4,67 und 7,97 MeV. Die Wirkungsquerschnitte betragen 90 mb für ^{16}O, 20 mb für ^{19}F und 13.6 mb für ^{11}B. Da der Fehler der Sauerstoffbestimmung erheblich vergrößert wird, wenn die Störnuklide enthalten sind, muß ihr Beitrag ermittelt werden oder man überzeugt sich, daß ihr Anteil mindestens 10mal geringer ist als der von Sauerstoff.

3. Zur Aktivierungsanalyse werden hauptsächlich Neutronen, Bremsstrahlung und erst an letzter Stelle Ionen eingesetzt. Als Quellen stehen Reaktoren, Beschleuniger und bei Neutronen auch Radionuklidquellen zur Verfügung. Kleinere Beschleuniger und Radionuklidquellen haben den Vorteil, daß sie auch transportabel verwendet werden können. Die Ionenstrahlung von Beschleunigern kann gut gebündelt und als Mikrosonde zur Untersuchung von Mikrobereichen eingesetzt werden. Der Vorteil der Reaktoren besteht vor allem in den großen Neutronenflußdichten, die gepaart mit den ebenfalls großen Wirkungsquerschnitten für Reaktionen mit thermischen Neutronen hohe Empfindlichkeiten und niedrige Nachweisgrenzen ergeben. Für den Nachweis einiger leichter Elemente, wie Sauerstoff, Stickstoff, Fluor, aber auch einer Reihe mittlerer und schwerer Elemente wie Strontium und Blei, eignen sich thermische Neutronen gar nicht oder weniger gut. Man erkennt daraus, daß es keine für alle Zwecke gleichmäßig gut einsetzbare Strahlenart gibt.

Die Aktivierungsanalyse mit Ionen beschränkt sich wegen der geringen Eindringtiefe meist auf Oberflächenschichten. Durch Änderung der Energie der Ionen und damit der Reichweite kann man Tiefenverteilungsprofile aufnehmen. Ionen eignen sich besonders zum Nachweis von Nukliden leichter Elemente, bei den schwereren wächst die Schwellwertenergie wegen der Coulomb-Abstoßung. Da in dünnen Schichten große Strahlleistungen absorbiert werden, die bis zu einigen kW/cm^2 betragen können, ergeben sich Probleme mit der Wärmeabführung. Die Nachweisgrenze liegt zwischen 10^{-5} und 10^{-9} g/g.

4. Zur Aktivierung mit schnellen Neutronen werden meist 14-MeV-Neutronen aus der $T(d, n)^4He$-Reaktion mit ca. 150- bis 200-keV-Deuteronen an Cockroft-Walton-Generatoren sowie Zyklotrone mit anderen geeigneten Neutronenerzeugungsreaktionen, meist an leichten Elementen, wie der Li(d, n)-Reaktion mit Deuteronen von etwa 14 MeV, eingesetzt. Zu den Vorteilen zählen die Monochromazität der Neutronen und die vorwiegend kleinen Halbwertszeiten der Produktnuklide. Die Neutronenströme an den Erzeugungstargets liegen in beiden Fällen zwischen 10^{12} bis 10^{13} s^{-1}. Am Probenort, d. h. 30 bis 40 cm entfernt davon, kann man mit Flußdichten von 10^8 bis 10^9 cm^{-2} s^{-1} rechnen. Die Nachweisgrenzen liegen zwischen 10^{-4} bis 10^{-5} g/g. Von Nachteil ist, daß die bei den schnellen Neutronen einsetzenden Reaktionen, wie (n, p), (n, α), (n, 2n) usw. dicht beieinander liegende Schwellwertenergien haben, also zu unterschiedlichen Radionukliden führen, die zum Teil als Störreaktionen gewertet werden müssen.

Da der Wirkungsquerschnitt oberhalb der Schwellwertenergie zunimmt, sie liegt für die genannten Reaktionen meist zwischen 10 bis 12 MeV, ist bei der Bestimmung der Menge der Nuklide die Energieabhängigkeit des Wirkungsquerschnitts zu berücksichtigen. Das ist besonders auch deshalb erforderlich, weil die schnellen Neutronen in elastischen und unelastischen Stößen schnell an Energie verlieren. Oft berücksichtigt man diese Energieabhängigkeit durch die Angabe einer mittleren induzierten Aktivität, bezogen auf die Oberflächeneinheit. In dicken Proben führt die Abbremsung bald auf langsame bzw. thermische Neutronen, so daß Reaktionen mit sehr großem Wirkungsquerschnitt ablaufen. Ein Beispiel ist die (n, γ)-Reaktion, die im Zusammenhang mit Abb. 12.35 als Beispiel für zusätzlich auftretende Reaktionen genannt wurde.

In vielen Fällen wird der Vorteil der großen Wirkungsquerschnitte langsamer und thermischer Neutronen zum Nuklidnachweis genutzt. Man bringt dann entweder einen Moderator zum Abbremsen zwischen die Quelle der schnellen Neutronen und die Probe oder man bestrahlt in den Bestrahlungskanälen des thermischen Reaktors. Nach dem Moderator betragen die Flußdichten der thermischen Neutronen an den oben genannten Beschleunigern 10^7 bis 10^8 cm^{-2} s^{-1}, die Aktivierungsempfindlichkeiten bis zu 10^{-6} g/g. In thermischen Reaktoren stehen Flußdichten der thermischen Neutronen zwischen 10^{11} bis 10^{14}, in einigen Fällen 10^{15} cm^{-2} s^{-1} zur Verfügung. Die Nachweisgrenzen liegen dann zwischen 10^{-8} bis 10^{-10} g/g. Auch Radionuklidquellen werden mit Moderator eingesetzt, besonders ^{252}Cf-Quellen, für die Quellstärken der schnellen Neutronen von 10^{11} s^{-1} oder $2 \cdot 10^9$ mg^{-1} charakteristisch sind.

5. Die Absolutbestimmung des Wirkungsquerschnitts der Neutronen ist mit einer Reihe von Schwierigkeiten verbunden, insbesondere wenn es auf kleine Fehler ankommt. Das gilt in gleichem Maße für die Bestimmung der Konzentration von Nukliden. In den letzten Jahren wurde die Methode der zeitkorrelierten assoziierten Teilchen MEZKAT eingeführt, die diesen Nachteil umgeht. Wenn die schnellen Neutronen in einer Reaktion erzeugt werden, in der gleichzeitig geladene Teilchen entstehen, wie in der T(d, n)^{4}He-Reaktion zur Erzeugung von 14-MeV-Neutronen, dann kann der Neutronennachweis über die geladenen assoziierten Teilchen erfolgen, in diesem Falle über die α-Teilchen. Auf Grund der Kinetik der Reaktion verlassen die Neutronen und die α-Teilchen das Target in unterschiedlichen aber eindeutig festgelegten Richtungen. Blendet man mit einem Detektor für die α-Teilchen einen Raumwinkel aus, so

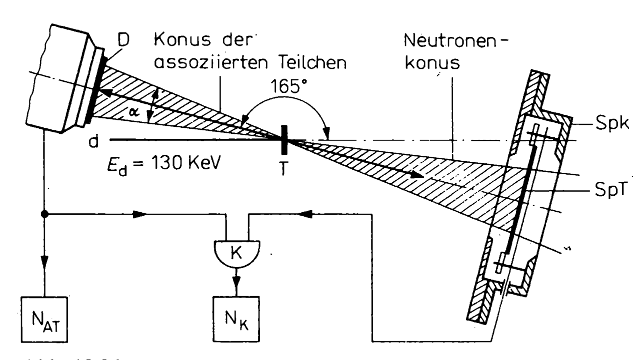


Abb. 12.36
Meßanordnung zur Methode der zeitkorrelierten assoziierten Teilchen bei einer Neutronenenergie von 14,7 MeV, ausgelöst mit 130-keV-Deuteronen an einem Tritiumtarget, hier zur Messung des Spaltquerschnitts. T-Neutronenerzeugungstarget, D-Detektor für die assoziierten Teilchen, SpT-Spalttarget, SpK-Spaltkammer (Ionisationskammer zum Nachweis der Spaltprodukte), K-Koinzidenzschaltung, N_{AT}-Zählung der assoziierten Teilchen, chen, N_K-Zählung der Koinzidenzen, hier der Spaltungen

entsteht in einer anderen Richtung ein assoziierter Neutronenkegel, in den die Probe gebracht wird. Durch eine Koinzidenzschaltung mit hoher zeitlicher Auflösung werden zur Registration in ein Spektrum nur solche Reaktionsproduktteilchen aus der Probe zugelassen, die mit einem assoziierten Teilchen koinzidieren. Die Anordnung ist in Abb. 12.36 dargestellt. Man erhält nicht nur ein wesentlich von Untergrundstrahlungen entlastetes Spektrum, sondern hat auch die Möglichkeit der Absolutbestimmung des Wirkungsquerschnitts oder der Masse des Probenuklids im Target, wenn dieses kleiner ist als der Durchmesser des Neutronenkonus. Der Zusammenhang zwischen der Zahl der Targetkerne N_T, an denen die betrachtete Reaktion durch die Neutronen ausgelöst werden kann oder deren Flächendichte N_S, der Zahl der assoziierten Teilchen N_{AT}, der Zahl der Koinzidenzen N_K, dem Wirkungsquerschnitt σ und der Masse m lautet in Übereinstimmung mit (2.55) und (9.12)

$$\sigma = \frac{N_K}{N_{AT} \cdot N_S}; \quad m = \frac{N_K \cdot A_r}{N_{AT} \cdot N_A}. \tag{12.55}$$

Bei der Absolutbestimmung von σ oder m ist der Einfluß der Störreaktionen auf N_{AT} zu beachten. Wir betrachten dazu die geladenen assoziierten Teilchen der Neutronenerzeugungsreaktion T(d, n)^{4}He, ausgelöst von 130-keV-Deuteronen mit $E_k(\alpha) = 2{,}68$ MeV. Als Störreaktionen treten auf D(d, n)t mit $E_k(t) = 0{,}48$ MeV, D(d, p)t mit $E_k(t) = 0{,}63$ MeV und $E_k(p) = 2{,}62$ MeV sowie $D(^3$He, p)^{4}He mit $E_k(p) = 15{,}39$ MeV und $E_k(\alpha) = 2{,}96$ MeV. Die Deuteriumatome häufen sich im Target durch Implantation aus dem Primärstrahl an. Man nennt das Selbsttargeteffekt. Die ^{3}He-Atome treten im Target als gestoppte Reaktionsprodukte auf. Außerdem findet die Reaktion D(γ, n)p statt. Die am Target rückgestreuten Deuteronen des Primärstrahls kann man durch eine dünne Folie absorbieren. In Abb. 12.37 ist das Spektrum für einen Beobachtungswinkel von 165° zum Primärstrahl, aufgenommen mit einem 100 μm dicken NE-102A-Plastszintillator, dargestellt. Für die Absolutbestimmung der Neutronen, die eine bestimmte Reaktion ausgelöst haben, mit Hilfe der Methode der assoziierten Teilchen, ist das Maß der Trennung der α-Linie von den Beiträgen der Störreaktionen ein Maß für die Kleinheit der Fehler der Methode.

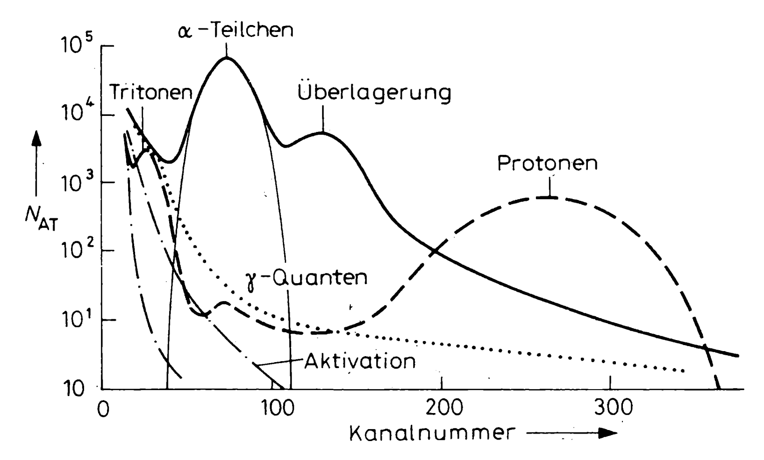


Abb. 12.37
Spektrum der assoziierten Teilchen der Reaktion T(d, n)^{4}He, gemäß Abb. 12.36, aufgenommen mit 100-μm-Dünnfilm-Plastszintillator

6. Photokernreaktionen haben infolge einer Reihe von Vorteilen weite Verbreitung in der Aktivierungsanalyse gefunden. Als Strahlungsquellen werden Elektronenbeschleuniger eingesetzt, die auf Wolfram- oder Tantaltargets strahlen. Meist handelt es sich um Linearbeschleuniger oder Mikrotrone. Die typischen Bremsstrahlungsflußdichten liegen bei 10^{14} bis $10^{15} \cdot cm^{-2} s^{-1}$. Die Photonen haben eine größere Durchdringungsfähigkeit als die schnellen Neutronen. Die wichtigste Reaktion ist die (γ, n)-Umwandlung. Sie führt bei dem gleichen Probenuklid zum gleichen Radionuklid wie die (n, 2n)-Reaktion mit schnellen Neutronen. Der Wirkungsquerschnitt der (γ, n)-Reaktion ist aber um zwei Größenordnungen größer, als der für die (γ, p)-Reaktion, während die (γ, α)-Reaktion nur einen sehr geringen Wirkungsquerschnitt hat. Bei den Photonen als Inzidenzteilchen bleibt die Zahl der Störreaktionen auch dadurch gering daß Photonen, die eine Compton-Streuung erfahren haben, im Unterschied zu den Neutronen ihre Fähigkeit, Kernreaktionen auszulösen verlieren, weil ihre Energie dann meist kleiner ist als die Schwellwertenergie.

7. Um das weite Anwendungsfeld der Aktivierungsanalyseverfahren übersichtlicher zu gestalten, kann man eine Einteilung in industrielle, biologisch-landwirtschaftliche, medizinische und Umweltschutzanwendungen vornehmen, ohne allerdings damit alle Möglichkeiten zu erfassen. In der Industrie werden mit geladenen Teilchen Oberflächen untersucht. Für viele technologische Prozesse ist der Gehalt an solchen leichten Elementen, wie Kohlenstoff, Stickstoff, Sauerstoff und andere von Interesse. Zu ihrem Nachweis gibt es eine ganze Reihe von Reaktionen mit geladenen und neutralen Teilchen. Als Beispiel sei die Bestimmung des Sauerstoffgehalts bei Anwesenheit von Bor und Fluor genannt. Die störende Rolle dieser beiden Elemente wurde in Punkt 2 besprochen. Reaktionen mit ^{3}He-Ionen zeichnen sich durch große Wirkungsquerschnitte vor allem für Sauerstoff und Kohlenstoff aus, so daß sich hohe Nachweisgrenzen von ng/g erreichen lassen. Mit 13-MeV-^{3}He-Ionen wurden z. B. in dem Halbleitergrundmaterial Silizium die Diffusion von P_2O_5 und B_2O_3 durch Aufnahme des Tiefenprofils bis zu 100 μm Tiefe untersucht. Als Reaktion diente $^{16}O(^{3}He, p)^{18}F$, die Nachweisgrenze lag bei 10^{15} Atomen/cm^3. In optischen Geräten ist der Gehalt an verschiedenen Fluorverbindungen von Bedeutung. Die optischen Eigenschaften hängen aber wesentlich von der Sauerstoffkonzentration ab. Über die Reaktion $^{16}O(^{3}He, \alpha)^{15}O$, $T_{1/2} = 2{,}05$ min, konnten durch Messung der β^{+}-Teilchen Nachweisgrenzen von 10^{-8} g/g erreicht werden.

Große Bedeutung haben Verschleißuntersuchungen. Der im Arbeitsprozeß anfallende Abrieb von aktivierten Oberflächen kann mit hoher Empfindlichkeit über seine Radioaktivität nachgewiesen werden. An die Stelle von Jahre währenden Untersuchungen treten Zeiten von Wochen und weniger. Hauptanwender sind der Maschinenbau, besonders der Automobil-, Schienenfahrzeug- und Flugzeugbau. Nicht immer ist der Einsatz von Beschleunigern erforderlich. Man kann z. B. ein radioaktives Nuklid, wie ^{137}Cs aus einer Ionenquelle mit Spannungen von 50 bis 70 keV einige 10^{-8} m tief in Kolbenmaterialien implantieren. Neben der Verschleißmessung kann aus der Temperaturabhängigkeit der Diffusion der Ionen auch auf die Temperatur an verschiedenen Stellen der Kolben geschlossen werden.

8. Die größte Verbreitung haben in der industriellen Praxis Aktivierungen mit 14-MeV- und mit thermischen Neutronen gefunden, daneben auch mit ^{252}Cf-Quellen. Man kontrolliert damit die Reinheit von Metallen und halbleitenden Materialien, die Zusammensetzung von Legierungen, Erzen und Energieträgern. Bei den Metallen steht oft der Sauerstoffgehalt im Vordergrund des Interesses, in Wolfram stört Fluor, in magnetischen Stählen Silizium, in Erdöl Schwefel und Chlor, in Kohlen besonders Schwefel. In Si-Halbleiterausgangsmaterialien sind zwischen Kohlenstoff und Gold etwa 20 Elemente mit Konzentrationen zwischen 10^{9} bis 10^{17} Atomen/cm^3 enthalten. Mit einer ^{252}Cf-Quelle wurden z. B. in Titan-Sonden gleichzeitig Ti, Al, Hf, Si, Fe nachgewiesen, in Apatiten Ca, Ti, Fe, Zr, Sn, Gd, in schwefligen Kupfer-Nickel-Erzen, Cu, Ni, Co, S, Fe. Bei einer Quellstärke von 10^{7} s^{-1}, einer Bestrahlungszeit von 30 min und einer Probenmasse von 3 kg lagen die nachweisbaren Elementkonzentrationen zwischen 1 und 10^{-5} %. Schnelle Neutronen werden zur Bestimmung des Elementgehalts von Kohlen mit dem Ziel eingesetzt, den Heizwert und den Aschegehalt zu bestimmen. Hier sind solche Nuklide, wie ^{12}C, ^{16}O, ^{27}Al, ^{28}Si, ^{31}P, ^{32}Si, ^{35,37}Cl, ^{56}Fe usw. von Interesse. Die besten Ergebnisse erhält man mit der Methode der zeitkorrelierten assoziierten Teilchen und der Reaktion (n, n'γ). Diese Kombination von Methode und Reaktion hat allgemein den Vorteil, daß auf Grund der Sofortanalyse der technologische Ablauf bei der Verarbeitung von Masseströmen nicht gestört, aber durch Rückkopplung beeinflußt werden kann.

Tabelle 12.16
Nachweisgrenzen für verschiedene Elemente mit zwei Linearbeschleunigern und einem Mikrotron aus sowjetischer Produktion. Die Probenmasse beträgt 100 g, die Bestrahlungszeit ist gleich der Meßzeit und liegt in Abhängigkeit von der Halbwertszeit zwischen 15 s und 10 min

Beschleuniger	10^{-1}—10^{-2}	10^{-2}—10^{-3}	10^{-3}—10^{-4}	10^{-4}—10^{-5}	10^{-5}—10^{-6}	10^{-7}—10^{-8}
LUE-8*	Sn	Y, Rh, Ba, W, Pt	Br, Ag, Er, Lu, Ir, Hg, Ge, Pb, U, Th	In, Cd, Au, Se, Hf, Be, D		
LUE-15**	Mg, P, Fe	Al, Co, Ni, Rh, Pd, Lu	N, Cl, K, Se, V, Mn, Cu, Zn, Ge, Nb, Ru, Cd, Ce, Nd, Dy, Er, Tm, Yb, W, Pt, Pb	F, Ga, Se, Br, Rb, Y, Zr, Sb, J, Cs, Eu, Gd, Tb, Ho, Ir, Hg	Sr, Ag, In, Sn, Ba, Sm, Hf, Au, U, Th	Te, Pr, Ta
MT-20***	Mg, Al, P, Fe, Co, Ni	N, Cl, Se, V, Zn, Ge, Nb, Ru, Rh, Pd, Ce, Gd, Dy, Er, Tm, Yb, Lu, W, Re, Ir, Pt, Pb	F, K, Mn, Cu, Ga, Se, Br, Rb, Y, Zr, Ag, Cd, J, Cs, Nd, Eu, Tb, Ho, Hf, Hg	Sr, In, Sn, Sb, Te, Pr, Ta, Ba, Sm, Au		

* Linearer Elektronenbeschleuniger — 8: $E_k(e) = 8$ MeV, $I_e/\mu A = 700$
** Linearer Elektronenbeschleuniger — 15: $E_k(e) = 15$ MeV, $I_e/\mu A = 500$
*** Mikrotron-20: $E_k(e) = 20$ MeV, $I_e/\mu A = 50$

9. In den letzten Jahren hat die Anwendung von Elektronen-Linearbeschleunigern und von Mikrotronen zur Erzeugung von Bremsstrahlung für die Elementanalyse besonders in der Rohstofferkundung und -aufbereitung zugenommen. In Tabelle 12.16 sind für zwei Elektronen-Linearbeschleuniger und ein Mikrotron aus industrieller Fertigung Nachweisgrenzen angegeben. Solche Elemente wie Ni, Ti, Zr, Ca, Nd, Rb, Sn, Cd und andere, die in einigen Mineralien gleichzeitig vorkommen, können relativ schnell identifiziert und mengenmäßig bestimmt werden. In 10 bis 30 Minuten können das bis zu 25 Elemente gleichzeitig sein. Von Vorteil ist dabei, daß gerade diese Elemente mit der Neutronenaktivierungsanalyse schwer nachweisbar sind, weil die gleichzeitig vorkommenden Elemente Na, Mn, Sc, La, Co und Hf einen zu großen Störuntergrund liefern. Für Photonenreaktionen haben die letztgenannten Elemente einen vernachlässigbar kleinen Wirkungsquerschnitt. Die Energie der am Mikrotron erzeugten Quanten betrug dabei maximal 29 MeV. Mikrotrone werden auch zum Nachweis von Gold eingesetzt. Aufbereitungstechnologisch interessant sind Vorkommen mit 0,1 bis 1 g/t Gold. Man kann in diesem Intervall am Mikrotron zwei Verfahren einsetzen, die Aktivierung mit thermischen Neutronen, und die Aktivierung mit Bremsstrahlung. Im ersten Falle wird die Reaktion ^{197}Au(n, γ)^{198}Au mit $T_{1/2} = 2{,}7$ d genutzt, im zweiten die Reaktion ^{197}Au(γ, n)^{197m}Au mit $T_{1/2} = 7{,}4$ s. Mit 100-g-Proben und Bestrahlungs- sowie Meßzeiten von 0,5 min können die 0,1 g/t nachgewiesen werden.

Mit Mikrotron-Bremsstrahlung wurden auch leichte Elemente nachgewiesen. Beispiele sind wieder Sauerstoff in Fe, Mo, Nb und In, wozu sich die Reaktion ^{16}O(γ, n)^{15}O, $T_{1/2} = 2$ min eignet, und der Nachweis von Kohlenstoff in Silizium über ^{12}C(γ, n)^{11}C, $T_{1/2} = 20{,}3$ min. Mit 25 µA und 25-MeV-Elektronen wurde eine instrumentelle Empfindlichkeit von $2 \cdot 10^{-4}$ % erreicht.

10. In der landwirtschaftlich-biologischen Forschung und Technologie ist die Kenntnis des Gehalts an Makro- und Mikromengen verschiedener Elemente in Futter- und Düngemitteln, in Böden, Pflanzen

und Tieren wie im Erntegut von Bedeutung. Der Nachweis der Makroelemente erfolgt meist mit Hilfe von 14-MeV-Neutronen. An erster Stelle stehen Stickstoff als Maß für den Eiweißgehalt von Erträgen, gefolgt von Phosphor, Kalium und Kalzium als Grundelemente der Pflanzen.

Der Nachweis von Stickstoff auf aktivierungsanalytischem Wege kann über verschiedene Reaktionen erfolgen. Mit schnellen Neutronen und Bremsstrahlung laufen die Reaktionen $^{14}N(n, 2n)$ und $^{14}N(\gamma, n)$ ab, die beide auf den Positronenemitter ^{13}N führen. Seine Halbwertszeit beträgt 10 min. Störreaktionen sind alle Umwandlungen, die zu Annihilationsstrahlung Anlaß geben. Zu ihnen gehören in biologischen Proben die Produktkerne ^{11}C, ^{15}O, ^{30}P, ^{34}Cl und ^{38}K. Die Nachweisgrenze ist unter den üblichen Bestrahlungsbedingungen recht unterschiedlich und im allgemeinen nicht besser als 10^{-3} %. Durch Analyse der Spektren geladener Teilchen, wie sie in Reaktionen mit Deuteronen entstehen, kann man nicht nur die Fehlergrenzen verringern, sondern auch einzelne Samenkörner untersuchen. Geeignete Reaktionen sind $^{14}N(d, p)^{15}N$ und $^{14}N(d, \alpha)^{12}C$. Mit 4-MeV-Deuteronen wurden bei Bestrahlungszeiten von 3 s, Deuteronenströmen von 0,1 μA Nachweisgrenzen von 10^{-3} g/g bei einem Fehler von 1 % erreicht.

Mikroelemente werden meist mit Photokernreaktionen nachgewiesen. Von Interesse sind solche zur normalen Physiologie gehörenden Elemente, wie Zn, Cu, Mn, Co und andere, aber auch schädliche, wie Cd, Pb, Hg usw. Unter Ausnutzung der Möglichkeiten, die die Aktivierungsanalyse mit Reaktorneutronen und mit Bremsstrahlung bieten, werden insgesamt etwa 50 Elemente nachgewiesen. Die Photokern-

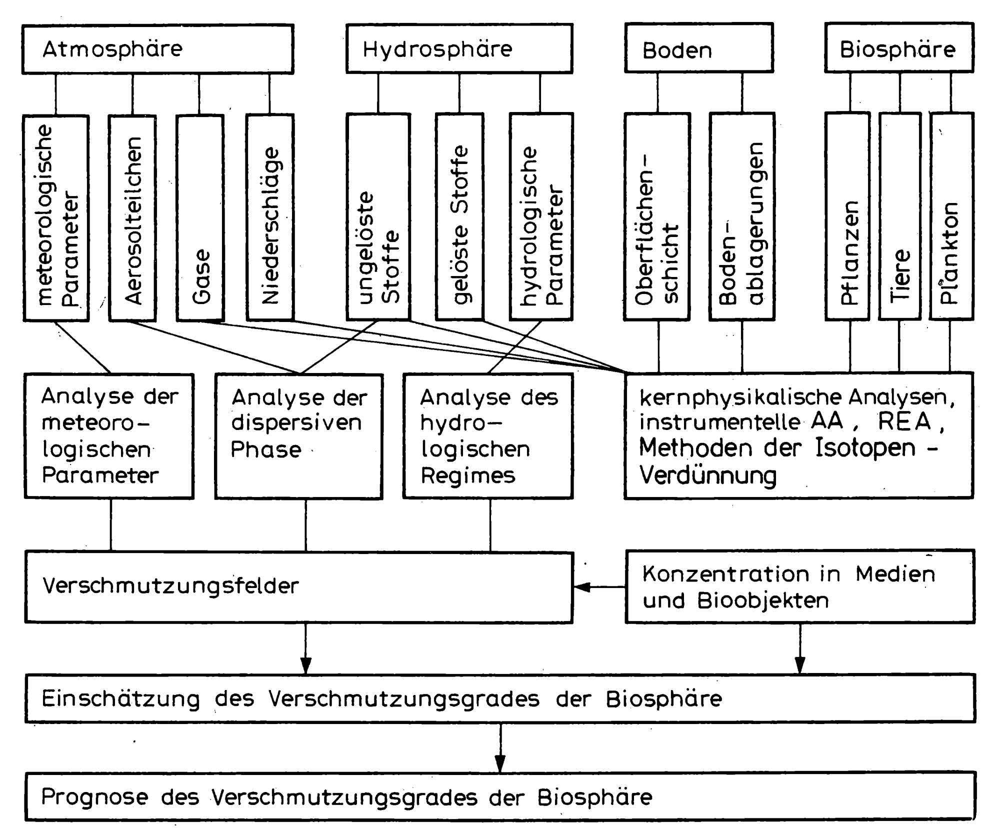


Abb. 12.38
Schema der Einsatzgebiete kernphysikalischer Analyseverfahren bei der Monitorierung der Umweltsphären

reaktionen erwiesen sich dabei für den Nachweis von Si, Y, Cd, Te, Pb, Bi von Vorteil. Es konnte gezeigt werden, daß in den Düngemitteln Mikromengen von V, Cr, Mn, Fe, Co, Ni, Cu, Ag, Cd, Sb, Te, Hg, Tl, Pb und Bi schädlich sind.

11. Für die Medizin besteht ein großer Vorteil der Aktivierungsanalyse unter anderem darin, daß Untersuchungen am lebenden Organismus möglich sind. Dabei muß streng darauf geachtet werden, daß die zulässigen Dosisleistungen nicht überschritten werden. Für Organbestrahlungen am lebenden Organismus wären thermische Neutronen wegen ihres großen Wirkungsquerschnitts von Vorteil. Ihre Halbwertsschwächung beträgt aber in biologischem Gewebe nur ca. 2 cm. Man bestrahlt daher mit schnellen Neutronen, die im Körper thermalisieren. Wichtige Analysen betreffen Ca in den Knochen, Cu in der Leber, Cu und Cd in den Nieren sowie N, P, Na, Cl und eine Reihe von Mikroelementen in verschiedenen anderen Organen. Der Untersuchungsprozeß ist meist sehr kurz. So dauert die Bestrahlung zum Ca-Nachweis 30 s, die Messung der Aktivität des ^{49}Ca mit $T_{1/2} = 9$ min etwa 1,5 min. Die vom Patienten absorbierte Dosis liegt bei 1 mSv, d. h., sie ist wesentlich geringer, als für solche Untersuchungen zugelassen sind.

Protonen werden zur Untersuchung des Zahnschmelzes auf Fluor über die Reaktion ^{19}F(p, p'γ)^{19}F oder ^{19}F(p, αγ)^{16}O verwendet. Durch Energiewahl kann schichtweise gemessen werden. Die Photokernreaktion wurde zu prophylaktischen Messungen beim Nachweis von As als Krebserreger in Zigaretten eingesetzt. Es gab Sorten mit 0,9 μg/g.

12. Die Verschmutzung der Umwelt hat Maßstäbe angenommen, die eine ständige Überwachung erforderlich machen. Einbezogen werden müssen alle Sphären, wie Atmosphäre, Hydrosphäre, Geosphäre und Biosphäre. Das Ziel der ständigen Monitorierung der Umwelt auf Verschmutzungen besteht in der Aufdeckung antropogener Effekte und in der Prognostizierung der Entwicklungstendenzen der Umwelt unter dem Einfluß der verschiedenen Faktoren. Zur Vielfalt der Einflußfaktoren gehören Elementgehalte und chemische Verbindungen. Es hat sich gezeigt, daß die Aktivierungsanalyse (AA) zu den effektivsten Verfahren bei der Monitorierung der Umwelt gerechnet werden muß. Alle hier eine Rolle spielenden Elemente können über Radionuklide oder mit Hilfe von Röntgen-Emissionsanalysen (REA) mit ausreichender Genauigkeit nachgewiesen werden. In Abb. 12.38 ist ein Schema der Einsatzgebiete kernphysikalischer Nachweismethoden angegeben, das gleichzeitig ihre zentrale Bedeutung aufzeigt.

13. Ionisierende Strahlung verursacht beim Durchgang durch Stoffe infolge Innenschalenanregung und -ionisation Vakanzen, die bei ihrer Auffüllung durch Elektronen von äußeren Schalen je nach der Fluoreszenzausbeute mehr oder weniger stark von der Emission charakteristischer Röntgen-Strahlung begleitet sind. Über die Energie der charakteristischen Röntgen-Strahlen kann man die Ordnungszahlen der Elemente, über ihre Intensität die Menge oder Konzentration der Elemente bestimmen.

Die Nachweisgrenze der REA hängt von einigen Faktoren ab, in erster Linie ist sie eine Funktion der Intensität der charakteristischen Röntgen-Strahlung, die ihrerseits durch den Wir-

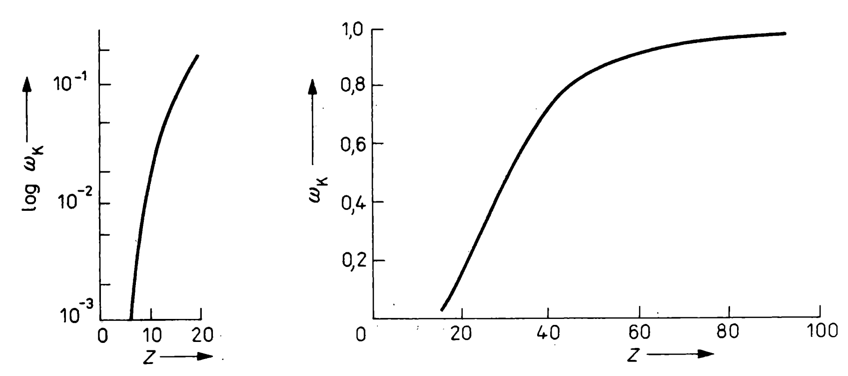


Abb. 12.39
Fluoreszenzausbeute der K-Schale als Funktion der Ordnungszahl

kungsquerschnitt der Innenschalenionisation und die Fluoreszenzausbeute bestimmt wird. Darüber hinaus geht die Detektoreffektivität entscheidend ein. Von Bedeutung ist auch die Intensität des Untergrundes im Spektrum, der vor allem durch die beim Abbremsen der primären Elektronen in der Probe emittierten Quanten entsteht.

Die Fluoreszenzausbeute ist das Verhältnis der Zahl der emittierten charakteristischen Röntgen-Quanten zur Zahl der primär erzeugten Vakanzen. Sie ist eine Funktion der Ordnungszahl Z und der Schale des Atoms. In Abb. 12.39 ist die Fluoreszenzausbeute ω_K der K-Schale als Funktion von Z dargestellt. Bei kleinen Ordnungszahlen beträgt ω_K weniger als 1%, bei Uran macht sie 97,6% aus.

Zur Anregung der charakteristischen Röntgen-Strahlung werden verschiedene Primärstrahlungen verwendet. Bei Anregung mit Röntgen-Strahlung spricht man von Röntgen-Fluoreszenzstrahlung und -analyse (RFA), sonst von Röntgen-Emissionsanalyse. Zur Anregung mit elektromagnetischer Strahlung stehen neben den klassischen und auch miniaturisierten Röntgen-Rören elektrische Bremsstrahlungen an Elektronenbeschleunigern, γ-Strahlung aus Radionuklidquellen und Synchrotronstrahlung an Elektronen-Speicherringen zur Verfügung. An geladenen Teilchen werden neben α- und β-Strahlungen aus Radionuklidquellen Elektronen, Protonen und schwere Ionen aus Beschleunigern eingesetzt. In Abb. 12.40 sind die maximalen Wirkungsquerschnitte der Anregung charakteristischer Röntgen-Strahlung mit Photonen, Elektronen und Protonen als Funktion von der Ordnungszahl dargestellt, in Abb. 12.41 die Abhängigkeit von der Teilchenenergie für die Kohlenstoff-K-Schale. Photonen haben den größten Anregungsquerschnitt, der von Protonen ist größer, als der von Elektronen. Der durch Abbremsung entstehende Untergrund im Spektrum der Röntgen-Strahlung ist für Protonen wesentlich kleiner als für Elektronen. Trotzdem kommt der Effekt bei den Protonen nicht voll zur Wirkung, weil die große Energieübertragung, man sieht es aus Abb. 12.41, sehr viele Elektronen freisetzt, die auch in der Probe abgebremst werden. Die besten Ergebnisse hinsichtlich Nachweisgrenze und Auflösung werden heute mit der Synchrotronstrahlung und der protoneninduzierten X-Strahlanalyse (PIXE) erzielt. Bei großen Ordnungszahlen ist die Synchrotronstrahlung wegen des um drei Zehnterpotenzen größeren Anregungsquerschnitts und der gleichzeitig großen Intensitäten an den Elektronen-Speicherringen mit Schlangenmagneten überlegen. Hinzu kommt als Vorteil der Synchrotronstrahlung die geringe Winkeldivergenz von 10^{-5} sr. Bei 10 bis 10^3 Watt im

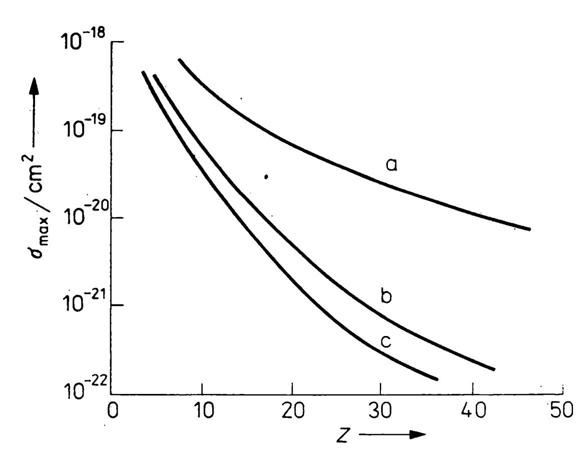


Abb. 12.40
Maximale Ionisationsquerschnitte der Röntgen-Emission der K-Schale für Elemente der Ordnungszahlen 5 bis 40 a) für Photonen, b) für Protonen, c) für Elektronen

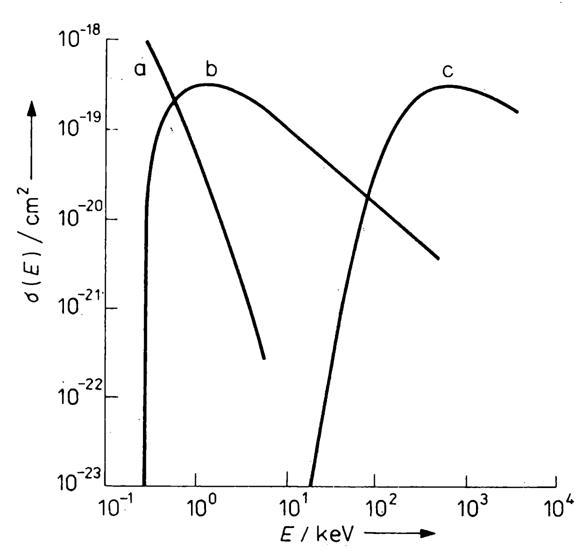


Abb. 12.41
Energieabhängigkeit des Ionisationsquerschnitts für Röntgen-Emission der K-Schale an Kohlenstoff
a) für Photonen, b) für Protonen, c) für Elektronen

Strahl können 10^4 bis 10^6 mal größere Energien in den Einheitswinkel eingebracht werden, als dies für gewöhnliche Röntgen- oder Bremsstrahlung der Fall ist. Konventionelle Röntgen-Röhren liefern etwa 10^2 W/sr im kontinuierlichen Spektrum.

14. Zur Spektrometrierung der charakteristischen Röntgen-Strahlung gibt es zwei prinzipiell verschiedene Verfahren. Früher wurde ausschließlich die Welleneigenschaft in den Kristall-Diffraktionsspektrometern genutzt. Da es sich bei dem dazu erforderlichen Goniometerbetrieb um ein einkanaliges Meßverfahren handelt, bei dem die Zählrate für möglichst viele Winkel gemessen werden muß, ist diese wellenlängen-dispersive Röntgen-Emissionsanalyse sehr zeitaufwendig. Einen großen Aufschwung hat die Röntgen-Emissionsanalyse durch die Einführung des Halbleiterdetektors zusammen mit dem ebenfalls aus der Kernphysik, insbesondere der γ-Spektrometrie übernommenen automatisierten Vielkanalanalysier- und auswerteverfahren genommen. Als Detektoren werden meist Si(Li)- und reine Ge-Kristalle[1]) verwendet. Aus den Darlegungen in 9.6.2.3. erkennt man, daß die wellenlängen-dispersiven Röntgen-Emissionsdiffraktometer zwar die beste energetische Auflösung im Bereich der Röntgen-Strahlung haben, daß sich aber die energie-dispersiven Röntgen-Emissionsspektrometer durch größere Effektivität und damit kürzere Meßzeiten auszeichnen. Die Effektivität eines typischen Si(Li)-Detektors für Röntgen-Strahlung ist in Abb. 9.48 dargestellt. Der Analysierbereich ist stark eingeengt. Bei niedrigen Energien fällt die Effektivität durch die Absorption im Be-Fenster, das zur Vakuumhaltung des Detektorkristalls erforderlich ist, im Goldkontakt und in einer Si-Totschicht schnell ab. Für sehr gute Ausführungen liegt die Effektivität für die K-Linie von Natrium mit $Z = 11$ bei 50%. Solange ein Be-Fenster benutzt wird, seine Stärke beträgt etwa 15 µm, ist es nicht sinnvoll, unterhalb von $Z = 11$ zu messen. Ohne Be-Fenster kommt man bis zu Kohlenstoff mit $Z = 6$. Der Aufwand ist dann allerdings sehr groß. Bei höheren Energien nimmt die Effektivität ab, weil nicht mehr alle Photonen im Detektorvolumen gestoppt und absorbiert werden. Die sinnvolle Grenze liegt etwa bei 40 keV, d. h. bei den Energien der K-Linien der ersten Elemente des

[1]) Für diese Detektorkristalle hat sich die Bezeichnung HP Ge-Detektor eingebürgert (High Purity).

Seltenerdgebiets. Elemente mit größeren Z-Werten müssen über die L- und M-Linien identifiziert werden. Die Entschlüsselung der X-Strahlspektren und die Zuordnung der Linien zu den Elementen ist eine viel einfachere Aufgabe, als es bei den γ-Linien der Fall ist, weil hier bekannte Gesetzmäßigkeiten genutzt werden können.

Die genauesten Ergebnisse erzielt man in dünnen Proben von etwa 1 µm Stärke, in denen die Änderung des Wirkungsquerschnitts der Innenschalenionisation und die Absorption der Emissionsstrahlung noch keine Rolle spielen. Die Nachweisgrenzen liegen hier zwischen 10^{-9} g/g für schwere Elemente und 10^{-7} g/g für leichte oberhalb Kalium. Obgleich die Möglichkeiten der REA denen der Aktivierungsanalyse ähneln, so ist doch der Nachweis schwerer Elemente in Matrizen aus leichten ein Vorzugsgebiet für die REA. Die charakteristische Probenmasse liegt bei 10 bis 30 mg.

Man unterscheidet zwischen Makro- und Mikro-Röntgen-Emissionsanalyse. Die Größenangabe bezieht sich hier auf die Größe des Analysierbereichs. Bei der Röntgen-Makroanalyse werden Oberflächen analysiert. Für Meßzeiten von 10 Minuten können Konzentrationen von mg/g mit Sicherheit nachgewiesen werden. Da die Intensität der Emissionsstrahlung leichter Elemente stark von der Körnigkeit der Probe abhängt, kann der Feinheitsgrad von Pulvern kontrolliert werden, auch die Rauhigkeit von Oberflächen. Typische Einsatzgebiete sind verschiedene Industrien, wie Metallurgie, Glas- und Keramikindustrie, solche Wissenschaften, wie Geologie und Biologie, besonders auch die Medizin sowie der Umweltschutz. Hier ist von besonderem Interesse der Nachweis von giftigen Elementen, wie Cd, Hg und Pb in Matrizen aus leichten Elementen. Als Beispiel eines Röntgen-Emissionsspektrums ist das bei der Analyse einer Golddrahtoberfläche in der Mikroelektronik erhaltene Spektrum in Abb. 12.42 gezeigt.

In der Röntgen-Mikroanalyse werden kleinste Probenbereiche untersucht. Ein Beispiel ist die systematische Untersuchung von Zellen im Rasterbetrieb des Elektronenmikroskops mit Strahldurchmessern von µm. Wegen des großen Bremsstrahlungsuntergrundes mit Elektronen werden

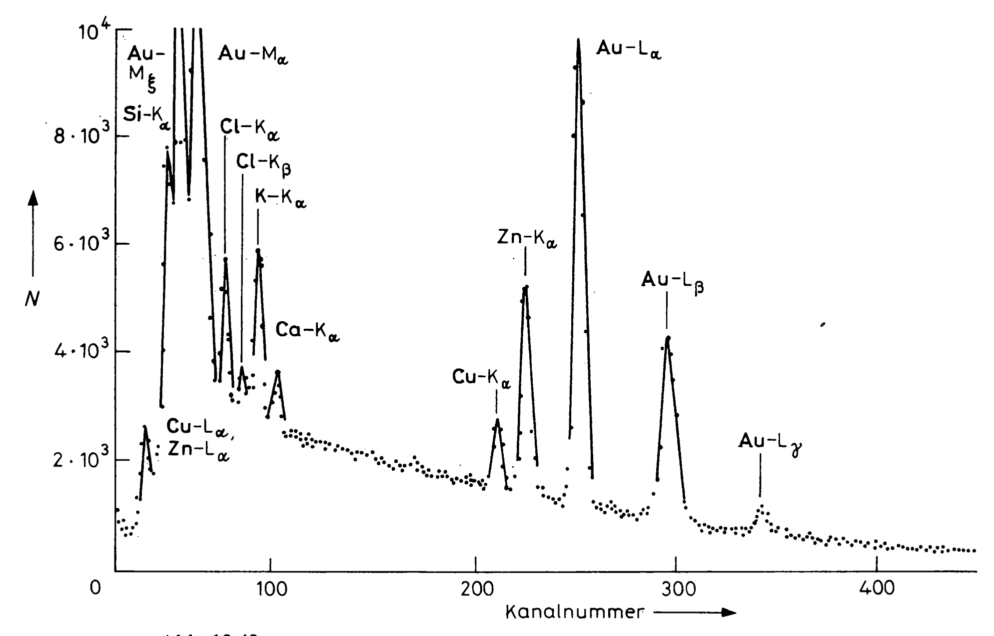


Abb. 12.42
Spektrum der Röntgen-Emissionsanalyse an einer Golddrahtoberfläche

auch andere Mikrosonden eingesetzt, insbesondere mit Protonen. Die Rekordnachweisgrenzen liegen bei 10^{-18} g. Die Hauptanwendungsgebiete sind hier die bereits unter der Röntgen-Makroanalyse genannten Gebiete sowie besonders die Mikroelektronik, die Biologie und die Medizin.

15. In Sonderfällen können auch andere Primärteilchen als die bisher aufgeführten zur Nuklid- und Elementanalyse verwendet werden. Als Beispiel sei die Anregung der charakteristischen myonischen Röntgen-Strahlung im Gefolge des Myoneneinfangs genannt. Der Effekt des Myoneneinfangs wurde in 6.1.1., Punkt 3 besprochen. Der Vorteil dieser Methode besteht vor allem darin, daß keine bleibende oder längerlebige Radioaktivität erzeugt wird und daß die myonischen Röntgen-Strahlen auf Grund ihrer großen Energie, sie kann aus Abb. 6.3 entnommen werden, sehr durchdringungsfähig sind, also dicke Proben verwendet werden können. In Abb. 12.43 ist das myonische Röntgenspektrum von Ratten abgebildet, die längere Zeit im Kosmos waren und bei denen festgestellt wurde, in welcher Zeit der Kalziumgehalt in den Knochen normalisiert wird. Die Bestrahlung erfolgte am Myonenstrahl des 680-MeV-Synchrozyklotrons in Dubna.

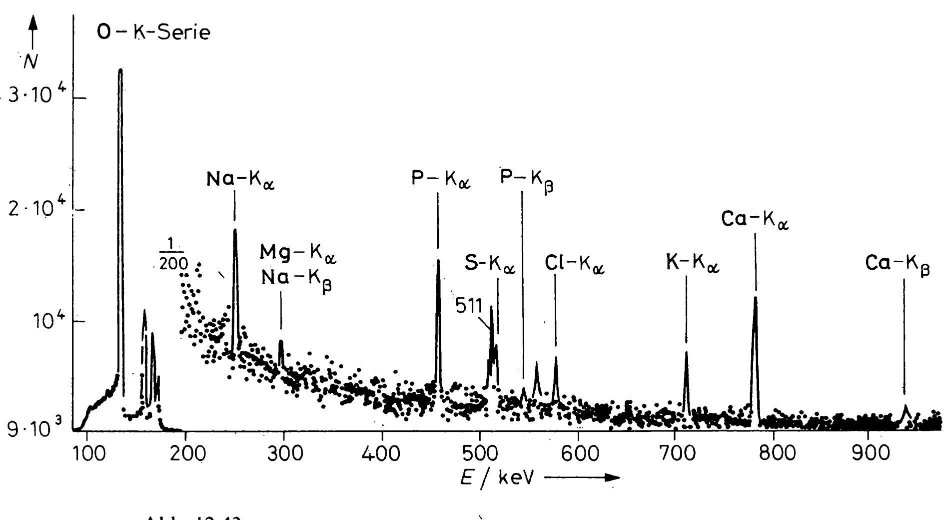


Abb. 12.43
Myonisches Röntgen-Spektrum von Ratten

12.3.6. Radioaktive Markierung

1. Man macht von der leichten Nachweisbarkeit der Radionuklide über ihre Strahlung in breitem Maße zur Untersuchung physikalischer, chemischer, biologischer, technischer und anderer Prozesse sowie zur Untersuchung der qualitativen und quantitativen Zusammensetzung von Stoffen und Stoffgemischen Gebrauch, indem einzelne Komponenten radioaktiv markiert, d. h. mit Radionukliden versetzt werden. In diesem Zusammenhang nennt man die Radionuklide auch Radioindikatoren und Radiotracer. Die auf diesem Prinzip der Aktivitätsbestimmung des Radioindikators beruhenden Meßverfahren nennt man Radioindikator- oder Radiotracermethoden. Das Gesamtgebiet einschließlich der Radionukliderzeugung und des Einsatzes in Wissenschaft und Volkswirtschaft heißt Radioindikator- oder Radiotracertechnik. Man kann eine Einteilung der Möglichkeiten in drei Komplexe vornehmen:

a) Ermittlung von Zeitabhängigkeiten bei Stofftransportvorgängen, wie Fließgeschwindigkeiten, Verweilzeiten, hydrodynamisches Verhalten von Materialströmen, Diffusion und Verdampfung;

b) Ermittlung von räumlichen Verteilungen von Nukliden, Elementen, Verbindungen, Materialströmen usw., wie Homogenitäten, Vermischung und Abwanderung durch Lecks;

c) Ermittlung von mengenmäßigen Verteilungen, wie Materialbilanzen, Stoffumwandlungen, Verschleiß und Korrosion.

In Abhängigkeit von der Art des Einsatzfalles kann die radioaktive Markierung auf unterschiedliche Weise erfolgen. Bei der Stoß- oder Impulsmarkierung wird der Indikator meist als δ-Funktion zugegeben oder durch Aktivierung erzeugt, bei der kontinuierlichen oder Zulaufmarkierung in zeitlich konstanter Menge. Die Verdrängungsmarkierung ist durch sprungartige Unterbrechung gekennzeichnet. Für verfahrenstechnische Untersuchungen werden bevorzugt γ-strahlende Indikatoren eingesetzt. In manchen Anwendungen ist das zugegebene Nuklid zunächst inaktiv. Erst nach Abschluß des Prozesses wird es über die in 12.3.5. beschriebenen Möglichkeiten aktiviert oder angeregt und dann nachgewiesen.

Wenn sich der radioaktive Indikator in dem zu untersuchenden Stoff oder Prozeß chemisch genauso verhalten soll, wie die untersuchte Komponente, dann müssen die chemischen, physikochemischen und abgesehen von der Radioaktivität auch die physikalischen Eigenschaften übereinstimmen. Die Markierung ist dann isotop, d. h., es wird die natürliche Häufigkeit der Isotope eines Elements zu Gunsten eines radioaktiven Isotops, des Radioindikators verschoben. Anders ausgedrückt werden bei der isotopen Markierung Atome eines Isotops eines Elements in einer chemischen Verbindung durch Atome eines anderen Isotops des gleichen Elements ersetzt. Das ist dann erforderlich, wenn Radioindikator und Reaktant chemisch identisch sein müssen. Diese Notwendigkeit ist oft bei der Untersuchung chemischer Reaktionen und Strukturen vorhanden, aber auch in vielen anderen Anwendungen, wie beim Einsatz von Nuklearpharmaka für die medizinische Diagnostik und Therapie. Die Charakterisierung der Verbindungen erfolgt durch Angabe des Radionuklides und der chemischen Verbindung, also z. B. ^{131}J-Humanserumalbumin oder $Na^{99m}TcO_4$. Für viele Anwendungen der Radioindikatormethode, vor allem in der Technik, aber auch zum Teil in Biologie und Medizin ist eine chemische Identität des Radioindikators mit dem markierten Stoff nicht erforderlich. In diesen Fällen reicht die nicht isotope Markierung aus. Den zu untersuchenden Gasen und Flüssigkeiten wird die radioaktive Substanz zugegeben oder auf festen Stoffen fixiert. Im ersten Fall sollen besonders die physikalischen Eigenschaften des Radioindikators und der zu untersuchenden Komponente möglichst wenig voneinander abweichen. Bei der nichtisotopen Markierung von Feststoffen ist sicherzustellen, daß der Radioindikator nicht abgelöst werden kann.

Die Nachweisgrenze für radioaktive Nuklide über ihre Strahlung ist sehr niedrig. Wie bereits auch in 12.3.5. besprochen wurde, kann sie in Einzelfällen bis zu 10^{-18} g gehen. In vielen Fällen kommt man bis zu 10^{-11} g. Damit ist sie anderen Nachweismethoden weit überlegen. Es genügt daher in den meisten Anwendungen auch, den Radioindikator spurenweise zuzusetzen. Auf diese Weise kann beim Einsatz der Radioindikatortechnik als Betriebsmeß-, -steuer- oder -regelverfahren den Anforderungen des Strahlenschutzes leicht nachgekommen werden. Wenn die Radioindikatoren hinreichend kurzlebig sind, ist im fertigen Produkt keine nachweisbare Radioaktivität mehr vorhanden. Bei der Anwendung von Radioindikatoren ist zu beachten, daß in der Regel mit gasförmigen, flüssigen oder festen radioaktiven Substanzen in offener Form gearbeitet wird, d. h. mit offenen radioaktiven Präparaten, die nicht von einer dichten inaktiven Hülle allseitig umgeben sind, wie das bei den geschlossenen radioaktiven Präparaten der Fall ist. Neben den üblichen Regeln des Strahlenschutzes sind hier Maßnahmen zur Verhinderung einer Inkorporation erforderlich.

Aus der Vielfalt der möglichen Anwendungen sollen nachfolgend einige verbreitet eingesetzte

Methoden besprochen werden. Die oben benutzte Reihenfolge a), b) und c) läßt sich dabei nicht streng einhalten.

2. Radioindikatoren sind für die Untersuchung von Strömungsvorgängen besonders geeignet, weil man solche Parameter, wie Strömungsgeschwindigkeit und Strömungsverteilung, Verweilzeit, Vermischung und Diffusion über Aktivitätsmessungen an den Außenwänden von Behältern leicht bestimmen kann. In das zu untersuchende System wird dazu nach einer bestimmten Zeitfunktion die Indikatorsubstanz gegeben, die mit dem strömenden Medium nicht chemisch reagieren soll. Anschließend wird die Konzentrations-Zeit-Funktion über die Aktivität in Flußrichtung gemessen. Das Verfahren erinnert an die Systemanalyse mit Test- und Antwortsignal.

Ein einfaches Beispiel für dieses Verfahren ist die Lecksuche an erdverlegten Rohrleitungen. An der undichten Stelle sickert ein Teil der Indikatorsubstanz in das Erdreich und kann dort als Aktivitätserhöhung nachgewiesen werden. Manchmal ist der Verlauf alter Leitungen nicht mehr bekannt. Er kann über die Aktivität in ihrer Nähe festgestellt werden, wenn sich darin eine radioaktiv markierte Substanz befindet.

In Erdölleitungen werden manchmal über große Entfernungen nacheinander verschiedene Erdölarten gegeben. Durch Diffusion und Vermischung entsteht zwischen zwei Sorten eine Mischzone. Die Ankunft und die Länge dieser Mischzone kann durch impulsförmige Zugabe einer radioaktiven Indikatorsubstanz beim Einpumpen über die Aktivitätszunahme an den Meßstellen ermittelt werden.

In der Hydrologie ist oft die Ausbreitung von eingeflossenem Wasser in Oberflächengewässern zu untersuchen. Durch Zugabe von Indikatorsubstanzen in den Zulauf kann man über Aktivitätsmessungen den zeitlichen und örtlichen Strömungsverlauf ermitteln.

Die Strömungsgeschwindigkeit wird mit Hilfe der Zweipunktmethode bestimmt. Dazu befinden sich zwei Strahlungsdetektoren im Abstand Δl voneinander und registrieren das Maximum des Aktivitätsimpulses mit dem Zeitabstand Δt, so daß $v = \Delta l/\Delta t$ ist. Durch Multiplikation mit dem Rohrquerschnitt S erhält man den Volumenstrom

$$I = Sv\,. \qquad (12.56)$$

Wenn der Querschnitt weder bekannt, noch konstant ist, kann I trotzdem ermittelt werden, wenn die Aktivität A auf dem Wege zwischen den Punkten nicht verloren geht. Für eine stoßförmige Radioindikatorinjizierung und die nur mit einem Detektor an einem Punkt registrierte Impulszahl N ergibt sich

$$I = K\frac{A}{N}, \qquad (12.57)$$

wobei K die Zählausbeute pro Volumeneinheit ist, die durch Eichmessung an einem Rohrstück mit definiert gefülltem Radioindikatoranteil und definiertem Querschnitt ermittelt wird.

Die Verweilzeit eines transportierten Stoffgemischs oder einer seiner Komponenten in einem kontinuierlich durchströmten Behälter ist die Wahrscheinlichkeit für die Aufenthaltsdauer der Teilchen. Bei Stoßmarkierung mißt man die Verweilzeitdichtefunktion $c(t)$ und bei Zulaufmarkierung die Verweilzeitverteilungsfunktion $F(t) = \int_0^t c(t)\,\mathrm{d}t$. Unter mittlerer Verweilzeit τ versteht man die Funktion

$$\tau = \frac{\int_0^\infty c(t)\,t\,\mathrm{d}t}{\int_0^\infty c(t)\,\mathrm{d}t}, \qquad (12.58)$$

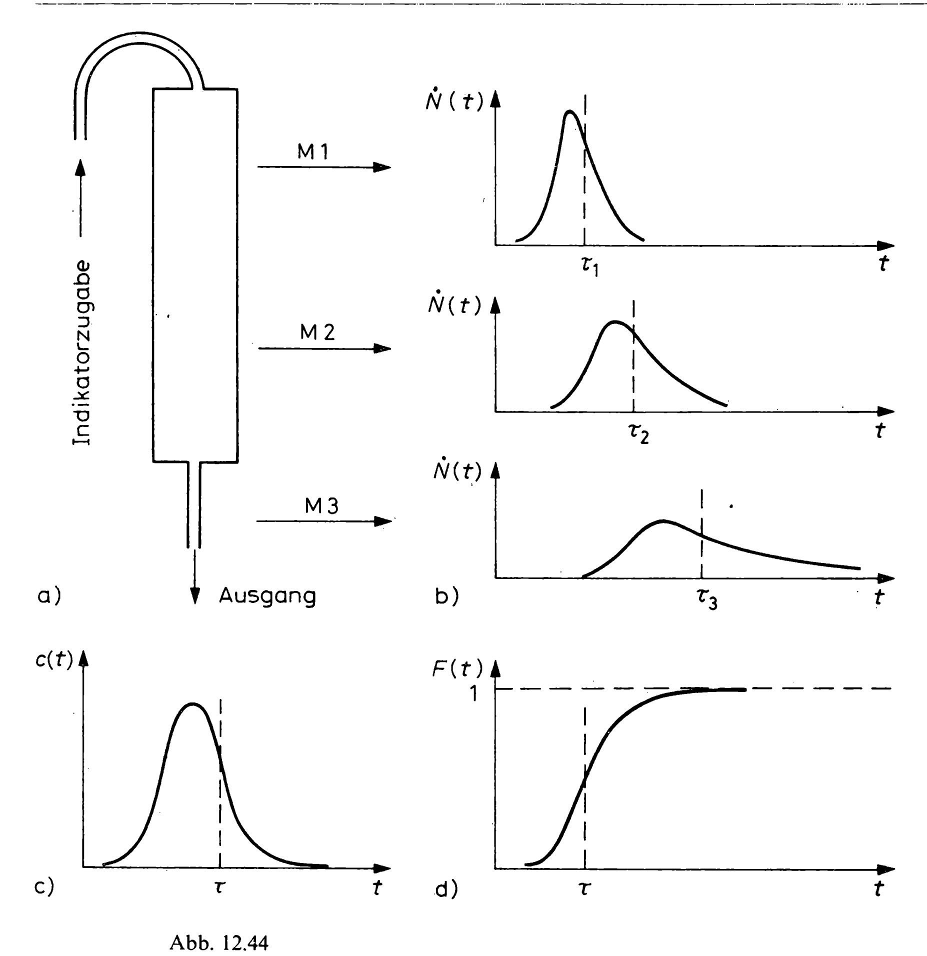


Abb. 12.44
Verweilzeitmessungen
a) Meßstellen an einer Durchsatzanlage, b) Zählraten nach Stoßmarkierung, c) Verweilzeitdichtefunktion, d) Mittlere Verweilzeit

also den Mittelwert der Verweilzeit. Aus Abb. 12.44 erkennt man die anschauliche Bedeutung von τ. Einer der Vorteile der Verweilzeitermittlung mit Radioindikatoren besteht darin, daß der Betriebsablauf des zu untersuchenden Systems nicht gestört wird. Die Messung kann bei dem für den Betrieb erforderlichen Druck-, Temperatur- und Konzentrationsverhältnissen erfolgen. Da der Radioindikator bei einer Inertmarkierung ausschließlich den Transportvorgang widerspiegelt, kann man auf diese Weise Stofftransport und chemische Reaktionen getrennt betrachten. Das Ziel der Verweilzeitmessungen sind Aussagen, die zur Anlagen- und Prozeßoptimierung erforderlich sind. Man entwickelt dazu Modelle, die die Form und die Intensitäten der Aktivitätsmessungen erklären. Zu ihnen gehört, um ein Beispiel zu nennen, das Zellenmodell, in dem davon ausgegangen wird, daß die Form der Verweilzeitspektren, wie sie Abb. 12.44 zeigt, das Ergebnis der Wirkung hintereinandergeschalteter Rührkessel, also einer Rührkesselkaskade, mit n idealen Rührkesseln ist. Die Rührwirkung liegt je nach der Größe

von n zwischen den Grenzfällen der vollständigen Vermischung und der idealen Pfropfströmung. Für δ-Impulseingabe der Markierungssubstanz erhält man

$$c = c_0 \frac{1}{(n-1)!} \left(\frac{t}{\tau}\right)^{n-1} e^{-t/\tau} . \tag{12.59}$$

In Abb. 12.45 ist die Gleichung für $n = 1$ bis 6 dargestellt.

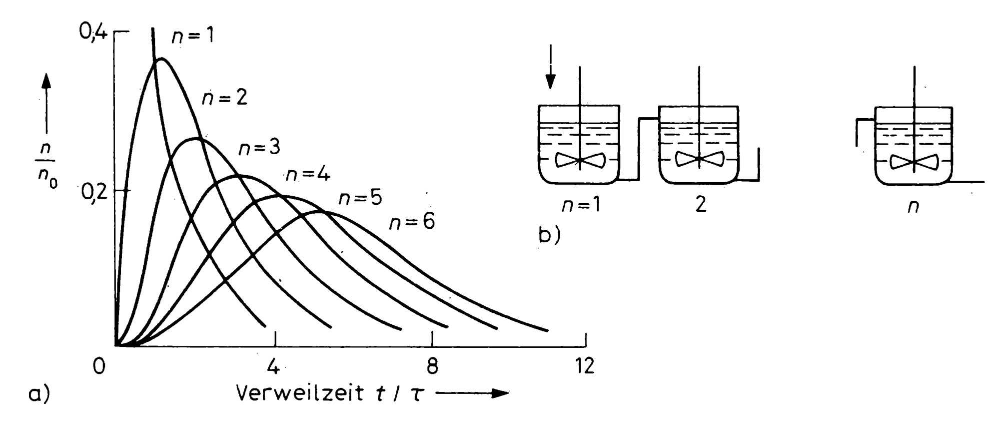


Abb. 12.45
Verweilzeitspektren im Modell n-stufiger Rührkesselkaskaden

3. Beim Verdampfen von Flüssigkeiten treten häufig durch Mitreißen Flüssigkeitströpfchen in der darüber befindlichen Gasphase auf, die zu Störungen im Betriebsablauf führen können. Mit Hilfe der Radioindikatormethode kann die mitgerissene Flüssigkeit und auch die Effektivität von Abscheidern leicht nachgewiesen werden. Auf diese Weise konnten z. B. Störungen in einer Anlage zur Hydrierung von Phenol aufgeklärt werden. Das Gasgemisch gelangt hier durch Rohrleitungen, in denen sich immer wieder eine flüssige Phase ansammelte, in den Reaktor. Nach Zugabe eines nichtflüchtigen Radioindikators in den flüssigen Einsatzstoff stellte man fest, daß die Flüssigkeit in den Rohren inaktiv blieb. Das Kondensat entstand somit nicht durch mitgerissene Flüssigkeitströpfchen, sondern durch Unterschreitung des Taupunktes von Gemischbestandteilen. Durch zusätzliche Beheizung und Isolierung der Rohre konnte die Ursache behoben werden.

Wenn die Flüssigkeit durch Mitreißeffekt entsteht, dann kann aus den gemessenen Aktivitäten im Einsatzstoff A_E und im Kondensat A_K der Anteil des mitgerissenen Einsatzstoffes ermittelt werden. Es ist

$$G = \frac{A_K}{A_E} 100\% . \tag{12.60}$$

Diese Gleichung beruht auf der Beziehung (12.51), die aussagt, daß sich die Massen wie die mit A_r und $T_{1/2}$ multiplizierten Aktivitäten verhalten. Eine notwendige Bedingung besteht hier darin. daß die spezifische Aktivität unverändert bleibt.

4. Auf der gleichen Beziehung (12.51) beruht die bereits 1913 von G. Hevesy und F. A. Paneth eingeführte und heute in der Chemie gut bekannte Radioindikatoranalyse zur Bestimmung sehr geringer Massen eines radioaktiv markierten Stoffs, dessen spezifische Aktivität während des Prozesses konstant bleibt. Als Beispiel betrachten wir den Nachweis von ^{99m}Tc als Radioindikator

bei der Verbesserung eines Druckverfahrens zur Ermittlung der Verteilung der Anfeuchterlösung auf den bedruckten Bögen. Mit herkömmlichen Indikatoren hätte man die Eigenschaften der Anfeuchterlösung wesentlich verändert, mit ^{99m}Tc gar nicht. Aus der Zählrate über ausgestanzten Stellen von markierten und von Standardbögen konnte ermittelt werden, daß je nach der Schwärzung 0,010 bis 0,150 µl/cm^2 Anfeuchterlösung übertragen wurden.

Ein komplizierteres Beispiel für die Anwendung der Radioindikatoranalyse zeigt die Abb. 12.46. Dabei geht es um einen Stoffumwandlungsprozeß, in dem aus den Eingangsstoffen A und B in Anwesenheit eines Hilfsstoffs C das Produkt D entsteht, das allerdings mit C verunreinigt ist. Die Bestimmung der Masse des Verunreinigungsstoffes kann mit Hilfe von (12.51) über die Messung der Aktivität des markierten Stoffs C erfolgen. Mit A_1, m_1 für D am Eingang in den Stoffwandlungsprozeß und A_2, m_2 für D als Verunreinigung ergibt sich $m_2 = m_1 A_2/A_1$. Die Voraussetzung, daß sich die spezifische Aktivität nicht verändert, ist erfüllt, solange der markierte Stoff D nicht durch chemisch identischen unmarkierten Stoff verdünnt wird.

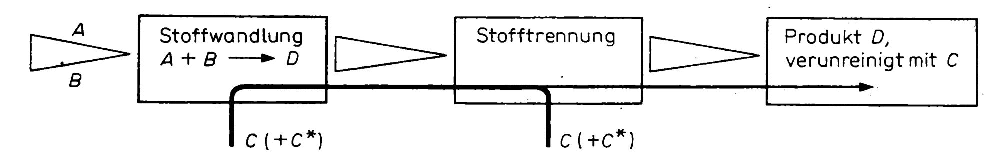


Abb. 12.46
Anwendung der Indikatoranalyse bei einer Stoffumwandlung A + B → D in Anwesenheit eines Hilfsstoffes C, der auch markiert als C* zugegeben wird und als Verunreinigung in D auftritt

5. Zur Bestimmung der Homogenität von Mischungen mit Hilfe der Radioindikatormethode wird eine Komponente markiert und dann durch Messung der Aktivität in Proben die Konzentration ermittelt. Ein Maß für die Güte der Mischung ist der Mischungsgrad M, der anfangs große Schwankungen um den zu erwartenden Mittelwert aufweist, ihn aber mit größer werdender Probenzahl immer besser annähert. Ein Beispiel eines Mischvorgangs ist die Herstellung von Beton. Durch Einbringung einer leicht zerstörbaren Ampulle mit 20 g Zement, der mit ^{24}Na markiert war und dessen spezifische Aktivität 10^6 Bq/g betrug, konnte die optimale Mischzeit in kurzer Zeit durch Aktivitätsmessungen ermittelt werden. Sie lag weit unterhalb der vom Hersteller des Mischers angegebenen Zeit.

6. Die Untersuchung von Mahlvorgängen mit Hilfe von Radioindikatoren beruht auf dem Zusammenhang zwischen der durch Zerkleinerung erreichten spezifischen Oberfläche und der an ihr adsorbierten Menge des Radioindikators, der in weiten Bereichen nahezu linear ist. Das pulverförmige Material wird unter definierten Bedingungen mit einer radionuklidhaltigen Lösung so lange behandelt, bis sich das Adsorptionsgleichgewicht eingestellt hat. Danach werden die flüssige und die feste Phase voneinander getrennt und in beiden die Aktivität bestimmt. Die adsorbierte Aktivität strebt bei sehr großen Mahlzeiten einem Sättigungswert zu. Zur Untersuchung des Mahlergebnisses an Ferritglattscherben wurde z. B. mit ^{65}Zn markiert.

7. Wie die bereits in 12.3.5, Punkt 7 besprochenen Verschleißvorgänge, so sind auch die Korrosionsvorgänge durch den Übergang äußerst geringer Stoffmengen an Feststoff-Phasengrenzen gekennzeichnet. Die Ursache sind zwischen dem Metall und dem angrenzenden Medium ablaufende chemische und elektrochemische Reaktionen, die zu unerwünschten Zerstörungen des metallischen Gefüges führen. Bei der Aufklärung von Korrosionsmechanismen und der Ausarbeitung wirksamer Schutzverfahren hat die Radioindikatormethode einen festen Platz. Prinzipiell werden hauptsächlich zwei Verfahren angewandt. Entweder man markiert das Metall

radioaktiv, z. B. durch Aktivierung oder Implantation, oder aber eine bestimmte Komponente des Korrosionsmediums. Im ersten Falle kann man den Übergang der Metallionen in das Korrosionsmedium ermitteln, im zweiten die Adsorption der ausgewählten Komponente an der Metalloberfläche, bzw. ihren Einbau in einer auf dem Metall vorhandenen Deckschicht. Auf diese Weise werden Inhibitoren gefunden, die die Korrosion verlangsamen.

Ähnlich verläuft die Aufklärung von Wirkungsmechanismen der Schmierstoffe.

8. Auf dem Prinzip der Markierung beruht die 1932 erstmals von G. HEVESY eingesetzte Methode der Isotopenverdünnung. Sie eignet sich zur Analyse von Stoffgemischen aus chemisch ähnlich und damit nur schwer trennbaren Substanzen, aber auch zur Analyse von Substanzen in schwer zugänglichen Volumina.

Dem Stoffgemisch, das die unbekannte Menge oder Masse m_x der zu bestimmenden Komponente enthält, wird eine kleine, bekannte Masse des gleichen, aber markierten Stoffs m_1 mit der Aktivität A_1 zugegeben. Die spezifische Aktivität ist dann $A_{s,1} = A_1/m_1$. Nach gründlicher Durchmischung wird der Stoff wieder abgetrennt. Ohne Rücksicht auf die Ausbeute G ist die Masse der abgetrennten Fraktion $m_2 = G(m_x + m_1)$, ihre Aktivität $A_2 = GA_1$ und die spezifische Aktivität

$$A_{s,2} = \frac{A_1}{m_x + m_1} = \frac{A_2}{m_2}. \tag{12.61}$$

Durch Substitution von $A_1 = A_{s,1} m_1$ erhält man

$$m_x = m_1 \left(\frac{A_{s,1}}{A_{s,2}} - 1 \right). \tag{12.62}$$

Da m_1 und $A_{s,1}$ bekannt sind, kann durch Messung von A_2 oder $A_{s,2}$ die unbekannte Masse m_x ermittelt werden. Wenn die spezifische Aktivität $A_{s,1}$ sehr groß ist, also z. B. bei trägerfreien Substanzen, dann vereinfacht sich (12.62) wegen $A_{s,1} \gg A_{s,2}$ zu

$$m_x = m_1 \frac{A_{s,1}}{A_{s,2}} = \frac{A_1}{A_{s,2}}. \tag{12.63}$$

Ausgehend von dieser Gleichung kann man auch die Analyse von unzugänglichen Volumina vornehmen, wie etwa unterirdische Wasserreservoire oder Blutvolumina. Man ersetzt dazu in (12.63) die Massen durch die Volumina und erhält

$$V_x = V_1 \frac{A_{s,1}}{A_{s,2}}. \tag{12.64}$$

Die Isotopenverdünnungsanalyse hat den Vorteil, daß die Isolierung der zu bestimmenden Substanz chemisch rein, aber nicht quantitativ zu erfolgen braucht, weil sich G herauskürzt. Man kann aber ausgehend von (12.63) andererseits G bestimmen, denn wegen $A_{s,2} = A_2/m_2$ gilt

$$G = \frac{m_2}{m_x} = \frac{A_2}{A_1}. \tag{12.65}$$

Mit der Methode der umgekehrten Isotopenverdünnung kann man auch die Masse oder Menge eines radioaktiven Stoffs in einem Gemisch bestimmen. Man gibt eine bekannte Menge des gleichen, aber inaktiven Stoffs m_1 zu, durchmischt, isoliert ihn in reiner Form, bestimmt seine Menge und mißt die Aktivität der Probe. Die Auswertegleichung

$$m_x = \frac{m_1}{\left(\frac{A_{s,1}}{A_{s,2}} - 1 \right)} \tag{12.66}$$

kann auf ähnliche Weise wie (12.62) erhalten werden. Wenn die ursprüngliche spezifische Aktivität $A_{s,1}$ nicht bekannt ist, dann kann man die Isotopenverdünnungsmethode in zwei parallelen Versuchen unter Zugabe der unterschiedlichen Massen m_1 und m'_1 eines inaktiven Trägers zu zwei gleichen Proben einsetzen. Nach Bestimmung der spezifischen Aktivitäten der in beiden Fällen abgetrennten Produkte kann man $A_{s,1}$ eliminieren und erhält

$$m_x = \frac{m'_1 A'_{s,2} - m_1 A_{s,2}}{A_{s,2} - A'_{s,2}}. \tag{12.67}$$

Die einfache Isotopenverdünnungsanalyse ist durch Nachweisgrenzen von etwa 10^{-5} bis 10^{-6} charakterisiert. Sie ist also eine Makromethode und erlaubt nicht den Nachweis von Mikromengen, d. h. den Nachweis von Spuren. Die Ursache dafür ist die Genauigkeit der Bestimmung der spezifischen Aktivität, die auf einer Aktivitäts- und einer Massen- oder Mengenmessung beruht. Letztere läßt sich eliminieren, und damit kann der Fehler wesentlich verringert werden, indem gleichgroße Massen aus der Indikatorlösung und aus der nach dem Indikatorzusatz homogenisierten Analysenlösung abgetrennt werden. Dadurch wird $m_1 = m_2$. Die Abtrennung von genau gleichen Mengen eines Elements aus verschieden konzentrierten Lösungen ist allerdings keine leichte Aufgabe. Sie ist durch substöchiometrische Abtrennung eines Komplexes möglich, d. h. durch Abtrennung einer Menge, die kleiner ist, als der stöchiometrischen Zusammensetzung entspricht. Aus (12.62) ergibt sich dann mit den Zählraten der beiden Aktivitätsmessungen

$$m_x = m_1 \left(\frac{A_1}{A_2} - 1 \right). \tag{12.68}$$

Mit der substöchiometrischen Isotopenverdünnungsanalyse lassen sich Mikromengen von bis zu 10^{-10} g nachweisen.

9. In der chemischen Kinetik ermöglicht der Einsatz von radioaktiv und isotop markierten Substanzen in vielen Fällen die Aufklärung von Reaktionsmechanismen und von chemischen Strukturen, die Bestimmung von Reaktionsumsetzungsgraden und von zeitlichen Reaktionsabläufen.

Zur Untersuchung von Reaktionsmechanismen werden die Atome oder Atomgruppen radioaktiv markiert, deren Beteiligung am Reaktionsablauf nachgewiesen werden soll. Nach Ablauf der Reaktion werden die Reaktionsprodukte getrennt, um durch Aktivitätsmessungen festzustellen, in welchen Produkten die radioaktiv markierten Atome eingebaut sind. Wenn einem Reaktionsmedium radioaktiv markierte Zwischenprodukte zugesetzt werden und die Aktivität sich in den Folge- oder Endprodukten wiederfindet, so sind diese am Reaktionsablauf beteiligt. Diese Methode ist auch in lebenden Organismen zur Aufklärung von Synthesewegen möglich, ohne daß Störungen des normalen Stoffwechsels verursacht werden, wenn die Radioindikatoren in physiologisch zulässigen Konzentrationen zugesetzt werden.

Chemische Strukturen können mit der Radioindikatormethode z. B. durch schrittweisen Abbau der markierten Reaktionsprodukte und Aktivitätsmessungen an den Abbauprodukten ermittelt werden, weil dadurch die Einbaustellen in den Molekülen offenbar werden.

In allen diesen Fällen können durch die Messung der spezifischen Aktivitäten der markierten Eingangs-, Zwischen- und Endprodukte Aussagen über die zeitlichen Abläufe der Reaktionen gemacht werden.

Eine wichtige Voraussetzung für Untersuchungen zur chemischen Kinetik ist die Bedingung, daß während der Analyse kein Isotopenaustausch stattfindet und Isotopieeffekte entweder keine oder eine genau bekannte Rolle spielen.

10. Unter Isotopieaustausch versteht man den Austausch intra- oder zwischenmolekularer Atome von Isotopen eines Elements. Dabei handelt es sich um reversible Reaktionen, die zu

einer statistischen Gleichverteilung führen, die ihrerseits je nach der Art der Medien mit unterschiedlichen Austauschgeschwindigkeiten ablaufen. Isotopenaustauschreaktionen sind eine wichtige Grundlage zur Herstellung isotop markierter Verbindungen, darunter der Nuklearpharmaka. In dem einfachen Fall mit einem austauschbaren Atom in zwei verschiedenen Molekülen AX und BX lautet die Austauschreaktionsgleichung

$$AX + BX^* \rightleftarrows AX^* + BX, \tag{12.69}$$

wobei X^* die radioaktiv markierte, X die nicht markierte Atomart ist. Die Zeit, die erforderlich ist, um das Gleichgewicht zu erreichen, kann sehr groß sein. Sie kann aus der Abhängigkeit der Austauschkonstanten R, d. h. der Menge der zwischen den Molekülen ausgetauschten Atome in mol/l s berechnet werden. Wenn c_A und c_B die Konzentrationen der aktiven und inaktiven Atome von X in der A- und B-Form in mol/l sind, x die Konzentration von X^* zur Austauschzeitdauer t in der A-Form und x_∞ nach der sehr langen Zeit, dann gilt

$$R \cdot t = \frac{c_A \cdot c_B}{c_A + c_B} \ln\left(1 - \frac{x}{x_\infty}\right) \tag{12.70}$$

Nach Erreichen des Isotopengleichgewichts sind die Konzentrationen c_A und c_B und damit auch die spezifischen Aktivitäten $A_{s,A}$ und $A_{s,B}$ gleich. Wenn der Isotopenaustausch hinreichend schnell verläuft und sich die beiden Formen quantitativ voneinander trennen lassen, dann gilt für die unbekannte Masse m_B in der Form B als Funktion von der bekannten Masse m_A in der Form A

$$m_B = m_A \frac{A_B}{A_A}. \tag{12.71}$$

Als Anwendungsbeispiel betrachten wir die Ermittlung des Umsetzungsgrades bei der Produktion von Kalziumkarbid aus Koks und Kalziumoxid. Aus verfahrenstechnischen Gründen bleibt Feinkorn beider Komponenten ungenutzt. Wenn dieses Feinkorngemisch mit einem Bindemittel in die während des Abstichs den Ofen verlassende Karbidschmelze eingetragen wird, dann kann unter Nutzung des Wärmegehalts eine zusätzliche Umsetzung zu Karbid erreicht werden. Der Nachweis erfolgt über ^{14}C als Markierungsnuklid. Die Reaktionsgleichung (12.69), das sogenannte Boudouard'sche Gleichgewicht lautet: $C + {}^{14}CO_2 \rightleftarrows CO + {}^{14}CO$. Praktisch gesehen wurde zur Markierung vorgeglühter Koks in Stahlampullen mit $^{14}CO_2$ mehrmals auf 700 °C erhitzt und wieder abgekühlt. Das Gemisch, in dem der Kohlenstoff mit bekannter spezifischer Aktivität markiert war, wurde in die ausfließende Karbidschmelze eingetragen. Von dem die Nachkühltrommel verlassenden markierten Produkt wurden Proben entnommen, deren spezifische Aktivität über das bei der Umsetzung mit Wasser frei werdende ^{14}C-Azetylen bestimmt wurde. Der Umsetzungsgrad ergibt sich dann zu

$$U = \frac{A_{s,PR}}{A_{s,100}} \cdot 100\%, \tag{12.72}$$

wobei $A_{s,Pr}$ die spezifische Aktivität einer Probe des Abstichprodukts und $A_{s,100}$ der berechnete Wert bei vollständiger Umsetzung des markierten Kokses ist, wie er sich aus der Aktivitätsbilanz ergibt. Etwa 30% des in die Schmelze eingetragenen Kokses konnte nachträglich zu Karbid umgesetzt werden.

11. Isotopieeffekte sind Auswirkungen der Massenunterschiede der Isotope auf die Geschwindigkeiten chemischer Reaktionen und physikalischer Vorgänge. Sie können die Ergebnisse von Indikatoruntersuchungen verfälschen. Allerdings wirken sie sich praktisch nur bei leichten Elementen aus, wo der Massenunterschied erheblich ist, wie z. B. bei den Wasserstoffisotopen ^1H, ^2H und ^3H oder den Kohlenstoffisotopen ^{12}C, ^{13}C und ^{14}C. Zwei Moleküle der

gleichen Verbindung, aber mit unterschiedlichen Isotopen eines Elements zeigen unterschiedliche reaktionskinetische Eigenschaften. Als Beispiel eines chemischen Vorganges sei die Auswirkung auf die Reaktionsgeschwindigkeiten genannt. Moleküle mit dem leichteren Isotop sind schneller spaltbar, als Moleküle mit dem schwereren. Als Beispiel eines physikalischen Vorganges kann die Verdampfung von Wasser genannt werden. Bei 20 °C beträgt der Trennfaktor zwischen leichtem und schwerem Wasser 1,08. Wenn in der flüssigen Phase leichtes und schweres Wasser zu gleichen Anteilen enthalten wären, würde die Dampfphase 8 % mehr leichtes als schweres Wasser enthalten. Auf dieser Grundlage läßt sich leicht zwischen Oberflächenwasser in Seen und Untergrundwasser unterscheiden.

Die Auswirkungen der Isotopieeffekte auf die Vorgänge in der Natur und in der Technik sind mit den heutigen Mitteln leicht nachweisbar und können zur Grundlage von Analysemethoden gemacht werden. Wenn es sich um stabile Isotope handelt, so können auch sie durch ihre Massenzahl als markierte Atome angesehen werden. Ein Beispiel eines solchen Analyseverfahrens ist die Untersuchung der Änderung der Isotopenhäufigkeit δ. Wenn ein leichtes und ein schweres Isotop mit den Häufigkeiten H_l und H_s zu berücksichtigen sind, dann ist $\delta/‰$ definiert zu

$$\delta = \frac{\left(\frac{H_s}{H_l}\right)_{Pr} - \left(\frac{H_s}{H_l}\right)_{St}}{\left(\frac{H_s}{H_l}\right)_{St}} \cdot 1000\,‰\,, \tag{12.73}$$

wobei sich der Index Pr auf die Probe und St auf den Standard bezieht. Die Isotopenan- oder -abreicherung ist in technischen Prozessen oft größer, als in natürlichen, so daß sich die δ-Werte merklich unterscheiden. So kann man aus der Isotopenzusammensetzung von Holz erkennen, wieviel Prozent antropogendes CO_2-Gas von den Bäumen in bestimmten, den Ringen entsprechenden Zeitintervallen eingebaut wurde. Solches, aus der Verbrennung von Kohle, Erdöl und Erdgas stammendes CO_2-Gas zeichnet sich durch δ-Werte für ^{12}C von -2 bis -3 % aus, im Unterschied zu sauberem atmosphärischem CO_2-Gas mit mehr als -2 %.

12. Eine spezielle Methode zur Sichtbarmachung der Ab- oder Einlagerung radioaktiver Indikatoren ist die Autoradiographie. Im Prinzip handelt es sich um die bereits von H. Becquerel 1896 bei der Entdeckung der Radioaktivität verwendete photographische Abdruckmethode. Neben Oberflächen können auch Schnittflächen untersucht werden. Der Radioindikator kann durch Implantation, Diffusion, Zumischen, chemische Reaktionen, Stoffwechselprozesse usw. in die Untersuchungsobjekte eingebracht werden. Es besteht auch die Möglichkeit, die Radioaktivität durch Bestrahlung und Auslösung von Kernreaktionen zu erzeugen.

Man unterscheidet zwischen konventioneller und unkonventioneller Autoradiographie. Bei der konventionellen Autoradiographie wird als Strahlungsdetektor eine photographische Schicht oder ein Festkörper-Spurdetektor erforderlichenfalls unter Zwischenlegung von Schutzschichten in engen Kontakt mit der zu untersuchenden Objektfläche gebracht. Die durch Ionisierung verursachte und Entwicklung sichtbar gemachte Schwärzung oder im Festkörper-Spurdetektor die Spurendichte sind ein Maß für Aktivitäts- und damit Substanzkonzentrationen. Durch entsprechende Eichungen ist es möglich, Strahlenfluenzen mit Fehlern von etwa 5 % zu bestimmen. Die örtliche Auflösung liegt im Bereich von µm. Die Grundlagen der photographischen Registrierung wurden in 5.6.2. und 12.2.1., Punkt 7 besprochen.

Die unkonventionelle Autoradiographie umfaßt Methoden, mit denen es möglich ist, rauhe, unebene, mechanisch instabile, chemisch aggressive oder extrem heiße Flächen autoradiographisch zu untersuchen. Der notwendige Abstand zwischen Objekt und Film wird mit Lochkamera, Magnetlinsensystemen usw. überbrückt. Die örtliche Auflösung liegt hier je nach Strahlenart und Bedingungen im mm-Bereich.

12.3.7. Kerndipol- und Kernquadrupolresonanzen

1. Das magnetische Kerndipol- und das elektrische Kernquadrupolmoment können als Feldsonden am Kernort dienen. Voraussetzung ist ein permanentes magnetisches Dipol- oder ein elektrisches Quadrupolmoment. Im magnetischen Falle spricht man von Paramagnetismus. Er tritt bei Kernen auf, wenn der Spin I von Null verschieden ist. Die paramagnetische Elektronenresonanz hat unpaarige Elektronen zur Voraussetzung, kann also nicht immer herangezogen werden. Das Wesen der Nutzung der Kernmomente besteht darin, daß die Einstellung der Atomkerne im magnetischen oder elektrischen Feldern entsprechend den Gesetzen der Richtungsquantelung, d. h. in Abhängigkeit von Spin und Moment in Resonanzabsorption elektromagnetischer Energie hervorgerufen, festgestellt und gemessen werden kann. Die Grundlagen wurden in 6.4. behandelt. Die heute in den Anwendungen fast ausschließlich benutzte Methode wurde 1946 von F. Bloch und E. M. Purcell entwickelt.

Diese Kerninduktionsmethode wurde in 6.4.2.4., Punkt 2 beschrieben. Im Englischen ist die Abkürzung NMR (Nuclear Magnetic Resonance) üblich, die oft auch in der deutschsprachigen Literatur neben EMR (Electron Magnetic Resonance) zu finden ist. Andere Bezeichnungen sind paramgnetische Kernresonanz und Kernspinresonanz. Zwischen NMR und EMR gibt es keinen prinzipiellen Unterschied außer den von Kern und Elektron als Träger des magnetischen Dipolmoments und damit des grundsätzlich verschiedenen Wertes. Bei den magnetischen Kernresonanzen hat die Induktion des äußeren magnetischen Feldes Werte von 1 T, die Frequenzen und Wellenlängen liegen im UKW-Bereich, d. h. bei $8 \cdot 10^7$ Hz und 3 m. Für Elektronenspinresonanzen sind die charakteristischen Werte 10^{10} Hz und $3 \cdot 10^{-2}$ m, d. h., man arbeitet im Mikrowellenbereich. Für die Kernquadrupolresonanzen benötigt man Frequenzen und Wellenlängen im Bereich zwischen UKW- und Mikrowellen, also zwischen 10^8 bis 10^9 Hz und 3 m bis 3 dm. Man erkennt aus diesen Angaben, daß es sich bei den Verfahren zur Messung der Kerndipol- und Kernquadrupolresonanzen um Hochfrequenzverfahren handelt. Anwendungen der Kernphysik sind sie insofern, als diese den Spin, die Momente, die Zusammenhänge zwischen Moment und Feldern sowie die Methode geliefert hat.

2. In 6.4.2.4. wurde gezeigt, daß die magnetischen Dipole durch Absorption von HF-Energie in höhere Energiezustände übergeführt werden können. Da die Übergangswahrscheinlichkeiten zwischen zwei Zuständen in entgegengesetzten Richtungen gleich groß sind, ist eine makroskopisch als Absorptionslinie feststellbare Energieaufnahme aus dem HF-Feld nur möglich, wenn der niederenergetische Zustand stärker besetzt ist, als der höherenergetische. Wenn die Kernmomente nicht mit der Umgebung wechselwirken würden, wären beide Zustände bald gleich stark besetzt. Da es aber eine solche Wechselwirkung gibt, man nennt in diesem Zusammenhang die Umgebung Gitter und spricht von Spin-Gitterwechselwirkung, wird ein Teil der von den Kernen zur Einstellung über die Momente aufgenommenen Energie an das Gitter weitergegeben. Es stellt sich ein statistisches Gleichgewicht ein, bei dem sich die Besetzungen statistisch betrachtet nicht mehr ändern (6.137). Wenn die Amplitude des HF-Feldes zu groß ist, tritt Sättigung ein, d. h., alle Zustände eines Spinmultipletts sind gleichmäßig besetzt, alle Übergänge sind gleichwahrscheinlich, es wird keine Energie mehr aufgenommen. Der Ausweg besteht darin, daß man entweder mit kleiner Amplitude oder im Impulsbetrieb anregt. Bei Impulsbetrieb, wie er z. B. in der Anordnung von Abb. 6.33 realisiert ist, können die Zustände des Spinmultipletts in den Grundzustand zurückkehren. Diese Rückkehr erfolgt in Abregungsvorgängen, sogenannten Relaxationen, zweierlei Art. Durch die Spin-Gitter-Wechselwirkung wird Energie an die Umgebung abgegeben. Die zugehörige Zeitkonstante heißt Spin-Gitter-Relxationszeit T_1. Sie liegt in reinen Flüssigkeiten bei einigen Sekunden, in reinen Festkörpern und bei tiefen Temperaturen bei einigen Tagen. Paramagnetische Verunreinigungen verkürzen T_1 wesentlich. Die zweite Ursache für die Relaxationszeit ist die Wechselwirkung innerhalb

des Spinmultipletts, mit der Spin-Spin-Relaxationszeit T_2. Hierbei ändert sich der Energieinhalt des Systems nicht. In Flüssigkeiten ist $T_1 \approx T_2$, in Festkörpern gilt $T_2 \ll T_1$. Ohne paramagnetische Verunreinigungen liegen die T_2-Werte der Flüssigkeiten bei 1 s, für Kristalle bei 10^{-5} s. Wie bereits erläutert wurde, ist die Sättigung eine Funktion von der Stärke der Spin-Gitter-Wechselwirkung. Große T_1-Werte, also geringe Wechselwirkung mit der Umgebung, bedeuten leichte Sättigung.

Die Form der Resonanzlinie läßt sich durch eine Gauß- oder in einfachen Fällen durch eine Lorentz-Kurve annähern. Dabei ist charakteristisch, daß T_2 im stärkerem Maße eingeht, als T_1. So ist die Halbwertsbreite der Lorentz-Kurve $\Delta\omega_{1/2}$ umgekehrt proportional zu T_2.

3. Neben den Relaxationszeiten ist der genaue Energiewert der Kernspinresonanzen eine Informationsquelle über die Umgebung der zur Untersuchung herangezogenen Kerne. Die Resonanzenergie freier Atome eines Nuklids unterscheidet sich von der in Metall- oder Halbleiterkristalle eingebauten Atome des gleichen Nuklids. Man gibt den Betrag als relative Frequenzänderung $\Delta\nu/\nu$ an und nennt diese Knight-Verschiebung. Die Ursache der Knight-Verschiebung ist die Wechselwirkung der magnetischen Dipolmomente der Leitungselektronen mit den Kerndipolmomenten. Die Werte von $\Delta\nu/\nu$ liegen zwischen 0,1 und 2,0% und hängen nicht von der Stärke des äußeren Magnetfeldes ab, da $\Delta\nu/\nu = \Delta B/B$ ist. Man kann mit Hilfe der Knight-Verschiebung das Produkt aus magnetischer Suszeptibilität χ und der Wellenfunktion der Elektronen am Kernort bestimmen.

4. Die innere Struktur von Flüssigkeiten und Festkörpern hat einen bestimmenden Einfluß auf die Breite der Resonanzlinie. In Festkörpern ist der Abstand zwischen den Kernen durch das Gitter vorgegeben. Daher wirkt an jedem Kernort im Gitter neben dem von außen angelegten Magnetfeld das von den Nachbarkernen hervorgerufene. Es beträgt ca. 10^{-4} bis 10^{-3} T. Wegen der statistischen Orientierung der Kerndipolmomente ist der Beitrag für Kerne, die sich an verschiedenen Stellen des Gitters befinden verschieden groß. Die Kerne haben dadurch keine einheitliche Resonanzfrequenz mehr, die Resonanzlinie ist verbreitert, so daß Untersuchungen dieser Art Breitlinienspektroskopie genannt werden. Im Unterschied dazu ist die Linienbreite von Flüssigkeiten mit 10^{-6} bis 10^{-7} T um einige Größenordnungen kleiner, als von Festkörpern. Man spricht in diesem Zusammenhang von hochauflösender Kernresonanzspektroskopie. Die Ursache für die kleinen Halbwertsbreiten ist das Fehlen des Zusatzfeldes. Durch die schnelle Bewegung und Umorientierung der Moleküle werden die von den Nachbarkernen an einem bestimmten Kernort wirksamen magnetischen Einflüsse herausgemittelt.

5. Mit der hochauflösenden Kernresonanzspektroskopie können hauptsächlich zwei Effekte untersucht werden, die chemischen Verschiebungen und die indirekte Spin-Spin-Kopplung. In Abb. 12.47 ist das Kernresonanzspektrum von Äthylalkohol mit der chemischen Formel

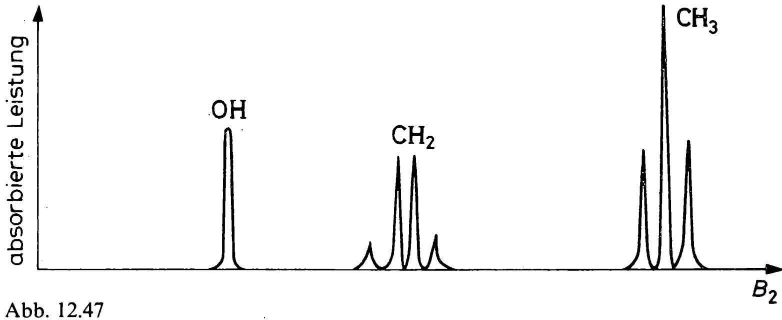


Abb. 12.47
Kernresonanzspektren von Äthylalkohol $CH_3—CH_2(OH)$

CH_3—CH_2(OH) gezeigt. Zuerst fällt auf, daß es für jede Protonengruppe eine Liniengruppe gibt und daß deren Flächeninhalt proportional ist zur Protonenzahl. Zweitens hat jedes Proton eine andere Resonanzenergie. Das ist die Folge der chemischen Verschiebung, die dadurch entsteht, daß die Protonen unterschiedlich von den Elektronen abgeschirmt werden. Drittens zeichnen sich auch die Protonen innerhalb einer gemeinsamen Elektronenwolke durch unterschiedliche Resonanzfrequenzen aus. Die Ursache dafür ist die Spin-Spin-Wechselwirkung für zwei oder drei Protonenspins. Diese wirken aber nicht unmittelbar, sondern über die Elektronen der C-Atome. Allgemein betrachtet ist diese Aufspaltung um so kleiner, je mehr Bindungen zwischen die Kopplung geschaltet sind. Man kann daher auf die Molekülgröße und Molekülstruktur schließen. Sehr vorteilhaft ist dabei die Unabhängigkeit dieser Spin-Spin-Aufspaltung von der Stärke des äußeren Feldes, weil es so gelingt, die chemische Verschiebung abzutrennen, die ihrerseits vom äußeren Feld abhängt. Aus der chemischen Verschiebung kann man die räumliche Lage der Kerne im Molekül untersuchen. Die Linienintensitäten enthalten Informationen über Gemischzusammensetzungen, also Elementanteile, die Linienbreiten erlauben Aussagen über die Geschwindigkeiten von Austauschprozessen. Aus den Relaxationszeiten kann auf die Bewegung der Moleküle und ihrer Teile geschlossen werden sowie auf die Kinematik schneller reversibler Prozesse. Auch Konfigurationsbestimmungen sind möglich. Über den Kernspin kann man die inneratomaren und innermolekularen Magnetfeldstärken bestimmen. In der Biologie werden Zellen und Stoffwechselprozesse untersucht; Erkenntnisse und Methode werden in der medizinischen Diagnostik eingesetzt.

Als Beispiel einer modernen Entwicklung kann die Kernspintomographie genannt werden. Die Proportionalität zwischen Larmor-Frequenz und magnetischer Induktion (6.112) wird hier in doppelter Hinsicht genutzt, einmal zur gewöhnlichen Kerninduktion, zum anderen zur Zuordnung eines Kernresonanzsignals zu einem bestimmten Koordinatentripel. Das ist dadurch möglich, daß die Probe in das Feld von drei senkrecht aufeinander stehenden Spulen mit definierten Feldgradienten gebracht wird. Durch geeignete Kombination der Ströme in den Spulen kann jede gewünschte Schicht angeregt und ausgemessen werden. Das ist ein großer Vorteil gegenüber der Röntgen-Computer-Tomographie, wo man wegen der starken Schwächung der Röntgen-Strahlung praktisch auf die Messung in Querschnitten beschränkt ist. Meistens werden mit Hilfe der Kernspin-Tomographie Protonendichten sichtbar gemacht. Dadurch unterscheiden sich die Ursachen für Hell-, Grau- und Dunkeltöne von denen der Röntgen-Aufnahmen. Fettarme Knochen, durchströmte Blutgefäße sind dunkel, fetthaltige Gewebe hell. Darüber hinaus kann man die Relaxationszeiten zur Analyse nutzen. Sie hängen von der Wechselwirkung der präzedierenden Protonen mit der Umgebung und untereinander ab und liegen zwischen µs und s. Im Tumorgewebe weichen sie deutlich von denen im gesunden Gewebe ab. Daraus ergibt sich die Möglichkeit, nicht nur die Morphologie, sondern auch den Gewebezustand sichtbar zu machen. Da sich die Relaxationszeiten durch Zugabe paramagnetischer Ionen auch bei sehr kleinen Konzentrationen ändern, können völlig neuartige „Kontrastmittel" eingesetzt werden, die organ- oder gewebespezifisch die Relaxationszeiten beeinflussen.

Die magnetische Induktion in gewöhnlichen Kernspin-Tomographen hat Werte von 0,1T, die Stabilität des Sollwerts der Induktion muß etwa 10^{-5} betragen. Die Meßzeiten belaufen sich auf einige Minuten, die Meßwertverarbeitung erfolgt in Bruchteilen einer Sekunde.

6. Um die Aussagekraft der Kerninduktionsmethode zu erhöhen, werden Verfahren eingesetzt, bei denen zusätzlich zum HF-Feld B_2 in Abb. 6.33, das die Resonanz auslöst, noch ein zweites HF-Feld B_4 angelegt wird, das zusätzlich Energie in das Spinsystem einbringt und so zu Resonanzen in anderen Teilen führt. Bekannt sind die Kern-Kern-Doppelresonanz (auch INDOR-Technik genannt, von Intermolecular Double Resonance) und die Elektron-Kern-Doppelresonanz-(ENDOR-)Technik. Bei der Kern-Kern-Doppelresonanz werden zwei Kernsorten oder zwei gleiche Kernarten an unterschiedlichen Stellen eines Moleküls mit unterschiedlicher Resonanzfrequenz angeregt, wodurch man sehr spezielle Problemstellungen bearbeiten kann. Das gilt auch für die Elektron-Kern-Resonanz, wo wegen der Kopplung von J und I die Hyperfeinstruktur gezielt zur Untersuchung eingesetzt werden kann. Weitere Möglichkeiten bieten der Overhauser- und der Festkörpereffekt. Doppelresonanzen können auch durch

Schall- und Ultraschall ausgelöst werden. Das optische Pumpen, das in 6.4.4.2. Punkt 4 besprochen wurde, ist ein Spezialfall der Elektronendoppelresonanz.

7. Das einfache Prinzip der Kerninduktionsmethode von Abb. 6.33 ist vielfältig verfeinert worden, wovon auch Punkt 6 zeugt. In modernen Geräten werden Induktionen B_1 von 5 T erzeugt und HF-Felder mit 200 MHz angelegt. Bei hochauflösenden Verfahren muß $\Delta B_1/B_1 \lesssim 10^{-7}$ sein. Zum Nachweis der Relaxationsprozesse kommen zwei Grundverfahren in Anwendung, die Impulssättigungs- und die Spinechomethode. Bei der Impulssättigungsmethode ist der HF-Impuls B_2 mit der Resonanzfrequenz so intensiv, daß das Spinsystem gesättigt wird. Danach wird ein HF-Feld mit der gleichen Frequenz, aber kleinerer Amplitude kontinuierlich eingestrahlt, mit dem nach Abklingen der Sättigung ein Wiederanwachsen des Absorptionssignals mit T_1 aufgenommen werden kann. Die Signalamplituden beider Felder sind in Abb. 12.48 dargestellt.

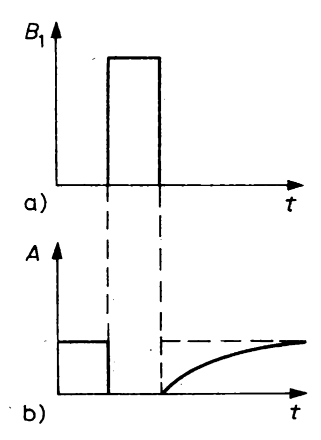


Abb. 12.48
Signalverhältnisse bei der Impulssättigungsmethode
a) Sättigungsimpuls B_1, b) Wiederanwachsen der Signalamplitude A

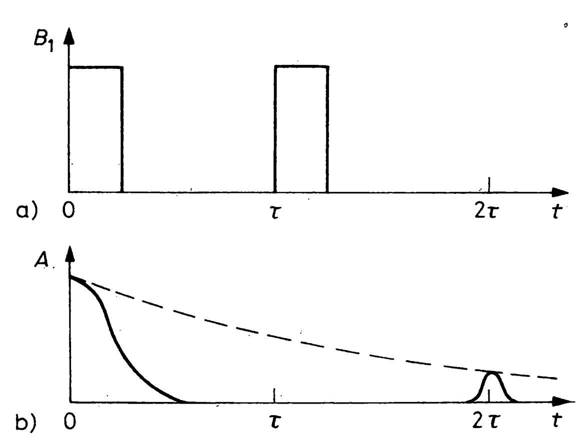


Abb. 12.49
Signalverhältnisse bei der Spinechomethode
a) B_1-Impulse, b) Signale der freien Induktion und Spinecho

Bei der Spinechomethode werden neben dem konstanten Magnetfeld $\boldsymbol{B}_1$ mehrere HF-Impulse definierter Länge und Feldstärke eingestrahlt. Die Signalamplituden zeigt die Abb. 12.49. Um T_2 zu bestimmen wirkt zur Zeit $t = 0$ ein $\pi/2$-Impuls, der die Spins um 90° in die zu $\boldsymbol{B}_1$ senkrechte Ebene klappt. Hier präzedieren sie um die $\boldsymbol{B}_1$-Richtung und erzeugen in einer zu $\boldsymbol{B}_1$ senkrechten Spule ein Signal. Die Präzessionsgeschwindigkeit der einzelnen Spins ist unterschiedlich, da sich die Relaxationseinflüsse und Feldinhomogenitäten auswirken. Die Spinrichtungen laufen auseinander und diese sogenannte freie Induktion klingt ab. Zum Zeitpunkt $t = \tau$ wird ein π-Impuls eingestrahlt, der alle Spins in der Präzessionsebene um $\boldsymbol{B}_2$ als Achse um 180° klappt. Damit eilen die schneller präzedierenden Spins den langsameren nach. Bei $t = 2\tau$ befinden sich die Spins wieder in einheitlicher Richtung und induzieren das sogenannte Spinecho. Indem τ geändert wird, kann man die Echoamplitude als Funktion von der Zeit untersuchen und so T_2 ermitteln.

Mit der Spinechomethode kann auch T_1 bestimmt werden, indem eine π-$\pi/2$-π-Impulsfolge eingestrahlt wird. Durch den π-Impuls werden die Spins um 180° zur Feldrichtung geklappt, d. h. die Kerne in einen Anregungszustand versetzt. Darauf folgt die Rückkehr der Spins in den Ausgangszustand durch Relaxation mit der Zeitkonstanten T_1. Mit den $\pi/2$-π-Impulsen wird die Rückkehr als Funktion von der Zeit untersucht. Zuerst zeigen sich negative Spinechos, d. h. Emissionssignale, dann positive. Aus dem Nulldurchgang läßt sich T_1 sehr genau bestimmen.

8. Die elektrische Kernquadrupolresonanz tritt bei Kernspins $I > 1/2$ auf (Siehe 6.8), wenn ein permanentes Quadrupolmoment vorhanden ist. Die deformierten Kerne richten sich in einem inhomogenen elektrischen Feld ebenfalls entsprechend der Richtungsquantelung, den Spins und den Momenten aus. Die Inhomogenität kommt durch Überlappung des elektrischen Feldes der Atome und Moleküle zustande. Die Quadrupole präzessieren in diesem Feld und können durch eingestrahlte HF-Energie mit der Resonanzfrequenz zu Übergängen zwischen verschiedenen Orientierungen, also auf Anregungszustände gedreht werden. Die bei der Umorientierung aufgenommene Energie wird als Absorptionslinie gemessen. Da kein homogenes elektrisches Feld existiert, kann die Resonanzstelle nur durch Frequenzmodulation festgestellt werden. Aussagemöglichkeiten gibt es hinsichtlich des Kernquadrupolmoments, des elektrischen Feldgradienten und damit hinsichtlich des Gitters, seiner Störungen und chemischen Bindungen.

12.3.8. Gestörte Winkelkorrelationen

1. Messungen der gestörten Winkelkorrelationen, meistens zwischen zwei γ-Quanten einer Abregungskaskade $I_i \to I' \to I_f$ gehören zu den oft angewendeten Stoffanalyseverfahren. Die Methodik kommt einschließlich der Apparatur aus der Kernspektroskopie, wo mit Hilfe der Richtungs- und Polarisations-Winkelkorrelationen der Multipolcharakter der γ-Strahlung, d. h. Spins und Paritäten von Kernanregungszuständen ermittelt werden. Dieser Problematik sind die Abschnitte 9.6.4.1. und 9.6.4.2. gewidmet. Dort wurde angenommen, daß auf die Kerne kein äußeres Feld einwirkt. Ist ein solches Feld vorhanden, so kann es zu einer Rotation der Kerne in diesem Feld kommen, was gleichbedeutend damit ist, daß die Winkelkorrelationsfunktion $W(\Theta)$ gestört wird oder anders ausgedrückt zur zeitabhängigen Funktion $W(\Theta, t)$ wird. Im magnetischen Falle wechselwirken das magnetische Kerndipolmoment $\boldsymbol{\mu}^*$ und die magnetische Induktion $\boldsymbol{B}$ des äußeren Feldes miteinander, im elektrischen das Quadrupolmoment $\boldsymbol{Q}$ des Kerns und der Gradient des elektrischen Feldes

$$V_{zz} = \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}. \tag{12.74}$$

Die Präzessionsfrequenz ist im magnetischen Falle gleich der Larmor-Frequenz ω_L, die mit (6.111, 112) bestimmt werden kann, im elektrischen ist

$$\omega_0 = \frac{eQV_{zz}}{\hbar} \frac{3}{2I(I+1)}. \tag{12.75}$$

Damit die Störung der Winkelkorrelation gemessen werden kann, muß der mittlere Drehwinkel

$$\Delta\Theta = \omega_L \cdot \tau \quad \text{bzw.} \quad \omega_0\tau\,, \tag{12.76}$$

d. h. die Lebensdauer τ des Zustandes mit I, hinreichend groß sein. Für $\boldsymbol{B} = 1$ T und $g = 1$ wird $\omega_L = 4{,}8 \cdot 10^7$ rad/s, so daß für $\tau = 10^{-9}$ s $\Delta\Theta = 2{,}75°$ wird. Als Beispiel für den elektrischen Fall sei das Meßergebnis für die Kernquadrupolrotation von ^{181}Ta dargestellt. Der 614-keV-Zustand wird durch β^--Zerfall von ^{181}Hf angeregt und über die Kaskade 133 keV-481 keV abgeregt. Der Zwischenzustand hat die Halbwertszeit $T_{1/2} = 1{,}0 \cdot 10^{-8}$ s. Man ermittelte im Experiment $\omega_0 = (312 \pm 7)$ MHz. Da Q gut bekannt war, konnte $V_{zz} = 5{,}5 \cdot 10^{17}$ V/cm^2 erhalten werden. Die Ta-Kerne entstanden durch Bestrahlung einer Hf-Matrix mit Neutronen, so daß das Meßergebnis der Wert des elektrischen Feldgradienten in einem Hf-Einkristall ist.

Durch Messung der gestörten Winkelkorrelationen ist es möglich, für statische Felder die magnetische Induktion oder den Gradienten der elektrischen Feldstärke am Kernort zu bestimmen. Dabei ist es belanglos, welche Ursache diese Felder haben. Voraussetzung sind Meßkerne mit einer $I_i \to I \to I_f$-Kaskade in der interessierenden Matrix, wobei die Lebensdauer des mittleren Zustandes zwischen 10^{-6} und 10^{-9} s liegen muß und im magnetischen Falle $I \geqq 1/2$, im elektrischen $I \geqq 1$ sein muß. Eine Analyse des allgemeinsten Falles der zeitabhängigen Winkelkorrelationsfunktion für polykristalline Proben zeigt, daß die gesamte Zeitabhängigkeit im Schwächungskoeffizienten $G_{kk}(t)$ erfaßt werden kann. Im Unterschied zu (9.217) ergibt sich

$$W(\Theta, t) \sum_k A_{kk} G_{kk}(t)\, P_k(\cos\Theta)\,. \tag{12.77}$$

Bei Beschränkung auf den einfachen Fall einer Kaskade mit $0 \to 1 \to 0$, die in Übereinstimmung mit (9.214) auf

$$W(\Theta) = 1 + A_2 P_2(\cos\Theta) = \alpha_0 + \alpha_2 \cos(2\Theta) \tag{12.78}$$

führt, ergibt sich bei zeitabhängiger Korrelationsfunktion im magnetischen Feld

$$W(\Theta, \pm\boldsymbol{B}, t) = 1 + A_2 P_2[\cos(\Theta \pm \omega_L \cdot t)], \tag{12.79}$$

wobei

$$\alpha_0 = 1 + \frac{A_2}{4}; \qquad \alpha_2 = \frac{3}{4} A_2 \tag{12.80}$$

ist.

2. Man unterscheidet die integrale und die differentielle Meßmethoden. Wenn die Lebensdauer τ des Zwischenzustandes mit I viel kleiner ist, als die Auflösungszeit τ_0 der Koinzidenzschaltung in der experimentellen Anordnung von Abb. 9.67, d. h. wenn $\tau \ll \tau_0$, dann wendet man die integrale Methode an, wenn $\tau > \tau_0$, die differentielle.

Im Falle $\tau \ll \tau_0$ stellt die experimentell beobachtete Winkelkorrelationsfunktion einen zeitlichen Mittelwert dar. Gemäß (12.79) nimmt die Drehung der Richtungskorrelation mit der Verweilzeit t im mittleren Zustand mit I zu. Da der Zerfall dieses Zustandes dem Gesetz des radioaktiven Zerfalls (2.46) gehorcht, ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die Verweilzeit zwischen t und $t + \mathrm{d}t$ liegt gleich

$$W(t) \cdot \mathrm{d}t = \lambda\, \mathrm{e}^{-\lambda t}\, \mathrm{d}t\,. \tag{12.81}$$

Für den Mittelwert ergibt sich damit

$$\overline{W(\Theta, \pm \boldsymbol{B})} = \frac{\int\limits_0^\infty e^{-t/\tau}\, W(\Theta, \pm \boldsymbol{B}, t)\, dt}{\int\limits_0^\infty e^{-t/\tau}\, dt}\,. \tag{12.82}$$

Unter Berücksichtigung von (12.79) und

$$\Delta\Theta = \frac{1}{2} \arctan (2\omega_L \tau) \tag{12.83}$$

erhält man

$$W(\Theta, \pm \boldsymbol{B}) = \alpha_0 + \frac{\alpha_2}{\sqrt{1 + (2\omega_L\tau)^2}} \cos [2(\Theta \pm \Delta\Theta)]\,. \tag{12.84}$$

Im Vergleich zu (12.78) tritt ein Schwächungskoeffizient vor der cos-Funktion auf und eine Winkelverschiebung, die für $\omega_L \cdot \tau \ll 1$ wegen (12.83) auf (12.76) führt. In Abb. 12.50 sind die ungestörte Kurve für $\boldsymbol{B} = 0$ und die gestörte für $\boldsymbol{B} = \pm 5{,}35$ T, gemessen an der 631-137-keV-Kaskade in ^{186}Os mit $2^+ \to 2^+ \to 0^+$ und $\tau = 10^{-9}$ s, gezeigt.

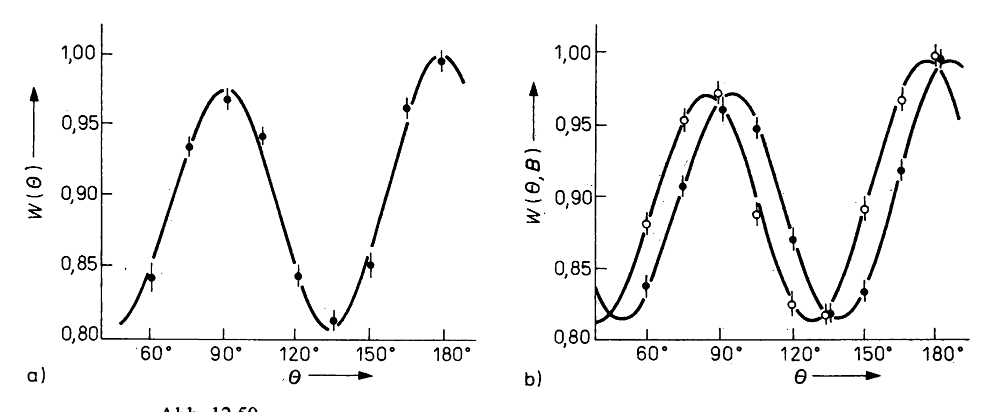


Abb. 12.50
Experimentelle Winkelkorrelationsfunktionen für die 631-137-keV-2^+-2^2-0^+-Kaskade in ^{186}Os für $\boldsymbol{B} = 0$ und $\pm 5{,}35$ T (nach BODENSTEDT u. a.)

Im Falle $\tau > \tau_0$, d. h. wenn $\tau \gtrsim 10^{-9}$ s ist, kann man eine Zeitmessung nach dem Prinzip der verzögerten Koinzidenzen durchführen. Beim Winkel $\Theta = 135°$ zwischen den beiden Detektoren nimmt die Funktion (12.78) die besonders einfache Form

$$W(\Theta = 135, \pm \boldsymbol{B}, t) = \alpha_0 + \alpha_2 \sin (2\omega_L t) \tag{12.85}$$

an. Das Zeitspektrum mit der Zerfallsrate $\dot{N}(t)$ ergibt sich zu

$$\dot{N}(\pm \boldsymbol{B}, t) = a\, e^{-t/\tau}[\alpha_0 \pm \alpha_2 \sin (2\omega_L t)]\,. \tag{12.86}$$

Das ist eine mit der Larmor-Frequenz modulierte Kurve, wie sie die Abb. 12.51 zeigt. Wenn für beide Einstellungen $\pm \boldsymbol{B}$ gemessen wird, kann man über das Verhältnis

$$R(t) = 2\,\frac{\dot{N}(+\boldsymbol{B}) - \dot{N}(-\boldsymbol{B})}{\dot{N}(+\boldsymbol{B}) + \dot{N}(-\boldsymbol{B})} = 2\,\frac{\alpha_2}{\alpha_0}\sin\,(2\omega_{\mathrm{L}}t) \qquad (12.87)$$

eine reine Sinusfunktion erhalten. Diese differentielle Methode wird auch Spinrotationsmethode genannt.

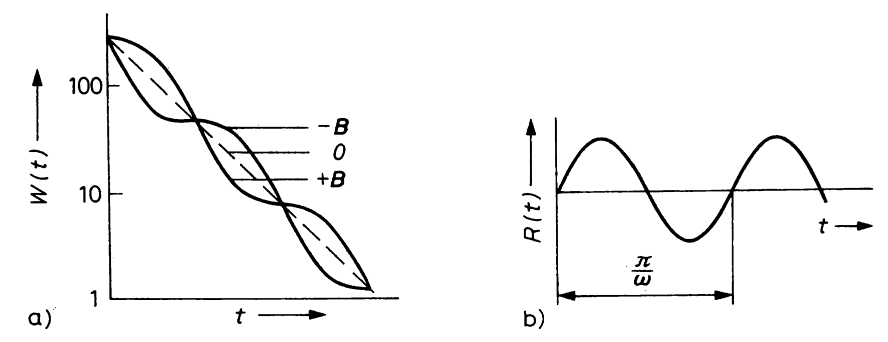


Abb. 12.51
Winkelkorrelationsfunktionen bei der differentiellen Methode der Messung der gestörten Winkelkorrelationen

12.3.9. Mößbauer-Effekt

1. In den meisten Anwendungen des Mößbauer-Effekts wird die natürliche Linienbreite der γ-Linien $\Gamma = \hbar/\tau$ genutzt, weil sie die Möglichkeit bietet, kleinste Energiedifferenzen zu spektrometrieren. Wie in 9.7.2. festgestellt wurde, ist $\Gamma/\Delta E^*$ ein Maß für die dabei erreichbare Genauigkeit. Die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten von Resonanzen hängt stark von kleinsten Änderungen der Resonanzenergie ab. Diese können durch die unterschiedlichsten, am Kernort wirkenden elektrischen und magnetischen Felder verursacht werden. Sie führen zu Energieverschiebungen und Aufspaltung von Linien und damit zu Änderungen des Mößbauer-Spektrums. Die dabei meßbaren Charakteristika der Mößbauer-Spektren enthalten Informationen über den Kern und die am Kernort die Felder verursachende Umgebung. Das ist die Grundlage für den Einsatz der Mößbauer-Spektrometrie in der Kern-, Atom-, Molekül- und Festkörperphysik, in der Chemie, Biologie, Mineralogie, Geologie sowie in einer ganzen Reihe anderer Wissenszweige.

2. Das unmittelbare Ergebnis der Mößbauer-Spektrometrie sind Absorptionsspektren der γ-Quanten nach Durchstrahlung einer Probe als Funktion von der Relativgeschwindigkeit zwischen Quelle und Probe. Dabei können recht unterschiedliche Formen auftreten. Vier Möglichkeiten sind in Abb. 12.52 dargestellt. Alle auftretenden Linien haben, solange es sich um dünne Quellen und Proben handelt, eine spektrale Intensitätsverteilung, wie sie mit Hilfe der Breit-Wigner-Formel beschrieben werden kann:

$$I(\omega) = \dot{N}(\omega) = \frac{\Gamma}{2\pi\left[(\omega - \omega_0)^2 + \dfrac{\Gamma^2}{4}\right]}\,. \qquad (12.88)$$

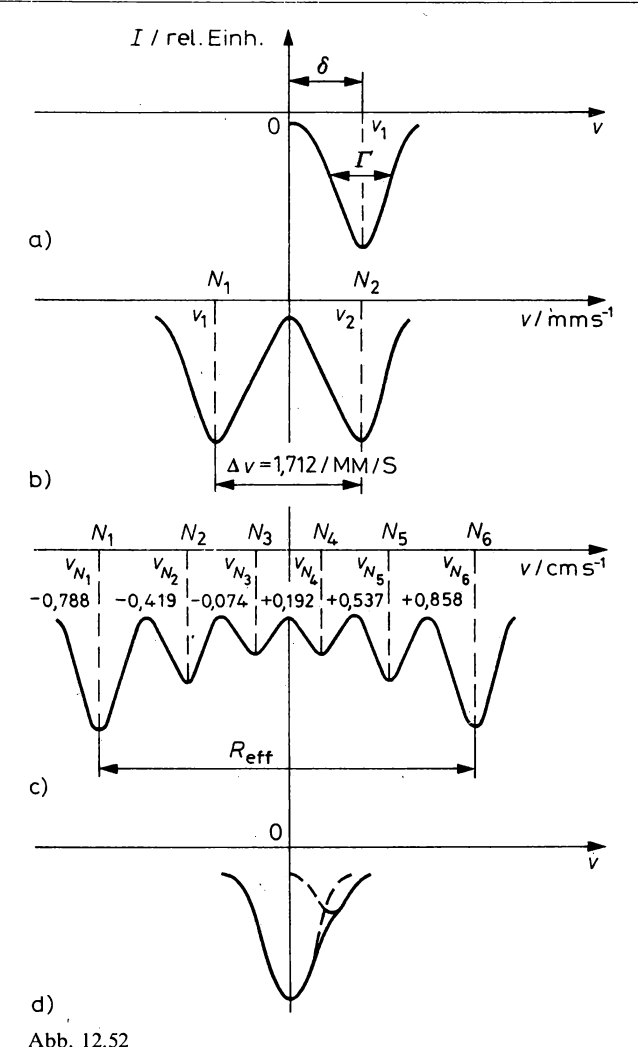


Abb. 12.52
Typische Formen von Mößbauer-Absorptionsspektren
a) Singlett-Lorentz-Linie mit Isomerieverschiebung δ, b) Liniendublett infolge Quadrupolaufspaltung (Natriumnitroprussid), c) Hyperfeinaufspaltung an π-Fe_2O_3 (Hämatit), d) Zweiphasenaufspaltung einer Linie

Man spricht auch von Lorentz-Kurve. Mit zunehmender Dicke von Quelle und Probe nähert sich die Kurvenform der Gauß-Verteilung. Bei Aufspaltungen kann jede Linie eine eigene Halbwertsbreite haben, weil eine Reihe dispersiver Effekte möglich ist. Als Beispiel sei eine mehrphasige Probenzusammensetzung genannt, wenn die Linien nicht aufgelöst werden. Die Ursachen der Verbreiterung oder Verzerrrung der Spektralverteilung müssen sehr sorgfältig untersucht werden.

In Abb. 12.52a) kann eine Verschiebung der Resonanzlinie um den Betrag δ festgestellt werden. Das deutet darauf hin, daß sich Quelle und Probe nicht in identischen physikalischen

und chemischen Zustand befinden, da das Maximum der Absorptionslinie sonst bei $v = 0$ liegen müßte. Man nennt die Differenz

$$\delta = v_1 - v_0 = \text{const} \cdot Z \cdot e^2 R_{\text{eff}} \frac{\Delta R}{R} [|\Psi(0)|_a^2 - |\Psi(0)|_s^2] \tag{12.89}$$

die Isomerie- oder chemische Verschiebung. $R_{\text{eff}} = 1{,}29 \cdot A^{1/3} \cdot 10^{-15}$ m ist der Kernradius (6.30), ΔR der Unterschied des Kernradius in zwei verschiedenen Zuständen, den Isomeren, und Ψ sind die Wellenfunktionen zweier verschiedener Umgebungen der Absorber- und Quellenatome. Damit ist die Isomerieverschiebung ein Produkt aus einem den Kern und einem seine Umgebung charakterisierenden Faktor, das die Möglichkeit gibt, die unbekannte der beiden Größen zu bestimmen.

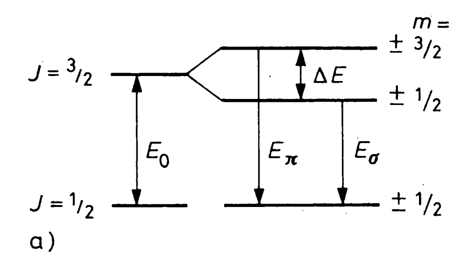
Das Liniendublett in Abb. 12.52b) ist die Folge der Quadrupolaufspaltung eines Kernzustandes, wie er in Abb. 12.53 dargestellt ist. Man kann zeigen, daß

$$\Delta E_Q = \frac{eV_{zz}Q}{4I(2I-1)} [3m_z^2 - I(I+1)] \sqrt{1 + \frac{\eta^2}{3}} \tag{12.90}$$

ist, wobei

$$\eta = \frac{V_{xx} - V_{yy}}{V_{zz}} \tag{12.91}$$

Asymmetrieparameter genannt wird und die V_{vv} wie in (12.74) die Gradienten des elektrischen Feldes sind. In den nichtkernphysikalischen Anwendungen wird V_{zz} bestimmt, gemessen werden v_1 und v_2.



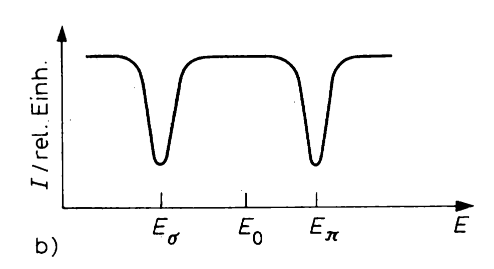


Abb. 12.53
Quadrupolaufspaltung eines Kernzustandes

Über die in Abb. 12.52c) dargestellte magnetische Zeeman-Aufspaltung kann das magnetische Feld am Kernort bestimmt werden. Als Beispiel betrachten wir die Aufspaltung gemäß Abb. 12.54. Mit den Bezeichnungen von dort und unter Berücksichtigung von (6.110) ist

$$g_{3/2} = \frac{\mu_N^{(*)}\mu_k B \,\Delta I}{I} = \frac{2}{3}\mu_N^{(*)}\mu_k B \tag{12.92 a}$$

$$g_{1/2} = 2\mu_N^{(0)}\mu_K B \tag{12.92 b}$$

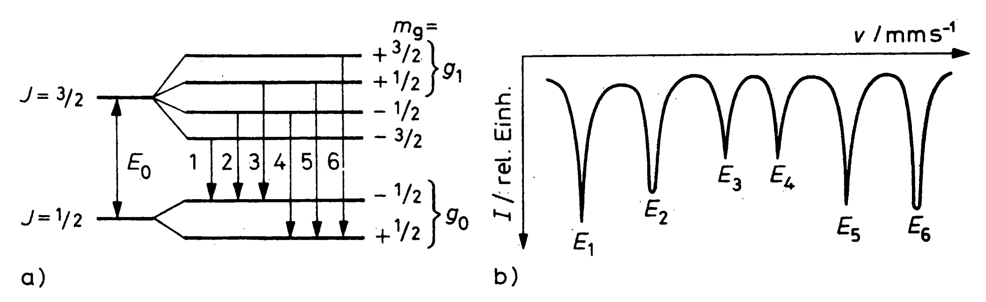


Abb. 12.54
Hyperfeinaufspaltung zweier Kernzustände

und

$$\Delta E_1 = E^* - \left(\frac{2}{3}\,\mu_N^{(*)} + \frac{1}{3}\,\mu_N^{(*)} + \mu_N^{(0)}\right) B\mu_k \tag{12.93a}$$

$$\Delta E_2 = E^* - \left(\frac{1}{3}\,\mu_N^{(*)} + \mu_N^{(0)}\right) B\mu_k \tag{12.93b}$$

$$\Delta E_3 = E^* + \left(\frac{1}{3}\,\mu_N^{(*)} - \mu_N^{(0)}\right) B\mu_k \tag{12.93c}$$

$$\Delta E_4 = E^* - \left(\frac{1}{3}\,\mu_N^{(*)} - \mu_N^{(0)}\right) B\mu_k \tag{12.93d}$$

$$\Delta E_5 = E^* - \left(\frac{1}{3}\,\mu_N^{(*)} - \mu_N^{(0)}\right) B\mu_k \tag{12.93e}$$

$$\Delta E_6 = E^* + (\mu_N^{(*)} + \mu_N^{(0)})\, B\mu_k\,. \tag{12.93f}$$

Die gesuchte Größe B kann aus der Differenz beliebiger Paare dieser Gleichungen gewonnen werden, z. B. aus

$$\Delta E_{6,1} = \frac{\Delta v_{6,1}}{c}\,E^* = \Delta E_6 - \Delta E_1 = 2B(\mu_N^{(*)} + \mu_N^{(0)})\,\mu_K\,, \tag{12.94}$$

wobei c die Lichtgeschwindigkeit und $\Delta v_{6,1}$ die Differenz der 6. und 1. Geschwindigkeit ist.

Die Kurvenform von Abb. 12.52d) deutet darauf hin, daß in der Probe zwei Phasen enthalten sind. Man ermittelt den Anteil der Phasen aus der Fläche unter der zugehörigen Linie, d. h. über die Wahrscheinlichkeit des Mößbauer-Effekts f, den Lamb-Mößbauer-Faktor (9.238), der den Anteil der rückstoßfreien Übergänge gemessen an der Gesamtzahl der Übergänge angibt. Die Phasenanalyse mit Hilfe der Mößbauer-Spektrometrie beruht auf dem gleichen Prinzip, wie die mit Röntgen-Strahlen. Der Unterschied besteht nur darin, daß beim Mößbauer-Effekt der Isomerieverschiebung δ, die Quadrupolaufspaltung ΔE_Q und der Wert von B am Kernort bei Resonanz die gesuchten Informationen enthalten, während bei der Phasenanalyse mit Röntgen-Strahlen die Streureflexe Ausgangspunkt der Analyse sind. Ein einfaches Beispiel zeigt die Abb. 12.55 für das Phasengemisch von Gold und Zinn mit der α- und ξ-Phase sowie den Verbindungen AuSn, $AuSn_2$ und $AuSn_4$. Ein komplizierteres Beispiel ist in Abb. 12.56 gezeigt, wo in einer Probe die magnetischen Umwandlungen von Siderit, d. h. von $FeCO_3$, als Funktion von der Temperatur zwischen 400 °C bis 800 °C untersucht worden sind. Auf dieser

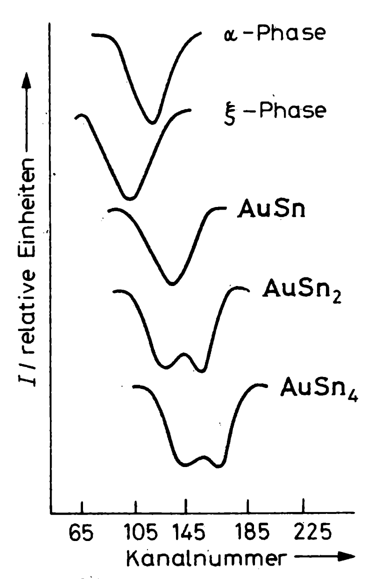


Abb. 12.55
Mößbauer-Linien für verschiedene Phasen eines Gold-Zinn-Systems, gemessen mit ^{119}Sn

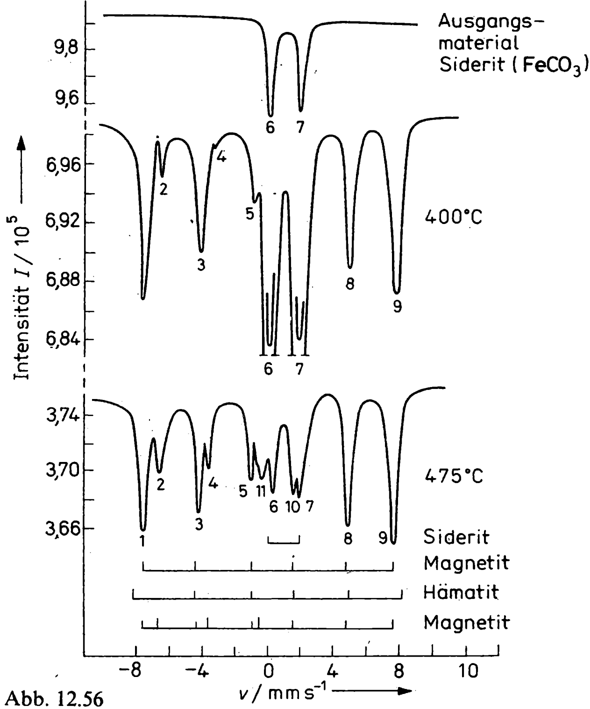


Abb. 12.56
Mößbauer-Spektrum des Übergangs von Siderit ($FeCO_3$) bei verschiedenen Temperaturen zu Hämatit (α-Fe_2O_3)

Grundlage konnte ein Modell des geologischen Prozesses der Entwicklung von Hämatit, d. h. von α-Fe_2O_3 entwickelt werden.

3. Aus der Vielzahl der Anwendungsmöglichkeiten des Mößbauer-Effekts soll noch auf die Diffraktion der Mößbauer-Quanten beim Durchgang durch Kristalle hingewiesen werden, die Mößbauer-Diffraktometrie. Eine typische Meßanordnung zeigt die Abb. 12.57. Aus der Geometrie erkennt man, daß sehr intensive Quellen verwendet werden müssen. Im Spektrum treten drei Intensitätsanteile auf. Dazu gehören die Mößbauer-gestreuten Wellen, die unter sich kohärent sind und auf den Anteil I_M führen, die Rayleigh-gestreuten Wellen, die ebenfalls unter sich kohärent sind und auf I führen sowie ein Interferenzanteil beider:

$$I = I_M + I_R + I_{Int} \,. \tag{12.95}$$

Die Versuchsdurchführung erfordert Messungen bei ruhender Quelle und Probe ($\delta = 0$) sowie bei gegenseitig bewegter Quelle und Probe ($\delta \neq 0$).

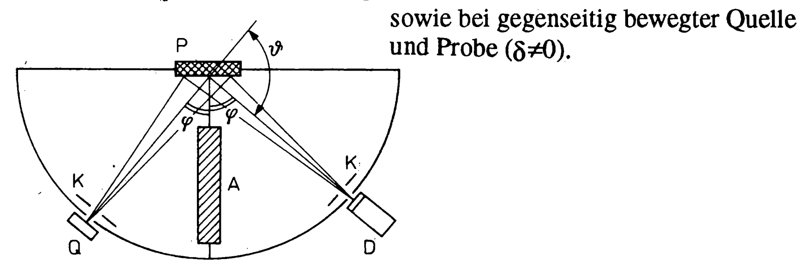


Abb. 12.57
Spektrometeraufbau zur Aufnahme von Mößbauer-Diffraktionsspektren: Q — Quelle, P — Probe, D — Detektor, K — Kollimator, A — Abschirmung

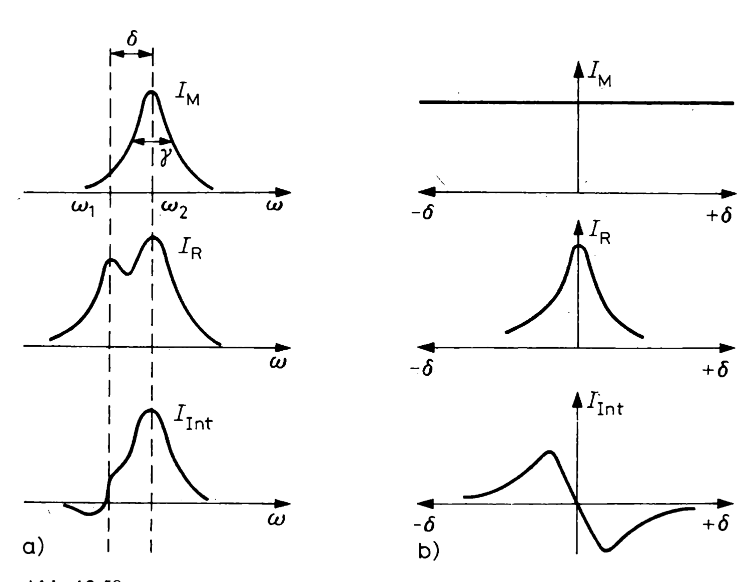


Abb. 12.58
Mößbauer-Diffraktionsspektren (a) und ihre Abhängigkeit von der Frequenzverschiebung (b)

In Abb. 12.58 sind die Spektralverteilungen mit der Isomerieverschiebung dargestellt. Auf diese Weise können elektrische und magnetische Strukturen in Kristallen gefunden werden, die mit anderen Methoden nicht oder nur unzulänglich zugänglich sind. Die Überlegenheit der Mößbauer-Diffraktometrie bei der Untersuchung von magnetischen Strukturen hängt damit zusammen, daß die Amplitude der Kernstreuung für die Mößbauer-Quanten sehr stark vom Winkel zwischen den einfallenden Quanten und den Richtungen der Felder am Ort der Mößbauer-Kerne abhängt.

12.3.10. Positronenannihilation

1. Im Rahmen der kernphysikalischen Grundlagenuntersuchungen wurden auch die Antiteilchen und ihre Wechselwirkungen mit der Umgebung intensiv untersucht. Praktische Anwendung hat die Annihilation der Positronen in größerem Maße als die anderer Antiteilchen gefunden. Durch Untersuchung der Eigenschaften der Annihilationsstrahlung kann das Verhalten der Positronen in Stoff bis zu ihrer Annihilation verfolgt werden. Da die Eigenschaften der Annihilationsstrahlung stoffabhängig sind, kann man durch Rekonstruktion der primären Elementar- und sekundären Transportprozesse, an denen das Positron teilgenommen hat, auf verschiedene Materialeigenschaften rückschließen. Allerdings ist dieser Schluß nicht einfach und bedarf der Entwicklung spezieller Modelle der Wechselwirkung zwischen Stoff und Positronen. Man nennt die Gesamtheit der dazu gehörigen Methoden Positronendiagnostik. Dazu gehört die Messung der Lebensdauer der Positronen in dem Stoff, des Verhältnisses der Anteile von Zwei- und Dreiphotonenannihilation, von Winkelverteilungen der Annihilationsquanten sowie deren energetischer Eigenschaften. Es gehören auch die theoretischen Methoden zur Entwicklung der Wechselwirkungsmodelle dazu.

2. In eine mit Gas gefüllte Kammer der Temperatur T eingeschlossene Positronen mit einer Energie von etwa 1 MeV werden durch die dabei stattfindenden Stoßprozesse mit den Atomen, Molekülen oder Elektronen im Gas auf Energie der Größe $k \cdot T$ abgebremst, d. h. thermalisiert. Danach erfolgt ihre Anlagerung an die Atome oder Moleküle, oder es bildet sich durch Einfang eines freien Elektrons Positronium. Die Eigenschaften und Energieeigenwerte des Positroniums stimmen mit denen des Wasserstoffatoms im wesentlichen überein, wenn man vom Massenmittelpunkt absieht, der bei Elektron und Positron in der Mitte liegt. Ein weiterer Unterschied zum H-Atom besteht in der viel intensiveren magnetischen Wechselwirkung zwischen den beiden Partnern e^- und e^+, da das magnetische Dipolmoment für beide gleich dem Bohrschen Magneton ist. Im niedrigsten Energiezustand stellen sich die Spins antiparallel ein. Man nennt diesen Zustand Parapositronium im Unterschied zu Orthopositronium mit paralleler Spineinstellung. Die Energie beider Zustände unterscheidet sich um $8 \cdot 10^{-4}$ eV. Beide Positroniumzustände zeichnen sich durch unterschiedliche Lebensdauer aus. Parapositronium annihiliert im Zweiphotonenprozeß mit

$$\tau_{2\gamma} = 1{,}25 \cdot 10^{-10} n^3 , \tag{12.96}$$

wobei n die Hauptquantenzahl ist, Orthopositronium als Folge der Erhaltung des Drehimpulses im Dreiphotonenprozeß mit

$$\tau_{3\gamma} = 1{,}40 \cdot 10^{-7} n^3 . \tag{12.97}$$

Wenn die Gasatome Z Elektronen haben und N_V ihre Zahl pro Volumeneinheit ist, dann ergibt sich für die Zerfallskonstante des viel schnelleren Parapositroniumzerfalls

$$\lambda_{2\gamma} = N_V Z \sigma_{2\gamma} v = N Z \pi r_0^2 . \tag{12.98}$$

Dabei ist v die Relativgeschwindigkeit des Elektrons und des Positrons und r_0 der klassische Elektronenradius. Für das Verhältnis beider Zerfallsraten findet man

$$\frac{\lambda_{2\gamma}}{\lambda_{3\gamma}} = 1115 . \tag{12.99}$$

Wegen des dreimal größeren statistischen Gewichts des Triplettzustandes beträgt das Verhältnis der Wirkungsquerschnitte

$$\frac{\sigma_{2\gamma}}{\sigma_{3\gamma}} = 372 . \tag{12.100}$$

Ein Näherungswert ist für $\sigma_{2\gamma}$ von P. A. M. Dirac abgeleitet worden:

$$\sigma_{2\gamma} = \pi r_0^2 \frac{v}{c} . \tag{12.101}$$

Während sich die Annihilationsenergie beim Zweiphotonenzerfall gemäß (B.93) zu gleichen Teilen von je 511 keV auf die in entgegengesetzten Richtungen auseinanderfliegenden Annihilationsquanten verteilt, zeichnet sich der Dreiphotonenzerfall durch statistische Energie- und Winkelverteilung der Photonen aus. In Abb. 12.59 ist das Energiespektrum schematisch dargestellt.

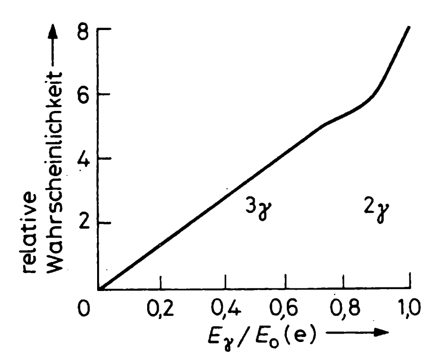


Abb. 12.59
Energiespektrum der Annihilationsstrahlung

3. Beim Einschuß von Positronen der gleichen Energie von etwa 1 MeV in kondensierte Materie kommt es ebenfalls zur Thermalisierung. In Festkörpern ist die Thermalisierungszeit meist kleiner als 10^{-10} s. Man kann sie berechnen, wobei die verschiedenen Näherungsformeln jeweils nur für bestimmte Energieintervalle gelten. Auf Grund der elektrostatischen Abstoßung zwischen Positron und Kern dringen die Positronen nicht bis zum Kern vor und damit wechselwirken sie auch nur wenig mit den Hüllenelektronen auf den inneren Bahnen, obgleich zwischen Positronen und Elektronen Anziehung besteht. Die Abstoßung ist aber stärker. Die Wechselwirkung erfolgt hauptsächlich mit den Valenzelektronen oder in Potentialmulden auf Plätzen zwischen den Atomen, wo sich die Abstoßung durch benachbarte Kerne gegenseitig aufhebt und die Anziehung mit einem Elektron übrigbleibt. Dort kann sich dann mit dem Elektron Positronium bilden. Als Einfangszentren sind auch Gitterstörungen, wie Dislokationen geeignet oder die in den Ionenkristallen auftretenden Farbzentren.

Neben der Thermalisierungszeit treten in der Zeitabhängigkeit des Positronenverhaltens in kondensierter Materie auch andere Zeitkonstanten auf. In Metallen und Ionenkristallen wird

z. B. eine Komponente des Positronenzerfalls beobachtet, die etwa gleich der Zerfallszeit des Singlettzustandes des Positroniums ist, und von Stoff zu Stoff den gleichen Wert hat. In den meisten flüssigen organischen Verbindungen und in amorphen Stoffen werden meist zwei Komponenten beobachtet, eine kurzlebige $\tau_1 \approx \tau_{2\gamma}$ und eine längerlebige $\tau_2 \approx 10^{-9}$ s, deren Intensität ca. 30% aller Annihilationen ausmacht. In Metallen treten zwei Komponenten auf, eine langlebige $\tau_2 \approx 5 \cdot 10^{-10}$ s und eine kurzlebige τ_1, deren Intensität bei 95% liegt und deren stoffabhängige Werte von $1{,}9 \cdot 10^{-10}$ s bis $4{,}3 \cdot 10^{-10}$ s reichen. Bei einigen Metallen kann man die gemessenen Werte durch die Wechselwirkung mit den Leitungselektronen interpretieren, bei anderen muß der positive Rumpf mitberücksichtigt werden. Die Vielfalt der nachgewiesenen Zeitabhängigkeiten ist groß. Hier konnten nur einige Beispiele genannt werden; sie sind die Grundlage für spezielle Analyseverfahren.

4. Aus der Kinetik der Zweiphotonenannihilation können einige wichtige Winkel- und Energiebeziehungen gewonnen werden. Mit m, $E(P)$, $\boldsymbol{v}$ und $\boldsymbol{p}$ werden die entsprechenden Größen des sich bewegenden Elektronen-Positronenpaares bezeichnet. Die Energie der Quanten nach der Annihilation seien $E_1 = E_0(\mathrm{e})\, q_1$ und $E_2 = E_0(\mathrm{e})\, q_2$. Energie und Impulssatz lauten:

$$E_1 + E_2 = p_1 c + p_2 c = 2mc^2 = \sqrt{p^2c^2 + 4E_0^2(\mathrm{e})} \tag{12.102}$$

$$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2 = 2m\boldsymbol{v} = 2m_0\gamma\boldsymbol{v} \tag{12.103}$$

Mit den Winkelbezeichnungen aus Abb. 12.60 berechnet man durch Quadrieren beider Gleichungen, Substraktion und Komponentenzerlegung

$$1 = q_1 q_2 \sin^2 \Theta/2 \tag{12.104}$$

$$\cos\Theta = 1 - \frac{2E_0(\mathrm{e})}{q_1[\sqrt{p^2c^2 + 4E_0^2(\mathrm{e})} - q_1 E_0(\mathrm{e})]}\,. \tag{12.105}$$

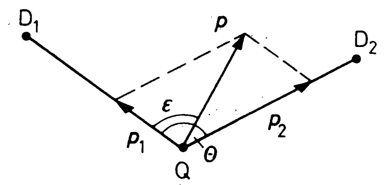


Abb. 12.60
Winkelverhältnisse bei der Zweiphotonen-Annihilation

Zur Berechnung der Energie des γ-Quants mit q_1 als Funktion des Emissionswinkels ε im L-System ergibt sich

$$q_1 = \frac{2E_0(\mathrm{e})}{\sqrt{p^2c^2 + 4E_0^2(\mathrm{e})} - cp\cos\varepsilon}\,. \tag{12.106}$$

Für $p = 0$ und $q_1 = q_2 = 1$ und $\cos\Theta$ in (12.105) erhält man $\Theta = 180°$. Wenn $p \neq 0$ ist, liegt der Wert von $\cos\Theta$ zwischen -1 und 0, so daß Winkelkorrelationen mit $\Theta \neq \pi$ gemessen werden können. Außerdem sind die Energien wegen q_1 und q_2 gemäß (12.104) und (12.105) Funktionen von p. Wenn man die Energie des Paares $E(\mathrm{P}) = p^2c^2/4E_0(\mathrm{e})$ einführt, dann erhält man aus (12.102) und (12.106)

$$E_1 = E_0(\mathrm{e})\,\frac{\sqrt{E_0^2(\mathrm{e}) + E_0(\mathrm{e})\,E(P)} + \sqrt{E_0(\mathrm{e})\,E(P)}\cos\varepsilon}{E_0(\mathrm{e}) + E(P)\sin^2\varepsilon}\,, \tag{12.107}$$

Für $\varepsilon = 0$ und 180°, d. h. Emission der Quanten in die Bewegungsrichtung des Paares, bzw. entgegengesetzt dazu kann man Extremalwerte berechnen. Als charakteristischen Wert von $E(\mathrm{P})$ können 10 eV eingesetzt werden:

$$E_1 \approx E_0(\mathrm{e}) + \frac{E(\mathrm{P})}{2} + \sqrt{E_0(\mathrm{e})\,E(\mathrm{P})} = 513{,}2625\ \mathrm{keV}\,, \qquad (12.108)$$

$$E_2 \approx E_0(\mathrm{e}) + \frac{E(\mathrm{P})}{2} - \sqrt{E_0(\mathrm{e})\,E(\mathrm{P})} = 508{,}7445\ \mathrm{keV}\,. \qquad (12.109)$$

Da die maximalen Energieverschiebungen $\Delta E_1 = E_1 - E_0(\mathrm{e}) = 2{,}2655$ keV und $\Delta E_2 = E_0(\mathrm{e}) - E_2 = 2{,}555$ keV ihre Ursache im Doppler-Effekt gemäß (9.160) haben, nennt man sie Doppler-Verschiebungen. Die Form der auf diese Weise geänderten Annihilationslinie kann mit einem Ge(Li)-Detektor gemessen werden, dessen energetische Auflösung zwischen 1 bis 2,5 keV liegt. Das Energieintervall geben die Gleichungen (12.108, 109) an. Das Auftreten der Größen ΔE_1 und ΔE_2 bedeutet, daß die Annihilationslinie asymmetrisch in Bezug auf $E_0(\mathrm{e})$ ist. Die Asymmetrie wächst mit der kinetischen Energie des annihilierenden Paares $E(\mathrm{P})$. Da die maximale Energie $E(\mathrm{P})_{\mathrm{max}}$, bei der die Annihilation eintritt, stoffabhängig ist, kann man aus der Linienform auf die Stoffeigenschaften schließen.

Ein anderer Versuchsaufbau mit zwei Ge(Li)-Detektoren in Summenschaltung gestattet die Aufnahme einer schmalen Linie, die gemäß

$$E_1 + E_2 = 2E_0(\mathrm{e}) + E(\mathrm{P}) \qquad (12.110)$$

eine um den zu ermittelnden charakteristischen Betrag $E(\mathrm{P})$ größere Energie hat als 1022,0100 keV. Diese Summe hängt in dem Winkelintervall

$$\pi \geqq \Theta \geqq \Theta_{\mathrm{min}} = 2 \arccos \sqrt{E(\mathrm{P})/E_0(\mathrm{e})} \qquad (12.111)$$

nicht von Θ ab.

Da der zu $\beta = v/c$ proportionale Impuls $\boldsymbol{p}$ des Paares zu einer Verringerung des Winkels Θ führt, kann man an Stelle der Energie der γ-Quanten auch diesen Winkel messen. In abhängigkeit von $E(\mathrm{P}) \approx 10$ eV oder $v/c = 10^{-2}$ erhält man für unterschiedliche Materialien verschieden stark eingeengte oder verbreiterte Kurven. Da es sich um kleine Winkeländerungen handelt, muß dafür gesorgt sein, daß die Winkelauflösung etwa 10^{-3} rad beträgt, was einer Energieänderung von 0,1 eV entspricht. In Abb. 12.61 sind die für Na, Al und Cu gemessenen Linien dargestellt.

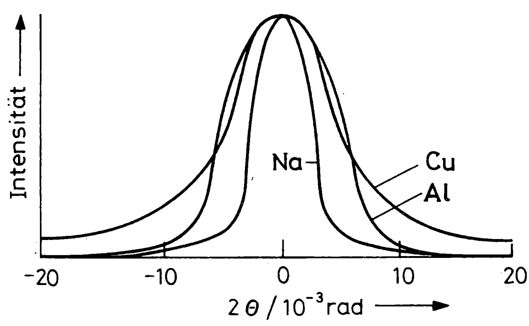


Abb. 12.61
Winkelabhängigkeit der Intensität der Annihilationsstrahlung für die Elemente Na, Al und Cu

5. Experimente mit Positronen unterscheiden sich mindestens in dreierlei Hinsicht von Experimenten mit anderen Strahlenarten. Erstens sind die Flußdichten anderer Strahlenarten meistens von der Größenordnung 10^9 bis 10^{16} cm^{-2} s^{-1}, während sie bei den Positronen nur zwischen 10^3 und 10^7 cm^{-2} s^{-1} liegen. Außerdem sind andere Teilchenstrahlen meist gut gebündelt, während die Annihilationsstrahlung nahezu isotrop ist. Es kommt somit bei den Positronen darauf an, möglichst geringe Verluste zuzulassen. Zweitens werden in der Positronendiagnostik im allgemeinen nicht die Positronen selbst, sondern die Annihilationsquanten spektrometriert. Das vergrößert einerseits die Möglichkeiten der Methode, kompliziert aber andererseits ihren Einsatz, da die Wellenfunktionen der Teilchen bekannt sein müssen, an denen die Annihilation stattfindet. Die dritte Besonderheit besteht darin, daß in der Positronendiagnostik mit radioaktiven Quellen gearbeitet wird, die sich weder hinsichtlich der wählbaren Energie noch des zeitlichen Einsatzpunktes etwa wie im gepulsten Beschleuniger- oder Reaktorbetrieb steuern lassen. Daher treten in einem Experiment oft mehrere verschiedene Annihilationsvarianten auf, für die die jeweiligen Annihilationsbedingungen bekannt sein müssen.

Vom apparativen Aufbau her betrachtet handelt es sich um gewöhnliche Strahlenmeßanordnungen der Kernspektrometrie. Die Lebensdauer der Positronen bestimmt man mit Hilfe der Methode der verzögerten Koinzidenzen im typischen Aubau mit Zeit-Amplituden-Konverter und Vielkanalanalysator. Zur Untersuchung von Gasen wird ein Zeitintervall des Konverters von 0 bis 500 ns benötigt, zur Untersuchung von Flüssigkeiten und Festkörpern von 0 bis 10 ns. Als radioaktive Quelle ist ^{22}Na (Abb. 9.17b) mit $T_{1/2} = 2{,}6$ a verbreitet. Der β^+-Zerfall erfolgt zu 90 % auf den ersten Anregungszustand von ^{22}Na, der durch Emission von 1,276-MeV-Quanten mit $\tau \approx 10^{-11}$ s angeregt wird. Die Energie der Positronen beträgt 0,55 MeV.

Die Messung des Verhältnisses der Zahl der Zweifach- zu der der Dreifachannihilationen erfolgt mit einem Zwei- und einem Dreidetektor-Koinzidenzspektrometer. Da die Positronen auf ca. 10 eV abgebremst werden, bevor sie annihilieren, ist die summare Energie gemäß (12.110) etwa 1,022 MeV groß und der Winkel zwischen den Quanten beträgt etwa 180°, so daß die Detektoren unter 180° aufgestellt werden. Da der Zweiphotonenzerfall kolinear ist, der Dreiphotonenzerfall nur komplanar, ist bei Aufstellung dreier Detektoren unter gleichen Winkeln zum Probenzentrum die Zahl der Koinzidenzen auch aus diesem Grunde gering. Zur Verringerung der Rate der zufälligen Koinzidenzen wird zusätzlich eine Amplitudenauswahl getroffen. Bei drei Detektoren unter gleichen Winkeln ist die Energie der drei Annihilationsquanten etwa gleich $2E_0(e)/3$. Als Detektoren verwendet man meistens NaJ(Tl)-Kristalle. Zur Messung des Energiespektrums verwendet man dagegen meistens Ge(Li)-Detektoren. Der Vielkanalanalysator wird im Energieintervall bis 520 keV betrieben. Wenn die Summenbildung der Quanten und deren Abweichung von $2E_0(e)$ gemessen werden soll, dann verwendet man zwei Ge(Li)-Detektoren in Summenschaltung, wobei der Analysator bis 1,030 MeV hinreichende Auflösung ermöglichen muß.

Bei der Messung von Winkelkorrelationen der Annihilationsquanten kommt es darauf an, die Abweichung der Annihilationsquantenemission vom Winkel $\Theta = 180°$ festzustellen. Dazu verwendet man zwei NaJ(Tl)-Detektoren in einem Abstand voneinander, daß eine Winkelgenauigkeit von 1 mrad gewährleistet ist. Meßgröße ist die Rate oder die Zahl der Zweifachkoinzidenzen als Funktion von Θ. Die Auflösungszeit τ der Koinzidenzschaltung wählt man meist zu etwa 10^{-8} bis 10^{-7} s.

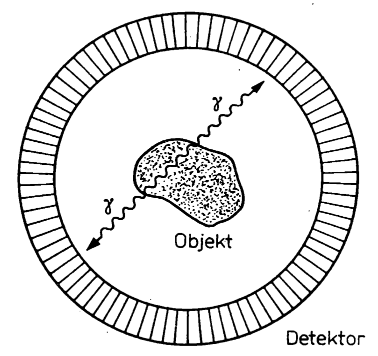


Abb. 12.62
Detektoranordnung zur Tumortomographie mit Annihilationsquanten

Die Besonderheit der Annihilationsquanten eines Paares, unter einem festen Winkel von 180° oder nahezu 180° emittiert zu werden, wird dazu genutzt, einzelne Ereignisse sicher nachzuweisen, indem die gleichzeitige Erfüllung einer Energie-, einer Zeit- und einer Richtungskorrelation zur notwendigen Bedingung für die Registrierung gemacht wird. Auf dieser Grundlage lassen sich auch Tomographen aufbauen, die in der Medizin besonders verbreitet sind. In Abb. 12.62 ist der prinzipielle Aufbau einer solchen Anordnung für die Tumorsuche gezeigt.

12.4. Strahlenschutz

12.4.1. Grundlagen

1. Kernstrahlungen, allgemeiner, direkt und indirekt ionisierende Strahlungen, können schädigende Wirkungen auf den menschlichen Organismus ausüben. Daher ist in jedem Falle der Anwendung solcher Strahlungen der Schutz des Menschen vor ihnen erforderlich. Das ist umso wichtiger, als die Schädigungen sehr ernster Natur sein können und der Mensch kein Sinnesorgan hat, mit dem er diese Strahlungen selbst registrieren kann. Mit der wachsenden Bedeutung der Kerntechnik ist die Möglichkeit der Strahlungsbeslastung nicht nur für beruflich exponierte Personen, sondern auch für die Bevölkerung gegeben, so daß der Schutz vor ionisierenden Strahlungen zu einer gesellschaftlichen Aufgabe geworden ist. Mit dem schädigenden Einfluß der ionisierenden Strahlungen und seiner Einschränkung befaßt sich der Strahlenschutz. Seine Aufgabe ist es, die wissenschaftlichen und technischen Grundlagen zur Verhinderung unzulässiger Schäden an Einzelpersonen und Bevölkerungsgruppen zu erarbeiten. Dazu gehört unter anderem die Festlegung zulässiger Strahlenbelastungen, praktischer Maßnahmen zur Verhinderung unzulässiger Strahlenbelastungen und die Überwachung der Durchführung aller Festlegungen. Dabei spielt die Strahlenschutzgesetzgebung eines Staates eine entscheidende Rolle. Den Beitrag der Physik zum Strahlenschutz liefert die Strahlenschutzphysik. Als Teilgebiet der Physik bestehen wegen der biochemischen und biophysikalischen Wirkungen der ionisierenden Strahlungen enge Wechselbeziehungen zur Biologie und zur Medizin. Die oft im unmittelbaren Zusammenhang mit dem Strahlenschutz genannte Dosimetrie befaßt sich mit der Messung der in Stoff absorbierten Strahlenenergie. Sie ist ein Teilgebiet der Strahlenschutzphysik.

2. Die Strahlenbelastung der Menschen wird durch die natürliche und zivilisationsbedingte Strahlenumwelt verursacht. Die Quellen der natürlichen Strahlenumwelt sind die Radionuklide der Erdoberfläche, die die terrestrische Strahlung emittieren, die primäre kosmische Strahlung sowie alle durch sie bei der Reaktion mit der Atmosphäre und der Erdoberfläche erzeugten sekundären kosmischen Strahlungen einschließlich der von dabei generierten Radionukliden, kurz die Höhenstrahlung. Die äußere Strahlenbelastung ist durch die von außen in den Körper eindringenden externen Strahlungen bedingt, die innere durch die Strahlungen der beim Atmen, infolge Inhalation und bei der Nahrungsaufnahme, infolge Ingestion inkorporierter Radionuklide. Die zivilisationsbedingte Strahlenbelastung ist auf natürliche und künstliche Quellen zurückzuführen. Die natürlichen wirken beim Aufenthalt in der gebauten Umwelt und durch die Nutzung fossiler Brennstoffe und Düngemittel, die künstlichen durch die Erzeugung und Freisetzung von Strahlungen und Radionukliden als Folge menschlicher Tätigkeit.

Während die äußere Strahlenbelastung mit Hilfe von geeichten Dosimetern direkt gemessen werden kann, stößt die direkte Bestimmung der inneren auf Schwierigkeiten. Man muß sie auf Aktivitätsmessungen in einzelnen Organen oder Ausscheidungen zurückführen. Dabei ist zu beachten, daß die Ausscheidungswahrscheinlichkeit der Radionuklide nicht mit ihrer Zerfallskonstanten λ identisch ist. Maßgeblich ist die biologische Zerfallskonstante λ_b oder die biologische Halbwertszeit $T_{1/2,b}$.

Tabelle 12.17
Mittlere Strahlenbelastung der Bevölkerung der DDR im Jahre 1984

Belastungsart	Art der Quellen	$H_w/\mu Sv$	
Natürliche Strahlen-belastungen	Kosmische Strahlung	240	28 %
	Terrestrische Strahlung	60	
	Ingestion (natürliche Radionuklide)	370	
	Inhalation (natürliche Radionuklide im Freien)	80	
Zivilisations-bedingte Strahlen-belastungen	Natürliche Quellen:		34 %
	— Aufenthalt in Häusern	890	
	— Fossile Brennstoffe	<2	
	— Phosphatdünger	<1	
	Künstliche Quellen:		38 %
	Medizinische Diagnostik	1000	
	— Kernanlagen	<1	
	— Globaler Fallout (von Kernwaffentests)	<5	
	— Andere Quellen	10	
Summe		2500	100 %

Die Ermittlung der Äquivalenzdosis (12.14) aus den Aktivitätswerten ist eine komplizierte Aufgabe. Durch Mittelungen über die Äquivalenzdosen einzelner Organe und Gewebe und unter Berücksichtigung von Wichtungsfaktoren aus Modellvorstellungen berechnet man die effektive Äquivalenzdosis. In Tabelle 12.17 sind natürliche und zivilisationsbedingte äußere und innere Strahlenbelastungen als effektive jährliche Äquivalenzdosen der Bevölkerung der DDR im Jahre 1984 angegeben. Die Gesamtsumme von 2,5 mSv pro Jahr fügt sich in die weltweiten Werte

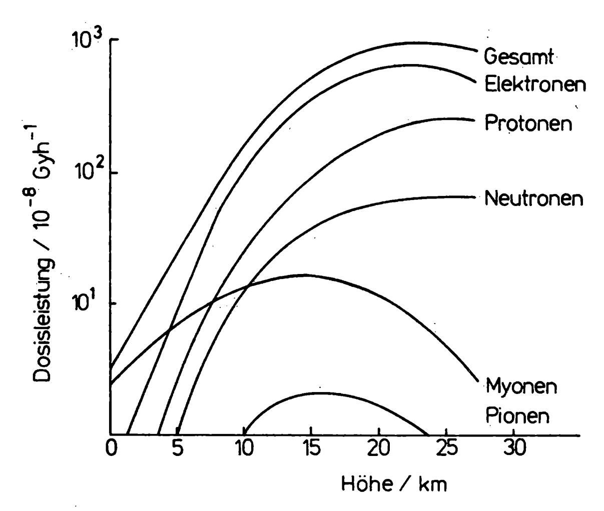


Abb. 12.63

zwischen 0,4 bis 6 mSv pro Jahr ein. In einigen Gebieten Indiens beträgt allein der durch externe terrestrische Strahlung hervorgerufene Anteil 20 bis 30 mSv, bei Guarapari in Brasilien sogar 120 mSv. Die Ursache sind hauptsächlich Th-Minerale. die zu erheblichen Abweichungen von den in den Tabellen 9.3 und 9.4 angegebenen Mittelwerten führen. Den Anteil der äußeren Strahlenbelastung durch die Höhenstrahlung kann man aus Abb. 12.63 als Funktion der Höhe abschätzen. Auf Meeresspiegelniveau kommt der größte Beitrag vom Myonenzerfall. Die größten Beiträge für die Ingestion liefern die Radionuklide ^{40}K und ^{210}Pb/^{210}Po, ^{228}Ra/^{224}Ra, ^{226}Ra, ^{230}Th und ^{232}Th, und für die Inhalation die Radionuklide ^{222}Rn bis ^{214}Po und ^{220}Rn bis ^{208}Tl. Der Beitrag aus der Kohleverbrennung beruht vorwiegend auf dem Zerfall der in der Flugasche und den Abgasen befindlichen Nukliden der ^{238}U- und ^{232}Th-Reihe, wobei ^{232}Th, ^{228}Th, ^{226}Ra und ^{210}Pb/^{210}Po die maßgeblichen Kettenglieder sind. Die hohe Strahlenbelastung durch die Baumaterialien verursachen (siehe Tabelle 9.4) ^{40}K, ^{232}Th und ^{226}Ra sowie das in der Luft übergehende ^{222}Rn und seine kurzlebigen Zerfallsprodukte. Der überwiegende Teil der durch künstliche Quellen verursachten Strahlenbelastung kommt von der medizinischen Diagnostik. In Tabelle 12.18 sind konkrete Werte angegeben. Der Anteil, den die Kernkraftwerke bringen, ist gering. Aus der internationalen Literatur kann man Werte von weniger als 0,25 Sv für die Personen der Bevölkerung in unmittelbarer Wohnnähe über 70 Lebensjahre entnehmen sowie von weniger als 0,25 Sn für Betriebspersonal in 25 Arbeitsjahren.

Die Atomsicherheits- und Strahlenschutzgesetzgebungen der Staaten berücksichtigen meist die Empfehlungen der zuständigen internationalen Organisationen. Hinsichtlich des primären Grenzwertes der jährlichen effektiven Äquivalenzdosis für Personen der Bevölkerung wurden demzufolge meist 5 mSv vorgeschrieben, für einzelne Organe und Gewebe 50 mSv. Für beruflich strahlenexponierte Personen, also für Personen unter spezieller ärztlicher Kontrolle, liegen diese Grenzwerte bei 50, bzw. 500 mSv. Mit sekundären Grenzwerten werden die primären spezifiziert. Abgeleitete Grenzwerte folgen aus Modellannahmen. Mit Freigrenzen für radioaktive Stoffe werden Aktivitäten und -konzentrationen festgelegt, bei deren Unterschreitung keine radioaktiven Stoffe im Sinne der Gesetzgebung vorliegen.

Tabelle 12.18
Medizinische Strahlenbelastungen pro Untersuchung/mSv

Lungenaufnahmen	0,01 ... 1	Computertomographien Lunge	10 ... 20
Beckenaufnahmen	0,1 ... 1	Computertomographien Becken	20 ... 30
Durchleuchtungen	1 ... 100	Radionukliduntersuchungen	10 ... 10^3
Mammographien	1 ... 10		

3. Die gesetzliche Festlegung einer bestimmten effektiven Äquivalenzdosis als primären Grenzwert hängt mit dem Risiko zusammen, das die Strahlung für den Menschen mit sich bringt. Durch energiereiche Strahlungen werden Schäden von Zellen, Organen und dem Gesamtorganismus hervorgerufen, die zu Krebserkrankungen und zum Absterben führen können. Man unterscheidet Schäden der Körper- und der Fortpflanzungszellen, sogenannte somatische und genetische Schäden sowie teratogene Schäden, d. h. Schäden am ungeborenen Leben. Bei sehr hohen kurzlebigen Strahlenbelastungen oberhalb von 500 mSv können Sofort- oder Frühschäden auftreten. Diese sind personengebunden diagnostizierbar. In Tabelle 12.19 sind die Strahlenkrankheitsgrade für solche Fälle aufgeführt. Das Gesetz verbietet diese Art der Belastung gänzlich. Im Unterschied dazu besitzen die Spätschäden keinen erkennbaren Schwell-

Tabelle 12.19
Strahlenkrankheitsgrade nach einmaliger Ganzkörperbestrahlung in Sv

Äquivalentdosis/ Sv	Grad der Strahlenkrankheit	Anteil der Erkrankten/ %	Anteil der Toten/ %
0,5–1,0	1	5	–
1,0–1,5	1	20	–
1,5–2,0	1	50	–
2,0–2,5	2	75	–
2,5–3,0	2	100	5
3,0–3,5	3	100	20
4,0 ($LD_{50/30}$)	3	100	50
6,0 ($LD_{100/30}$)	3	100	100

wert, sind nicht individuell diagnostisch voraussagbar, da sie statistischen Charakter bezüglich einer großen Gruppe von Menschen tragen. Die Gesetzgebung verlangt, daß das Risiko hinsichtlich dieser stochastischen Schäden vertretbar bleibt, d. h., es darf nicht größer sein als in den sicheren Industriezweigen. Allgemein wird das Risiko R als Anzahl der eintretenden Ereignisse ΔN pro Zeitelement Δt, bezogen auf eine bestimmte Personenzahl N, angegeben. Der Strahlenschaden wird durch Angaben der absorbierten Energie ΔD berücksichtigt.

$$R = \frac{\Delta N}{N \cdot \Delta t \cdot \Delta D} \tag{12.112}$$

Man kann das Strahlenrisiko über die Anzahl der für ein Jahr oder die mittlere Lebenserwartung, bezogen auf 10^6 Menschen, und die charakteristische, effektive Äquivalenzdosis, der zu erwartenden gesundheitlichen Störungen oder Todesfälle festlegen und mit den anderen Risiken des beruflichen und des täglichen Lebens vergleichen. Die Risiken für verschiedene Industriezweige sind aus Tabelle 12.20 entnehmbar.

Tabelle 12.20
Risikodaten für tödliche Unfälle in ausgewählten Industriezweigen

Bekleidungsindustrie, Kerntechnik	$10^{-6} \ldots 10^{-5}$
Textil-, Nahrungsmittel-, Chemieindustrie	$10^{-5} \ldots 10^{-4}$
Metall-, Bauindustrie, Kohlebergbau	$10^{-4} \ldots 10^{-3}$

4. Die biologische Materie reagiert auf Strahlenschäden sehr aktiv, sofern die Beschädigungen nicht zu groß sind. Das hängt mit den in 12.2.3., Punkt 5 besprochenen aktivierenden Fermenten zusammen. Hierbei versteht man unter Erholung die Zeit, die zur Rückkehr einer

geschädigten Einheit zum Normalzustand erforderlich ist, wobei dies durch Regulation, Reparatur, Restitution und Regeneration erfolgen kann.

Die biologische Strahlenwirkung kann durch chemische Substanzen in bestimmten Grenzen beeinflußt werden, wobei sowohl Sensibilisierung, als auch Inhibition verursacht werden können. Für den Strahlenschutz interessiert nur die Inhibitions-, also die Schutzwirkung. Die Schutzsubstanzen finden bei Havarie- und Katastrophenfällen Anwendung.

12.4.2. Meßtechnik

1. Die Aufgaben der Strahlenmeßtechnik können aus den Grundaufgaben des Strahlenschutzes abgeleitet werden. Sie sind zwar vielfältig und können in verschiedene Kategorien eingeteilt werden, aber sie dienen einer Hauptaufgabe, Informationen bereitzustellen, die eine Bestimmung der äußeren und inneren Strahlenbelastungen ermöglichen. Die meßtechnische Grundaufgabe ist somit die Bestimmung der absorbierten Energie, d. h. der Strahlendosis. Eine direkte Messung ist nur für die äußeren Strahlungen möglich, für die inneren können lediglich Aktivitäts- und Fluenzmessungen ausgeführt werden.

2. Die in der Strahlenmeßtechnik verwendeten Meßgeräte bauen zum großen Teil auf den üblichen kernphysikalischen Nachweismethoden auf. Teilweise sind spezielle Meßgeräte entwickelt worden, die auf sonst kaum in der Kernphysik benutzten Prinzipien beruhen. An die Dosimeter und Aktivitätsmesser werden eine Reihe spezifischer Forderungen gestellt. Erstens ist meist nicht erforderlich, daß jedes einzelne Teilchen registriert, bzw. spektrometriert wird. Oft genügt die Messung des durch die Teilchen erzeugten Stromes. Zweitens ist es wünschenswert, nicht nur den mittleren Strom, sondern die Dosis zu messen oder den primären Ionisationsstrom. Schließlich wird drittens angestrebt, Detektoren zu verwenden, die das lebende Gewebe imitieren, was für γ-Strahlung und Elektronen relativ leicht ist, für Neutronen verschiedener Energie jedoch kompliziert.

3. Die verbreitetsten Dosimeter und Aktivitätsmeter basieren auf Ionisationskammern, Gasentladungszählern, Szintillationszählern, Halbleiterdetektoren und Photodioden. Es werden auch Kalorimeter eingesetzt. In der Personendosimetrie sind chemische Detektoren, unter ihnen besonders photographische Emulsionen, Thermoluminiszenz- und Radiophotoluminiszenzdetektoren, Exoelektronendetektoren, Aktivierungssonden, Festkörperspurdetektoren und Elektrometer-Ionisationskammern verbreitet. Bereits aus den Namen der aufgeführten Dosimeter kann man erkennen, daß bei den meisten die Meßergebnisse mit Hilfe spezieller Auswerteapparaturen gewonnen werden müssen.

Zur Aktivitätsbestimmung im Körper werden Ganzkörper-Szintigramm- und Meßsondenverfahren angewendet sowie die Messung der Aktivität der Ausscheidungen.

12.4.3. Begrenzung der Strahlenbelastung

1. Zur Verringerung der Strahlenbelastung gibt es verschiedene Möglichkeiten. Man unterscheidet Methoden zur Begrenzung der inneren und der äußeren Strahlenbelastung. Die äußere Strahlenbelastung kann durch Vermeidung oder Beseitigung nicht unbedingt notwendiger Strahlungsquellen, durch Optimierung der Aufenthaltsdauer in Strahlungsfeldern und des Abstandes von Strahlungsquellen sowie durch Abschirmungen eingeschränkt werden.

2. Da sich die Wechselwirkungen verschiedener Strahlenarten mit Stoff sehr wesentlich voneinander unterscheiden, gelten für jede Strahlenart eigene Gesetzmäßigkeiten der Abschirmung. Wir betrachten nur die α-, β-, γ- und Neutronenstrahlungen.

Wie man die Aufenthaltsdauer im Strahlungsfeld und den Abstand von einer Strahlungsquelle optimieren kann, läßt sich leicht am Beispiel einer Radionuklidquelle zeigen. Gemäß (12.12) ist die Exposition X proportional zur Aktivität, zur Expositionszeit und umgekehrt proportional zum Quadrat des Abstandes. Die Proportionalitätskonstante hat für die gegebene Strahlung des betrachteten Nuklids den festen Wert Γ. Für konstante Aktivität folgt daraus ein Minimum von X für ein Minimum von $\Delta t/r^2$. Der einfachste Schutz ist somit eine möglichst kleine Aufenthaltsdauer und ein möglichst großer Abstand. Zur Durchführung von Operationen muß $\Delta t/r^2$ optimiert werden.

3. Der Schutz vor äußeren α-Strahlen ist am leichtesten möglich, da für die bei den üblichen α-aktiven Radionukliden vorkommenden Energien auf Reichweiten von wenigen cm in Luft führen und sich meist durch ein Blatt Papier abschirmen lassen. Bei direkter Bestrahlung der Haut wird die α-Strahlung durch die Hornhaut absorbiert. In Abb. 12.64 sind die Reichweiten der α-Strahlen in verschiedenen Stoffen als Funktion von der Energie dargestellt.

4. Die Reichweite der β-Strahlung der in der Technik gebräuchlichen Radionuklide beträgt z. B. bei 3 MeV etwa 3 m in Luft und etwa 1 cm in Aluminium. Abb. 12.65 zeigt die Abhängigkeit der β-Reichweiten in verschiedenen Materialien. Man sieht, daß die Abschirmung der β-Strahlen selbst wenig Schwierigkeiten bereitet. Es darf aber nicht unbeachtet bleiben, daß die β-Strahlen durch die Wechselwirkung mit dem Absorbermaterial über Ionisations- und Strahlungsbremsung

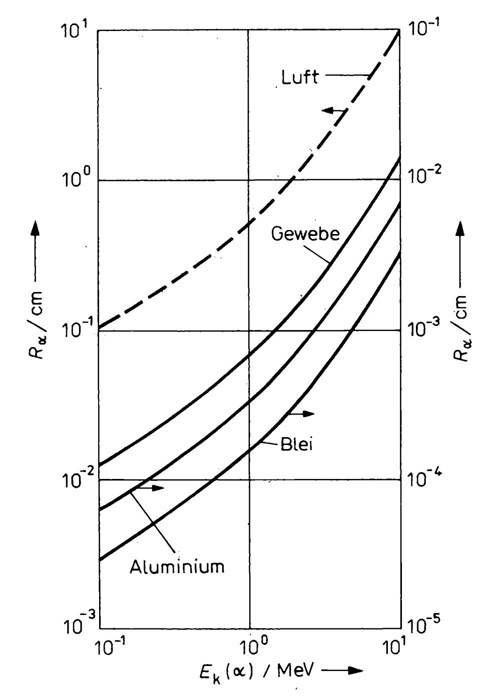


Abb. 12.64
Reichweite der α-Strahlung in verschiedenen Stoffen als Funktion von der Energie

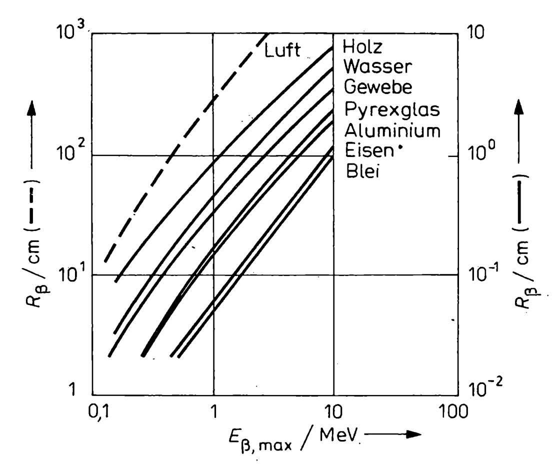


Abb. 12.65
Maximale Reichweite der β-Strahlung in verschiedenen Stoffen als Funktion von der Grenzenergie der β-Strahlung

ein Röntgen- und Bremsstrahlungsspektrum erzeugt, dessen Energie bis hin zur Grenzenergie der β-Teilchen reicht. Aus (4.26) folgt, daß das Verhältnis der durch Strahlungs- und Ionisationsbremsung der Elektronen pro Wegelement abgegebene Energiebetrag proportional ist zum Produkt $E \cdot Z$. Daraus folgt die wachsende Bedeutung des Quantenstrahlungsspektrums bei großen Werten von E und Z. Aus diesem Grunde baut man Abschirmungen für β-Strahlung aus zwei Schichten verschiedenen Materials auf, etwa aus einer Plexiglas-Blei-Kombination. In der ersten Schicht werden die β-Teilchen absorbiert, wobei wenig Quantenstrahlung entstehen soll, also ein Material mit kleinem Z genommen werden sollte. In der zweiten Schicht wird die Quantenstrahlung absorbiert, am besten durch ein Material mit großem Z.

5. Der Schutz vor γ-Strahlungen erfordert recht massive Abschirmungen. In 4.3.5. wurde gezeigt, daß die Absorption der γ-Strahlung einem Exponentialgesetz, mit dem die verschiedenen Wechselwirkungseffekte zwischen Strahlung und Stoff berücksichtigenden linearen Absorptionskoeffizienten μ/m^{-1} oder dem Massenabsorptionskoeffizienten $\mu'/\mathrm{m}^2\,\mathrm{kg}^{-1}$ gehorcht. Diese Koeffizienten hängen für jeden der Wechselwirkungseffekte unterschiedlich von der Energie und der Ordnungszahl ab. Eine genaue Berechnungsgrundlage muß noch einen weiteren Effekt berücksichtigen, die Vielfachstreuung in dicken Schichten, in deren Gefolge sekundäre γ-Strahlen entstehen. Sie läßt sich durch den Aufbaufaktor B gemäß

$$\dot{N} = \dot{N}_0 B(E_\gamma, Z, x)\, \mathrm{e}^{-\mu x} \tag{12.113}$$

berücksichtigen. Der Fano-Faktor B ist eine komplizierte Funktion von der Energie und vor allem auch der Geometrie. Nur für scharf kollimierte γ-Strahlung kann $B = 1$ gesetzt werden.

Die Angabe der Abschirmwirkung verschiedener Materialien für γ-Strahlung erfolgt über die Halbwerts- oder Zehntelwertschichtdicke, gekennzeichnet durch x_2 oder x_{10} von $\dot{N}/\dot{N}_0 = 1/2$ oder 1/10. In Abb. 12.66 sind für wichtige Absorbermaterialien die x_{10}-Abhängigkeiten von der Energie der γ-Strahlung für $B = 1$ abgebildet. Die am meisten verwendeten Abschirmmaterialien gegen γ-Strahlung sind Beton, Stahl und Blei. Für sie ist x_{10} bei 3 MeV ca. 27 cm, 8 cm und 5 cm.

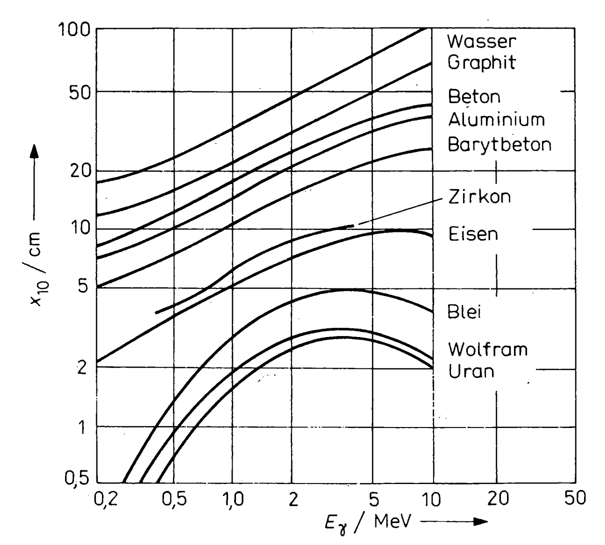


Abb. 12.66
x_{10}-Dicken der γ-Strahlung für verschiedene Absorberstoffe

6. Bei den meisten Neutronenanwendungen wird die Energie über die elastische und unelastische Neutronenstreuung und über den Strahleneinfang abgegeben. Schnelle Neutronen werden durch die ersten beiden Prozesse abgebremst, langsame durch die letzten beiden. Da Kerne mit großem Z mehr und tiefer liegende Anregungszustände haben, als Kerne mit kleinem Z, sind für die unelastische Streuung Materialien mit schweren Kernen besser geeignet. Bei 14 MeV betragen die Wirkungsquerschnitte der unelastischen Neutronenstreuung an Cu, Fe und Pb etwa 0,6; 1,4 und 2,4 barn. Die elastische Neutronenstreuung hat besonders für Materialien mit kleinem Z große Wirkungsquerschnitte. Für die leichten Elemente zeigt Abb. 4.23 die Abhängigkeit von der Energie. Bei Energien unterhalb von 1 eV hat Wasserstoff den größten Wirkungsquerschnitt. Da auch Kohlenstoff zu den leichten Elementen mit großem Wirkungsquerschnitt gehört, sind solche Materialien, wie Paraffin und Polyäthylen gut als Neutronenabsorber in diesem Energiebereich geeignet. Neutronen noch niedrigerer Energien werden vor allem durch den Strahlungseinfang absorbiert. Die größten Wirkungsquerschnitte haben ^{113}Cd mit $5 \cdot 10^4$ barn bei 0,17 eV und ^{10}B mit 760 barn bei 0,025 eV.

Bei der Berechnung von Abschirmungen sind auch die in der unelastischen Neutronenstreuung und beim Strahlungseinfang entstehenden γ-Strahlen zu berücksichtigen. Beim Einfang durch Cadmium entstehen γ-Quanten im Energiebereich zwischen 3 bis 5 MeV, bei Wasserstoff ein Übergang mit 2,23 MeV und bei ^{10}B einer mit 0,478 MeV. Die günstigsten Eigenschaften hat offensichtlich Bor. Das ist der Grund dafür, daß verschiedene stark borhaltige Konstruktionsmaterialien entwickelt wurden, wozu Borstahl, Borat und boriertes Graphit gehören.

Abschirmungen für schnelle Neutronen sollten unter Berücksichtigung der genannten Effekte schichtenweise aus Materialien mit großem Z, kleinem Z, großem σ_{el} und großem Z aufgebaut werden. Aus praktischen, darunter auch ökonomischen Gründen wählt man oft physikalisch homogene aber billige Stoffe, wie z. B. Barytbeton oder Beton. Die Schichtdicken müssen dann mehrere Meter betragen.

7. Die innere Strahlenbelastung kann nur durch eine Einschränkung der Zufuhr radioaktiver Stoffe in den menschlichen Organismus verringert werden. Da die Zuführung nur durch Inhala-

tion und Ingestion erfolgen kann, muß dafür gesorgt werden, daß die Konzentration radioaktiver Nuklide in den lebensnotwendigen Stoffen die zulässigen Werte nicht übersteigt. Eine Einschränkung der Zufuhr radioaktiver Stoffe in den Organismus setzt eine Begrenzung ihrer Abgabe an die Umgebung voraus. Unter friedlichen Bedingungen liefern die Kernkraftwerke den größten Anteil der an die Umwelt abgegebenen technogenen radioaktiven Stoffe; er bleibt aber unterhalb von 1% der natürlichen und zivilisationsbedingten Strahlendosis. Dabei muß davon ausgegangen werden, daß eine bestimmte Umgebungskapazität für die Aufnahme vorhanden ist, so daß unter Berücksichtigung der Prozesse des Biozyklus, der Verdünnung, Anreicherung und Diskriminierung die zulässigen Werte der Strahlenbelastung nicht überschritten werden. Für die modernen Kernkraftwerke wird die Umgebungskapazität nicht ausgelastet, so daß begrenzte Mengen radioaktiver Stoffe kontrolliert an die Umgebung abgegeben werden können. Die Kontrolle der Abgabe und die Überwachung der Umwelt ist gesetzlich geregelt und staatlich streng organisiert.

8. Bei beruflich strahlenexponierten Personen kann die Inkorporation radioaktiver Stoffe durch Herabsetzung der Inkorporationsmöglichkeiten erreicht werden. Zu den Methoden zählen die Vermeidung der äußeren Kontamination, indem bestimmte Arbeiten in abgeschlossenen Behältern, in sogenannten heißen Zellen, von außen mit Manipulatoren durchgeführt werden, das Anlegen von Schutz- und Vollschutzanzügen mit autonomer Frischluftzufuhr sowie Trink-, Rauch- und Eßverbot in kontaminationsgefährdeten Räumen. Eine Überwachung und Kontrolle hinsichtlich möglicher Kontaminationen ist in allen Fällen notwendig.

9. Ein wichtiges Problem ist die Beseitigung und Kontrolle der radioaktiven Abfälle, d. h. radioaktiver oder nicht dekontaminierbarer Stoffe, die keiner Nutzung mehr zugeführt werden können. Sie fallen in Kernkraftwerken, Forschungszentren, Kliniken und bei anderen Nutzern kernphysikalischer Verfahren in fester, flüssiger und gasförmiger Phase an. Relativ einfach läßt sich die Dekontamination geringer Verunreinigungen durchführen. Nach ihrer Verdichtung sind hohe Aktivitäten und spezifische Aktivitäten charakteristisch. Insgesamt fallen gegenwärtig aus den Kernbrennstoffzyklen etwa 10^4 t radioaktiver Abfälle pro Jahr im Weltmaßstab mit einer Aktivität von 10^2 bis 10^3 EBq an. Bei der Erzeugung von 1 $GW_{el} \cdot$ Jahr entstehen bis zu 700 m^3 radioaktiver Abfälle. Zu ihrer Endlagerung ist es erforderlich, auch für geologisch typische Zeiträume den Eintritt in die Kreisläufe der Atmosphäre, Hydrosphäre und Biosphäre sicher zu verhindern. Dabei muß beachtet werden, daß entsprechend der eingeschlossenen Energie keine Überhitzungen stattfinden, die zur Zerstörung der Umhüllung führen. Eine wirtschaftliche Methode, die gleichzeitig einen hohen Sicherheitsgrad hat, ist die Endlagerung in Bergwerkstollen von Salzstöcken, die seit einigen Millionen Jahren tektonisch nicht gestört wurden.

Literaturhinweise zu Kapitel 12
Ale 84, Ang 82, Ard 87, Bar 80, Bar 77, Bat 85, Cho 81, Cit 84, Dec 78, Del 85, Fis 81, Fle 75, Ger 82, Gib 80, Gor 82, Gur 65, Han 76, Har 72, Har 81, Har 69, Hen 74, Her 81, Her 62, Hol 75, Ind 82, Kau 84, Ker 80, Ker 85, Kes 83, Kie 72, Kim 71, Kir 80, Kle 79, Kuz 81, Leo 82, Maj 82, Mei 69, Mei 75, Mei 78, Mei 84, Nar 73, Nik 81, Ott 85, Pet 73, Pet 76, Pip 78, Poh 70, Pro 73, Rez 82, Šir 72, Sch 83, Scha 85, Sto 78, Sto 85, Syt 84, Tel 85, Vie 82, Weis 70, Wet 85, Zn 78, Žda 80, Zem 83

13. Wechselwirkungen der Elementarteilchen[1])

13.1. Die heutige Elementarteilchenphysik

Die Kapitel 13 und 14 sind der Darstellung der Physik der Elementarteilchen oder Hochenergiephysik gewidmet. Natürlich ist in den vorhergehenden Kapiteln, insbesondere in den Kapiteln 1 bis 6 viel Material enthalten, welches zur Hochenergiephysik gehört und zum Verständnis dieser beiden Abschnitte notwendig ist.

Die historische Entwicklung der Kern- und Elementarteilchenphysik wurde in Kapitel 1 dargestellt. Kapitel 2 gibt einen Überblick über die Elementarteilchen und ihre Wechselwirkungen. Die Beschleuniger, ohne die die experimentelle Untersuchung der Elementarteilchen und ihrer Wechselwirkungen kaum möglich wäre, werden in Kapitel 3 beschrieben. Die Kapitel 4 und 5 stellen die Grundlagen der experimentellen Nachweistechnik für Elementarteilchen dar. Eigenschaften und Symmetrien der Teilchen, wie Ladung, die Baryonen- und Leptonenzahl, die Seltsamkeit, ihre Massen und Drehimpulse sowie magnetischen Dipolmomente, die Parität, Zeitumkehrinvarianz, Ladungskonjugation und der Isospin werden in Kapitel 6 beschrieben.

Im Kapitel 13 beschreiben wir die Wechselwirkungen der „alten" Elementarteilchen. Da es viele ausgezeichnete Darstellungen dieser traditionellen Probleme der Hochenergiephysik gibt, wurde entschieden, die Darstellung hier relativ knapp zu halten und nur das Material zu verwenden, welches für das Verständnis der heutigen Elementarteilchenphysik noch wesentlich ist.

Im Kapitel 14 sind die moderne Elementarteilchenphysik, die Physik der Quarks und Leptonen und ihrer Wechselwirkungen dargestellt. Hierbei handelt es sich hauptsächlich um Ergebnisse, die erst im Laufe der siebziger und achtziger Jahre erhalten wurden.

13.2. Elektromagnetische Wechselwirkung

13.2.1. Wechselwirkung durch Photonenaustausch

Wir schildern zunächst den Weg von der klassischen Theorie der elektromagnetischen Felder und Wechselwirkungen in Form der Maxwellschen Gleichungen zur Quantenbeschreibung.

In der nichtrelativistischen Quantenmechanik führt man die elektromagnetischen Kräfte durch ihr skalares und Vektorpotential ein. So liefert bereits die Schrödinger-Gleichung mit dem Potential einer Punktladung e

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi - \frac{e^2}{r} \psi \qquad (13.1)$$

---

[1]) Die Formeln von Kapitel 13 und 14 entsprechen der Schreibweise von Größen in den sogenannten „natürlichen" Einheiten der Elementarteilchenphysik (siehe Anhang D 1).

das Energieniveauschema des Wasserstoffatoms und die Coulomb-Streuung zweier Punktladungen in recht guter Näherung. Führt man phänomenologisch zusätzlich den Spin und das magnetische Moment des Elektrons und seine Wechselwirkung ein, so erhält man praktisch bereits eine sehr gute Beschreibung des Atombaus und der Spektrallinien, der molekularen Bindung und der Festkörperphysik.

Wir wissen natürlich, daß die Schrödinger-Gleichung nicht streng gültig ist. Die auf der relativistischen Mechanik beruhende Wellengleichung für Teilchen mit Spin 1/2 ist die Dirac-Gleichung. Sie lautet für ein freies Teilchen

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -i\hbar c \left(\alpha_x \frac{\partial \psi}{\partial x} + \alpha_y \frac{\partial \psi}{\partial y} + \alpha_z \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) + mc^2 \beta \psi \,. \tag{13.2}$$

Dabei sind jetzt die ψ vierkomponentige Spinoren, und die α_i und β sind nichtvertauschbare Größen, die durch Matrizen darstellbar sind. In Viererschreibweise lautet (13.2)

$$\sum_{\mu=1}^{4} \gamma_\mu \frac{\partial \psi}{\partial x_\mu} + \frac{mc}{\hbar} \psi = 0 \,. \tag{13.3}$$

mit $i\gamma_1 = \beta\alpha_x$, $i\gamma_2 = \beta\alpha_y$, $i\gamma_3 = \beta\alpha_z$ und $\gamma_4 = \beta$. Die Untersuchung der Dirac-Gleichung zeigt, daß die Teilchen, die durch sie beschrieben werden, u. a. sind das die Elektronen, einen Eigendrehimpuls oder Spin der Größe $\hbar/2$ haben. Durch Einfügen der elektromagnetischen Potentiale A_μ ($\mu = 1, \dots, 4$) in die Dirac-Gleichung wird die elektromagnetische Wechselwirkung der Elektronen beschrieben.

$$\sum_{\mu=1}^{4} \gamma_\mu \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_\mu} - \frac{ie}{\hbar c} A_\mu \psi \right) + \frac{mc}{\hbar} = 0 \,. \tag{13.4}$$

Umgekehrt lautet die Gleichung für das elektromagnetische Potential

$$A_\mu = J_\mu \,. \tag{13.5}$$

Dabei ist J_μ der äußere Strom, der die geladenen Teilchen beschreibt. Für Leptonen hat dieser Strom die folgende Form:

$$J_\mu = ie\bar{\psi}\gamma_\mu\psi \,. \tag{13.6}$$

Bei der Berechnung der Energie der Elektronen in einem äußeren Feld erscheint ein Glied, welches als magnetisches Moment der Elektronen gedeutet wird

$$\mu_e = \frac{e\hbar}{2m_e c} = \text{Bohrsches Magneton} \,. \tag{13.7}$$

Spin und magnetisches Moment der Elektronen ergeben sich also erst aus der korrekten relativistischen Beschreibung des Elektrons. Es verwundert nicht, daß diese beiden Größen klassisch schwer zu verstehen sind. Durch diese Eigenschaft beschreibt die Dirac-Gleichung auch die Feinstruktur der Atomspektren.

Die Dirac-Gleichung ist jedoch immer noch nicht völlig richtig; die elektromagnetischen Potentiale $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{\Phi}$ beschreiben nur ein klassisches Feld. Wir müssen aber auch die Quantennatur des elektromagnetischen Feldes berücksichtigen. Das geschieht durch die Einführung der Quantenelektrodynamik (QED). Dabei wird das elektromagnetische Feld durch Zustände mit 1, 2, 3, ... Photonen beschrieben. Die elektromagnetische Wechselwirkung z. B. zweier Elektronen erfolgt durch Emission und Absorption von Lichtquanten oder Photonen. Diese ausgetauschten Photonen sind nicht als freie Teilchen, sondern als virtuelle Teilchen aufzufassen, die innerhalb kurzer Zeit, in Übereinstimmung mit der Unschärferelation $\Delta E \cdot \Delta t \geqq \hbar/2$, den Energiesatz verletzen dürfen.

Um die Gleichungen der gekoppelten elektromagnetischen und Dirac-Felder (13.3) und (13.5) zu quantisieren, schreibt man die klassischen Gleichungen in Hamilton- oder Lagrange-Form um. In dieser Form hat der Wechselwirkungsterm beider Felder die Gestalt

$$H_{\mathrm{I}} = -\mathrm{i}e \sum_{\mu=1}^{4} \bar{\psi}\gamma_\mu \psi A_\mu = - \sum_{\mu=1}^{4} J_\mu A_\mu \,. \tag{13.8}$$

Es wird also der Strom $\bar{\psi}\gamma_\mu\psi$ an das Feld A_μ gekoppelt. Dann, wenn der Wechselwirkungsterm kleiner ist als die Terme der Hamilton- oder Lagrange-Funktion, die die freien Felder beschreiben, $H_{\mathrm{I}} \ll H_0$, kann man, nachdem man die Felder quantisiert hat, die interessierenden Größen in einer Störungsreihe in der Kopplungskonstanten $\alpha = \frac{e^2}{\hbar c} = \frac{1}{137}$ entwickeln. Die Glieder dieser Entwicklung lassen sich auch anschaulich durch Feynman-Graphen darstellen. Die grundlegende Kopplung (13.8) wird dabei durch den Elektron-Elektron-Photon-Vertex in Abb. 13.1 veranschaulicht.

Wenn wir die Sprache der Feynman-Graphen verwenden, dann findet in niedrigster Ordnung die Streuung zweier Elektronen, wie in Abb. 13.2 und 13.3 angegeben, durch den Austausch eines Photons statt.

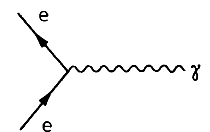


Abb. 13.1
Die Kopplung der Elektron- und Photonenfelder laut (13.4), dargestellt durch den Elektron-Elektron-Photon-Vertex

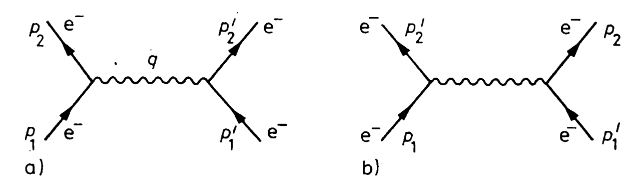


Abb. 13.2
Feynman-Diagramm der elastischen Elektron-Elektron-Streuung (Møller-Streuung) in niedrigster Ordnung

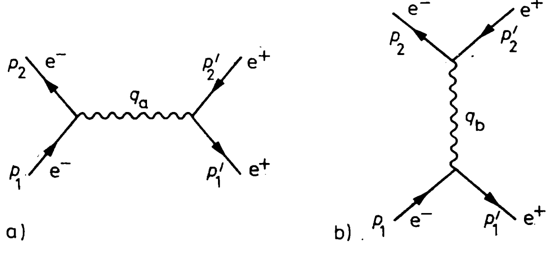


Abb. 13.3
Feynman-Diagramm der elastischen Elektron-Positron-Streuung (Bhabha-Streuung) in niedrigster Ordnung

Die Quantenelektrodynamik ist zweifellos die heute am genauesten experimentell verifizierte Theorie. Sie beschreibt alle bisher bekannten rein elektromagnetischen Erscheinungen in Übereinstimmung mit den experimentellen Ergebnissen. Besonders beeindruckend ist die Beschreibung der winzigen Abweichungen des magnetischen Moments der Elektronen vom Wert $e\hbar/2M_e c$, der aus der Dirac-Gleichung folgt, sowie von winzigen Abweichungen im Spektrum des Wasserstoffatoms (Lambshift).

Ein weiterer Erfolg besteht in der Vorhersage von Antiteilchen. Für das Elektron folgt das bereits aus der Dirac-Gleichung. Das Antiteilchen des Elektrons e^- ist das Positron e^+. Es hat die gleiche Masse, entgegengesetzte elektrische Ladung und entgegengesetztes magnetisches Moment und wurde 1932 von C. D. ANDERSON in der Höhenstrahlung gefunden. Das Positron ist wie das Elektron ein stabiles, nicht spontan zerfallendes Teilchen. Es kann jedoch zusammen mit einem Elektron annihilieren, d. h. in andere Teilchen übergehen (siehe Abschnitt 13.2.3.). Umgekehrt können Elektron-Positron-Paare frei in Stößen von Photonen mit geladenen Teilchen (z. B. Atomkernen) erzeugt werden

$$\gamma + Z \rightarrow Z + e^+ + e^- . \tag{13.9}$$

Neben diesen Erfolgen kennt die Quantenelektrodynamik auch Probleme. Diese bestehen im Auftreten von unendlichen Ausdrücken bei der Berechnung von Feynman-Diagrammen höherer Ordnung. Diese Unendlichkeiten verhindern jedoch nicht die Berechnung praktisch interessierender Prozesse. Das Renormierungsverfahren erlaubt es, die unendlichen Ausdrücke zu eliminieren.

13.2.2. Elastische Elektron-Elektron- und Elektron-Positron-Streuung

Wir betrachten die Streuung im Schwerpunktsystem und verwenden als Variablen den Impuls p, die Geschwindigkeit $\beta = v/c$ und den Streuwinkel Θ im Schwerpunktsystem.

Die Feynman-Diagramme niedrigster Ordnung für die elastische Elektron-Elektron-Streuung (Møller-Streuung) sind in Abb. 13.2 angegeben. Dabei wird der Impulsübertrag durch das virtuelle Photon $q = (p_2 - p_1)$ als raumartig bezeichnet, da das invariante Massenquadrat des Photons negativ ist

$$\begin{aligned}(\text{„Masse"})^2 = q^2 = (p_2 - p_1)^2 &= (E_2 - E_1)^2 - (\boldsymbol{p}_2 - \boldsymbol{p}_1)^2 \\ &= -2p^2(1 - \cos\Theta) < 0 .\end{aligned} \tag{13.10}$$

Auch das invariante Abstandsquadrat x^2 zwischen zwei Raumpunkten zur gleichen Zeit ist negativ!

Da beide Elektronen in Abb. 13.2 identisch sind, muß das zweite Diagramm mit berücksichtigt werden, in welchem die beiden auslaufenden Teilchen vertauscht werden. Für große Impulse $p \gg m_e$ erhält man den elastischen Streuquerschnitt

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(e^-e^- \rightarrow e^-e^-) = \frac{e^4}{4c^4p^2}\,\frac{(3 + \cos^2\Theta)^2}{\sin^4\Theta} . \tag{13.11}$$

Die Feynman-Diagramme für die elastische Elektron-Positron-Streuung (Bhabha-Streuung) werden in Abb. 13.3 angegeben. Der Impulsübertrag q_a des Photons in Abb. 13.3a ist raumartig wie bei der Elektron-Elektron-Streuung. Der Impulsübertrag q_b im Annihilationsdiagramm 13.3b ist hingegen zeitartig, da $q_b^2 > 0$:

$$q_b^2 = (p_1 + p_1') = 4E_1^2 = 4E_2^2 = 4(p^2 + m_e^2) > 0 . \tag{13.12}$$

Für große Impulse $p \gg m_e$ ergibt sich der elastische Streuquerschnitt im Schwerpunktsystem

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(e^+e^- \rightarrow e^+e^-) = \frac{e^4}{2c^4p^2}\left[\frac{1}{4}\frac{1+\cos^4\Theta/2}{\sin^4\Theta/2} + \frac{1}{8}(1+\cos^2\Theta) - \frac{1}{2}\frac{\cos^4\Theta/2}{\sin^2\Theta/2}\right]. \tag{13.13}$$

In den modernen Elektron-Positron-Speicherring-Beschleunigern wird der Prozeß der Bhabha-Streuung benutzt, um experimentell die Luminosität zu bestimmen. Das heißt, die Wirkungsquerschnitte aller anderen Prozesse werden relativ zu diesem Prozeß bestimmt.

13.2.3. Elektron-Positron-Annihilation

In Abb. 13.4 zeigen wir das Feynman-Diagramm für die Annihilationsreaktion eines Elektron-Positron-Paares in ein Myonenpaar. Die Myonen $\mu^+\mu^-$ sind wie die Elektronen elementare punktförmige, geladene Leptonen; für sie gilt die QED ebenso wie für die Elektronen. Die Annihilation verläuft über ein zeitartiges virtuelles Photon mit dem invarianten Impulsquadrat



$$q^2 = (p_1 + p_2)^2 = 4E^2 = 4(p^2 + m_e^2)\,. \tag{13.14}$$

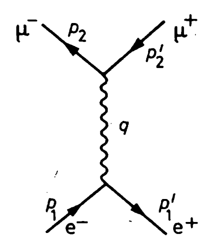


Abb. 13.4
Feynman-Diagramm der Annihilationsreaktion $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ in niedrigster Ordnung

Im Schwerpunktsystem erhalten wir für hohe Impulse $p \gg m_\mu$ den differentiellen Wirkungsquerschnitt

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-) = \frac{e^4}{16c^4E^3}\left(1 + \cos^2\Theta + \frac{m_\mu^2}{E^2}\sin^2\Theta\right). \tag{13.15}$$

Dabei ist E die Energie eines der erzeugten Myonen. Wir erhalten einen Wirkungsquerschnitt identisch zu (13.15), wenn wir das $\mu^+\mu^-$-Paar durch ein Paar anderer elementarer geladener Fermionen ersetzen, z. B. durch ein Paar der schweren Leptonen $\tau^+\tau^-$.

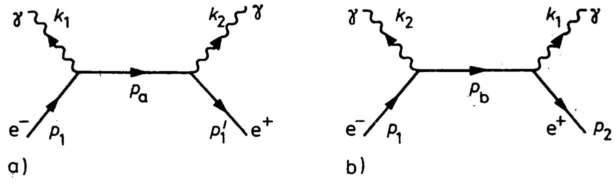


Abb. 13.5
Feynman-Diagramme für die Elektron-Positron-Annihilation in ein Paar Photonen $e^+e^- \rightarrow \gamma\gamma$ in niedrigster Ordnung

Abbildung 13.5 zeigt die Feynman-Diagramme für die e^+e^--Annihilation in ein Paar von Photonen. Da die beiden Photonen im Endzustand identisch sind, müssen wir ein zweites Diagramm berücksichtigen, in dem die beiden Photonen vertauscht sind. Im Schwerpunktsystem erhalten wir den differentiellen Wirkungsquerschnitt

$$\frac{d\sigma}{d\Theta}(e^+e^- \to \gamma\gamma) = \frac{e^4}{2c^4p^2}\left(\frac{\cos^4 \Theta/2 + \sin^4 \Theta/2}{\sin^2 \Theta + \left(\frac{m_e}{p}\right)^2 \cos^2 \Theta}\right). \tag{13.16}$$

Im Laborsystem (Positronenenergie E_{Lab}) wird bei hoher Energie $E_{Lab} \gg m_e$ der Gesamtwirkungsquerschnitt für die Zwei-Photonen-Annihilation

$$\sigma_{tot}(e^+e^- \to \gamma\gamma) \approx \pi \frac{e^4}{m_e c^4 E_{Lab}}\left(\ln^2 \frac{E_{Lab}}{m_e} - 1\right). \tag{13.17}$$

13.2.4. Photon-Photon-Streuprozesse

Die äquivalente Photonen-Methode ist ein Näherungsverfahren. Es gestattet, die elektromagnetische Wechselwirkung von Teilchen zu berechnen, die sich mit Geschwindigkeiten nahe der Lichtgeschwindigkeit bewegen ($\beta \approx 1$).

Aus den Ausdrücken für das skalare und das Vektorpotential einer Ladung e, die sich mit der Geschwindigkeit $v = \beta c$ bewegt, erhalten wir für $\beta \approx 1$ für die elektrischen und magnetischen Feldstärken $\boldsymbol{E}$ und $\boldsymbol{B}$ Ausdrücke, die annähernd ebene elektromagnetische Wellen beschreiben, die sich in Richtung des geladenen Teilchens bewegen. Die elektromagnetische Wechselwirkung des Teilchens läßt sich dann berechnen durch die Wechselwirkung eines Flusses von Photonen, die sich in der gleichen Richtung wie das Teilchen bewegen. Die Zahl dieser Photonen mit Energien zwischen k und $k + dk$ ist

$$n(k)\,dk = \frac{2\alpha}{\pi}\frac{dk}{k}\left[\ln\frac{\hbar c\gamma}{kb_m} - 0{,}38\right]. \tag{13.18}$$

Dabei ist $\gamma = E/m$ (E und m sind Gesamtenergie und Masse des geladenen Teilchens), b_m beschreibt die Ausdehnung des Teilchens, wir verwenden dafür $b_m \approx \hbar/mc$. Kennt man z. B. den Wirkungsquerschnitt $\sigma(k)$ für eine durch Photonen induzierte Reaktion, so erhält man den entsprechenden Wirkungsquerschnitt eines geladenen Teilchens für die gleiche Reaktion als

$$\sigma = \int \sigma(k)\,n(k)\,dk\,. \tag{13.19}$$

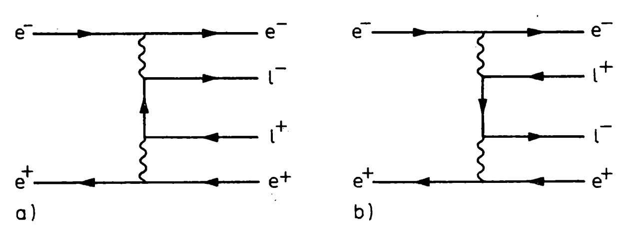


Abb. 13.6
Zweiphotonenerzeugung eines Paares von Fermionen l^+l^- (e^+e^-, $\mu^+\mu^-$ usw.) in e^+e^--Reaktionen

Eine der interessantesten Anwendungen findet diese Methode bei der Untersuchung von Photon-Photon-Streuprozessen mit Hilfe von e^+e^--Stößen. Solche Prozesse werden heute an Elektron-Positron-Speicherringbeschleunigern intensiv untersucht. In Abb. 13.6 geben wir die Feynman-Diagramme für die Erzeugung eines Paares von Fermionen (e^+e^-, $\mu^+\mu^-$ usw.) durch die Zwei-Photonen-Wechselwirkung in e^+e^--Stößen an. Man bezeichnet solche Prozesse als „Zwei-Photonen-Prozesse“, da hier im Gegensatz zu den Prozessen in Abschnitt 13.2.3. zwei Photonen im Feynman-Diagramm niedrigster Ordnung ausgetauscht werden.

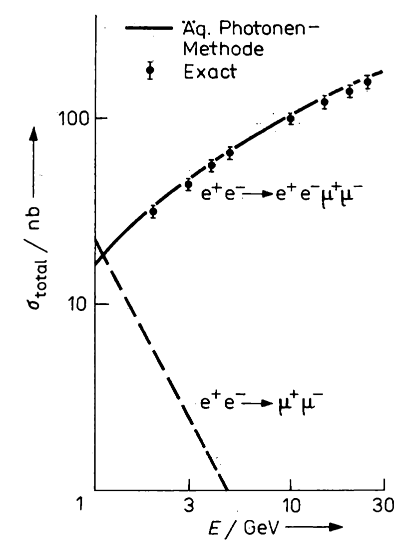


Abb. 13.7
Gesamtwirkungsquerschnitt für die Zweiphotonenerzeugung von $\mu^+\mu^-$-Paaren als Funktion der e^+e^--Schwerpunktsenergie E. Es wird die exakte Berechnung (Punkte) mit den Ergebnissen der äquivalenten Photonen-Methode verglichen. Zum Vergleich wird auch der Gesamtwirkungsquerschnitt des Einphotonenannihilationsprozesses $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ (vergleiche Abb. 13.3) angegeben

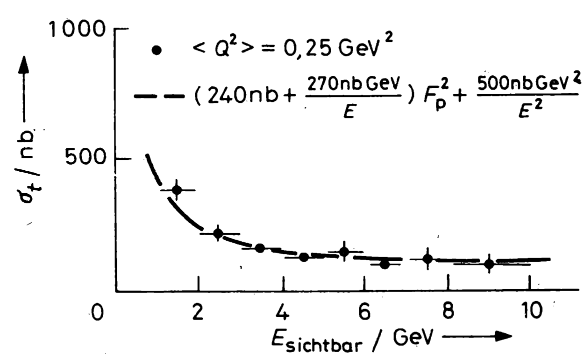


Abb. 13.8
Erste experimentelle Ergebnisse für den Photon-Photon-Wirkungsquerschnitt als Funktion der Photon-Photon-Schwerpunktsenergie. Diese Daten wurden aus der Untersuchung von Zwei-Photonenprozessen bei der e^+e^--Annihilation erhalten

Abbildung 13.7. zeigt, wie gut die äquivalente Photonen-Methode für solche Prozesse mit der exakten Berechnung der Wirkungsquerschnitte übereinstimmt. Diese Abbildung zeigt weiterhin auch, daß die Zwei-Photonen-Wirkungsquerschnitte bei großen Schwerpunktsenergien E der e^+e^--Wechselwirkung größer werden als die entsprechenden Ein-Photonen-Wirkungsquerschnitte, die laut (13.11) mit $1/E^2$ abfallen. Mit Hilfe der äquivalenten Photonenmethode läßt sich aus experimentellen Daten für solche Prozesse der Wirkungsquerschnitt für die Photon-Photon-Wechselwirkung bestimmen. In Abb. 13.8 geben wir erste experimentelle Daten für den mit dieser Methode bestimmten Gesamtwirkungsquerschnitt für die Photon-Photon-Streuung als Funktion der Schwerpunktsenergie des γ-γ-Stoßes an.

13.2.5. Magnetische Momente von Elektronen und Myonen

Die Berechnung der magnetischen Momente von Elektronen und Müonen ist einer der überzeugendsten Erfolge der Quantenelektrodynamik.

Allgemein hängt der Vektor des magnetischen Moments $\boldsymbol{\mu}$ eines Teilchens mit seinem Spin $\boldsymbol{s}$ zusammen.

$$\boldsymbol{\mu} = g\boldsymbol{\mu}_B \boldsymbol{s} \,. \tag{13.20}$$

g bezeichnet man als den Landé-Faktor. Die Dirac-Theorie ergibt einen g-Faktor

$$g = 2 \,. \tag{13.21}$$

Die g-Faktoren von Elektronen und Myonen wurden experimentell mit hoher Genauigkeit bestimmt und etwas größer als $g = 2$ gefunden.

Diese Abweichungen lassen sich mit Hilfe der Quantenelektrodynamik verstehen. Der Wert $g = 2$ ergibt sich, wenn man das Feynman-Diagramm niedrigster Ordnung in Abb. 13.9a allein berücksichtigt. Kompliziertere Diagramme, wie z. B. in Abb. 13.9b—d, modifizieren das magnetische Moment. Das Diagramm b führt zu einer Korrektur der ersten Ordnung proportional zur Feinstrukturkonstanten α. Das Diagramm c berücksichtigt die Emission zweier virtueller Photonen und führt zu einer Korrektur der Ordnung α^2.

Bis zur dritten Ordnung in α ergibt die Berücksichtigung aller Feynman-Diagramme für das Elektron

$$\left(\frac{g-2}{2}\right)_e = \frac{\alpha}{2\pi} - 0{,}32848\frac{\alpha^2}{\pi^2} + 0{,}19\frac{\alpha^3}{\pi^3} + \cdots = (115964{,}1 \pm 0{,}7) \cdot 10^{-8} \,. \tag{13.22}$$

Der experimentelle Wert ist

$$\left(\frac{g-2}{2}\right)_e = (115964{,}4 \pm 0{,}7) \cdot 10^{-8} \,. \tag{13.23}$$

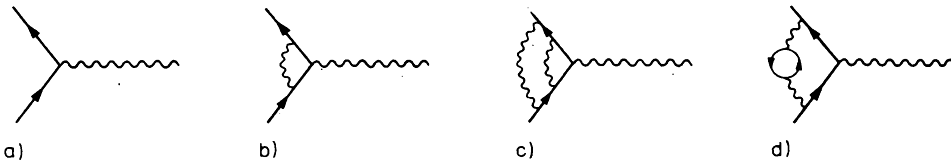


Abb. 13.9
Feynman-Diagramme verschiedener Ordnungen zur Berechnung des g-Faktors von Elektronen und Myonen

Die Berechnung für das Myon ergab

$$\left(\frac{g-2}{2}\right)_\mu = \frac{\alpha}{2\pi} + 0{,}765\,78\,\frac{\alpha^2}{\pi^2} + 2{,}55\,\frac{\alpha^3}{\pi^3} + \cdots = (116\,557{,}4 \pm 31)\cdot 10^{-8}\,. \tag{13.24}$$

Der experimentelle Wert ist

$$\left(\frac{g-2}{2}\right)_\mu = (116\,616 \pm 31)\cdot 10^{-8}\,. \tag{13.25}$$

Diese gute Übereinstimmung stellt einen außerordentlichen Erfolg der Quantenelektrodynamik dar.

13.3. Schwache Wechselwirkung

13.3.1. Einführung

Mit einem speziellen Prozeß, der durch die schwache Wechselwirkung vermittelt wird, sind wir durch den Abschnitt 9.5 bereits wahlvertraut. Dort wurde der radioaktive β-Zerfall der Kerne allseitig behandelt. Dabei wurde besonders in den Abschnitten 9.5.4, 9.5.5 und 9.5.7 auch bereits auf die allgemeinen Eigenschaften der schwachen Wechselwirkung eingegangen, soweit sie für den Kern-Zerfall wichtig sind. Das Ziel des Abschnitts 13.3 ist es hingegen, die schwache Wechselwirkung als universelle Wechselwirkung, an der alle Elementarteilchen beteiligt sind, darzustellen. Wir beschränken uns hier aber immer noch auf die durch die geladenen schwachen Ströme vermittelte Form der schwachen Wechselwirkung. Die zweite Form der schwachen Wechselwirkung, die durch die sogenannten schwachen neutralen Ströme vermittelt wird, soll erst in Abschnitt 14.8 zusammen mit der mikroskopischen Theorie der schwachen Wechselwirkung dargestellt werden, der elektroschwachen Eichfeldtheorie. Nach dem Studium des Abschnittes 13.3 kann der Leser auf den in Abschnitt 9.5 ausgearbeiteten Kern-β-Zerfall als ein Beispiel für einen speziellen Prozeß der schwachen Wechselwirkung, der in allen Einzelheiten ausgearbeitet und dem Experiment gegenübergestellt wird, zurückkommen.

Anfang der 30er Jahre war der radioaktive β-Zerfall den Physikern ein Rätsel. Als Lösung wurde — sicher damals nicht allgemein akzeptiert — das Neutrino als neues Elementarteilchen von W. Pauli vorgeschlagen und von E. Fermi 1933 in die Theorie der schwachen Vier-Fermionen-Wechselwirkung integriert. Diese Theorie der punktförmigen Wechselwirkung von Leptonen benötigt erst bei heute erreichbaren Energien Verbesserungen. Das Neutrino konnte als Teilchen erst 1956 an einem Reaktor nachgewiesen werden, was jedoch nicht heißt, daß all seine Rätsel gelöst wären. Zum Beispiel kennen wir keinen Grund, daß das Neutrino keine Ruhmasse haben sollte, und die Suche nach seiner Masse hält die Hochenergiephysik heute in Spannung.

Ursprünglich wurden eine Reihe von Erhaltungssätzen als erfüllt angesehen, neben Energie- und Impulserhaltung z. B. auch für die Parität. Es ist das Verdienst von T. D. Lee und C. N. Yang, die Paritätserhaltung bei der schwachen Wechselwirkung in Frage gestellt zu haben; ihre Zweifel inspirierten Frau C. S. Wu zur experimentellen Überprüfung. Die Untersuchung der Winkelverteilung im β-Zerfall von polarisierten Co^{60}-Kernen bestätigte die Zweifel der beiden jungen Theoretiker: Die Parität ist in schwachen Prozessen, zu denen der β-Zerfall gehört, keine erhaltene Größe. Die hier getestete schwache Kraft wird von geladenen Strömen über-

tragen. Diese setzen sich aus einem Vektorstrom (V) und einem Axialvektorstrom (A) zu gleichen Teilen zusammen (V-A-Hypothese) und verursachen somit die Paritätsverletzung.

Eine rein experimentelle Entdeckung, der keine theoretische Vorhersage vorausging, wurde 1964 von J. W. CRONIN, V. L. FITSCH und Mitarbeitern in einem Strahl neutraler K-Mesonen gemacht: Bei der genauen Messung gegenseitiger Umwandlungsprozesse der beiden Mesonen K^0 und $\bar{K}^0$ ineinander — der sogenannten K^0-Regeneration — entdeckten sie einen Unterschied zwischen Teilchen (K^0) und Antiteilchen ($\bar{K}^0$).

Dieser zeigte sich in einer geringfügigen Verletzung des Erhaltungssatzes der CP-Operation. Diese Operation beinhaltet neben dem Übergang von einem Teilchen zu dessen Antiteilchen (C-Operation) die räumliche Spiegelung (P-Operation). Sie war bis dahin auch eines der Tabus, nahegelegt von der axiomatischen Formulierung allgemeiner Feldtheorien. Unumstößlich in solchen Theorien ist jedoch, daß die Operation CP angewandt auf das zeitliche Rückläufige eines Elementarteilchenprozesses (T-Operation), auf den Ausgangsprozeß führen muß, also Invarianz gegenüber der CPT-Operation. Die experimentelle Entdeckung von CRONIN u. a. bedeutet daher neben der Auszeichnung von Materie gegenüber Antimaterie auch die Auszeichnung einer Zeitrichtung in diesen speziellen Prozessen.

Gleichzeitig mit diesen Marksteinen großer Entdeckungen wurden die Zerfälle von Teilchen — der K- und π-Mesonen usw. — genau gemessen und viele Regelmäßigkeiten herausgearbeitet; die Theorie versuchte, phänomenologisch diese Informationen auf der Grundlage der V-A-Hypothese zu vereinigen. Ein weiterer Durchbruch wurde 1973 mit dem experimentellen Nachweis neutraler schwacher Ströme erzielt. Diese Ströme waren auf der Grundlage der Theorie schon 10 Jahre früher vorhergesagt. Diese Theorie beschreibt die schwachen und elektromagnetischen Wechselwirkungen zwischen Quarks und Leptonen; sie ist eine Verallgemeinerung der Quantenelektrodynamik. Nicht nur bei der Entdeckung neutraler Ströme, sondern z. B. auch durch die Vorhersage von Quarks — wie dem c-Quark — hat sie ihre Aussagekraft bisher gezeigt. Sie wird im Abschnitt 14.8 beschrieben. Zu ihrer weiteren Überprüfung sind sehr hohe Energien vonnöten, die nur an der Beschleunigergeneration, die in den 80er Jahren ihre Arbeit aufgenommen hat, zur Verfügung stehen. Man bezeichnet diese Theorie als Vereinigung der schwachen und elektromagnetischen Wechselwirkung.

13.3.2. Allgemeine Eigenschaften der schwachen Wechselwirkung

Elementarteilchenreaktionen, die durch die schwache Wechselwirkung vermittelt werden, erkennt man häufig schon an ihren kleinen Wirkungsquerschnitten (10^{-38} cm^2 oder kleiner) oder langen Lebensdauern (10^{-10} s oder länger). Die schwache Wechselwirkung läßt sich meist nur bei solchen Prozessen untersuchen, bei denen nicht gleichzeitig die starke oder elektromagnetische Wechselwirkung auftreten kann. Der größte Teil unserer Kenntnisse über die schwache Wechselwirkung stammt aus der Untersuchung der schwachen Zerfälle von Teilchen, die bezüglich aller anderen Wechselwirkungen stabil sind, und von der Untersuchung der Streuung von Neutrinos, die nur die schwache Wechselwirkung besitzen.

Die schwache Wechselwirkung tritt in zwei unterschiedlichen Formen auf:

Geladene schwache Ströme: Das ist die altbekannte schwache Wechselwirkung, die uns in diesem Abschnitt hauptsächlich beschäftigen soll. Die geladenen Ströme sind für alle bekannten schwachen Zerfälle und für Neutrinoreaktionen mit einem Müon im Endzustand verantwortlich.

Neutrale schwache Ströme: wurden von der Eichfeldtheorie der elektroschwachen Wechselwirkung vorhergesagt und erstmals 1973 experimentell nachgewiesen. Diese Form der schwachen Wechselwirkung werden wir im Abschnitt 14.8 beschreiben.

Man teilt die durch die geladenen schwachen Ströme verursachten Wechselwirkungen phänomenologisch in fünf Klassen ein.

1. *Leptonische Prozesse*, bei denen nur geladene Leptonen und Neutrinos beteiligt sind.
   Beispiel: $\mu^- \to e^- + \bar{\nu}_e + \bar{\nu}_\mu$ Müon-Zerfall.
2. *Semileptonische Prozesse ohne Verletzung der S(eltsamkeit), c(harm) oder b(ottom)-Quantenzahlen*
   Daran nehmen sowohl Leptonen als auch Hadronen teil.
   Beispiele: $n \to p + e^- + \bar{\nu}_e$ Neutron-β-Zerfall

   $\pi \to \mu^+ + \nu_\mu$ Pion-Zerfall

   $\nu_\mu + n \to \mu^- + p$ „Elastische Neutrino-Nukleon-Streuung"
3. *Semileptonische Reaktionen mit Änderung von S, c oder b*
   Am besten wurden bisher die Prozesse mit einer Änderung der Seltsamkeit untersucht.

   Beispiel: $\Lambda \to p + e^- + \bar{\nu}_e$ Λ-Hyperon-Zerfall.

   Bisher sind keine Prozesse mit $|\Delta S| = 2$ bekannt.
4. *Hadronische Prozesse.* Alle beobachteten Prozesse haben $|\Delta S| = 1$ oder $|\Delta c| = 1$ oder $|\Delta b| = 1$.

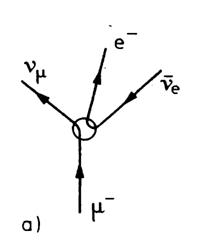
   Beispiele: $\Lambda \to p + \pi^-$ Λ-Hyperon-Zerfall

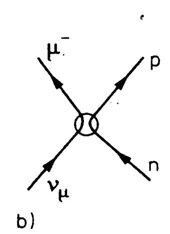
   $K^+ \to \pi^+\pi^+\pi^-$ K-Meson-Zerfall.
5. *CP verletzende Prozesse*, siehe Abschnitt 13.3.5.

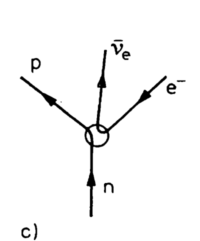
   Beispiel: $K_L^0 \to \pi^+ + \pi^-$ K_L^0-Zerfall.

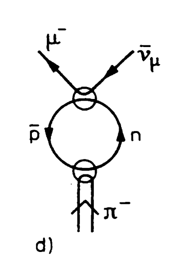
Bei allen Prozessen der schwachen Wechselwirkung sind vier Fermionen beteiligt, deshalb spricht man auch von einer Vier-Fermion-Wechselwirkung. Das ist bei den leptonischen und den meisten semileptonischen Prozessen unmittelbar zu sehen. Bei den schwachen Zerfällen, an denen Mesonen beteiligt sind, kann man sich vorstellen, daß diese Reaktionen unter dem Einfluß der starken Wechselwirkung über virtuelle Zwischenzustände aus Fermion-Antifermion-Paaren ablaufen (siehe dazu Abb. 13.10).

Die Wirkungsquerschnitte und Lebensdauer der schwachen Wechselwirkung werden durch die Kopplungskonstante der schwachen Wechselwirkung $G = 1{,}026 \cdot 10^{-5}/M_p^2$ (M_p = Masse des Protons), die auch als Fermi-Konstante bezeichnet wird, bestimmt. Der kleine Zahlenwert dieser









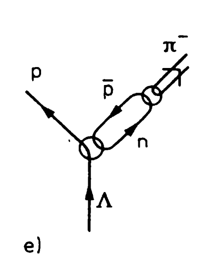


Abb. 13.10
Die schwache Wechselwirkung als Vier-Fermionen-Wechselwirkung
a) Müonenzerfall, b) Elastische Neutrino-Nukleon-Streuung, c) β-Zerfall des Neutrons, d) Pionzerfall, das π^- geht zunächst unter dem Einfluß der starken Wechselwirkung in ein virtuelles p̄n-Paar über, e) Λ-Zerfall. Als Ergebnis des Zerfalls entsteht zunächst ein virtuelles p̄n-Paar, welches sich unter dem Einfluß der starken Wechselwirkung in das Pion im Endzustand umwandelt

Kopplungskonstanten führt auf die kleinen Wirkungsquerschnitte bzw. Zerfallswahrscheinlichkeiten.

Trotz ihres kleinen Wertes spielt die Fermi-Konstante im kosmischen Maßstab, z. B. bei der Entwicklung junger Fixsterne wie der Sonne, eine wichtige Rolle. Der kleine Zahlenwert der Fermi-Konstanten garantiert die große Lebensdauer des Sonnensystems. In der Sonne wird thermonukleare Energie durch Bildung von He aus H-Kernen über einen Zyklus von Reaktionen freigesetzt. Die durch die schwache Wechselwirkung vermittelte Reaktion

$$H^1 + H^1 \to H^2 + e^+ + \nu\,, \tag{13.26}$$

für die infolge des kleinen Wirkungsquerschnittes eine Reaktionszeit von einigen 10^9 Jahren für die gesamte Sonnenmasse nötig ist, bestimmt den langsamen Zeitablauf der Energieerzeugungsprozesse in der Sonne.

Ursprünglich war die Annahme, daß die gesamte Natur sowie die elektromagnetische Wechselwirkung gegen die Paritätsoperation invariant sei, sehr fest im physikalischen Denken verwurzelt. Das änderte sich, als T. D. LEE und C. N. YANG im Jahre 1956 die Hypothese der Nichterhaltung der Parität bei der schwachen Wechselwirkung aufstellen. LEE und YANG kamen durch das damals viel diskutierte τ-Θ-Paradoxon auf ihre Hypothese. Es geht dabei um zwei Zerfälle des K^+-Mesons

$$K^+ \to \pi^+\pi^+\pi^- \quad \text{(ursprünglich als Zerfall des τ-Mesons bezeichnet)}$$

$$K^+ \to \pi^+\pi^0 \quad \text{(ursprünglich als Zerfall des Θ-Mesons bezeichnet).}$$

Die Pionen befinden sich in einem *S*-Zustand. Die Spin-Paritäts-Quantenzahl I^P des 3π-Zustandes ist deshalb 0^-, die des 2π-Zustandes dagegen 0^+. Wenn die Parität beim Zerfall erhalten bleibt, müssen τ und Θ unterschiedliche Teilchen sein; sie haben jedoch in jeder anderen Hinsicht identische Eigenschaften.

Die Hypothese von der Paritätsverletzung bei der schwachen Wechselwirkung machte jedoch auch Aussagen für alle anderen schwachen Zerfälle. Eine einfache Methode, die Paritätsverletzung oder -erhaltung zu testen, ist es, die Korrelation der Spinrichtung eines Teilchens mit der Richtung eines Impulses zu bestimmen. Die Nichterhaltung der Parität wurde als erstes in einem Experiment von C. S. WU und Mitarbeitern beim Zerfall des Co^{60} gezeigt, welches bereits im Kapitel 9.5 besprochen wurde.

Als weiteres Beispiel führen wir die Paritätsverletzung beim π^+-Zerfall an. Die Myonen aus dem π^+-Zerfall sind longitudinal polarisiert. Diese Tatsache läßt sich nachweisen durch den ebenfalls paritätsverletzenden Zerfall $\mu^+ \to e^+\nu_e\bar{\nu}_\mu$, bei dem das e^+ hauptsächlich parallel zur μ^+-Spinrichtung emittiert wird (siehe dazu Abb. 13.11).

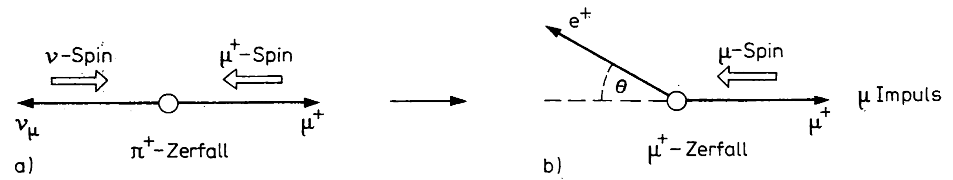


Abb. 13.11
Paritätsverletzung beim π^+- und μ^+-Zerfall. Beim paritätsverletzenden π^+-Zerfall ist das Myon longitudinal polarisiert. Beim darauffolgenden Zerfall des Myons wird das Positron hauptsächlich in Richtung des μ^+-Spins, d. h. entgegen der Flugrichtung des Myons emittiert

Kommen wir auf den paritätsverletzenden Zerfall des ^{60}Co zurück (siehe (Abb. 13.12). Die gemessene Winkelverteilung der Elektronen hatte die Form

$$I(\Theta) = 1 - \frac{\boldsymbol{\sigma P}}{E} = 1 - \frac{v}{c}\cos\Theta\,. \tag{13.27}$$

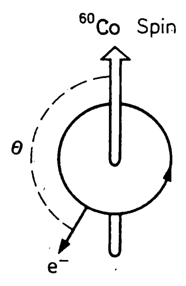


Abb. 13.12
Richtung des Kernspins und Richtung des emittierten Elektrons beim β-Zerfall von ^{60}Co

Dabei ist $\boldsymbol{\sigma}$ der Einheitsvektor in Richtung des Kernspins, $\boldsymbol{P}$ und E sind Impuls und Energie des Elektrons, Θ ist der Emissionswinkel bezüglich der Spinrichtung. Bei dem betrachteten Übergang ist der Bahndrehimpuls des ν-e-Paares Null. Da $\Delta I = 1$ ist, müssen die Spins von Elektron und Neutrino parallel zur Richtung des Magnetfeldes ausgerichtet sein. Für $\Theta = \pi$, am Intensitätsmaximum, ist das Elektron linksdrehend polarisiert. Die Elektronpolarisation entlang seiner Impulsrichtung wird als Helizität H bezeichnet. Es gilt

$$H = \frac{I_+ - I_-}{I_+ + I_-} = -\frac{v}{c}\,, \tag{13.28}$$

wobei I_+ und I_- die Intensitäten der Elektronen mit der Richtung des Spins $\boldsymbol{\sigma}$ parallel und antiparallel zum Impuls $\boldsymbol{P}$ sind. Die Helizität ist der Eigenwert des Helizitätsoperators

$$H = \frac{\boldsymbol{\sigma P}}{E}\,. \tag{13.29}$$

Die Helizität der Elektronen läßt sich bei einer Vielzahl von schwachen Zerfällen nachweisen. Man fand immer

$$\begin{aligned} &\text{für } e^-: \quad H = -\frac{v}{c}\,, \\ &\text{für } e^+: \quad H = +\frac{v}{c}\,. \end{aligned} \tag{13.30}$$

Diese Experimente zeigen damit nicht nur eine Verletzung der Parität P, sondern auch eine Verletzung der Invarianz bezüglich der Operation der Ladungskonjugation C. Nur die kombinierte Invarianz unter der Operation CP bleibt in der schwachen Wechselwirkung erhalten.

Bei all diesen schwachen Zerfällen tritt ebenfalls ein Neutrino oder Antineutrino auf. Wenden wir (13.30) auf Neutrinos mit der Ruhmasse $m_\nu = 0$ an, so ergeben sich vollständig polarisierte Neutrinos mit der Helizität $H_\nu = -1$ und Antineutrinos mit $H_{\bar{\nu}} = +1$. Diese Vorzeichen der Neutrinohelizität, die auch direkt experimentell bestätigt wurden, stellen sich als sehr bedeutsam für die Auswahl der richtigen theoretischen Beschreibung der schwachen Wechselwirkung heraus.

13.3.3. Theoretische Beschreibung der schwachen Wechselwirkung

Der Ausgangspunkt für die theoretische Beschreibung der schwachen Wechselwirkung ist die Fermi-Theorie des β-Zerfalls aus dem Jahre 1934. Wir hatten bereits oben sowie im Abschnitt 9.5 gesehen (siehe auch Abb. 13.10), daß an der schwachen Wechselwirkung immer vier Fermionen beteiligt sind. In Analogie zur elektromagnetischen Wechselwirkung liegt es deshalb nahe, den die schwache Wechselwirkung beschreibenden Wechselwirkungsterm im Hamilton-Operator in Form einer Strom-Strom-Kopplung anzusetzen, an der ja gerade vier Fermionen beteiligt sind. Wir betrachten zunächst eine rein leptonische Reaktion wie den Myonenzerfall $\mu^- \to \nu_\mu e^- \nu_e$ oder die dazu äquivalente Neutrino-Elektron-Streuung

$$\nu_\mu + e^- \to \mu^- + \nu_e \,. \tag{13.31}$$

Wir stellen uns diese Wechselwirkung (siehe Abb. 13.13) als Folge der Wechselwirkung des Myonenstroms J^μ mit dem Elektronenstrom J^e vor. Der allgemeinste Ausdruck für diese Ströme ist

$$\begin{aligned} J^\mu &= \bar{\psi}_\mu \Gamma \psi_{\nu_\mu} \,, \\ J^e &= \bar{\psi}_e \Gamma \psi_{\nu_e} \,. \end{aligned} \tag{13.32}$$

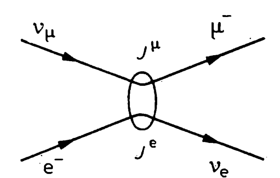


Abb. 13.13
Streuung des Myon-Neutrinos mit dem Elektron als Strom-Strom-Wechselwirkung

Diese schwachen Ströme werden ähnlich wie die elektromagnetischen Ströme (13.6) aus den Spinoren der beteiligten Fermionen gebildet. Jedoch bestehen auch Unterschiede: 1. Im Fall der elektromagnetischen Ströme beschreiben beide Spinoren das gleiche geladene Fermion, d. h., der elektromagnetische Strom ändert die Ladung der Fermionen nicht. Im Fall der leptonischen schwachen geladenen Ströme ist immer ein elektrisch geladenes Fermion an ein ungeladenes, das Neutrino, gekoppelt, d. h., die Ladung der Fermionen ändert sich. 2. Beim elektromagnetischen Strom sind die Operatoren Γ gleich den Dirac-Matrizen γ_ν.

Ströme sind bilineare Kombinationen aus Spinoren und müssen bestimmte Transformationseigenschaften bezüglich der Lorentz-Transformation besitzen. Es gibt mehrere Möglichkeiten, solche Ausdrücke zu bilden (siehe Tab. 13.1).

Wir sehen, daß der elektromagnetische Strom (13.6) ein Vektorstrom ist. Für die schwache Wechselwirkung, deren Eigenschaften wir zunächst ja nicht kennen, muß eine Kombination aller möglichen Ströme aus Tab. 13.1 zugelassen werden.

Die oben gefundenen Helizitäten der Neutrinos und Elektronen aus schwachen Zerfällen schränken die Möglichkeiten für die Form der schwachen Ströme jedoch sofort stark ein. Der Operator $1/2(1 + \gamma_5)$ projiziert aus einem Spinor gerade den Zustand mit negativer Helizität. Wir können uns deshalb auf den Spinor $1/2(1 + \gamma_5)\,\psi_\nu$ mit negativer Helizität für die Neutrinos beschränken und ähnlich für die geladenen Leptonen. Der dazu adjungierte Spinor ist

Tabelle 13.1
Transformationseigenschaften bilinearer Kombinationen von Spinoren

Spinorprodukt	Transformationseigenschaft
$\bar{\psi}_a \psi_b$	Skalar
$\bar{\psi}_a \gamma_5 \psi_b$	Pseudoskalar*
$\bar{\psi}_a \gamma_\mu \psi_b$	Vierer-Vektor
$\bar{\psi}_a \gamma_\mu \gamma_5 \psi_b$	Pseudo-Vektor* oder achsialer Vierervektor
$\bar{\psi}_a \gamma_\mu \gamma_\nu \psi_b$	Tensor
$\bar{\psi}_a \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_5 \psi_b$	Pseudotensor*

*) γ_5 ist definiert als $\gamma_5 = i\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4$. Infolge der Anwesenheit von γ_5 ergibt sich bei der Paritätsoperation ein Vorzeichenwechsel entgegengesetzt zu dem Verhalten der normalen Skalare, Vektoren bzw. Tensoren.

$\bar{\psi}_\nu \frac{1}{2}(1 - \gamma_5)$. Die schwachen Ströme bei der Reaktion (13.31) können also nur eine der folgenden Formen haben

$$\frac{1}{4}\,\bar{\psi}_{\nu_\mu}(1 - \gamma_5)(1 + \gamma_5)\,\psi_\mu \bar{\psi}_e(1 - \gamma_5)(1 + \gamma_5)\,\psi_{\nu_e} \text{ Skalar},$$

$$\frac{1}{4}\,\bar{\psi}_{\nu_\mu}(1 - \gamma_5)\,\gamma_\lambda(1 + \gamma_5)\,\psi_\mu \bar{\psi}_e(1 - \gamma_5)\,\gamma_\lambda(1 + \gamma_5)\,\psi_{\nu_e} \text{ Vektor}, \tag{13.33}$$

$$\frac{1}{4}\,\bar{\psi}_{\nu_\mu}(1 - \gamma_5)\,\gamma_\varrho\gamma_\lambda(1 + \gamma_5)\,\psi_\mu \bar{\psi}_e(1 - \gamma_5)\,\gamma_\varrho\gamma_\lambda(1 + \gamma_5)\,\psi_{\nu_e} \text{ Tensor}.$$

Der skalare und der Tensorausdruck verschwinden identisch, da die Produkte der γ-Matrizen verschwinden. Es verbleibt nur der Vektorausdruck. Nach Umordnung der γ-Matrizen

$$(1 - \gamma_5)\,\gamma_\lambda(1 + \gamma_5) = \gamma_\lambda(1 + \gamma_5)^2 = 2\gamma_\lambda(1 + \gamma_5) \tag{13.34}$$

finden wir die richtige Form für die geladenen schwachen Leptonenströme und für den Wechselwirkungsoperator

$$\begin{aligned} J^\mu &= \bar{\psi}_\mu \gamma_\lambda(1 + \gamma_5)\,\psi_{\nu_\mu}, \\ J^e &= \bar{\psi}_e \gamma_\lambda(1 + \gamma_5)\,\psi_{\nu_e}, \\ H_S &= \frac{G}{\sqrt{2}}\,J^e_\lambda \bar{J}^\mu_\lambda = \frac{G}{\sqrt{2}}\,\bar{\psi}_{\nu_\mu}\gamma_\lambda(1 + \gamma_5)\,\psi_\mu \bar{\psi}_e \gamma_\lambda(1 + \gamma_5)\,\psi_{\nu_e}. \end{aligned} \tag{13.35}$$

Dabei ist G die Kopplungskonstante der schwachen Wechselwirkung oder Fermi-Konstante $G = 1{,}026 \cdot 10^{-5}/M_p^2$. Infolge der Anwesenheit von Termen, die sich wie Vektoren (V) und wie Achsialvektoren (A) transformieren, bezeichnet man diese Form der Vierfermionenwechselwirkung auch als V-A-Theorie.

Sobald wir die schwache Wechselwirkung der Hadronen betrachten, treten Schwierigkeiten auf, die mit der starken Wechselwirkung zusammenhängen. Bei den Leptonen handelt es sich um

elementare punktförmige Teilchen, deren Eigenschaften vollständig durch die Theorie wiedergegeben werden. Hadronen hingegen sind zusammengesetzte Teilchen mit einer inneren Struktur, die durch die starke Wechselwirkung zustande kommt. Wir betrachten als Beispiel einer semileptonischen Reaktion den β-Zerfall des Neutrons oder die dazu äquivalente Neutrino-Neutron-Streuung

$$\nu_e + n \to e^- + p\,. \tag{13.36}$$

Diese Wechselwirkung läßt sich beschreiben als Wechselwirkung des Hadronenstroms

$$J_\lambda^N = \bar{\psi}_n \gamma_\lambda (g_V + g_A \cdot \gamma_5)\, \psi_p \tag{13.37}$$

mit dem Leptonenstrom (13.35)

$$H_S = \frac{G}{\sqrt{2}} \cdot J_\lambda^N \overline{J_\lambda^e}\,. \tag{13.38}$$

Die beiden Konstanten g_V und g_A in (13.37) wären $g_V \mp g_A = 1$, wenn sich die schwache Wechselwirkung der Hadronen genauso verhalten würde wie die schwache Wechselwirkung der Leptonen. Experimentell findet man jedoch vom β-Zerfall $g_V \approx 1$ und $g_A \approx 1{,}25$. Das heißt, daß sich die Nukleonen trotz ihrer inneren Struktur bei den semileptonischen Reaktionen fast genau so verhalten wie die Leptonen. Die schwache Wechselwirkung hat also fast eine universelle Form für Fermionen aller Arten. Es scheint, daß die Hadronenstruktur für den Vektorteil der Wechselwirkung ($g_V = 1$) irrelevant ist. Das ist ähnlich zur elektromagnetischen Wechselwirkung, die ja auch durch einen Vektorstrom vermittelt wird. Wir wissen, daß die elektrische Ladung durch die starke Wechselwirkung nicht modifiziert wird. Protonen und Positronen haben identische Ladungen. In Analogie dazu kann man ebenfalls von einer schwachen Ladung sprechen, die durch die starke Wechselwirkung nicht verändert werden kann. Man formuliert diese Tatsache in Form der Hypothese des „erhaltenen Vektorstroms“. Der axiale Vektorstrom unterscheidet sich hingegen bei Leptonen und Hadronen. Da aber g_A ebenfalls nicht sehr stark von Eins abweicht, formuliert man hier eine Hypothese der „partiell erhaltenen Axialvektorströme“.

Eine weitere Komplikation tritt auf, wenn wir die schwachen Reaktionen mit Änderung der S-Quantenzahl betrachten. In Analogie zu (13.36) betrachten wir an Stelle des Λ-Hyperon-Zerfalls $\Lambda \to pe^- \nu_e$ die dazu äquivalente Neutrinoreaktion zusammen mit der entsprechenden Reaktion ohne Änderung der Seltsamkeit

$$\begin{aligned} \bar{\nu}_e + p &\to n + e^+\,, \\ \bar{\nu}_e + p &\to \Lambda + e^+\,. \end{aligned} \tag{13.39}$$

Zur Beschreibung dieser beiden Reaktionen verwenden wir hier bereits das erst im Abschnitt 14 zu besprechende Quark-Modell. Danach ist das Proton zusammengesetzt aus 3 Quarks p = uud, das Neutron n = udd und das Λ-Hyperon Λ = uds. Die Reaktionen (13.39) lassen sich also auffassen als Übergang des u-Quarks in den d- oder den s-Quark, der die S-Quantenzahl trägt

$$\begin{aligned} \bar{\nu}_e + u &\to d + e^+\,, \\ \bar{\nu}_e + u &\to s + e^+\,. \end{aligned} \tag{13.40}$$

Es wurde von N. Cabibbo vorgeschlagen, die relativen Wahrscheinlichkeiten für diese beiden Übergänge u → d bzw. u → s durch einen Winkel Θ_C zu beschreiben. Dieser Winkel wird jetzt als Cabibbo-Winkel bezeichnet. Damit wird der hadronische Strom J^N im Wechselwirkungsterm (13.38) geändert in

$$J_\lambda^N = \bar{\psi}_n \gamma_\lambda (1 + \gamma_5)\, (\cos \Theta_C \psi_d + \sin \Theta_C \psi_s)\,. \tag{13.41}$$

$\cos^2 \Theta_c$ und $\sin^2 \Theta_c$ messen dann die relativen Wahrscheinlichkeiten für die beiden Übergänge (13.40) oder (13.39), und es gilt $\cos^2 \Theta_c + \sin^2 \Theta_c = 1$. Experimentell findet man den Cabibbo-Winkel als recht klein ($\sin^2 \Theta_c \approx 0{,}05$, $\Theta_c \approx 0{,}23$ rad). Das bedeutet, daß die Übergangswahrscheinlichkeiten für die S-ändernden Prozesse etwa um einen Faktor 20 kleiner sind als für die S-erhaltenden Prozesse. Bei den rein hadronischen schwachen Prozessen sind die durch die starke Wechselwirkung hervorgerufenen Komplikationen noch weitaus größer, wir gehen deshalb nicht darauf ein.

Wenn bei der schwachen Wechselwirkung einige Erhaltungssätze wie der für die Parität und für die Ladungskonjugationsinvarianz verletzt werden, so gibt es jedoch auch andere Erhaltungssätze, die bisher streng zu gelten scheinen. Bei der Konstruktion des Wechselwirkungsterms (13.35) oder (13.38) gehen wir von der Erhaltung der Baryonenzahl und der Leptonenzahl bei allen Prozessen der schwachen Wechselwirkung aus. Das wurde auch bisher experimentell gefunden. Einige Beispiele: Wenn die Leptonenzahl erhalten ist, sind Neutrino und Antineutrino nicht identisch. Zum Beispiel konnte der Prozeß

$$\bar{\nu} + {}^{37}\mathrm{Cl} \rightarrow {}^{37}\mathrm{Ar} + \mathrm{e}^- \qquad (13.42)$$

trotz langwieriger Suche mit Hilfe der intensiven Antineutrinoströme an Reaktoren nicht nachgewiesen werden (siehe auch Abschnitt 9.5.2.). Neben der Leptonenzahl insgesamt bleiben auch die Myonenzahl und Elektronenzahl einzeln erhalten. Diese Erhaltungssätze folgen aus der Existenz zweier Neutrinos, des Myonenneutrinos ν_μ und des Elektronenneutrinos ν_e. Die Existenz zweier Neutrinos wurde bereits vermutet, da die Zerfälle

$$\begin{aligned} \mu^+ &\rightarrow e^+ + \gamma\,, \\ \mu^+ &\rightarrow e^+ + e^- + e^+\,, \end{aligned} \qquad (13.43)$$

die von keiner anderen Auswahlregel verboten werden, niemals beobachtet wurden. Der Unterschied der beiden Neutrinos wurde 1962/63 direkt mit Hilfe hochenergetischer Neutrinos nachgewiesen. Das Neutrino vom Zerfall $\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu$ löste viele beobachtete Reaktionen der Art

$$\nu_\mu + n \rightarrow \mu^- + p\,, \qquad (13.44)$$

aber keine Reaktionen der Art

$$\nu_\mu + n \rightarrow e^- + p \qquad (13.45)$$

aus.

13.3.4. Schwache Zerfallsprozesse

Wir betrachten zunächst den Zerfall des Myons, das ist ein rein leptonischer Prozeß. Im Zerfall $\mu^- \rightarrow e^- + \nu_\mu + \bar{\nu}_e$ kann nur das Elektron beobachtet werden. Würde neben dem Elektron nur *ein* neutrales Teilchen emittiert, dann hätte das Elektron im Myon-Ruhsystem eine feste Energie. Das entspricht aber nicht dem experimentellen Befund. Das Elektronenenergiespektrum im Myon-Zerfall wird in Abb. 13.14 gezeigt. Die verschwindende Ruhmasse der beiden neutralen Teilchen folgt aus der beobachteten maximalen Elektronenenergie von $E_e^{max} = 53{,}0 \pm 0{,}32$ MeV. Für verschwindende Ruhmasse der Neutrinos erhält man den kinematischen Ausdruck

$$\begin{aligned} E_e^{max} &= \frac{m_\mu^2 + m_e^2 - (m_{\bar{\nu}_e} + m_{\nu_\mu})^2}{2m_\mu} \\ &= 52{,}83 \text{ MeV}\,. \end{aligned} \qquad (13.46)$$

Aus den experimentellen Fehlern folgt $(m_{\bar{\nu}_e} + m_{\nu_\mu}) \leqq 5{,}6$ MeV/c^2.

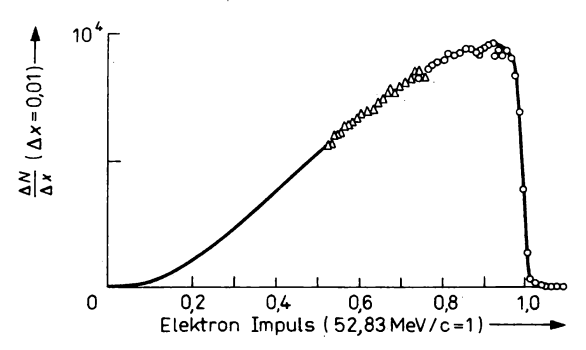


Abb. 13.14
Elektron-Energiespektrum beim Myonzerfall

Die V-A-Wechselwirkung (13.35) beschreibt den Zerfall polarisierter Myonen vollständig. Der einzige Parameter ist die Kopplungskonstante G. Für die Energie- und Winkelverteilung des emittierten Elektrons erhält man

$$\frac{d^2N}{dE\,d\Omega} = \frac{G^2}{12\pi^4} m_\mu P E E_e^{max}$$
$$\times \left\{3 - 3x + \frac{2}{3}\varrho(3x-3) + G\eta\varepsilon\left(\frac{1}{x} - 1\right) - P\frac{p}{E}\cos\Theta\xi\left[1 - x + 2\delta\left(\frac{4}{3}x - 1\right)\right]\right\}. \tag{13.47}$$

Dabei ist P die Polarisation des zerfallenden Myons, E und p sind Energie und Impuls des Elektrons, Θ ist der Winkel zwischen der Polarisationsrichtung des Müons und der Emissionsrichtung des Elektrons, und es gilt $\varepsilon = m_e/m_\mu$ und $x = E/E_e^{max}$. Die Parameter ϱ, δ, ξ und η wurden eingeführt, um die V-A-Theorie zu testen. In Tab. 13.2 vergleichen wir die von der V-A-Theorie vorhergesagten mit den experimentellen Werten. Die Übereinstimmung mit der V-A-Theorie ist ausgezeichnet.

Aus der beobachteten Lebensdauer des Myons $\tau_\mu = 2{,}2 \cdot 10^{-6}$ s folgt, daß die Kopplungskonstante G im Falle des μ-Zerfalls fast mit der Kopplungskonstanten beim β-Zerfall des Neutrons übereinstimmt. Die kleinen Unterschiede werden durch den $\cos^2 \Theta_c$-Term in (13.41) erklärt.

Als nächstes betrachten wir den Zerfall der geladenen π-Mesonen. Mögliche Zerfälle sind

$$\pi^+ \to \mu^+ + \nu_\mu\,,$$
$$\pi^+ \to e^+ + \nu_e\,. \tag{13.48}$$

Tabelle 13.2
Die Parameter des Myon-Zerfalls

Parameter		V-A-Vorhersage	Experiment
Michél	ϱ	3/4	0,7518 ± 0,0026
Form	δ	3/4	0,7540 ± 0,0085
Asymmetrie	ξ	−1	−0,973 ± 0,014
Eta	η	0	−0,12 ± 0,21

Da das Pion den Spin 0 hat, fordert die Drehimpulserhaltung, daß die Spins der beiden resultierenden Fermionen antiparallel stehen, d. h. e^+ und ν_e bzw. μ^+ und ν_μ müssen dieselbe Helizität haben, da ihre Impulsvektoren entgegengesetzt gerichtet sind. Die Form der schwachen Wechselwirkung (13.35) fordert aber entgegengesetzte Helizitäten für diese beiden Teilchen. Die Häufigkeit, mit der das e^+ mit der Helizität $H_e^+ = -1$ auftreten kann, ist laut (13.30) proportional zu $(1 - \frac{v}{c})$. Da $\beta = \frac{v}{c} \approx 1$, ist das sehr klein. Demzufolge ist der Zerfall $\pi^+ \to e^+ + \nu_e$ stark unterdrückt. Anders ist es beim Zerfall $\pi^+ \to \mu^+ + \nu_\mu$. Wegen der viel größeren μ-Masse ist die Geschwindigkeit des Myons wesentlich kleiner als die Lichtgeschwindigkeit c, und die Wahrscheinlichkeit für die Helizität $H_{\mu^+} = -1$ ist relativ groß. Deshalb tritt der μ^+-Zerfall viel häufiger auf als der e^+-Zerfall. Die Rechnung ergibt

$$R = \frac{\Gamma_e}{\Gamma_\mu} = \frac{m_e^2}{m_\mu^2}\left(\frac{m_\pi^2 - m_e^2}{m_\pi^2 - m_\mu^2}\right)^2 = 1{,}3 \cdot 10^{-4} \tag{13.49}$$

in guter Übereinstimmung mit dem experimentell gefundenen Verzweigungsverhältnis für diese Zerfälle.

13.3.5. CP-Verletzung beim Zerfall neutraler K-Mesonen

Es gibt zwei Arten neutraler K-Mesonen, das K^0 und das $\bar{K}^0$. Jedes ist das Antiteilchen des anderen. K^0 besitzt die Seltsamkeit $S = +1$ und $\bar{K}^0$ hat $S = -1$. Da S in der starken Wechselwirkung erhalten ist, werden in starken Reaktionen immer entweder K^0 oder $\bar{K}^0$ erzeugt, z. B. in den Reaktionen

$$\begin{aligned} p + n &\to p + \Lambda + K^0\,, \\ S = 0 + 0 &= 0 - 1 + 1\,, \\ K^- + p &\to \bar{K}^0 + n\,, \\ S = -1 + 0 &= -1 + 0\,. \end{aligned} \tag{13.50}$$

Betrachten wir die Wirkung der Operatoren der Ladungskonjugation und der Parität auf diese neutralen K-Mesonen. Wir bezeichnen die Wellenfunktionen der Mesonen als Φ_{K^0} und $\Phi_{\bar{K}^0}$. Man ordnet den K-Mesonen ähnlich wie dem Pion eine ungerade innere Parität zu

$$\begin{aligned} P\Phi_{K^0} &= -\Phi_{K^0}\,, \\ P\Phi_{\bar{K}^0} &= -\Phi_{\bar{K}^0}\,. \end{aligned} \tag{13.51}$$

Der Ladungskonjugationsoperator transformiert Φ_{K^0} in $\Phi_{\bar{K}^0}$ und umgekehrt

$$C\Phi_{K^0} = \xi\Phi_{\bar{K}^0}\,, \qquad |\xi| = 1\,. \tag{13.52}$$

Es ist üblich, die relativen Phasen der Φ_{K^0} und $\Phi_{\bar{K}^0}$ so zu wählen, daß gilt

$$\begin{aligned} CP\Phi_{K^0} &= \Phi_{\bar{K}^0}\,, \\ CP\Phi_{\bar{K}^0} &= \Phi_{K^0}\,. \end{aligned} \tag{13.53}$$

Nicht die Φ_{K^0} oder $\Phi_{\bar{K}^0}$ sind Eigenzustände des bei der schwachen Wechselwirkung erhaltenen Operators CP, sondern die Zustände

$$\begin{aligned} \Phi_{K_1^0} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\Phi_{K^0} + \Phi_{\bar{K}^0})\,, \qquad CP\Phi_{K_1^0} = +\Phi_{K_1^0}\,, \\ \Phi_{K_2^0} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\Phi_{K^0} - \Phi_{\bar{K}^0})\,, \qquad CP\Phi_{K_2^0} = -\Phi_{K_2^0}\,. \end{aligned} \tag{13.54}$$

In schwachen Zerfällen kann K_1^0 nicht in Zustände mit $CP = -1$ zerfallen und das K_2^0 nicht in Zustände mit $CP = +1$. Die Zustände K_1^0 und K_2^0 besitzen also unterschiedliche schwache Zerfallskanäle.

Das System von zwei Pionen hat immer $CP = +1$, während das System von drei Pionen durch $CP = -1$ charakterisiert ist. Also kann nur das K_1^0 in zwei Pionen zerfallen

$$\begin{aligned} &K_1^0 \to \pi^+ + \pi^- \,, \\ &K_1^0 \to \pi^0 + \pi^0 \,, \end{aligned} \tag{13.55}$$

während nur das K_2^0 in drei Pionen zerfallen kann:

$$\begin{aligned} &K_2^0 \to \pi^0 + \pi^0 + \pi^0 \,, \\ &K_2^0 \to \pi^+ + \pi^- + \pi^0 \,. \end{aligned} \tag{13.56}$$

Die Lebensdauer des K_1^0 beträgt $\tau_{K_1^0} = 0{,}86 \cdot 10^{-10}$ s, während die Lebensdauer des K_2^0 mit $\tau_{K_2^0} = 5 \cdot 10^{-8}$ s wesentlich länger ist.

Neutrale K-Mesonen entstehen in Reaktionen der starken Wechselwirkung als K^0 oder $\bar{K}^0$. Diese Teilchen können wir nach ihrer Erzeugung als Überlagerung von K_1^0 und K_2^0 ansehen:

$$\Phi_{K^0} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\Phi_{K_2^0} + \Phi_{K_1^0}) \,. \tag{13.57}$$

Sofort nach der Erzeugung zerfällt die eine Hälfte des Strahls neutraler K-Mesonen als K_1^0 in zwei Pionen. Die zweite Hälfte lebt viel länger und zerfällt schließlich als K_2^0 in drei Pionen. Nach einer kurzen Entfernung vom Erzeugungstarget sind praktisch alle K_1^0-Anteile verschwunden, und der Strahl besteht nur noch aus K_2^0-Mesonen. In einer beträchtlichen Entfernung vom Target — vorausgesetzt der Strahl wird im Vakuum geführt — sollte man keine Zerfälle in zwei Pionen mehr beobachten können.

J. H. Christenson, J. Cronin, V. Fitsch und R. Turlay beobachteten jedoch im Jahre 1964 Zerfälle in zwei geladene Pionen in einem neutralen K-Mesonen-Strahl im Abstand von 17 m vom Erzeugungstarget. Bei diesem Zerfall konnte es sich nur um

$$K_2^0 \to \pi^+ + \pi^- \tag{13.58}$$

handeln. Da das K_2^0-Meson $CP = -1$ und das System von zwei Pionen $CP = +1$ haben, handelt es sich um Zerfälle, bei denen CP nicht erhalten bleibt.

In Abb. 13.15 zeigen wir die Detektoranordnung. Der Zerfall des K_2^0-Mesons wird mit Hilfe von Funkenkammern beobachtet. Es werden für jeden Zerfall zwei koinzidente geladene Teilchen beobachtet und gleichzeitig ihre Impulse gemessen. Unter der Annahme, daß die geladenen Teilchen π-Mesonen sind, läßt sich die invariante Masse M^* des Zwei-Pionen-Systems bestimmen:

$$M^* c^2 = ((E_1 + E_2)^2 - c^2(\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2)^2)^{1/2} \,. \tag{13.59}$$

M^* ist die Ruhemasse des zerfallenden Teilchens, wenn dieses nur in zwei Pionen zerfällt. Für diesen Zerfall ergab sich $M^* = M_K = 0{,}498$ MeV$/c^2$. Auch beim Zerfall $K_2^0 \to \pi^+ + \pi^- + \pi^0$ lassen sich nur die geladenen Pionen beobachten. Da aber die invariante Masse hier im Bereich

$$280 \text{ MeV}/c^2 < M^* < 363 \text{ MeV}/c^2 \tag{13.60}$$

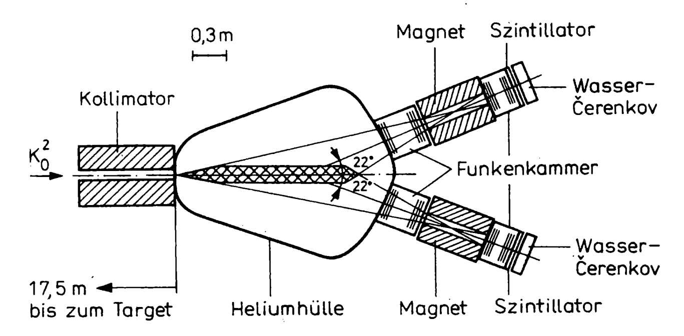


Abb. 13.15
Die experimentelle Anordnung, mit deren Hilfe CHRISTENSON u. a. 1964 die Nichterhaltung von *CP* beim Zerfall neutraler K_2^0-Mesonen nachwiesen

liegt, kann es keine Verwechslung mit dem Zwei-Pionen-Zerfall geben. Zusätzlich läßt sich der Winkel Θ zwischen der Richtung des K_2^0-Strahls und der Vektorsumme der Impulse der beiden beobachteten Teilchen bestimmen. Für den Zwei-Teilchen-Zerfall ist der Winkel Null während er für den Drei-Teilchen-Zerfall im allgemeinen verschieden von Null ist.

Von insgesamt 22700 K_2^0-Zerfällen wurden 45 ± 9 als $K_2^0 \rightarrow \pi^+ + \pi^-$ identifiziert. Ähnliche Ergebnisse wurden später auch von anderen Gruppen erhalten. Damit ergibt sich das experimentell gefundene Verzweigungsverhältnis für die Amplituden

$$|\eta_{+-}| = \left\{\frac{\Gamma(K_2^0 \rightarrow \pi^+\pi^-)}{\Gamma(K_1^0 \rightarrow \pi^+\pi^-)}\right\} = (1{,}90 \pm 0{,}05) \cdot 10^{-3}. \qquad (13.61)$$

Alle Versuche, die experimentellen Ergebnisse anders als durch die *CP*-Verletzung zu deuten, schlugen fehl. Bis jetzt gibt es noch keine allgemein anerkannte theoretische Beschreibung der *CP*-Nichterhaltung. Es gibt jedoch mehrere Möglichkeiten, die *CP*-Verletzung innerhalb der Eichfeldtheorien der elektromagnetischen und schwachen Wechselwirkung zu verstehen.

Durch die Existenz dieses *CP*-verletzenden Zerfalls ist es absolut möglich geworden, zwischen Materie und Antimaterie zu unterscheiden. Das könnte von Bedeutung sein, wenn es gelänge, Verbindung zu etwaigen Bewohnern anderer Galaxien zu finden. Dadurch ließe sich feststellen, ob die anderen Galaxien aus Materie oder Antimaterie bestehen. Das Prinzip dieser Methode besteht einfach darin, die schwachen Zerfälle von K^0 und $\bar{K}^0$ zu messen. Durch die Existenz der *CP*-Verletzung unterscheiden sich die Zerfälle von K^0 und $\bar{K}^0$ absolut, wenn auch nur geringfügig.

13.4. Starke Wechselwirkung

13.4.1. Einleitung

Mit der Kernkraft, der Kraft, die Protonen und Neutronen zu Atomkernen bindet, haben wir im Kapitel 7 schon die praktisch bedeutungsvollste Auswirkung der starken Wechselwirkung der Elementarteilchen kennengelernt.

Hier in den Kapiteln 13 und 14 beschränken wir uns auf die starke Wechselwirkung der Elementarteilchen. In Kapitel 13 wird dabei die starke Wechselwirkung der „alten" Elementar-

teilchen, der Hadronen, behandelt. In Kapitel 14 behandeln wir dann die starke Wechselwirkung im modernen Sinne als Kraft, die die Quarks in Mesonen und Baryonen bindet.

Gewiß, die Elementarteilchenphysik ist der Kernphysik eng verwandt. Seitdem 1932 klar wurde, daß die Kernbestandteile nicht — wie früher angenommen — Proton und Elektron, sondern Proton und Neutron sind, war auch klar, daß die Kernbindungskräfte andere als die Coulomb-Kräfte zwischen elektrischen Ladungen sein müssen. Bekanntlich ist in der Theorie des elektromagnetischen Feldes das Photon der Überträger der Kraft zwischen den elektrischen Ladungen. In Anlehnung dazu schlug H. YUKAWA 1935 vor, daß die Kraft zwischen den Nukleonen durch Mesonen übertragen wird. Um die kurze Reichweite der Kernkräfte zu garantieren folgte jedoch, daß das Meson Ruhemasse tragen muß, ja aus den Kernabmessungen konnte auch die etwaige Größe der Masse angegeben werden. Der Nachweis dieses Mesons — des π-Mesons mit der Masse $m_\pi \simeq 140$ MeV/c^2 (siehe Anhang D4.) — gelang erst nach dem Zweiten Weltkrieg in der kosmischen Strahlung. Allerdings hatte man vorher die zehn Jahre früher entdeckte, durchdringende μ-Komponente der kosmischen Strahlung fälschlicherweise für das von Yukawa vorhergesagte π-Meson gehalten.

Mit der Inbetriebnahme der ersten Beschleuniger, die Protonen auf einige GeV beschleunigten, konnte viel gezielter experimentiert werden. So wurde 1953 das Antiproton gefunden. Es wurden die ersten angeregten Zustände der Nukleonen entdeckt; es handelt sich um die Δ-Resonanzen bei Massenwerten um 1230 MeV/c^2 (siehe Anhang D4.); sie zerfallen in Nukleonen und Pionen.

Diese Erfolge und die Entwicklung neuer Beschleunigerprinzipien waren ausschlaggebend für den Bau der nächsten Beschleunigergeneration; sie erreichte Energien von 10 bis 30 GeV. Das Energieverhalten von Wirkungsquerschnitten für die Streuung von Protonen, π- und K-Mesonen sowie Antiprotonen an Protonen ebenso wie die Winkelabhängigkeit der elastischen Streuung, insbesondere bei kleinen Winkeln gaben Anlaß zu Theorien, die das Verhalten der Streuamplitude als einer analytischen Funktion der Energie zum Ausgangspunkt nehmen.

In dieser Zeit nahm auch die Zahl der bekannten hadronischen Resonanzzustände explosionsartig zu. Sie wurden sowohl als Resonanzmaxima in den elastischen und Gesamtwirkungsquerschnitten als auch in Erzeugungsreaktionen in solchen Nachweisgeräten wie Blasen- und Funkenkammern gefunden. Als Beispiel sei die Reaktion $\pi^+ + \mathrm{p} \rightarrow \pi^+\pi^0\mathrm{p}$ angeführt; die Verteilungen der invarianten Massen je zweier Teilchen, d. h. von $\pi^+\pi^0$, $\pi^0\mathrm{p}$ und $\pi^+\mathrm{p}$, zeigen Resonanzen, die den Hadronen ϱ^+ ($m_\varrho \simeq 760$ MeV/c^2), Δ^+ und Δ^{++} ($m_\Delta \simeq 1230$ MeV/c^2) entsprechen. Für die große Zahl der so entdeckten Resonanzen wurden Klassifikationsschemata vorgeschlagen, ganz im Sinne des Mendeleevschen Periodensystems der Elemente.

Zu ihnen gehörte neben dem Quarkmodell, über das später noch viel berichtet wird, auch ein statistisch-thermodynamisches Modell, das einen exponentiellen Anstieg der Zahl von Hadronen mit steigender Energie voraussagte. Ein anderes Modell basierte auf dem analytischen Verhalten der Streuamplitude und faßte die Gesamtheit aller Teilchen durch ihre Wechselwirkungen selbstkonsistent erzeugt auf.

Um 1970 wurde klar, daß auch solche einfacher meßbaren Reaktionen sehr wichtige Informationen enthalten, bei denen man sich nur auf ein bestimmtes Teilchen im Endzustand konzentriert, unabhängig davon, was sonst noch erzeugt wird, also z. B. $\pi^+ + \mathrm{p} \rightarrow \pi^+ +$ irgendwelche anderen Teilchen. Das Studium dieser sogenannten „inklusiven Reaktionen" zeigte, daß auch bei sehr hohen Energien die Vielteilchenerzeugung über Resonanzen (Cluster von Teilchen) verläuft.

Mit der Entdeckung des J/ψ-Mesons im November 1974 gleichzeitig an einem Protonenbeschleuniger und an einem Elektron-Positron-Speicherring wurde eine neue Periode in der Physik der Elementarteilchen eingeleitet. Mit ihr zusammen hat sich in den 70er Jahren, aufbauend auf die großen Erfolge der Quarkhypothese und auf entscheidende theoretische Fort-

schritte beim Studium der sogenannten Eichtheorien – eine neue Theorie der starken Wechselwirkung entwickelt. Sie beschreibt die Wechselwirkungen der Quarks; die Kräfte zwischen den Hadronen sind von diesen abgeleitet. Dieser neuen Theorie, der *Q*uanten*c*hromo*d*ynamik (QCD), ist der Abschnitt 14.7 gewidmet.

Viele Erscheinungen, die durch die starke Wechselwirkung vermittelt werden, können bisher noch nicht so gut berechnet werden, wie das für die Prozesse der elektromagnetischen und schwachen Wechselwirkung der Fall ist. Wir nehmen zwar an, daß sich die Quantenchromodynamik, die Eichfeldtheorie der starken Wechselwirkung (siehe Abschnitt 14.7) schließlich als die korrekte Theorie der starken Wechselwirkung herausstellen wird, aber es treten wesentliche Komplikationen auf durch die Eigenschaft der starken Kopplung, die die Anwendung der Störungstheorie für viele der wichtigen Erscheinungen der starken Wechselwirkung verhindert. Weitere Erschwernisse bringt die Tatsache, daß die Hadronen, die stark wechselwirkenden Teilchen, mit denen wir experimentieren können, zusammengesetzte Teilchen sind. Sie bestehen aus den elementaren Quarks. Durch diese Lage ist es bisher nicht zuverlässig möglich gewesen, die Massen der Hadronen und Hadronenresonanzen, ihre Eigenschaften und die Wirkungsquerschnitte der typischen Hadronenreaktionen ausgehend von der Quantenchromodynamik zu berechnen und zu verstehen.

In diesem Abschnitt werden wir die Eigenschaften der starken Wechselwirkung der Hadronen phänomenologisch beschreiben; hingegen gehen wir im Kapitel 14 auf die Eigenschaften der starken Wechselwirkung ein, die mit Hilfe der Quark-Parton-Vorstellungen bzw. mit Hilfe der Quantenchromodynamik verstanden werden können.

Alle Teilchen, die die starke Wechselwirkung besitzen, nennt man Hadronen. Hadronen gliedern sich in Mesonen, das sind Bosonen mit ganzzahligem Spin, und Baryonen, das sind Fermionen mit halbzahligem Spin.

13.4.2. Elastischer, unelastischer und Gesamtwirkungsquerschnitt

Der Partialwellenformalismus ist eine formale Beschreibungsmöglichkeit für die Streuung von Hadronen. Da die Reichweite der starken Wechselwirkung klein ist, kommt man oft mit nur wenigen Partialwellen aus. Wir verweisen auf die Darstellung der Methode im Anhang B4 und fassen hier nur die wichtigsten Ergebnisse für den elastischen, unelastischen und Gesamtwirkungsquerschnitt zusammen.

Wir beschränken uns der Einfachheit halber auf freie spinlose Teilchen, z. B. Pionen. Diese mögen in z-Richtung einlaufen. Sie lassen sich durch eine ebene Welle beschreiben

$$\psi_i(\boldsymbol{r}, t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{q}\cdot z - \mathrm{i}\omega t} . \tag{13.62}$$

Dabei ist $\boldsymbol{q}$ der Impuls im Schwerpunktsystem des Stoßes. Die gestreute Welle hat die Form

$$\begin{aligned} \psi_{\mathrm{Streu}}(r) &= \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}qr}}{r} f(\Theta) , \\ f(\Theta) &= \frac{1}{q} \sum_l (2l + 1) f_l P_l(\cos \Theta) . \end{aligned} \tag{13.63}$$

Der differentielle Wirkungsquerschnitt der elastischen Streuung im Schwerpunktsystem ergibt sich als

$$\left.\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\right|_{\mathrm{el}} = |f(\Theta)|^2 . \tag{13.64}$$

Die Integration über den Winkel ergibt den gesamten elastischen Streuquerschnitt

$$\sigma_{el} = \frac{4\pi}{q^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l + 1) \, |f_l|^2 = \frac{\pi}{q^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l + 1) \, |1 - \eta_l \, e^{2i\delta_l}|^2 . \tag{13.65}$$

Falls $\eta_l < 1$ ist, gibt es neben der elastischen Streuung noch die Absorption der einlaufenden Welle oder die unelastische Streuung. Der gesamte Wirkungsquerschnitt der unelastischen Streuung ergibt sich

$$\sigma_{unel} = \frac{\pi}{q^2} \sum_{l} (2l + 1) \, (1 - \eta_l^2) . \tag{13.66}$$

Wir definieren schließlich den Gesamtwirkungsquerschnitt als

$$\sigma_{tot} = \sigma_{unel} + \sigma_{el} = \frac{\pi}{q^2} \sum_{l} (2l + 1) \; 2(1 - \eta_l \cos 2\delta_l) . \tag{13.67}$$

Die Beziehung

$$\operatorname{Im} f(\Theta) = \frac{q}{4\pi} \sigma_{tot} \tag{13.68}$$

wird als „Optisches Theorem“ bezeichnet.

Falls der unelastische Wirkungsquerschnitt $\sigma_{unel} = 0$ ist, erhält man den Fall der rein elastischen Streuung. Dafür gilt $\eta_l = 1$ und $\sigma_{tot} = \sigma_{el}$. Der umgekehrte Fall, Absorption ohne elastische Streuung, ist nicht möglich. Auch für $\eta_l = 0$, den Fall der maximalen unelastischen Streuung, ergibt sich ein elastischer Wirkungsquerschnitt und zwar

$$\sigma_{el} = \sigma_{unel} = \frac{\pi}{q^2} \sum_{l} (2l + 1) . \tag{13.69}$$

13.4.3. Hadronenresonanzen

Unter einer Hadronenresonanz versteht man einen Zustand mit wohl definierten Quantenzahlen, der instabil ist und mit der mittleren Lebensdauer $\tau = \hbar/\Gamma$ zerfällt. Γ wird als die Breite der Resonanz bezeichnet und in Masseneinheiten angegeben (z. B. MeV/c^2). Ein instabiles Hadron wird als Resonanz bezeichnet, wenn es unter dem Einfluß der starken Wechselwirkung zerfällt. Seine Lebensdauer von typisch 10^{-23}—10^{-24} s ist wesentlich geringer als die Lebensdauer von Teilchen, die infolge der elektromagnetischen oder schwachen Wechselwirkung zerfallen. Deshalb verwendet man üblicherweise auch die Angabe der Resonanzbreite (typische Hadronenresonanzen haben Resonanzbreiten $\Gamma \approx 100$ MeV/c^2) an Stelle der Lebensdauer τ.

Hadronenresonanzen lassen sich in zwei verschiedenen Arten von Experimenten nachweisen.

In *Formationsexperimenten* wird der Resonanzzustand als Kombination der beiden Teilchen im Stoß gebildet, bei Schwerpunktsenergien, die den Massen der Resonanzen entsprechen. Die additiven Quantenzahlen der Resonanz wie Baryonenzahl, Ladung, Seltsamkeit usw. entsprechen dabei den Summen der Quantenzahlen der Teilchen im Anfangszustand. Ein Beispiel für ein Formationsexperiment ist

$$\pi^+ + p \to \Delta^{++}(1236) , \qquad p_{Lab}^{\pi^+} = 304 \text{ MeV}/c . \tag{13.70}$$
$$\hookrightarrow \pi^+ + p$$

Mit Hilfe dieser Reaktion wurde erstmals eine Resonanz nachgewiesen. Die Δ-Resonanz hat den Isospin $T = 3/2$ und den Spin $I = 3/2$. Sie zeigt sich in Form eines kräftigen Maximums im π-p-Wirkungsquerschnitt (siehe Abb. 13.21). Da für Formationsexperimente nur Nukleonen

als Targetteilchen zur Verfügung stehen, lassen sich nicht alle Resonanzen, insbesondere keine Mesonenresonanzen, durch solche Experimente nachweisen; praktisch kommen nur Baryonenresonanzen mit $S = 0$ (π-N-Streuung) und mit $S = -1$ (K-N-Streuung) in Frage.

In *Produktionsexperimenten* tritt die Resonanz im Endzustand der Reaktion zusammen mit mindestens einem weiteren Teilchen auf. Ein Beispiel ist

$$\bar{p} + p \rightarrow \omega + 2\pi$$
$$\omega \rightarrow \pi^+ + \pi^- + \pi^0 , \qquad (13.71)$$

während Formationsexperimente meist mit Hilfe der Zählertechnik ausgeführt werden, sind Spurdetektoren wie Blasenkammern besonders gut für Produktionsexperimente geeignet.

13.4.3.1. Nachweis von Hadronenresonanzen in Formationsexperimenten

Wir behandeln zunächst die elastische Streuung zweier spinloser Teilchen. Die elastische Partialwellenamplitude

$$f_l = \frac{\eta_l\, e^{2i\delta_l} - 1}{2i} = \frac{i}{2} - \frac{i\eta_l}{2}\, e^{2i\delta_l} \qquad (13.72)$$

ist eine komplexe Funktion. Man erhält das Argand-Diagramm (siehe Abb. 13.16), wenn der Verlauf von f_l in der komplexen Ebene gezeichnet wird. Für $\eta_l = 1$ durchläuft f_l mit ansteigendem Phasenwinkel δ_l einen Kreis mit dem Radius 1/2 um den Ursprung i/2. Für $\delta_l = \pi/2$ ist f_l rein imaginär. Für $\eta_l < 1$ (unelastische Streuung) verbleibt die Kurve ganz innerhalb des Kreises.

Man spricht von einem Resonanzzustand, wenn die Streuamplitude f_l für einen bestimmten Drehimpuls l bei einer bestimmten Schwerpunktsenergie E_R ein Maximum durchläuft, d. h., wenn die Phasenverschiebung δ_l durch π/2 geht. Die Resonanz ist eindeutig durch die Quantenzahlen, Drehimpuls I, Parität P, Isospin T, Ladung Q, Seltsamkeit S sowie die Masse $m_R = E_R/c^2$ und die Resonanzbreite Γ charakterisiert.

Schreiben wir die Partialwellenamplitude für $\eta_l = 1$ in der folgenden Form

$$f_l = \frac{e^{i\delta_l}(e^{i\delta_l} - e^{-i\delta_l})}{2i} = \frac{1}{\cot\delta_l - i} . \qquad (13.73)$$

Auf der Resonanz ($\delta_l = \pi/2$) ist $\cot\delta_l(E_R) = 0$, und wir können $\cot\delta_l(E)$ an dieser Stelle als Funktion der Energie entwickeln

$$\cot\delta_l(E) = \cot\delta_l(E_R) + (E - E_R)\frac{d}{dE}\cot\delta_l(E)\Big|_{E=E_R} \approx -(E - E_R)\frac{2}{\Gamma} . \qquad (13.74)$$

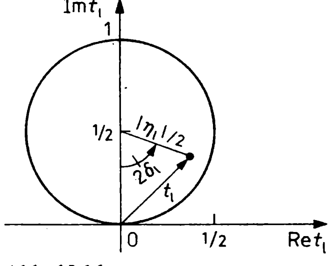


Abb. 13.16
Darstellung der Partialwellenamplitude in der komplexen Ebene (Argand-Diagramm). Mit Hilfe ansteigender Energie und für $\eta = 1$ durchläuft f_l den Kreis im angegebenen Sinne

Einsetzen in die Streuamplitude (13.73) ergibt

$$f_l(E) = \frac{\frac{1}{2}\Gamma}{(E_R - E) - i\frac{\Gamma}{2}}, \tag{13.75}$$

und wir erhalten für den elastischen Streuquerschnitt

$$\delta_{el}^{(l)}(E) = \frac{4\pi}{q^2}(2l+1)\frac{\Gamma^2/4}{(E-E_R)^2 - \Gamma^2/4}. \tag{13.76}$$

Dieser Ausdruck wird als Breit-Wigner-Formel bezeichnet. Die Breit-Wigner-Kurve wird in Abb. 13.17 gezeichnet.

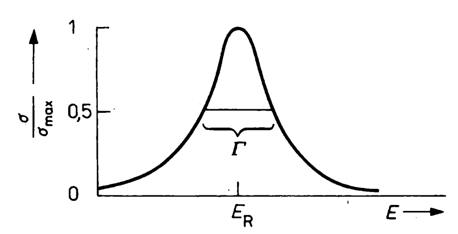


Abb. 13.17
Die Breit-Wigner-Resonanzkurve

Bei der Streuung spinloser Hadronen ist der Gesamtdrehimpuls der Resonanz gleich $I = l$. Bei der Pion-Nukleon-Streuung haben die Targetteilchen den Spin 1/2. Da Spin und Parität der Resonanz feste Werte haben müssen, kann auch in diesem Fall nur eine Partialwelle beitragen. Die oben bereits erwähnte $\Delta(1236)$-Nukleonenresonanz hat $I^P = \frac{3^+}{2}$ und tritt in der P-Welle ($l = 1$) der Pion-Nukleon-Streuung auf, da nur die $I = l + 1/2$ Kombination die richtige Parität hat. Die D-Welle ($l = 2$) trägt mit $I = l - 1/2$ nicht bei, da hier Spin-Parität $I^P = \frac{3^-}{2}$ wäre.

Der Wirkungsquerschnitt (13.76) ist nur für eine rein elastisch zerfallende Resonanz richtig, die nur in den Anfangszustand zerfällt, aus dem sie hervorgegangen ist. Das ist praktisch fast nie der Fall. Allgemein setzt sich die Gesamtbreite der Resonanz $\Gamma = \Gamma_{el} + \Gamma_{unel}$ aus den partiellen Breiten der elastischen und unelastischen Zerfallskanäle zusammen. In diesem Fall muß für den elastischen Streuquerschnitt (13.76) im Zähler Γ_{el}^2 eingesetzt werden, und man erhält den unelastischen Streuquerschnitt, wenn man Γ^2 im Zähler von (13.76) durch $\Gamma_{el} \cdot \Gamma_{unel}$ ersetzt.

Betrachten wir die Pion-Nukleon-Streuung. In Abb. 13.21 und 13.22 werden die Gesamtwirkungsquerschnitte für die Pion-Nukleon-Streuung angegeben. Diese Wirkungsquerschnitte können mit Hilfe von Breit-Wigner-Kurven und einem nichtresonanten Untergrund analysiert werden. Dabei findet man relativ einfach nur einige der am stärksten ausgeprägten Resonanzen und kann davon auch die Resonanzbreite ermitteln. Für die größte Zahl der Resonanzen genügt ein so einfaches Verfahren jedoch nicht, und es müssen zusätzlich die differentiellen Wirkungsquerschnitte und ein sehr aufwendiges theoretisches Analyseverfahren herangezogen werden.

Resonanzen im Pion-Nukleon-Streukanal können den Isospin $T = 3/2$ (diese werden als Δ-Resonanzen bezeichnet) oder den Isospin $T = 1/2$ — wie das Nukleon — haben (diese werden

als N*-Resonanzen bezeichnet). Häufig bezeichnet man die Resonanzen auch mit dem Symbol Δ oder N* und der Masse in MeV/c^2, z. B. Δ(1236), N*(1520). Das System π^+p besitzt $T_3 = 3/2$ und somit $T = 3/2$. Das System π^-p besitzt $T_3 = 1/2$ und besteht teilweise aus Zuständen mit $T = 3/2$ und $T = 1/2$. Resonanzen mit $T = 3/2$, die im π^+p-Kanal auftreten, sind folglich auch im π^-p-Kanal zu finden. π^-p-Resonanzen, die nicht in π^+p auftreten, haben offenbar $T = 1/2$. Die Resonanzen können klarer erkannt werden, wenn man die Wirkungsquerschnitte der reinen Isospinzustände untersucht. Der $T = 3/2$-Wirkungsquerschnitt ist identisch mit dem π^+p Wirkungsquerschnitt. Der $T = 1/2$-Wirkungsquerschnitt wird durch

$$\sigma_{1/2} = \frac{3}{2}\,\sigma_{\text{tot}}(\pi^- \text{p}) - \frac{1}{2}\,\sigma_{\text{tot}}(\pi^+ \text{p}) \tag{13.77}$$

gegeben.

13.4.3.2. Nachweis von Resonanzen in Produktionsexperimenten

Im Gegensatz zu Formationsexperimenten lassen sich in Produktionsexperimenten (siehe Abb. 13.18a) Resonanzen auch in solchen Kanälen identifizieren, die als Anfangszustand der Streuung nicht zur Verfügung stehen. Die Produktionsreaktion ist jedoch komplizierter, da sie nicht nur durch die Amplitude des Übergangs der Resonanz in die angekoppelten Kanäle (Anfangszustand, Endzustand) bestimmt wird, sondern auch durch die Eigenschaften der Reaktion, in der die Resonanz erzeugt wird. Die Eigenschaften der Resonanz und die anderen Eigenschaften der Reaktion lassen sich dabei oft nur schwer trennen. Zum Beispiel können Endzustandswechselwirkungen und Interferenzen zwischen den Zerfallsprodukten einer Resonanz und anderen Endzustandsteilchen bzw. zwischen den Endzustandsteilchen verschiedener Resonanzen (Abb. 13.18b) auftreten.

Abb. 13.18
(a) Erzeugung von Hadronenresonanzen in Produktionsexperimenten, (b) Interferenz von Endzustandsresonanzen

Als eine der ersten Mesonenresonanzen wurde das ϱ-Meson in der folgenden Reaktion

$$\begin{aligned} \pi^- + \text{p} &\rightarrow \pi^- + \pi^0 + \text{p} \\ &\rightarrow \pi^- + \pi^+ + \text{n} \end{aligned} \tag{13.78}$$

gefunden. Zum Nachweis von Resonanzen, die in zwei Teilchen zerfallen, ist es zweckmäßig, die Zahl der gefundenen Ereignisse als Funktion der invarianten Masse

$$m_{12}^* = \sqrt{(p_1 + p_2)^2} = \sqrt{m_1^2 + m_2^2 + 2E_1E_2 - 2|p_1|\,|p_2| \cos \Theta_{12}} \tag{13.79}$$

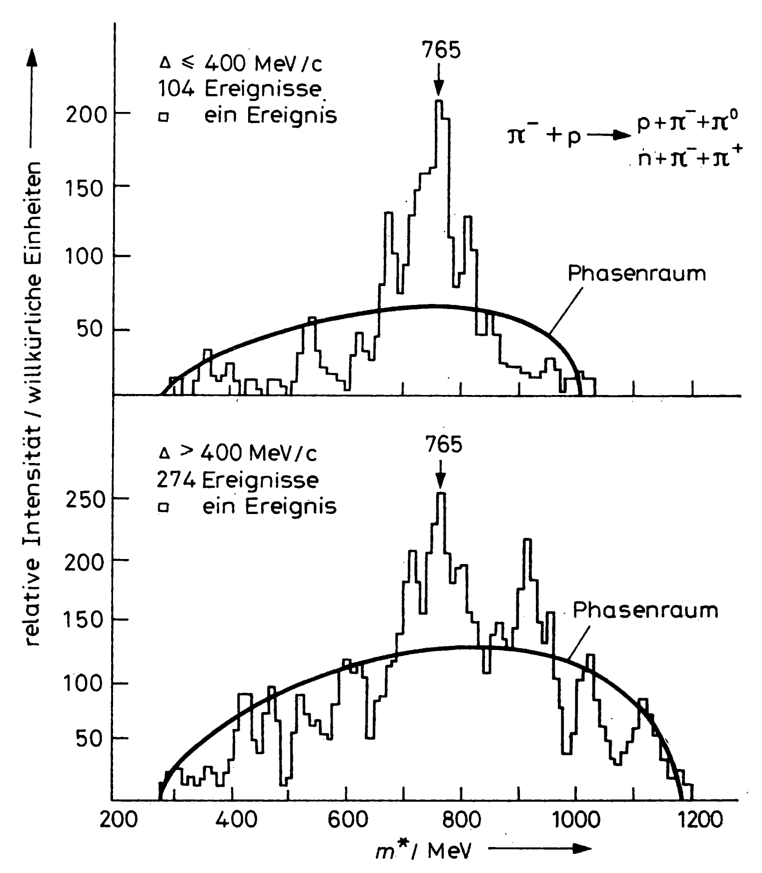


Abb. 13.19
Invariante Massenverteilung der beiden Pionen im Endzustand der Reaktionen $\pi^-p \to \pi^-\pi^0p$ und $\pi^-p \to \pi^+\pi^-n$. Die durchgezogenen Kurven geben die Phasenraumverteilungen an

der beiden Teilchen aufzutragen. In Abb. 13.19 ist eine solche Verteilung für die Reaktion (13.78) aufgetragen, in der das $\varrho(770)$ deutlich zu sehen ist.

Das ϱ-Meson ist für das Maximum bei $M^*_{12} = 770\ \text{MeV}/c^2$ mit einer Breite von $\Gamma_\varrho = 150$ MeV verantwortlich. Da das Maximum sowohl in der ungeladenen $\pi^+\pi^-$ als auch in den einfach geladenen $\pi^+\pi^0$- und $\pi^-\pi^0$-Kombinationen auftritt, aber nicht in den $\pi^+\pi^+$- und $\pi^-\pi^-$-Verteilungen, folgt, daß der Isospin $T = 1$ ist. Die richtige Spin-Paritäts-Zuordnung ist $I^P = 1^-$.

Eine elegante Methode, Resonanzen in einem Drei-Teilchen-Endzustand zu finden, besteht in der Anwendung des Dalitz-Diagramms.

Der invariante Drei-Teilchen-Phasenraum hat die Form

$$R_3 = \int \frac{d^3K_1}{2E_1} \frac{d^3K_2}{2E_2} \frac{d^3K_3}{2E_3} \delta^4\left(P - \sum_{i=1}^{3} K_i\right). \tag{13.80}$$

Im Schwerpunktsystem der drei Teilchen gilt $p = 0$ und $p_0 = E_{cm}$. Mit Hilfe der δ-Funktion für die Energie-Impuls-Erhaltung können wir über die meisten der Variablen in (13.80) integrieren und erhalten schließlich

$$R_3 = \pi^2 \int dE_1 \, dE_2 \,, \tag{13.81}$$

wobei E_1 und E_2 die Schwerpunktenergien der Teilchen 1 und 2 sind und das Integral über das gesamte kinematisch zulässige Gebiet zu erstrecken ist. Der Drei-Teilchen-Phasenraum ist also gleich der kinematisch erlaubten Fläche in der E_1-E_2-Ebene. Die Form von (13.81) legt die Darstellung der Drei-Teilchen-Endzustände in Form des Dalitz-Diagramms nahe. Im Dalitz-Diagramm stellt man jedes Ereignis durch einen Punkt in der zweidimensionalen E_1-E_2-Ebene dar. Der reine Phasenraum führt laut (13.81) zu einer gleichförmigen Verteilung der Datenpunkte im Dalitz-Diagramm. Die experimentell gefundene Verteilung der Punkte entspricht daher dem Quadrat des Matrixelements. Dadurch lassen sich dynamische Effekte einfach untersuchen. Bei praktischen Anwendungen ersetzt man E_1 und E_2 häufig durch die kinetischen Energien $T_i = E_i - m_i$ oder durch die Quadrate der invarianten Massen, da bei einem Drei-Teilchen-Endzustand gilt

$$m_{12}^2 = (K_1 + K_2)^2 = (P - K_3)^2 = E_{cm}^2 + m_3^2 - 2E_3E_{cm} \,. \tag{13.82}$$

in Abb. 13.20 geben wir als Beispiel das Dalitz-Diagramm für die Reaktion $\bar{p} + p \to K_1^0 + K^\pm + \pi^\mp$ an. Aus den Resonanzbändern wird sofort klar, daß diese Reaktion hauptsächlich über die Zustände $K^*(892) + \bar{K}$ bzw. $\bar{K}^*(892) + K$ verläuft. Neben der Suche nach Resonanzen in Drei-Teilchen-Endzuständen wendet man das Dalitz-Diagramm auch zur Bestimmung der Spin-Paritäts-Quantenzahlen von Resonanzen an, die in drei Endzustandsteilchen zerfallen.

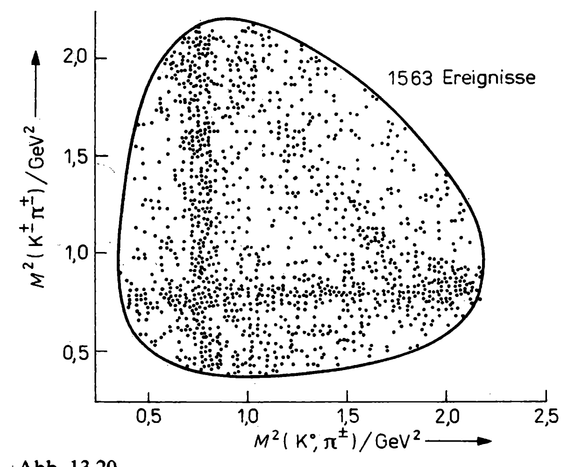


Abb. 13.20
Dalitz-Diagramm der Reaktion $\bar{p}p \to K_1^0K^\pm\pi^\mp$ bei 0,7 GeV/c. Das Diagramm wird von den Resonanzbändern der K* (890)-Resonanz dominiert

13.4.4. Wirkungsquerschnitte der Hadron-Hadron-Wechselwirkung

Die Abbildungen 13.21 und 13.22 zeigen den Verlauf des totalen Wirkungsquerschnittes der π^-p- und π^+p-Streuung als Funktion der Stoßenergie. Man erkennt im Gebiet kleiner Energien ($E_{Lab} < 2$—3 GeV) die durch die Hadronen-Resonanzen hervorgerufene komplizierte Struktur

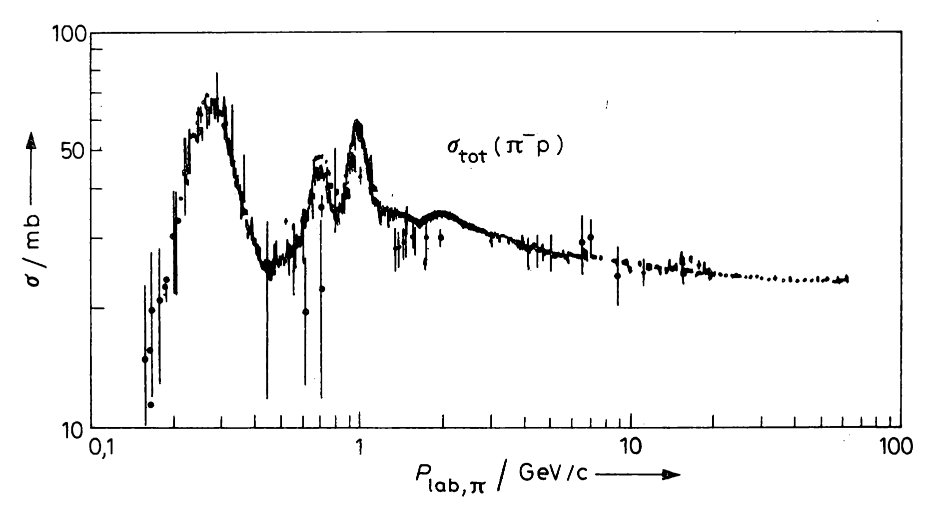


Abb. 13.21
Gesamtwirkungsquerschnitt der π^+p-Streuung als Funktion des Laborimpulses des Pions

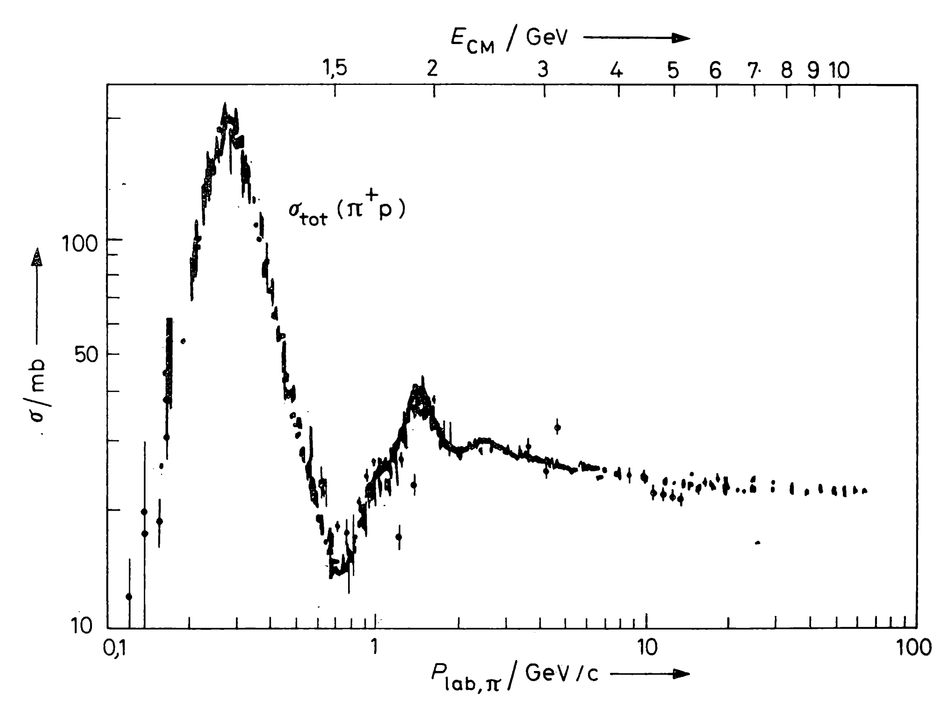


Abb. 13.22
Gesamtwirkungsquerschnitt der π^-p-Streuung als Funktion des Laborimpulses des Pions

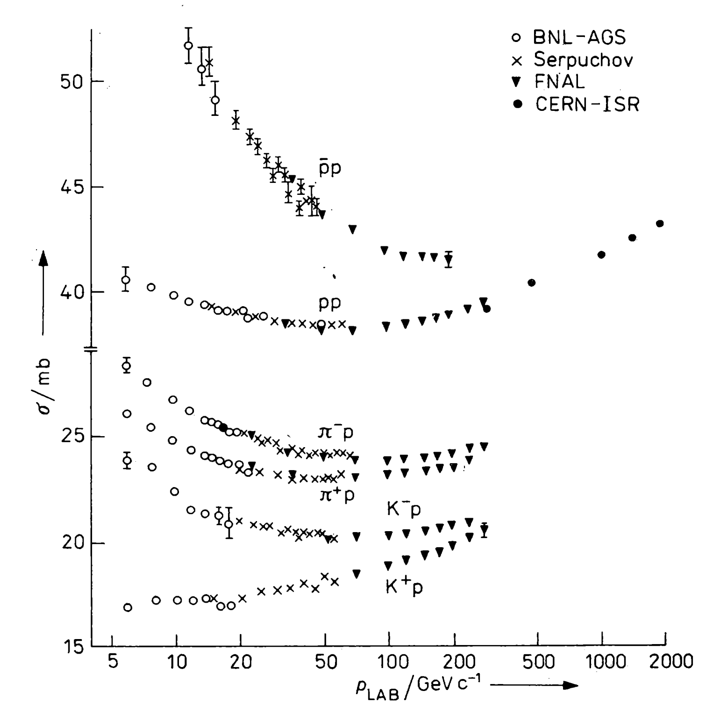


Abb. 13.23
Gesamtwirkungsquerschnitte der Reaktionen p̄p, pp, $\pi^{\pm}$p und $K^{\pm}$p als Funktion des Laborimpulses

der Wirkungsquerschnitte. Oberhalb des Resonanzgebietes werden die Wirkungsquerschnitte nahezu energieunabhängig. Abbildung 13.23 zeigt die totalen Wirkungsquerschnitte verschiedener geladener Hadronen mit Protonen bei Laborimpulsen bis zu 300 GeV/c für die Mehrzahl der Reaktionen und bis zu 3000 GeV/c für die Proton-Proton-Streuung. Zusätzlich zu den dargestellten Wirkungsquerschnitten wurde am CERN-SPS-Proton-Antiproton-Kollider der Wirkungsquerschnitt für die Proton-Antiproton-Streuung bei der Schwerpunktsenergie von 540 GeV, das entspricht einem Laborimpuls $P_{\text{Lab}} = 155400$ GeV/c, gemessen: $\sigma_{\bar{p}p} = 66{,}8 \pm 5{,}9$ mb. Die Größen der Wirkungsquerschnitte hängen vom stoßenden Hadron ab, jedoch liegen alle Werte etwa zwischen 20 und 40 mb. Wenn man diese Wirkungsquerschnitte einem geometrischen Wert $\sigma = \pi R^2$ gleichsetzt, ergibt sich $R \approx 10^{-13}$ cm = 1 Fermi (Fm), als Reichweite der starken Wechselwirkung. Vor 20 Jahren, als Daten nur bis zu etwa 30 GeV/c vorhanden waren, glaubte man, daß alle Wirkungsquerschnitte bei hohen Energien einem konstanten Wert zustreben, wie man es im optischen Modell für die Absorption einer schwarzen Kreisscheibe erwarten würde. Heute, nachdem die Daten bei höheren Energien vorliegen, ist klar zu erkennen, daß alle Hadron-Hadron-Wirkungsquerschnitte mit der Energie ansteigen. Der starke Anstieg des p̄p-Wirkungsquerschnittes deutet an, daß dieser Anstieg proportional zum Quadrat des Logarithmus der Stoßenergie ist.

Abbildung 13.23 zeigt jedoch, daß sich die Wirkungsquerschnitte von Teilchen und Antiteilchen mit zunehmender Energie einander nähern, z. B.

$$(\sigma_{\text{tot}}(\text{pp}) - \sigma_{\text{tot}}(\bar{\text{p}}\text{p}))/(\sigma_{\text{tot}}(\text{pp}) + \sigma_{\text{tot}}(\bar{\text{p}}\text{p})) \to 0\,, \qquad E \to \infty\,, \tag{13.83}$$

und ähnlich für $\sigma_{tot}(\pi^{\pm}p)$ und $\sigma_{tot}(K^{\pm}p)$. Dieses Verhalten erwartet man, falls die Streuamplituden unter sehr allgemeinen Annahmen ein analytisches Verhalten zeigen (Pomerančuk-Theorem).

Abbildung 13.24 zeigt den Verlauf des elastischen Streuquerschnittes $d\sigma/d|t|$ der Proton-Proton-Streuung als Funktion des Impulsübertrages t bei verschiedenen hohen Energien. Für kleine $|t| < 1\,(\text{GeV}/c)^2$ zeigt sich ein nahezu von der Primärenergie unabhängiges exponentielles Verhalten

$$\frac{d\sigma}{d|t|} = \frac{d\sigma}{d|t|}\bigg|_{t=0} \cdot e^{-b|t|}\,. \tag{13.84}$$

Für größere Impulsüberträge $|t| > 1\,(\text{GeV}/c)^2$, d. h. größere Streuwinkel, weichen die gemessenen Verteilungen stark von (13.84) ab, sie werden energieabhängig und zeigen ausgeprägte Strukturen, z. B. ein Minimum bei $t \approx -1{,}4\,(\text{GeV}/c)^2$. Auch bei kleinem $|t|$ findet man, daß die Größe b im Exponenten von (13.84) keineswegs energieunabhängig ist, sondern langsam mit der Stoßenergie ansteigt. Der elastische Streuquerschnitt bei $t = 0$ stimmt recht gut mit der

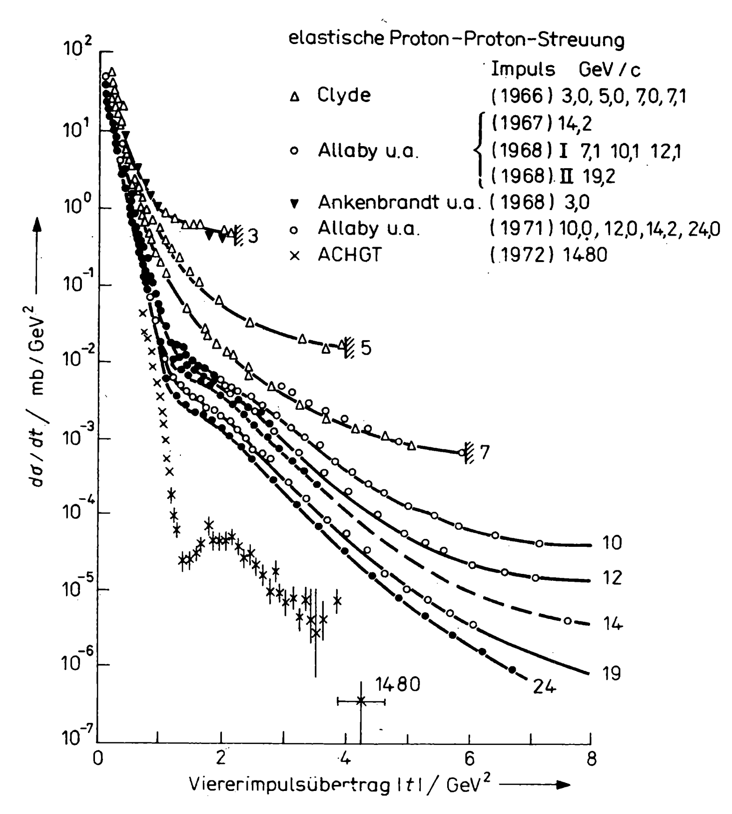


Abb. 13.24
Der differentielle elastische Proton-Proton-Streuquerschnitt bei verschiedenen Laborimpulsen für große Werte des Impulsübertrages $|t| = Q^2$

aus dem optischen Theorem (13.68) folgenden Beziehung (die man erhält, wenn der Realteil der Streuamplitude $\mathrm{Re}\, f(\Theta)$ vernachlässigt wird)

$$\left.\frac{d\sigma}{dt}\right|_{t=0} \approx \pi \left(\frac{\sigma_T}{4\pi}\right)^2 \tag{13.85}$$

überein. Da der Gesamtwirkungsquerschnitt annähernd gleich dem unelastischen Wirkungsquerschnitt ist, deutet man die elastische Streuung im Rahmen des optischen Modells als Beugung oder Diffraktion der einfallenden Teilchen am Streuzentrum, welches die einfallenden Teilchen in unelastischen Reaktionen absorbiert. Deshalb wird die elastische Streuung im Gebiet kleiner Impulsüberträge $|t|$ als Diffraktionsstreuung bezeichnet.

Das einfachste Modell für den elastischen und unelastischen Wirkungsquerschnitt ist eine völlig absorbierende Scheibe mit dem Radius $R = 1$ Fm. Mit $\delta_l = 0$ und

$$\eta_l = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad l \leqq qR/\hbar \\ 1 & \text{für} \quad l \geqq qR/\hbar \end{cases} \tag{13.86}$$

ergibt sich aus (13.65) und (13.66) für die Streuamplitude und die Wirkungsquerschnitte

$$\begin{aligned} f(s, \cos\Theta) &= \frac{1}{2iq} \sum_{0}^{l_{\max}} (2l+1)\, P_l(\cos\Theta)\,, \\ \frac{\sigma_{\text{tot}}}{2} &= \sigma_{\text{el}} = \sigma_{\text{unel}} = \frac{\pi}{q^2} \sum_{l} (2l+1) = \pi R^2\,. \end{aligned} \tag{13.87}$$

Dieses Bild ist jedoch sehr ungenau, da experimentell $\sigma_{\text{el}} < \sigma_{\text{unel}}$ gilt. Bei hohen Energien hat man es mit relativ großen Werten des Bahndrehimpulses zu tun, z. B. ergibt sich für $R = 1$ Fm und den Schwerpunktimpuls $q = 20$ GeV/c

$$l_{\max} \approx \frac{Rq}{\hbar} = 100\,. \tag{13.88}$$

Damit können wir die Legendre-Polynome für große l und kleine Streuwinkel Θ näherungsweise durch eine Bessel-Funktion $J_0(x)$ ausdrücken

$$P_l(\cos\Theta) \approx J_0(l\Theta) \approx J_0\left(\frac{l}{q}\sqrt{-t}\right). \tag{13.89}$$

Indem wir auch in der Streuamplitude den Streuwinkel Θ durch den Impulsübertrag t ersetzen, ergibt sich

$$f(s, t) = -\frac{1}{iq} \int_0^{qR} l\, dl\, J_0\left(\frac{l}{q}\sqrt{-t}\right) \approx \frac{iqRJ_1(R\sqrt{-t})}{\sqrt{-t}}\,. \tag{13.90}$$

Für $R = 1$ Fm hat diese Funktion ein Diffraktionsminimum bei $t = -0{,}6\ (\text{GeV}/c)^2$, welches zahlenmäßig ebenfalls nicht mit dem beobachteten Minimum bei $t = -1{,}4\ (\text{GeV}/c)^2$ übereinstimmt. Die Lage des Diffraktionsminimums läßt sich modifizieren, indem man das scharfe Abschneiden der Partialwellen bei $l = l_{\max}$ vermeidet. Das führt zur Stoßparameterdarstellung der Streuamplitude. Wir integrieren in (13.90) über den Stoßparameter $\varrho = l/q$ statt über l und erhalten die Stoßparameterdarstellung $M(\varrho, s)$ der Streuamplitude

$$\begin{aligned} f(s, t) &= iq \int_0^\infty \varrho\, d\varrho\, J_0(\varrho\sqrt{-t})\, M(\varrho, s) \\ M(\varrho, s) &= \frac{1}{iq} \int_0^\infty \sqrt{-t}\, d\sqrt{-t}\, J_0(\varrho\sqrt{-t})\, f(s, t)\,. \end{aligned} \tag{13.91}$$

Aus dem exponentiell abfallenden Streuquerschnitt $d\sigma/dt \sim \exp(bt)$ folgt die Streuamplitude $M(\varrho, s)$ in Form einer Gauß-Verteilung in ϱ. Die Abweichung des elastischen Wirkungsquerschnittes $d\sigma/dt$ von der Exponentialform führt zu Abweichungen von $M(\varrho, s)$ von der Gauß-Form. Aus der Verschiebung des Diffraktionsminimums mit der Energie folgt, daß der effektive Radius der absorbierenden Kreisscheibe mit der Stoßenergie ansteigt. Das gleiche folgt aus dem Anstieg des Parameters b in (13.84). In verschiedenen Modellen nimmt man einen logarithmischen Anstieg des Radius $R \propto \ln E_{CM}^2$ oder $R \propto \sqrt{\ln E_{CM}^2}$ an.

13.4.5. Vielteilchenerzeugung in Hadron-Hadron-Stößen

Die überwiegende Mehrzahl aller Hadron-Hadron-Reaktionen sind Teilchenerzeugungsreaktionen. Bei der hadronischen Vielteilchenerzeugung handelt es sich nicht — wie im Falle entsprechender Kernreaktionen — um das Herausschlagen von Konstituenten aus dem Target oder Strahlteilchen. Die in hadronischen Teilchenerzeugungsreaktionen entstehenden Teilchen werden neu, auf Kosten der kinetischen Energie der stoßenden Teilchen erzeugt. Dabei sind jedoch alle Erhaltungssätze für die Quantenzahlen wie B — Baryonenzahl, Q — Ladung, S — Seltsamkeit usw. zu erfüllen. Die Erhaltung der Baryonenzahl bedingt, daß Baryonen nur als Teilchen-Antiteilchen-Paare erzeugt werden können. Für Mesonen hingegen gibt es keine solche Einschränkung, wenn insgesamt die Erhaltung von S, Q usw. gesichert ist. Die hadronische Vielteilchenerzeugung wird durch einige grundlegende empirische Gesetzmäßigkeiten charakterisiert:

— Die mittleren Transversalimpulse $p_\perp = p \cdot \sin\Theta$ der erzeugten Teilchen sind klein und nahezu unabhängig von der Stoßenergie im Energiebereich bis zu $E_{Lab} = 2000$ GeV

$$\langle p_\perp \rangle \approx 0{,}3 \text{ bis } 0.4\ \text{GeV}/c\,. \tag{13.92}$$

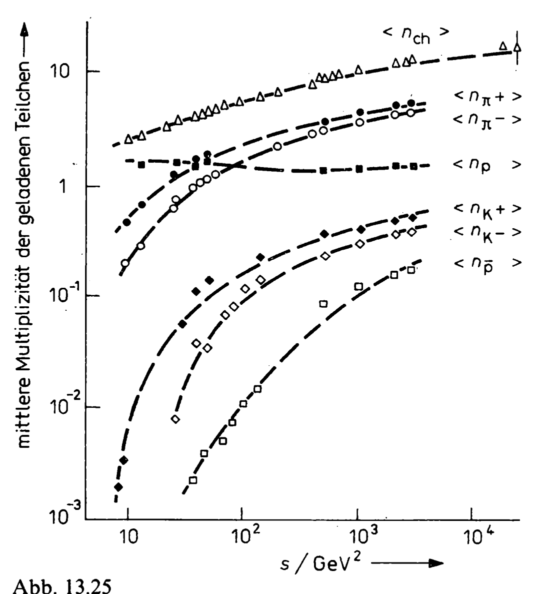


Abb. 13.25
Mittlere Multiplizitäten der geladenen Teilchen $\langle n_{ch}\rangle$ und der π^+, π^-, K^+, K^-, p und $\bar{p}$ in Proton-Proton-Stößen als Funktion der Stoßenergie $s = E_{CM}^2$

— Die mittlere Multiplizität der erzeugten Teilchen steigt nur relativ schwach mit der Schwerpunktsenergie des Stoßes an. Die Daten (siehe auch Abb. 13.25) sind verträglich mit

$$\langle n \rangle \sim \ln E_{CM} \quad \text{oder} \quad \langle n \rangle \sim E_{CM}^{1/4} . \tag{13.93}$$

— Der größte Teil der erzeugten Teilchen sind π-Mesonen, die leichtesten Hadronen.
— Die einlaufenden Teilchen einer unelastischen Reaktion verlieren im Mittel nur etwa die Hälfte ihrer Energie durch Teilchenerzeugungsprozesse. Sie haben also im Mittel einen höheren Impuls als die in der Reaktion neu erzeugten Teilchen. Auch diese Eigenschaft geht klar aus Abb. 13.26 hervor, wo sich die Impulsverteilung der Protonen deutlich von den Impulsverteilungen der neu erzeugten Teilchen unterscheidet.

Es gibt zwei Arten der Beschreibung und experimentellen Beobachtung von Vielteilchenerzeugungsprozessen:

Bei einer *exklusiven Reaktion* beobachtet man alle Teilchen im Endzustand einer Reaktion, z. B.

$$p + p \rightarrow n + p + \pi^+ + \pi^0 + \pi^- + \pi^+ . \tag{13.94}$$

Da die Zahl der möglichen exklusiven Reaktionen ungeheuer groß ist, ist diese Beschreibungsart nur für Reaktionen mit relativ kleinen Zahlen von Teilchen im Endzustand praktisch.

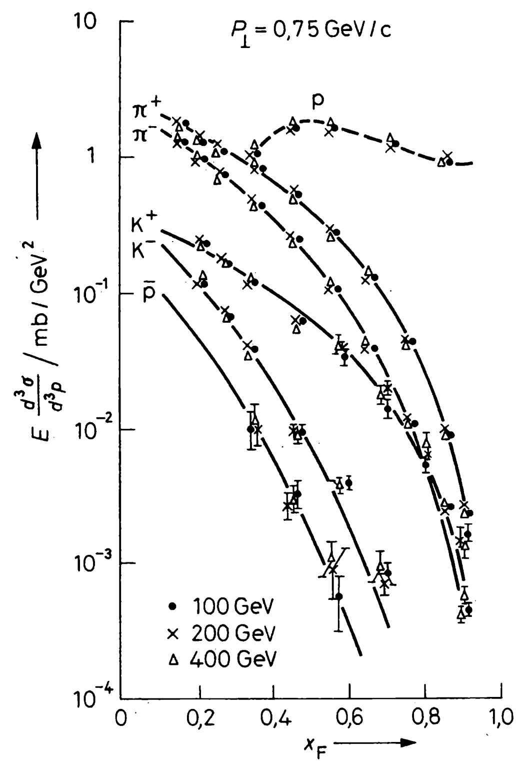


Abb. 13.26
Typische Longitudinalimpulsverteilungen der Sekundärteilchen in Proton-Proton-Stößen

Bei einer *inklusiven Reaktion* beobachtet man nur eine feste Zahl m von Sekundärteilchen, praktisch ist fast nur $m = 1$ und $m = 2$ von Interesse. Wir kennzeichnen die inklusive Einteilchenerzeugung wie folgt

$$a + b \to c + X. \tag{13.95}$$

Dabei steht X für irgendwelche weiteren Teilchen, die nicht beobachtet werden. Man kann zeigen, daß die Kenntnis aller inklusiven Teilchenerzeugungsquerschnitte äquivalent zur Kenntnis aller exklusiven Teilchenerzeugungsquerschnitte ist. Durch die inklusive Beschreibungsweise der Teilchenerzeugung wurde ein detailliertes Studium der Vielteilchenerzeugung erst möglich. Die inklusiven invarianten Einteilchenverteilungen $d^3N/d^3p/E$ hängen eng mit den inklusiven Einteilchenerzeugungsquerschnitten zusammen

$$\frac{d^3N}{d^3p/E} = \frac{1}{\sigma_{\text{unel}}} \frac{d\sigma}{d^3p/E}. \tag{13.96}$$

Bei allen hochenergetischen Hadronenreaktionen ist eine Raumrichtung, die durch die Richtung des einlaufenden Teilchenstrahls charakterisiert wird, ausgezeichnet. Wir kennzeichnen diese Richtung durch den Einheitsvektor $\hat{e}_{\parallel}$ und definieren einige Variablen zur Beschreibung der erzeugten Teilchen.

Die erste dieser Variablen ist die Rapidität y, die besonders gut geeignet ist, die erzeugten Teilchen zu beschreiben, die im Schwerpunktsystem der Reaktion relativ langsam sind

$$y = \frac{1}{2} \ln \frac{E + p_{\parallel}}{E - p_{\parallel}}\bigg|_{E > \sqrt{p_\perp^2 + m^2}} \approx \ln \frac{2E}{\sqrt{p_\perp^2 + m^2}}, \quad dy = \frac{dp_{\parallel}}{E}. \tag{13.97}$$

Dabei ist der Longitudinalimpuls $p_{\parallel} = \boldsymbol{p} \cdot \hat{e}_{\parallel}$, die Impulskomponente parallel zu $\hat{e}_{\parallel}$ und der Transversalimpuls $|p_\perp| = |\boldsymbol{p} \times \hat{e}_{\parallel}|$ ist die Impulskomponente transversal zu $\hat{e}_{\parallel}$. Mit der Definition (13.97) erhalten Teilchen, die im Schwerpunktsystem der Reaktion vorwärts, in Richtung des Teilchenstrahls, erzeugt werden, $y > 0$ und Teilchen, die in Targetrichtung, also rückwärts im Schwerpunktsystem erzeugt werden, erhalten $y < 0$. Teilchen mit kleinen Impulsen im Schwerpunktsystem erhalten $y \approx 0$. Bei einer Lorentz-Transformation in ein anderes Bezugssystem, z. B. in das Laborsystem, wird einfach eine Konstante zu y addiert. Man kommt vom Schwerpunkt- zum Laborsystem, indem man $Y/2 = \ln \frac{E_{\text{CM}}}{m}$ zur Rapidität y addiert. Die kinematischen Grenzen der Rapidität sind im Schwerpunktsystem $-\frac{Y}{2} < y < \frac{Y}{2}$ und im Laborsystem $0 < y < Y$.

Der bereits definierte Transversalimpuls $\boldsymbol{p}_\perp$ ist die zweite der uns interessierenden Variablen.

Die dritte Variable ist geeignet, Teilchen mit großen Longitudinalimpulsen zu beschreiben. Sie wird mit Hilfe des Longitudinalimpulses im Schwerpunktsystem definiert

$$x_{\text{F}} = \frac{p_{\parallel}}{p_{\max}} \approx \frac{2p_{\parallel}}{E_{\text{CM}}} \approx \frac{2E}{E_{\text{CM}}}. \tag{13.98}$$

Diese Variable wird als Feynman-x bezeichnet. Die kinematischen Grenzen von x_{F} sind $0 \leqq |x_{\text{F}}| \leqq 1$. Das Gebiet $0 < c < |x_{\text{F}}| \leqq 1$ entspricht einem endlichen Rapiditätsgebiet in der Nähe der kinematischen Grenze. Zum Beispiel gilt im Schwerpunktsystem

$$\Delta y = \frac{Y}{2} - y \approx \ln\left(\frac{E_{\text{CM}}}{2E}\right) = \ln \frac{1}{|x_{\text{F}}|}. \tag{13.99}$$

Die Feynman-x-Variable ist deshalb gut geeignet zur Beschreibung der Teilchenerzeugung im sogenannten Fragmentationsgebiet, dem Strahlfragmentationsgebiet ($x_{\text{F}} > 0$) und dem Targetfragmentationsgebiet ($x_{\text{F}} < 0$).

Wenn wir diese Variablen verwenden, läßt sich das allgemeine Verhalten der Vielteilchenerzeugung genähert wie folgt beschreiben. Über die jeweils nicht mehr auftretenden Variablen wurde bereits integriert.

1. *Begrenzte Transversalimpulse.* Die Transversalimpulsverteilung fällt exponentiell ab

$$\frac{dN}{dp_\perp^2} \propto e^{-bp_\perp} \quad \text{oder} \quad \frac{dN}{dp_\perp^2} \propto e^{-b\sqrt{m^2+p_\perp^2}}\,. \tag{13.100}$$

Dabei hat b die Größe $b \approx 6\ (\text{GeV}/c)^{-1}$. Die zweite Form von (13.100) beschreibt auch gut die Abhängigkeit der Transversalimpulsverteilungen von der Masse der erzeugten Hadronen. Man findet ein Anwachsen der mittleren Transversalimpulse mit der Masse der erzeugten Teilchen.

2. *Feynman-Skalenverhalten.* Es gilt genähert unabhängig von der Schwerpunktsenergie E_{CM}

$$\frac{dN_{ij}}{dx_F} \approx f_{ij}(x_F)\,. \tag{13.101}$$

Dabei steht j für das Target- oder Strahlteilchen, und i charakterisiert das erzeugte Teilchen. Für $x_F > 0$, d. h. im Strahlfragmentationsgebiet, hängt die Form von $f_{ij}(x_F)$ nur von der Art i des beobachteten Teilchens und dem Strahlteilchen j ab. Für $x_F < 0$, im Targetfragmentationsgebiet, hängt $f_{ij}(x_F)$ nur von i und dem Targetteilchen j ab. Das heißt, wir haben es annähernd mit einer Faktorisierung der beiden Fragmentationsgebiete zu tun. Für $|x_F|$ in der Nähe von 1 und $i \neq j$ (d. h. wenn i ein neu erzeugtes Teilchen ist) läßt sich $f_{ij}(x_F)$ wie folgt parametrisieren

$$f_{ij}(x_F) \underset{x_F > 1}{\approx} N_{ij}(1 - |x_F|)^{\alpha_{ij}}\,. \tag{13.102}$$

N_{ij} ist dabei eine Normierungskonstante. Da $dy = dp/E \approx dx_F/x_F$ gilt, finden wir im zentralen Gebiet als Funktion der Feynman-x-Variablen das Verhalten

$$\frac{dN_i}{dx_F} \propto \frac{C_i}{x_F}\,, \quad \frac{m_i}{E_{\text{CM}}} < x_F \ll 1\,. \tag{13.103}$$

3. *Rapiditätsplateau im zentralen Gebiet.* Die Teilchenerzeugung im zentralen Gebiet als Funktion der Rapiditätsvariablen y verhält sich wie

$$\left.\frac{dN_i}{dy}\right|_{y<Y} \approx C_i\,. \tag{13.104}$$

Dabei ist C_i eine Konstante, die nur vom erzeugten Teilchen i und nicht von der Art der Target- oder Strahlteilchen abhängt. Das Verhalten (13.104) ist konsistent mit (13.103).

4. *Kurzreichweitige Korrelationen.* Mit Hilfe der inklusiven Zweiteilchenverteilungen als Funktion der Rapiditäten $d^2N/dy_1\,dy_2$ läßt sich eine Zweiteilchenkorrelationsfunktion definieren, die die Wahrscheinlichkeit beschreibt, ein Teilchen bei einer bestimmten Rapidität y_1 zu finden, wenn bereits ein zweites Teilchen bei der Rapidität y_2 beobachtet wurde

$$C(y_1, y_2) = \left.\frac{\dfrac{d^2N}{dy_1 dy_2} - \dfrac{dN}{dy_1}\cdot\dfrac{dN}{dy_2}}{\dfrac{dN}{dy_1}\cdot\dfrac{dN}{dy_2}}\right|_{|y_1-y_2|>1} \approx e^{-\frac{|y_1-y_2|}{\lambda}} \tag{13.105}$$

Der experimentelle Abfall für großes Δy ist ein Zeichen für die kurze Reichweite der Korrelation. Die Konstante λ, die als Korrelationslänge bezeichnet wird, hat die Größe von etwa

zwei Rapiditätseinheiten. Das Auftreten dieser kurzreichweitigen Korrelationen läßt sich weitgehend dadurch erklären, daß die stabilen Hadronen, deren Erzeugung beobachtet wird, Zerfallsprodukte von Hadronenresonanzen sind, die primär erzeugt werden.

In Abb. 13.27 zeichnen wir das prinzipielle Verhalten der Rapiditätsverteilungen bei großen Stoßenergien so wie es aus den oben genannten Punkten 2 und 3 folgt. Aus diesem Verhalten ist sofort zu erkennen, daß die mittlere Multiplizität wie

$$\langle n \rangle = \int_{-Y/2}^{Y/2} \sum_i \frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}y}\,\mathrm{d}y = Y \sum_i c_i + \text{const.}, \qquad Y = 2 \ln \frac{E_{\mathrm{CM}}}{m} \tag{13.106}$$

mit der Stoßenergie ansteigt, wobei wir über alle Teilchenarten i summieren.

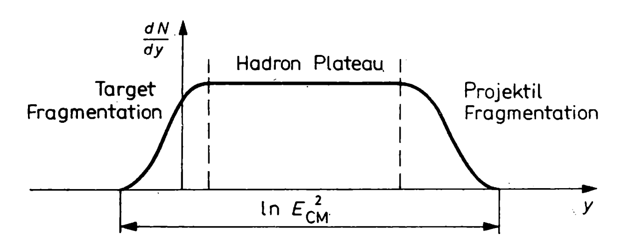


Abb. 13.27
Idealisierte Rapiditätsverteilung der erzeugten Teilchen in Proton-Proton-Stößen

Am CERN-SPS-Proton-Antiproton-Kollider mit einer Stoßenergie im Schwerpunktsystem von 540 GeV wurde gefunden, daß dieses Rapiditätsplateau im zentralen Gebiet langsam mit der Stoßenergie ansteigt (siehe Abb. 13.28). Erste Andeutungen dieses Effektes wurden bereits im Gebiet von Schwerpunktenergien zwischen 20 und 60 GeV gefunden.

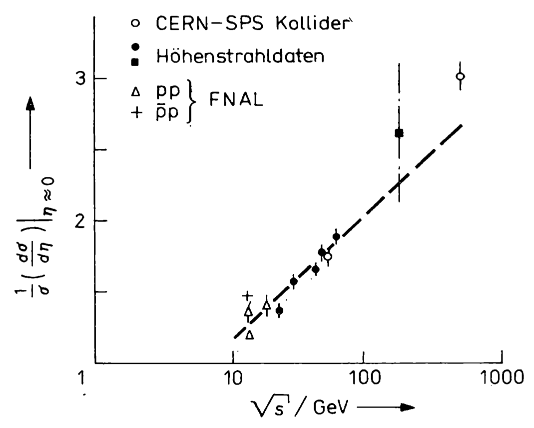


Abb. 13.28
Rapiditätsplateau geladener Teilchen als Funktion der Energie

5. *KNO Skalenverhalten der Multiplizitätsverteilungen.* Dieses Verhalten der Multiplizitätsverteilungen in hadronischen Stößen wurde von Z. KOBA, H. NIELSEN und P. OLESEN vorhergesagt. Es sei

$$P_n = \frac{\sigma_n}{\sigma_{\text{abs}}} \tag{13.107}$$

die Wahrscheinlichkeit zur Erzeugung von n sekundären Hadronen in einem Stoß. Die mittlere Multiplizität sei

$$\langle n \rangle = \sum_n n P_n \, . \tag{13.108}$$

Das KNO-Skalenverhalten sagt aus, daß

$$\psi\left(\frac{n}{\langle n \rangle}\right) = \langle n \rangle \cdot P_n \tag{13.109}$$

eine universelle Funktion von $n/\langle n \rangle$, unabhängig von der Stoßenergie E sei. Abb. 13.29 zeigt, daß dieses Verhalten bis zu Schwerpunktenergien von etwa 60 GeV sehr gut mit den Experimenten übereinstimmt. Bei der Schwerpunktenergie 540 GeV des CERN-Proton-Antiproton-Kolliders beobachtet man jedoch deutliche Abweichungen vom KNO-Skalenverhalten.

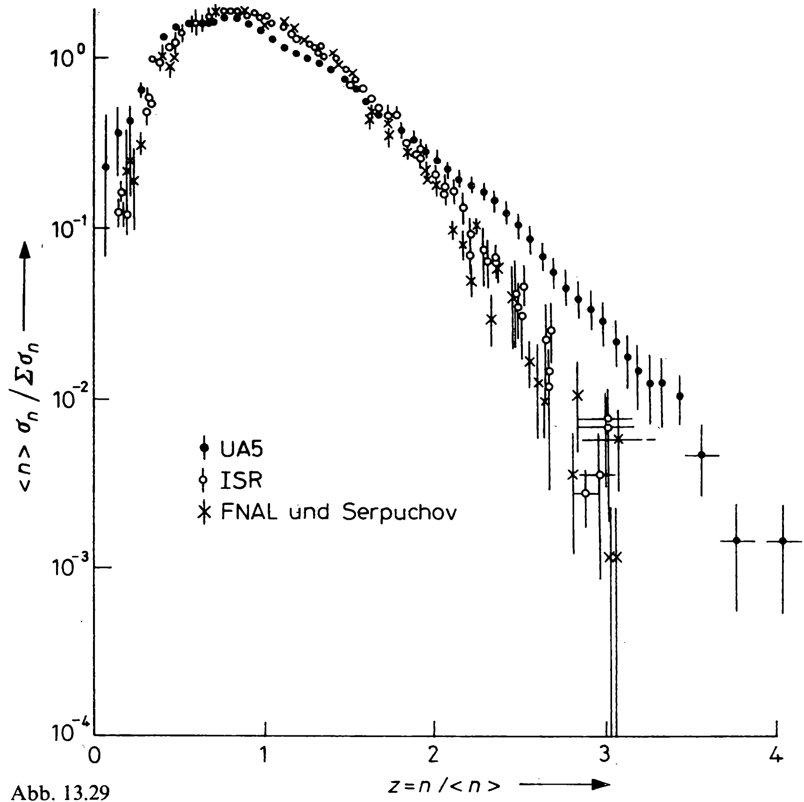


Abb. 13.29
Vergleich der Multiplizitätsverteilungen im zentralen Rapiditätsgebiet in pp- und $\bar{p}$p-Stößen. Bis zu Energien des $\bar{p}$p-Kolliders gilt das angenäherte KNO-Skalenverhalten der Multiplizitätsverteilung

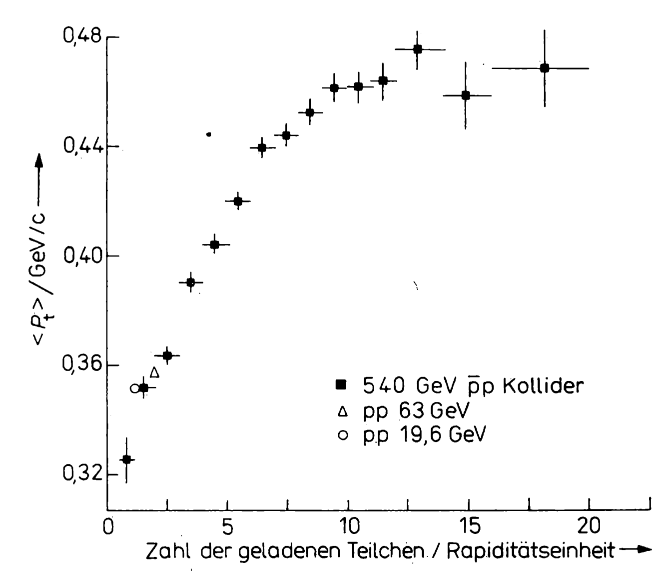


Abb. 13.30
Der mittlere Transversalimpuls geladener Teilchen in p̄p-Stößen bei der Schwerpunktenergie $\sqrt{s} = 540$ GeV als Funktion der Zahl der geladenen Teilchen pro Rapiditätsintervall. Der mittlere Transversalimpuls steigt mit der Multiplizität an. Die mittleren Transversalimpulse, die in Proton-Proton-Stößen bei kleineren Energien gemessen wurden (aufgetragen über der mittleren Multiplizität bei diesen Energien), liegen auf der gleichen offenbar universellen Kurve

Gegen Ende des Jahres 1981 wurden die ersten experimentellen Ergebnisse vom CERN-SPS-Proton-Antiproton-Kollider mit einer Schwerpunktenergie von 540 GeV bekannt.

Die Schwerpunktenergie dieses Beschleunigers ist etwa 10mal höher als bei allen vorherigen Beschleunigern. Dadurch ist es erstmals möglich, Antiproton-Proton-Stöße mit einer äquivalenten Laborenergie von etwa 150000 GeV zu untersuchen. Streuprozesse mit derartig hohen Energien konnten vorher nur mit Hilfe einer sehr kleinen Zahl von Höhenstrahlereignissen untersucht werden. Die ersten experimentellen Ergebnisse an diesem Beschleuniger bestätigen zum Teil die oben aufgeführten Eigenschaften der hadronischen Vielteilchenerzeugung, machen aber auch einige Präzisierungen und Korrekturen nötig. Zusätzlich zu dem schon oben erwähnten Anstieg des Rapiditätsplateaus und den Abweichungen vom KNO-Skalenverhalten wurde ein weiterer Effekt gefunden:

Der mittlere Transversalimpuls steigt mit der Gesamtanzahl der erzeugten Hadronen an (siehe Abb. 13.30). Da auch die mittlere Multiplizität der erzeugten Hadronen mit der Stoßenergie ansteigt, folgt, daß auch der Transversalimpuls gemittelt über alle Ereignisse mit der Stoßenergie ansteigt. Bei gleicher Multiplizität der Sekundärteilchen ist der am CERN-SPS-Kollider gefundene mittlere Transversalimpuls mit Experimenten bei kleineren Energien konsistent.

Literaturhinweise zu Kapitel 13

Ber 66, Bet 86, Fra 66, Fre 78, Gas 67, Gel 64, Lan 81, Lee 68, Loh 81, Lon 73, Muc 74, Mui 65, Nac 86, Nau 84, Oku 63, Oku 84, Per 72, Per 74, Ran 76, Tas 77

14. Quarks und Leptonen[1])

14.1. Teilchenklassifikation im Quark-Modell

14.1.1. Hadronenspektroskopie

Die Untersuchung der Streuprozesse zwischen Hadronen führte, wie im Abschnitt 13.4. gezeigt wurde, zur Entdeckung einer großen Zahl von Hadronenresonanzen. Heute kennt man mehrere Hundert Hadronenresonanzen; diese sind angeregte Zustände der stabilen Hadronen (stabile Hadronen zerfallen nicht infolge der *starken* Wechselwirkung). Es handelt sich um ein Spektrum angeregter Zustände, ähnlich wie es schon viel früher bei den Atomen und Kernen gefunden wurde. Deshalb sprechen wir von einer neuen Spektroskopie, der Hadronenspektroskopie. In Abb. 14.1a und b werden die Spektren der Baryonen und Mesonen abgebildet. Die typischen Energieabstände zwischen den Zuständen des Hadronenspektrums liegen in der Größenordnung einiger Hundert MeV.

Die Systematik der Baryonen- und Mesonenzustände legt die Vermutung nahe, daß es sich wie im Fall der Atom- oder Kernspektroskopie um die Anregungszustände eines Systems handelt, welches aus einfacheren Konstituenten aufgebaut ist. Diese Deutung gilt heute als sicher, und die Konstituenten, die zu den beobachteten Hadronenspektren führen, haben den Namen Quarks erhalten. Im Unterschied zu den Konstituenten der Atome (Elektronen und Kerne) oder den Konstituenten der Kerne (Protonen und Neutronen) lassen sich Quarks nicht als freie Teilchen beobachten. Diese Eigenschaft der Quarks und ihrer Wechselwirkung, wird als Hypothese vom Quark-Einschluß (Quark-Confinement) formuliert. Bisher ist es jedoch noch nicht völlig überzeugend gelungen, diese Hypothese theoretisch zu beweisen.

Die uns bekannten Hadronen besitzen neben den Quantenzahlen Spin und Parität weitere Quantenzahlen, die innere Symmetrien der Teilchen, nicht die Raum-Zeit-Symmetrie ihrer Wellenfunktionen charakterisieren. Diese Quantenzahlen sind elektrische Ladung Q, Baryon-Zahl B, Isospin T und seine dritte Komponente T_3, Seltsamkeit S, Charm c, Bottom b sowie die Ladungskonjugation C.

Die Möglichkeit, die große Zahl der Hadronen und Hadronenresonanzen zu ordnen, beruht auf der Tatsache, daß die Zahl der möglichen Quantenzahlen viel geringer ist als die Zahl der bekannten Hadronen. Dabei sind nicht einmal alle internen Quantenzahlen unabhängig voneinander. Insbesondere verknüpft die Gell-Mann-Nishijima-Formel die Ladung mit den anderen additiven Quantenzahlen

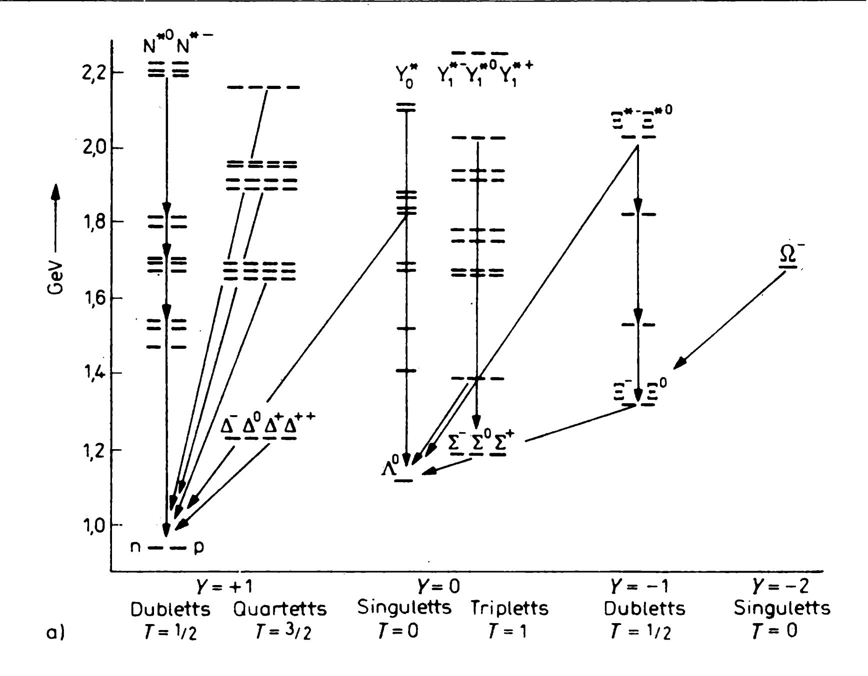
$$Q = T_3 + \frac{1}{2}(B + S)\,. \tag{14.1}$$

Heute nach der Entdeckung von Charm c und Bottom b können wir diese Formel verallgemeinern zu

$$Q = T_3 + \frac{1}{2}(B + S + c + b)\,. \tag{14.2}$$

---

[1]) Die Formeln von Kapitel 13 und 14 entsprechen der Schreibweise von Größen in den sogenannten „natürlichen" Einheiten der Elementarteilchenphysik (siehe Anhang D 1.).



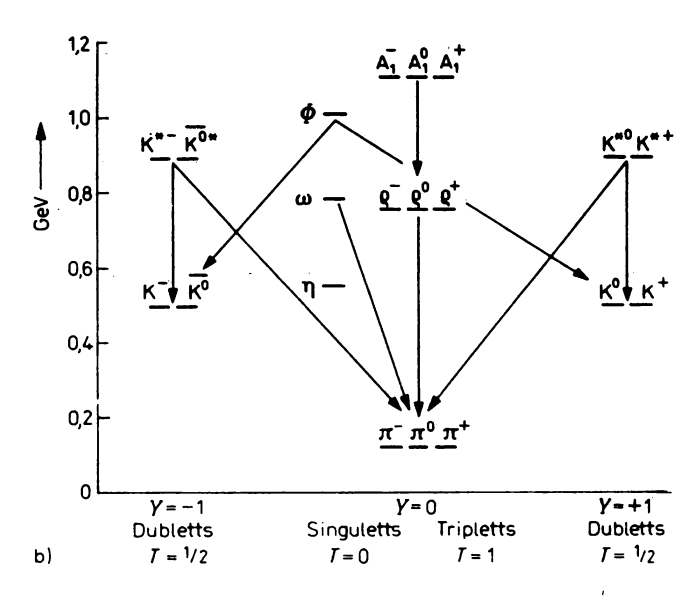


Abb. 14.1
Das Energieniveausystem der Hadronen. Einige der durch die starke Wechselwirkung, d. h. unter Emission von Mesonen ablaufenden Übergänge sind durch Pfeile angegeben a) Baryonenzustände, b) Mesonenzustände

Die Formeln (14.1) oder (14.2) werden häufig auch unter Verwendung der Hyperladung Y formuliert. Die Hyperladung ist dabei wie folgt definiert

$$Y = B + S. \tag{14.3}$$

14.1.2. Quarks und die SU(3)-Klassifikation der Hadronen

Die ersten Hinweise für die Existenz von Quarks als Konstituenten der Hadronen erhielt man aus der Untersuchung der Symmetrieeigenschaften des Hadronenspektrums. 1962 fanden GELL-MANN und NE'EMAN, daß sich die bekannten Hadronen in Multipletts, insbesondere Oktetts der SU(3) Symmetriegruppe einordnen lassen.

In Abb. 14.2. zeigen wir eines dieser Multipletts, das Oktett der pseudoskalaren Mesonen mit der Spin-Parität $I^P = 0^-$. Alle anderen Quantenzahlen dieser Mesonen lassen sich aus ihrer Lage in dem hexagonalen Schema herleiten. Teilchen auf 120° Linien haben die gleiche Ladung Q, Teilchen auf horizontalen Linien haben gleiche Hyperladung und etwa gleiche Masse. Teilchen auf vertikalen Linien haben die gleiche Komponente T_3 des Isospins. Natürlich ist für alle Teilchen die Beziehung $Q = T_3 + Y/2$ erfüllt.

Die graphische Darstellung in Abb. 14.2. wird als Gewichtsdiagramm des Oktetts der SU(3) Gruppe bezeichnet. Die fundamentalen Multipletts der SU(3) Gruppe sind Tripletts und Antitripletts, deren Gewichtsdiagramme in Abb. 14.3. angegeben werden. Alle Darstellungen oder Multipletts der SU(3) Gruppe lassen sich aus diesen beiden fundamentalen Tripletts konstruieren. Ähnlich konstruiert man in bekannter Weise aus den fundamentalen Dubletts der SU(2) Gruppe (Spin- oder Isospin-Gruppe) alle weiteren SU(2)-Multipletts. Wir identifizieren, so wie das in Abb. 14.3. angegeben wird, die drei Teilchen in den fundamentalen Tripletts der SU(3)

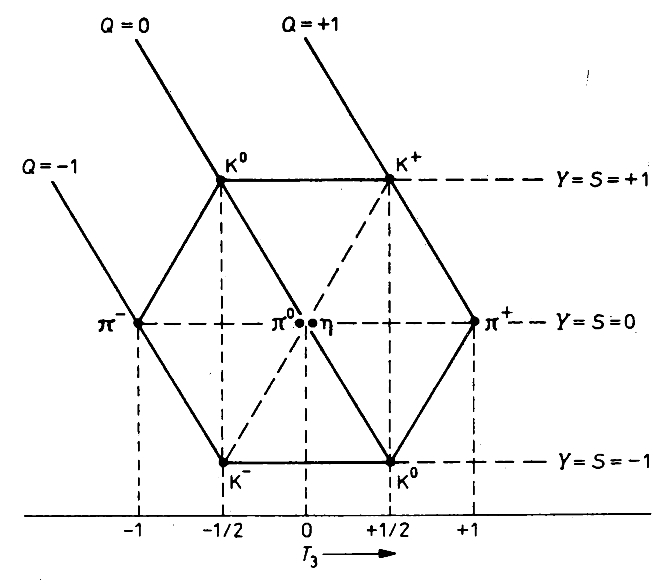


Abb. 14.2
Die leichtesten pseudoskalaren Mesonen mit Spin Parität $I^P = 0^-$ angeordnet als SU(3)-Oktett. Es gilt die Beziehung $Q = T_3 + Y/2$ zwischen Ladung Q, 3. Komponente des Isospins T_3 und Hyperladung Y

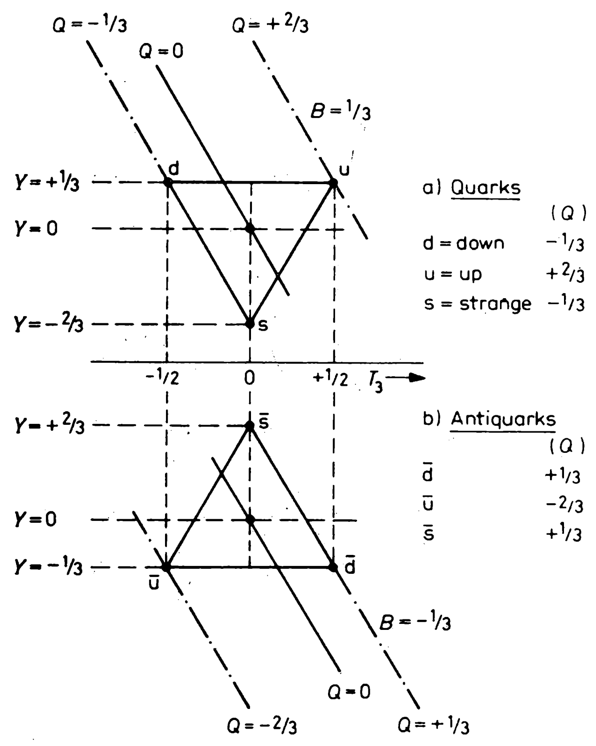


Abb. 14.3
Fundamentale Darstellung der Symmetriegruppe SU(3)
a) Quarks, b) Antiquarks

Gruppe mit den drei leichten Quarks u, d, und s und ihren Antiteilchen ū, d̄ und s̄. In Tabelle 2.1. werden die Eigenschaften der Quarks zusammengefaßt. Die schweren Quarks c und b wurden erst viel später, gegen Mitte der 70er Jahre gefunden. Die Ladungs-, Hyperladungs- und Isospinquantenzahlen der drei leichten Quarks folgen aus ihrer Lage im Diagramm der Abb. 14.3. Insbesondere erhalten die Quarks die Baryonenzahl $B = 1/3$, den Spin $I = 1/2$ und Ladungen Q von 2/3 bzw. —1/3 der Elementarladung. Die Massen der Quarks, die in Tabelle 2.1. angegeben werden, können nur durch indirekte Methoden gewonnen werden, da freie Quarks nicht beobachtet werden können. Dadurch lassen sich die Quarkmassen auch nicht eindeutig definieren. Bei den Massen in Tabelle 2.1. handelt es sich um die als fundamental angesehenen Strom-Quarkmassen. Es gibt zwei mögliche Wege zur Klassifizierung der Hadronen in Form von Multipletts der Gruppe SU(3). Der eine Weg geht von der Theorie der Lie-Gruppen aus und entwickelt die Darstellungen der SU(3)-Gruppe. Der zweite Weg beginnt mit den fundamentalen Quarktripletts und konstruiert daraus die Multipletts der Mesonen und Baryonen.

Beide Zugänge führen zu nahezu identischen Ergebnissen. Da jedoch in das Quark-Modell häufig zusätzliche dynamische Annahmen einfließen, erhält man daraus auch zusätzliche Eigenschaften des vorhergesagten Hadronenspektrums. Beide Zugänge gehen von unterschiedlichen theoretischen Prämissen aus. Der gruppentheoretische Zugang betont die grundlegende Symmetrie des Spektrums der Elementarteilchen und beschreibt sie, ohne dynamische Gründe dafür anzugeben. Der Zugang über das Quarkmodell betont die zusammengesetzte Natur der Hadronen, ihren Aufbau aus den Quarks als fundamentalen Teilchen. Wir werden hier den zweiten

Zugang wählen. Es sei auch betont, daß durch die Entdeckung der schweren Quarks c und b die ursprüngliche SU(3)-Klassifizierung viel von ihrer Anziehungskraft verloren hat. Mit fünf oder sechs bekannten Quarks sollten wir eigentlich von der Gruppe SU(5) oder SU(6) ausgehen. Da bedingt durch die viel größere Masse der c- und b-Quarks, diese Symmetrie viel stärker verletzt ist als die SU(3) Symmetrie, wird dieser Weg jedoch nur selten begangen.

14.1.3. Mesonen als gebundene Quark-Antiquark-Zustände

Wir diskutieren als erstes die Bildung der SU(3)-Multipletts der Mesonen an Hand des Quarkmodells. Mesonen bestehen aus einem Quark q und einem Antiquark $\bar{q}$. Aus drei Quarks u, d, s und drei Antiquarks $\bar{u}$, $\bar{d}$ und $\bar{s}$ lassen sich $9 = 3 \cdot 3$ Mesonen bilden. In Abb. 14.4. konstruieren wir diese $q\bar{q}$ Zustände, indem wir dem Quark-Dreieck von Abb. 14.3a in jeder Ecke ein Antiquark-Dreieck von Abb. 14.3b überlagern.

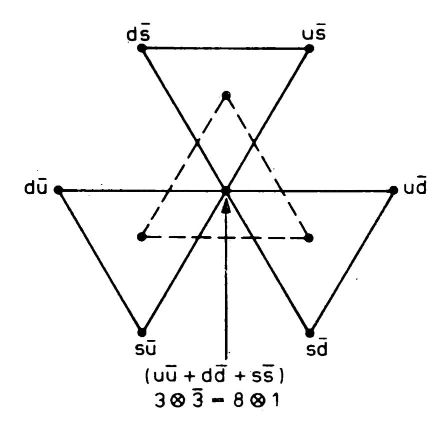


Abb. 14.4
Konstruktion des niedrigsten Mesonen-Multipletts durch Überlagerung eines Quark-Tripletts mit einem Antiquark-Triplett

Die sechs $q\bar{q}$ Zustände an den Ecken des Sechsecks lassen sich sofort eindeutig den entsprechenden Mesonen in Abb. 14.2. zuordnen. Im Zentrum des Multipletts haben wir jedoch drei Kombinationen $u\bar{u}$, $d\bar{d}$ und $s\bar{s}$. Daraus bilden wir zunächst einen vollständig symmetrischen Zustand

$$\eta_1^0 = \frac{1}{\sqrt{3}} (u\bar{u} + d\bar{d} + s\bar{s}) . \tag{14.4}$$

SU(3) Transformationen, die die Quarks ineinander überführen, (z. B. $u \to d$, $s \to u$, usw.) führen bei der Anwendung auf η_1^0 stets auf denselben Zustand zurück. Der Zustand η_1^0 ist also ein SU(3)-Singulett; das soll durch den Index 1 angedeutet werden.

Die restlichen acht Teilchen bilden ein SU(3)-Oktett. Auch die beiden verbleibenden Oktettzustände im Zentrum des Multipletts müssen als Linearkombination aus $u\bar{u}$, $d\bar{d}$ und $s\bar{s}$ gebildet werden. Die $\pi^+ = u\bar{d}$ und $\pi^- = d\bar{u}$ Mesonen haben die dritte Komponente des Isospins

$T_3 = +1$ und -1. Sie gehören zu einem Isospin-Triplett mit $T = 1$. Die neutrale Komponente dieses Tripletts (mit $T_3 = 0$) ist

$$\pi_8^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u} + d\bar{d})\,. \tag{14.5}$$

Dabei soll die Bezeichnung π_8^0 andeuten, daß dieser Zustand zum SU(3)-Oktett gehört. Den letzten Zustand im Zentrum des Multipletts erhalten wir aus der Forderung der Orthogonalität zu η_1^0 und π_8^0 als

$$\eta_8^0 = \frac{1}{\sqrt{6}}(2s\bar{s} - u\bar{u} - d\bar{d})\,. \tag{14.6}$$

Zum SU(3)-Oktett gehören also insgesamt folgende Teilchen:

$$\begin{aligned}
\text{Isospin } T = 1/2&: \ K^+ = u\bar{s}\,, \quad K^0 = d\bar{s}\,,\\
T = 1 \ &: \ \pi^+ = u\bar{d}\,, \quad \pi^0 = \pi_8^0\,, \quad \pi^- = d\bar{u}\,,\\
T = 0 \ &: \ \eta_8^0\,,\\
T = 1/2&: \ \bar{K}^0 = s\bar{d}\,, \quad K^- = s\bar{u}\,.
\end{aligned} \tag{14.7}$$

Alle Teilchen des Oktetts sowie das Singulett η_1^0 müssen gleiche Spin-Parität I^P haben. Tatsächlich sind diese neun Teilchen die einzigen bekannten Teilchen niedriger Masse mit den Quantenzahlen $I^P = 0^-$. Da die Teilchen des SU(3)-Oktetts wesentlich größere Massenunterschiede aufweisen als die Mitglieder eines der Isospinmultipletts in (14.7), ist die SU(3)-Symmetrie offenbar stärker verletzt als die SU(2)-Isospinsymmetrie.

Bei den Teilchen η_1^0 und η_8^0 tritt eine weitere Komplikation auf, sie besitzen gleiche Quantenzahlen, gehören aber unterschiedlichen SU(3)-Multipletts an. Die physikalisch beobachteten Teilchen $\eta(549)$ und $\eta'(958)$ sind Linearkombinationen dieser beiden Teilchen

$$\begin{aligned}
\eta &= \eta_8^0 \cos\Theta_\eta + \eta_1^0 \sin\Theta_\eta\\
\eta' &= -\eta_8^0 \sin\Theta_\eta + \eta_1^0 \cos\Theta_\eta\,.
\end{aligned} \tag{14.8}$$

Der Winkel Θ_η wird als Mischungswinkel bezeichnet. Da dieser Winkel ziemlich klein ist $\Theta_\eta = 0{,}045$, entsprechen die SU(3) Zustände η_1^0 und η_8^0 den physikalischen Teilchen η und η' in recht guter Näherung.

Man kann sich das pseudoskalare Mesonenoktett als $q\bar{q}$ Zustände mit dem Bahndrehimpuls $l = 0$ und dem Gesamtspin $I = 0$ vorstellen. Wegen der ungeraden relativen inneren Parität der Fermionen und Antifermionen haben solche Zustände die Parität $P = -1$. Die nächst einfachen $q\bar{q}$ Zustände haben ebenfalls $l = 0$, den Gesamtspin $I = 1$ und die Parität $P = -1$. Das führt uns auf ein Oktett und Singulett von neun Vektormesonen mit $I^P = 1^-$. In der Natur findet man gerade neun Vektormesonen niedriger Masse mit den richtigen von SU(3) geforderten Quantenzahlen. Die Teilchen des Oktetts sind

$$\begin{aligned}
T = 1/2&: \quad K^{*0}(880) = d\bar{s}\,, \quad K^{*+}(880) = u\bar{s}\,;\\
T = 1 \ &: \quad \varrho^-(770) = d\bar{u}\,, \quad \varrho^0(770) = \frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u} - d\bar{d})\,,\\
&\quad\ \ \varrho^+(770) = u\bar{d}\,;\\
T = 0 \ &: \quad \omega_8^0 = \frac{1}{\sqrt{6}}(2\,s\bar{s} - u\bar{u} - d\bar{d})\,;\\
T = \frac{1}{2} &: \quad K^{*-}(880) = s\bar{u}, \quad K^{*0}(880) = s\bar{d}\,,
\end{aligned} \tag{14.9}$$

und das Singulett ist

$$\omega_1^0 = \frac{1}{\sqrt{3}}(u\bar{u} + d\bar{d} + s\bar{s}) . \tag{14.10}$$

Die reinen SU(3)-Zustände ω_8^0 und ω_1^0 sind wie im Falle der pseudoskalaren Teilchen gemischt aus den physikalischen Teilchen ω(783) und Φ(1020)

$$\begin{aligned} \omega_8^0 &= \Phi(1020) \cos \Theta_{\omega-\Phi} - \omega(783) \sin \Theta_{\omega-\Phi} , \\ \omega_1^0 &= \Phi(1020) \sin \Theta_{\omega-\Phi} + \omega(783) \cos \Theta_{\omega-\Phi} . \end{aligned} \tag{14.11}$$

Der Mischungswinkel $\Theta_{\omega-\Phi}$, der aus der ω — Φ Massendifferenz oder aus dem Vergleich der Zerfallsraten $\omega \to e^+e^-$, $\Phi \to e^+e^-$ und $\varrho^0 \to e^+e^-$ bestimmt werden kann, ist relativ groß und liegt nahe dem Wert $\sin \Theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\cos \Theta = \sqrt{\frac{2}{3}}$. Damit erhält man für die physikalischen Teilchen ω und Φ in guter Näherung im Quarkmodell die Zustände

$$\begin{aligned} \Phi(1020) &= s\bar{s} , \\ \omega(783) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u} + d\bar{d}) . \end{aligned} \tag{14.12}$$

Demnach ist das Φ-Meson hauptsächlich aus Quarks mit Seltsamkeit s und $\bar{s}$ zusammengesetzt. Diese Tatsache erklärt sehr schön, daß das Φ hauptsächlich in K + $\bar{K}$ zerfällt, da die K-Mesonen ebenfalls s und $\bar{s}$ Quarks enthalten.

14.1.4. Baryonen als gebundene Zustände dreier Quarks

Als nächstes konstruieren wir die SU(3)-Multipletts der Baryonen. Baryonen sind gebundene Zustände aus drei Quarks qqq. Wenn wir von den drei Quarks u, d und s ausgehen, lassen sich insgesamt zehn unterschiedliche qqq Kombinationen bilden, die in Form eines SU(3)-Dekupletts angeordnet werden, siehe Abb. 14.5. Als die SU(3) Symmetrie entdeckt wurde, waren all diese Resonanzen experimentell bekannt, bis auf das Ω^-, das Mitglied des Dekupletts mit der Zusammensetzung sss, der Seltsamkeit $S = -3$ und dem Isospin $T = 0$. Selbst die Masse des Ω^-

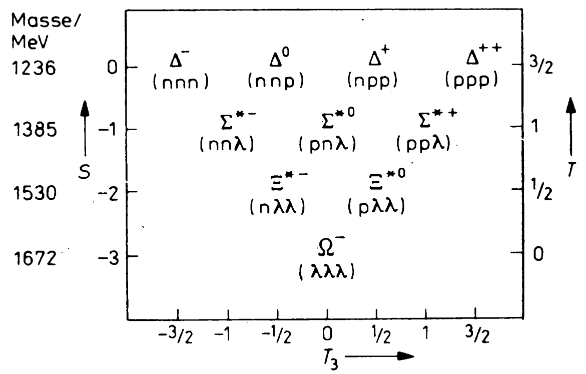


Abb. 14.5
Das SU(3)-Baryonen-Dekuplett mit $I^P = 3/2^+$

läßt sich voraussagen, da die Massendifferenzen $M(\Xi) - M(\Sigma)$ oder $M(\Sigma) - M(\Delta)$ der Isospin-Multipletts mit unterschiedlicher Seltsamkeit etwa gleich groß sind. Diese Tatsache läßt sich mit Hilfe der größeren Masse des s-Quarks im Vergleich zu den u- und d-Quarks erklären. Ein Baryon mit genau den vorhergesagten Eigenschaften wurde wenig später tatsächlich gefunden. Diese bemerkenswerte Vorhersage war einer der ersten Erfolge der Theorie der starken Wechselwirkung überhaupt.

Wenn die qqq Zustände des Dekupletts den Bahndrehimpuls $l = 0$ und alle Quarkspins parallel haben, läßt sich die Spin-Parität $I^P = 3/2^+$ verstehen. Damit sind die Spineigenfunktionen symmetrisch bezüglich der Vertauschung zweier Quarks. Auch die SU(3) Wellenfunktionen des Dekupletts sind symmetrisch bezüglich der Vertauschung zweier Quarks, das ist für die Zustände uuu, ddd und sss einfach zu sehen. Damit ist auch die kompinierte Spin-SU(3)-Eigenfunktion *symmetrisch.*

Zur Klassifizierung der Nukleonen suchen wir ein Multiplett mit Spin-Parität $I^P = 1/2^+$. Wenn wir ebenfalls vom Bahndrehimpuls $l = 0$ ausgehen, dann benötigen wir Spin-Eigenfunktionen mit dem Gesamtspin $I = 1/2$; diese sind antisymmetrisch bezüglich der Vertauschung zweier Quarks. Wenn wir weiterhin fordern, daß die kombinierten SU(3)-Spin-Eigenfunktionen, wie im Falle des Dekupletts, *symmetrisch* sind, dann brauchen wir auch eine antisymmetrische SU(3)-Eigenfunktion; in ihr können die Zustände uuu, ddd und sss nicht auftreten. Aus diesen Forderungen ergibt sich das Baryonen-Oktett in Abb. 14.6., welches alle Grundzustands-Baryonen enthält, die bezüglich der starken Wechselwirkung stabil sind. Während im Falle der Mesonen sowohl die Teilchen als auch die Antiteilchen im gleichen Multiplett zu finden sind, enthalten die Baryonenmultipletts nur Baryonen, die Antibaryonen werden in getrennten Multipletts untergebracht.

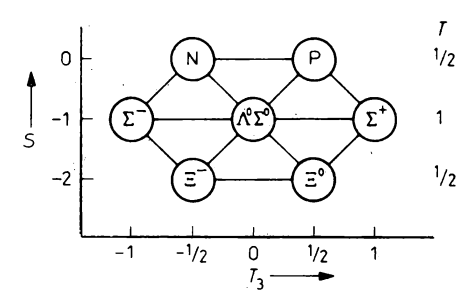


Abb. 14.6
Das SU(3)-Baryonen-Oktett mit $I^P = 1/2^+$

14.1.5. Probleme des Quarkmodells

Wir erwähnen noch kurz einige weitere Anwendungen der SU(3)-Klassifizierung der Hadronen:

Die Gell-Mann-Okubo Massenformel gilt für alle Baryonenmultipletts und gibt die Masse eines Baryons als Funktion seiner Quantenzahlen Isospin T und Hyperladung Y an

$$M = A + BY + C\left(T(T+1) - \frac{1}{4}Y^2\right). \tag{14.13}$$

Dabei sind A, B und C Konstanten, die aus den beobachteten Massen zu bestimmen sind.

Es lassen sich auch Beziehungen zwischen den magnetischen Momenten μ_i der Baryonen herleiten. Dadurch kann man die magnetischen Momente aller Baryonen des $I^P = \frac{1^+}{2}$ Oktetts als Funktion zweier beliebiger, z. B. des μ_p und μ_n ausdrücken

$$\begin{aligned}
\mu_{\Sigma^+} &= \mu_p\,, \\
\mu_{\Sigma^-} &= \mu_{\Xi^-} = (\mu_n + \mu_p)\,, \\
\mu_{\Xi^0} &= \mu_n\,, \\
\mu_\Lambda &= \frac{1}{2}\mu_n\,, \\
\mu_{\Sigma^0} &= -\frac{1}{2}\mu_n\,.
\end{aligned} \tag{14.14}$$

Diese Vorhersagen stimmen ebenfalls recht gut mit den magnetischen Momenten der Hyperonen überein soweit diese bisher gemessen werden konnten (siehe Kapitel 6).

Das Quarkmodell, so wie wir es bisher eingeführt haben, hat einige Eigenschaften, die wir bisher nur schwer verstehen und die wir erst im Abschnitt 14.7., von der Quantenchromodynamik her, erklären können. Solche Eigenschaften sind:

— Es existieren offenbar nur Baryonen der Zusammensetzung qqq und Mesonen der Zusammensetzung $q\bar{q}$. Weshalb gibt es keine qq, qqqq oder $qq\bar{q}\bar{q}$ Zustände?
— Quarks wurden nicht als freie Teilchen gefunden. Eine mögliche Begründung dafür wäre, daß die Massen der Quarks so groß sind, daß sie bisher nicht erzeugt werden konnten. Das würde aber auf enorm hohe Bindungsenergien führen. Statt von dieser Annahme geht man jetzt von der Hypothese des Quark-Einschlusses aus. Das erfordert aber eine Quark-Quark-Wechselwirkung ganz besonderer Natur.
— Wir konstruieren die Quark-Eigenfunktionen der Baryonen als symmetrische Spin-SU(3)-Eigenfunktionen. Das widerspricht der generell für Spin-1/2-Teilchen erwarteten antisymmetrischen Natur der Eigenfunktionen (Pauli-Prinzip). Ein Ausweg aus dieser Schwierigkeit ist es, jeden Quark in drei unterschiedlichen Zuständen anzunehmen, die sich durch eine weitere Eigenschaft unterscheiden. Daraus kann man dann antisymmetrische Zustände mit den alten Quantenzahlen konstruieren. Diese neue Eigenschaft der Quarks nennt man „Farbe".

14.2. Tief unelastische Lepton-Hadron-Streuung

Das klassische Beispiel für die Untersuchung der Struktur der Materie mit Hilfe von Streuexperimenten ist das Rutherford-Experiment. In diesem Experiment wurde ein Strahl energiereicher α-Teilchen auf ein Target geschossen. Die Coulomb-Kraft zwischen den α-Teilchen und den geladenen Konstituenten der Atome im Target lenkt die α-Teilchen ab. Mit Hilfe der gemessenen Winkelverteilung der gestreuten α-Teilchen war es möglich, das Atommodell: „Schwerer geladener Kern umgeben von Elektronen" zu begründen.

Die unelastische Elektron-Streuung an einem Nukleon entspricht dem Rutherford-Experiment. In Frage steht hier die Struktur des Nukleons. Ende der sechziger Jahre standen erstmals Elektronenstrahlen genügend großer Energie zur Verfügung. Die damit durchgeführten tief unelastischen Streuexperimente an Nukleonen zeigten ein Verhalten, das sich am einfachsten durch das Vorhandensein punktförmiger geladener Konstituenten der Nukleonen deuten ließ.

Diese Konstituenten wurden zunächst Partonen genannt. Erst nach und nach wurde es klar, daß die geladenen *Partonen* offenbar mit den Quarks identisch sind. Um das auszudrücken, bezeichnet man sie auch als *Quark-Partonen.*

14.2.1. Elastische Elektron-Nukleon-Streuung

Betrachten wir zunächst die elastische Streuung eines elektrisch geladenen Leptons mit dem Nukleon, also die Elektron-Nukleon- oder Myon-Nukleon-Streuung. In niedrigster Ordnung erhält man für die Streuung an einer ausgedehnten Ladungsverteilung (Abb. 14.7a) den Wirkungsquerschnitt

$$\frac{d\sigma}{dQ^2} = \left[\frac{4\pi\alpha^2}{Q^4}\frac{E'}{E}\cos^2\frac{\Theta}{2}\right] F^2(Q^2)\,. \tag{14.15}$$

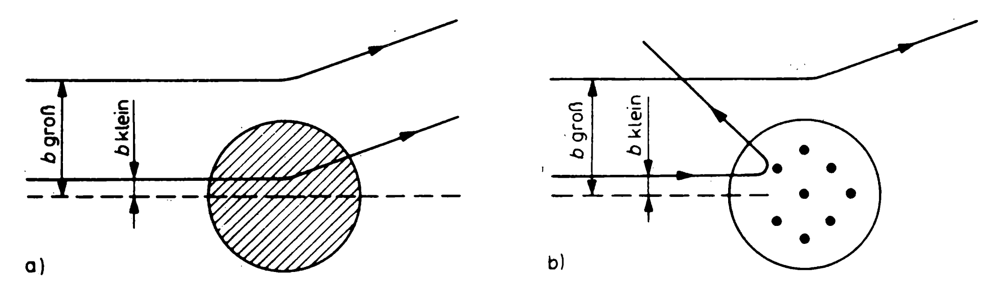


Abb. 14.7
Streuung eines geladenen Teilchens a) an einer Ladungsverteilung, b) an einer Ansammlung von Punktladungen

Dabei ist $Q^2 = -q^2$ das Quadrat des bereits in (13.10) eingeführten Impulsübertrags. E und E' sind die Energien des einlaufenden und des gestreuten Elektrons, und Θ ist der Streuwinkel. (14.15) ist das Produkt des Wirkungsquerschnittes für die Streuung an einer Punktladung (des Ausdrucks in der Klammer) mit dem Quadrat des Formfaktors $F(Q^2)$, der vom Impulsübertrag abhängt. $F(Q^2)$ enthält die Information über die Struktur des Targets. Im nichtrelativistischen Fall, für $Q^2 \ll M^2$ hängt $F(Q^2)$ über eine Fourier-Transformation mit der statischen Ladungsverteilung $\varrho(r)$ des Targets zusammen

$$F(Q^2) = \int \varrho(r)\, e^{i\boldsymbol{qr}}\, d^3\boldsymbol{r}\,. \tag{14.16}$$

Diese Deutung ist bei relativistischen Energien nicht mehr möglich, da sich eine solche Beziehung nicht Lorentzinvariant definieren läßt.

Bei der Elektron-Nukleon Streuung tritt eine Komplikation durch die Tatsache auf, daß das Nukleon neben der Ladung auch ein magnetisches Moment besitzt. Deshalb braucht man zwei Formfaktoren, den elektrischen Formfaktor $G_E(Q^2)$ und den magnetischen Formfaktor $G_M(Q^2)$. Damit erhält man die Rosenbluth-Formel für den elastischen Elektron-Proton Streuquerschnitt:

$$\frac{d\sigma}{dQ^2} = \left[\frac{4\pi\alpha^2}{Q^4}\frac{E'}{E}\cos^2\frac{\Theta}{2}\right]\left\{\frac{G_E^2(Q^2) + \tau G_M^2(Q^2)}{1+\tau} + 2\tau G_M^2(Q^2)\,\mathrm{tg}^2\frac{\Theta}{2}\right\} \tag{14.17}$$

Dabei ist $\tau = Q^2/4M_p^2$.

Durch Streuexperimente bei festem Q^2 und verschiedenen Streuwinkeln Θ lassen sich die Formfaktoren $G_E(Q^2)$ und $G_M(Q^2)$ experimentell bestimmen. Experimentelle Daten stehen heute im Bereich bis $Q^2 = 25\,(\text{GeV})^2$ zur Verfügung. Diese Daten für die Formfaktoren von Protonen und Neutronen lassen sich mit einer Genauigkeit von etwa 10% durch den „Dipol"-Formfaktor darstellen.

$$G_E^p(Q^2) = \frac{G_M^p(Q^2)}{\mu_p} = \frac{G_M^n(Q^2)}{\mu_n} = \frac{1}{\left(1 + \frac{Q^2}{0{,}71\,(\text{GeV})^2}\right)}\,; \qquad G_E^n(Q^2) = 0\,. \tag{14.18}$$

Dabei sind die μ_p und μ_n die magnetischen Momente des Protons und des Neutrons. Es ist interessant, daß die Fouriertransformation dieses Formfaktors eine exponentiell mit r abfallende Ladungsverteilung mit einem mittleren quadratischen Radius von 0,8 Fm ergibt. Es genügt uns jedoch, aus der Existenz des Formfaktors zu schlußfolgern, daß Proton und Neutron keine elementaren, sondern zusammengesetzte Teilchen sind.

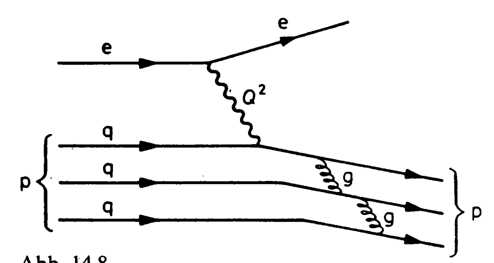


Abb. 14.8
Elastische Streuung eines Elektrons mit einem Proton, welches aus drei Konstituenten besteht

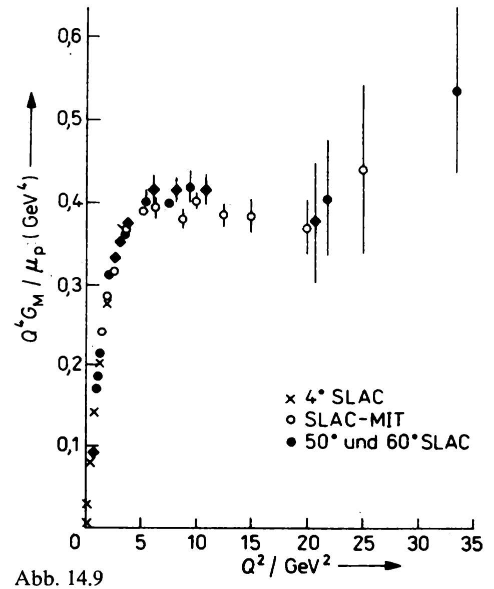


Abb. 14.9
Experimentelle Daten für den magnetischen Formfaktor des Protons multipliziert mit Q^4 und aufgetragen als Funktion von Q^2

Nehmen wir an, daß das Nukleon, wie in Abb. 14.8, aus einigen punktförmigen Konstituenten besteht, die durch die starke Wechselwirkung gebunden sind. Das Nukleon bleibt beim elastischen Stoß mit einem großen Impulsübertrag Q^2 nur dann als Nukleon gebunden, wenn wenigstens ein Teil des Impulsübertrags zwischen dem Konstituenten, mit dem das Elektron wechselwirkt, und den anderen Konstituenten ausgetauscht wird. In jeder Feldtheorie bewirkt ein solcher Austausch eines Feldquants zwischen zwei der Konstituenten einen Beitrag von $1/Q^2$ zum Formfaktor. Wenn das Nukleon N Konstituenten hat, erwartet man also bei großen Werten von Q^2 einen Formfaktor proportional zu $1/Q^{2(N-1)}$. Sowohl die Dipolformfaktoren als auch die experimentellen Daten für die Formfaktoren, die in Abb. 14.9 mit Q^4 multipliziert und über Q^2 aufgetragen werden, ergeben $2(N - 1) = 4$ und damit $N = 3$. Das Verhalten des Formfaktors bei großen Q^2 läßt sich also als ein Anzeichen dafür deuten, daß das Nukleon aus drei Konstituenten besteht.

14.2.2. Unelastische Lepton-Nukleon-Streuung

Wir kommen nun zur unelastischen Elektron-Nukleon-Streuung. In Abb. 14.10 zeigen wir die Elektronenenergieverteilung bei der unelastischen Streuung eines Elektrons am He-Kern und in Abb. 14.11 das gleiche für die unelastische Streuung des Elektrons am Proton. Im Fall der Streuung am Kern beobachtet man ein scharfes Maximum, welches der elastischen e-^{4}He-Streuung entspricht und ein breites Maximum bei kleineren Energien. Das breite Maximum rührt von der elastischen Streuung der Elektronen an einzelnen Nukleonen des He-Kerns her. Wir haben also die in Abb. 14.7b gezeichnete Situation. Wir erwarten dieses Maximum in der Nähe derjenigen Energie der elastischen Streuung an freien Protonen, die in Abb. 14.10 angedeutet ist. Durch die Fermi-Impulsverteilung der Nukleonen im Kern wird die Verteilung verbreitert. Ähnliche Eigenschaften beobachten wir im Energiespektrum der elastischen Elektron-Nukleon-Streuung in Abb. 14.11. Unterhalb des elastischen Maximums beobachten wir einige weitere Maxima, die auf die Anregung des Nukleons zu einigen Nukleonenresonanzen zurückzuführen sind (eN → eN*). Wie im Fall der Elektron-Kern-Streuung interpretieren wir das breite Kontinuum unterhalb der Resonanzmaxima als ein Zeichen für die quasielastische Elektron-Streuung an den geladenen Konstituenten des Nukleons. Natürlich besteht auch ein

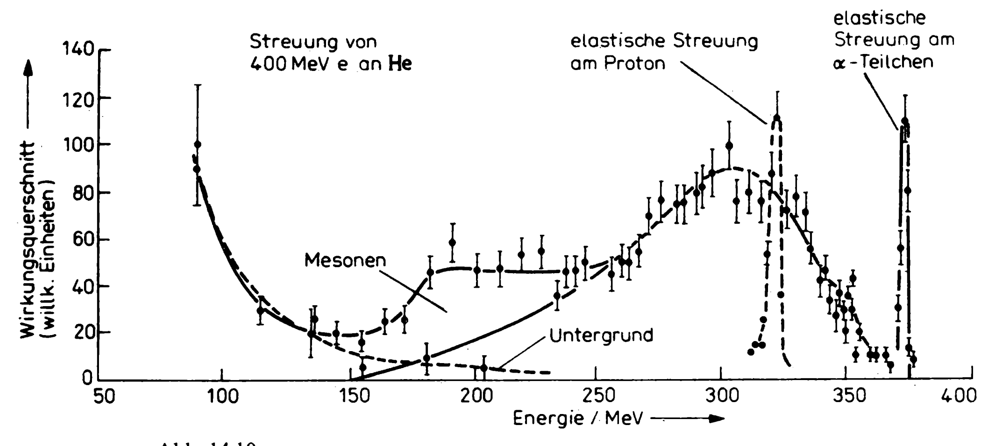


Abb. 14.10
Streuung von 400 MeV Elektronen an einem Helium-Kern

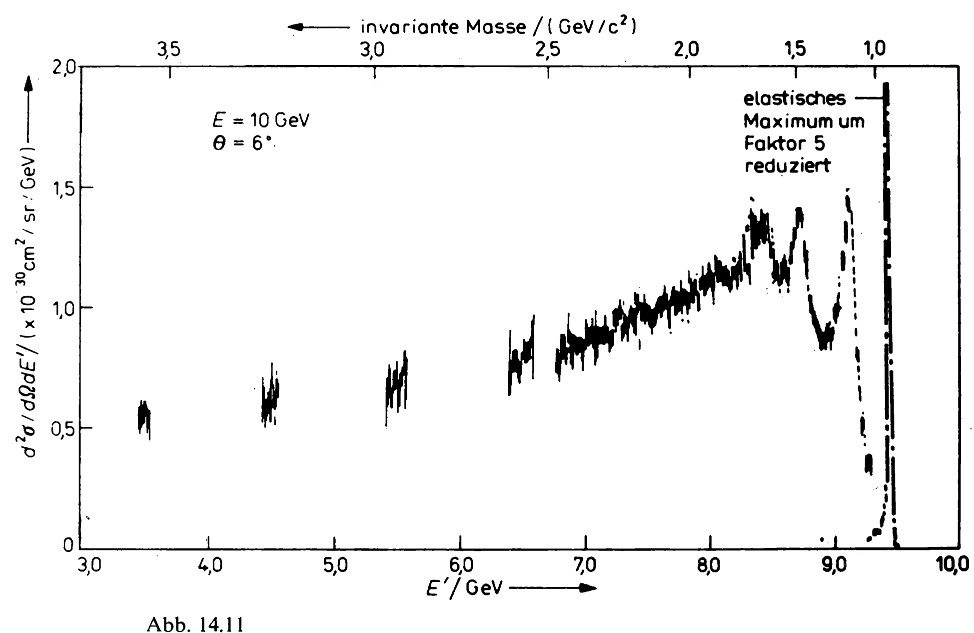


Abb. 14.11
Unelastische Elektron-Proton-Streuung

beträchtlicher Unterschied zwischen der unelastischen Elektron-Kern-Streuung und der Elektron-Nukleon-Streuung. Die Dynamik der Nukleonen des Kerns ist nicht relativistisch. Die gestreuten Nukleonen lassen sich nach der unelastischen Streuung beobachten. Die Konstituenten des Protons lassen sich hingegen nicht einzeln beobachten. Die aus dem Nukleon herausgeschlagenen Partonen lassen sich höchstens in Form eines Jets von Hadronen beobachten. Weiterhin ist die Dynamik der Partonen im Nukleon höchstwahrscheinlich relativistisch.

Um die tief unelastische Lepton-Nukleon-Streuung quantitativ zu verstehen, müssen wir zunächst den unelastischen Streuquerschnitt für den Prozeß

$$\mathrm{l} + \mathrm{N} \to \mathrm{l}' + \text{Hadronen} \tag{14.19}$$

definieren, siehe dazu auch Abb. 14.12. E, E' und Θ seien wieder die Laborenergien des einlaufenden und gestreuten Leptons und der Streuwinkel im Laborsystem. Das Lepton verliert die Energie $\nu = E - E'$. Das invariante Quadrat des Impulsübertrages am Leptonvertex ist $Q^2 = -q^2 = 2EE'(1 - \cos\Theta)$. Wir definieren weiterhin W^2 als Quadrat der hadronischen

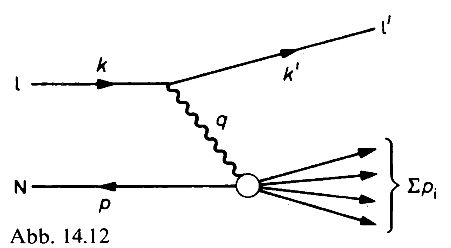


Abb. 14.12
Feynman-Diagramm der unelastischen Lepton(l)-Nukleon(N)-Streuung
$\mathrm{l} + \mathrm{N} \to \mathrm{l}' + \text{Hadronen}$

Gesamtenergie oder auch der Schwerpunktenergie des Stoßes zwischen dem virtuellen Photon und dem Nukleon (siehe Abb. 14.12),

$$W^2 = (p + q)^2 = M^2 + 2p \cdot q + q^2 = M^2 + 2M\nu - Q^2 . \tag{14.20}$$

Der unelastische Elektron-Nukleon-Wirkungsquerschnitt hat eine Form ähnlich zum elastischen Wirkungsquerschnitt (14.17). Da die Streuung unelastisch ist, tritt neben dem Streuwinkel oder dem Impulsübertrag als weitere Variable die Energie des gestreuten Elektrons E' oder der Energieverlust ν auf

$$\frac{d^2\sigma^{eN}}{dQ^2\,d\nu} = \frac{\pi}{EE'}\frac{d^2\sigma}{d\Omega\,dE'} = \frac{4\pi\alpha^2}{Q^2}\frac{E'}{E}\left(W_2^{eN}(Q^2,\nu)\cos^2\frac{\Theta}{2} + 2W_1^{eN}(Q^2,\nu)\sin^2\frac{\Theta}{2}\right). \tag{14.21}$$

Die beiden Funktionen W_2 und W_1 beschreiben ähnlich wie die elastischen Formfaktoren in (14.17) die innere Struktur der Nukleonen. Sie werden als unelastische *Strukturfunktionen* des Nukleons bezeichnet. Da die Strukturfunktion W_1 nur bei großen Werten von Θ beiträgt, wo aber der Wirkungsquerschnitt sehr klein ist, wird der Streuquerschnitt hauptsächlich durch die Strukturfunktion W_2 bestimmt.

Eine hervorstehende Eigenschaft der experimentellen Daten für die unelastische Elektro-Streuung ist die Form der Q^2-Abhängigkeit. Das Verhältnis des unelastischen Wirkungsquer-

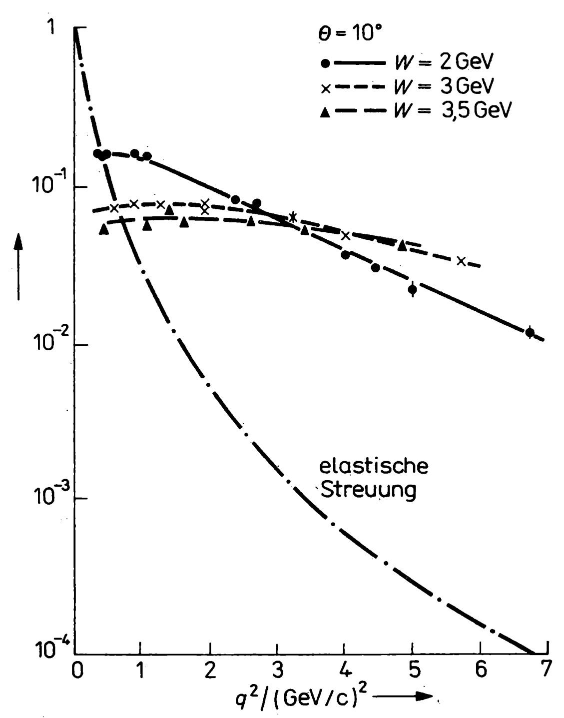


Abb. 14.13
Vergleich der Q^2-Abhängigkeit der unelastischen und elastischen Elektron-Proton-Streuquerschnitte. Beide sind geteilt durch den Wirkungsquerschnitt für die Streuung an einem punktförmigen Target

schnitts zum Wirkungsquerschnitt der Streuung an einem punktförmigen Target hängt bei festem W^2 nur ganz schwach von Q^2 ab. Das steht im Gegensatz zum elastischen Streuquerschnitt, wo dieses Verhältnis wie der Formfaktor mit $1/Q^4$ abfällt. Beide Verhältnisse werden in Abb. 14.13 verglichen. Der unelastische Wirkungsquerschnitt zeigt also effektiv das Verhalten der Streuung an einem punktförmigen Target.

Eine weitere auffallende Eigenschaft der experimentellen Daten ist das angenäherte Bjorken-Skalenverhalten, welches zunächst als exakt gültig angenommen wurde. Man definiert die Skalen-Variable

$$x = \frac{Q^2}{2M\nu}\,. \tag{14.22}$$

Unter dem Bjorken-Skalenverhalten versteht man, daß in der Grenze $\nu \to \infty$, $Q^2 \to \infty$, aber endlichem x, die Strukturfunktionen nicht mehr einzeln von ν und Q^2 abhängen, sondern nur noch von den Skalenvariablen x

$$\begin{aligned} 2MW_1(Q^2, \nu) &= F_1(x, Q^2) \to F_1(x)\,, \\ \nu W_2(Q^2, \nu) &= F_2(x, Q^2) \to F_2(x)\,. \end{aligned} \tag{14.23}$$

Heute stehen uns experimentelle Daten aus einem großen kinematischen Bereich in den Variablen ν und Q^2 zur Verfügung, und es ist klar, daß die Strukturfunktionen F_1 und F_2 nicht genau das Skalenverhalten zeigen. Sie hängen sowohl von x als auch von Q^2 ab. Die Q^2-Abhängigkeit der Funktionen $F_i(x, Q^2)$ ist jedoch nur logarithmisch, viel schwächer als bei den elastischen Formfaktoren. In Abb. 14.14a zeigen wir experimentelle Daten für $F_2(x, Q^2)$, die diese schwache Q^2-Abhängigkeit zeigen. Ein solches logarithmisches Abweichen vom Bjorken-Skalenverhalten wurde von der Quantenchromodynamik (QCD) vorhergesagt. Daten wie die in Abb. 14.14a werden als Bestätigung für diese Vorhersage der QCD angesehen. Für die weiteren Betrachtungen in diesem Abschnitt werden wir diese geringen Abweichungen vom Skalenverhalten meist vernachlässigen.

An dieser Stelle ist es zweckmäßig darauf einzugehen, daß die tief unelastische Lepton-Nukleon-Streuung nicht nur mit geladenen Leptonen (Elektronen oder Myonen), sondern auch mit Neutrinos möglich ist. Seit Mitte der siebziger Jahre stehen genügend intensive und energiereiche Strahlen von Myon-Neutrinos ν_μ und Myon-Antineutrinos $\bar{\nu}_\mu$ zur Verfügung.

Zur Neutrino-Nukleon-Streuung kommt es auf Grund der schwachen, nicht der elektromagnetischen Wechselwirkung wie im Fall der Elektronen- oder Myonenstreuung. Dadurch unterscheiden sich auch die Wirkungsquerschnitte für die unelastischen Neutrino- oder Antineutrino-Streuprozesse

$$\begin{aligned} \nu_\mu + \mathrm{N} &\to \mu^- + \text{Hadronen}\,, \\ \bar{\nu}_\mu + \mathrm{N} &\to \mu^+ + \text{Hadronen} \end{aligned} \tag{14.24}$$

etwas von dem Wirkungsquerschnitt der geladenen Leptonen (14.21)

$$\begin{aligned} \frac{d^2\sigma^{\nu(\bar{\nu})\mathrm{N}}}{dQ^2\, d\nu} = \frac{G^2 E'}{2\pi E} \Bigg[& W_2^{\nu(\bar{\nu})\mathrm{N}}(Q^2, \nu) \cos^2\frac{\Theta}{2} + 2W_1^{\nu(\bar{\nu})\mathrm{N}}(Q^2, \nu) \sin^2\frac{\Theta}{2} \\ & \mp \frac{E + E'}{M} W_3^{\nu(\bar{\nu})\mathrm{N}}(Q^2, \nu) \Bigg]\,. \end{aligned} \tag{14.25}$$

Dabei sind die Variablen ebenso definiert wie oben. E' ist hier natürlich die Energie des Myons im Endzustand. G ist die Fermi-Kopplungskonstante der schwachen Wechselwirkung. Infolge

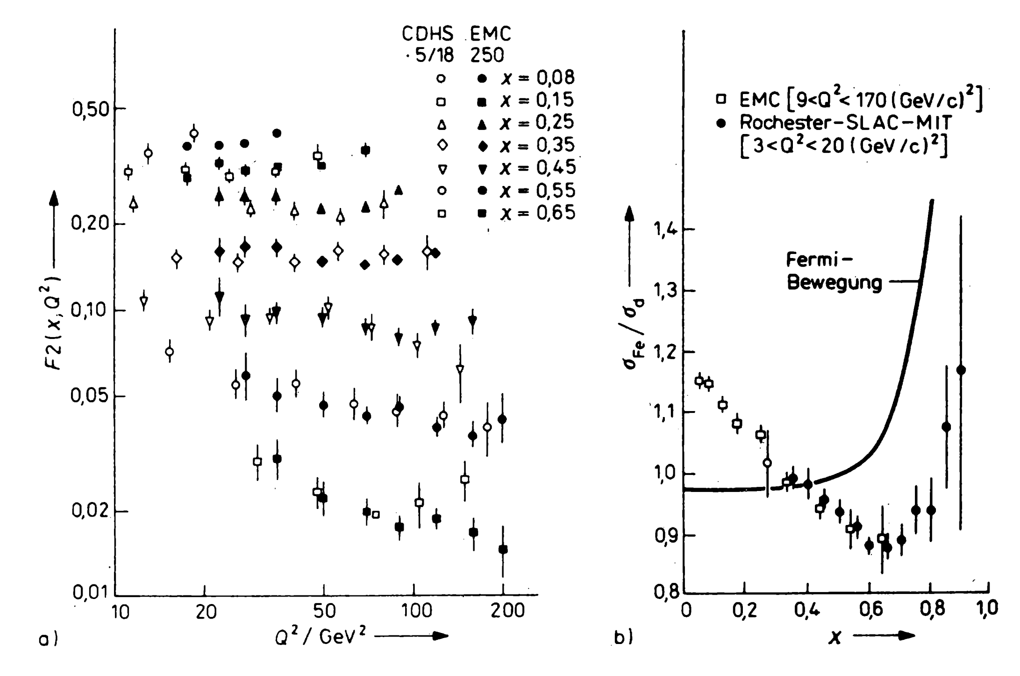


Abb. 14.14
a) Das genäherte Bjorken-Skalenverhalten der Strukturfunktion $F_2(x, Q^2)$. Die Datenpunkte aus einem festen x-Bereich zeigen nur eine sehr schwache, etwa logarithmische Abhängigkeit von Q^2. Die Daten wurden mit Hilfe der unelastischen Myon-Nukleon-Streuung erhalten. Wir vergleichen gleichzeitig $F_2^{\mu N}(x, Q^2)$ mit den Daten, die in der unelastischen Neutrino-Nukleon-Streuung erhalten wurden $5/18 F_2^{\nu N}(x, Q^2)$ und finden eine gute Übereinstimmung
b) Abhängigkeit der tiefunelastischen Streuung vom Target-Kern. Verhältnis des differentiellen Wirkungsquerschnittes an Fe- und D-Targets. Nach der Europäischen Myonen Collaboration, die diesen Effekt entdeckte, wird er als EMC-Effekt bezeichnet

der Struktur der schwachen Wechselwirkung tritt bei der Energie der gegenwärtigen Experimente keine Q^2-Abhängigkeit der Wirkungsquerschnitte für die Streuung der Neutrinos an punktförmigen Targets auf. Durch die paritätsverletzende Eigenschaft der schwachen Wechselwirkung kommt es zu einer dritten Strukturfunktion W_3. Auch für die Strukturfunktionen der Neutrino-Nukleon-Streuung findet man das genäherte Skalenverhalten (14.23), wobei wir ergänzen müssen

$$\nu W_3(Q^2, \nu) = F_3(x, Q^2) \to F_3(x) . \tag{14.26}$$

Die Daten in Abb. 14.14a zeigen, daß die mit Hilfe von Neutrinostreuexperimenten an Kernen gemessenen Strukturfunktionen $F_2(x, Q^2)$ offenbar den in Elektron- oder Myonstreuexperimenten gemessenen weitgehend entsprechen.

Im Jahre 1983 fand man, daß die unelastischen Strukturfunktionen eine überraschende Abhängigkeit vom Targetkern zeigen, daß es also nicht möglich ist, die Protonen- oder Neutronenstrukturfunktionen mit Hilfe nuklearer Targets zu messen. In Abb. 14.14b zeigen wir das Verhältnis des differentiellen tief unelastischen Wirkungsquerschnittes pro Nukleon an Eisen und an Deuterium. Nur der Anstieg des Verhältnisses bei großen Werten der Bjorken-x-

Variablen läßt sich über die Fermi-Bewegung der Nukleonen im Kern verstehen. Der Anstieg des Verhältnisses bei kleinen x-Werten deutet darauf hin, daß sich die Quark-Parton-Verteilungen der in Kernen gebundenen Nukleonen von denen freier Nukleonen unterscheiden.

14.2.3. Experimentelle Untersuchung der tief unelastischen Lepton-Hadron-Streuung

Die experimentelle Untersuchung der tief unelastischen Lepton-Hadron-Streuung begann gegen Ende der sechziger Jahre mit den Elektron-Proton-Streuexperimenten am amerikanischen SLAC-Elektronenlinearbeschleuniger in Stanford. Bei diesen Experimenten wurde der monoenergetische Elektronenstrahl des Linearbeschleunigers auf ein Wasserstofftarget gelenkt. Der Impuls der gestreuten Elektronen wurde mit Hilfe eines großen magnetischen Spektrometers bestimmt. Der Streuwinkel, bei dem gemessen wird, läßt sich dadurch verändern, daß das gesamte Spektrometer von etwa 30 m Länge um eine durch das Target verlaufende Achse gedreht werden kann. Das Impulsspektrum der gestreuten Teilchen läßt sich bei festem Streuwinkel vermessen, indem die Felder der Spektrometermagneten verändert werden.

Ein beträchtliches Problem bei solchen Experimenten besteht in der Trennung des zu messenden Effekts, der unelastischen Elektron-Proton-Streuung, von unerwünschten Untergrundprozessen. Zu diesem Untergrund tragen π-Mesonen bei, die im Target erzeugt wurden. π^--Mesonen laufen durch das Spektrometer und könnten als unelastisch gestreute Elektronen identifiziert werden. Man setzt Čerenkov-Zähler oder Schauer-Detektoren ein, um zwischen π^- und e^- zu unterscheiden. π^0-Mesonen, die im Target erzeugt werden, sind die Quelle von e^+e^--Paaren; entweder durch den direkten — sogenannten Dalitz-Zerfall — oder durch den Zerfall $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$ und anschließende Konversion dieser Photonen in e^+e^--Paare. Die Elektronen dieser Paare werden natürlich im magnetischen Spektrometer ebenfalls registriert. Um diesen Effekt von der unelastischen Streuung abzutrennen, kehrt man das Feld aller Spektrometermagnete um. Dadurch wird die Positronerzeugung gemessen. Der so gemessene Positronenfluß wird anschließend vom gemessenen Elektronenfluß abgezogen.

Abb. 14.11 zeigt das Elektronenspektrum, welches auf diese Art und Weise für eine konstante Primärenergie von 10 GeV und dem festen Streuwinkel von $\Theta = 6°$ als Funktion der Energie E' der gestreuten Elektronen gemessen wird. Natürlich wird neben der unelastischen Streuung auch die elastische Streuung gemessen. Die unelastische Streuung besteht (a) in der Anregung des Targetprotons in Nukleonenresonanzen, das führt zu dem Streumaxima unterhalb des elastischen Maximums, und (b) aus einem breiten Kontinuum bei kleineren Elektronenenergien.

Die obere Abzissenachse von Abb. 14.11 gibt die „fehlende Masse" W an, das ist die bei dem Streuprozeß unbeobachtete Hadronenmasse im Endzustand. Diese Achse ist sehr bequem, um die Anregung der Hadronenresonanzen zu beobachten. Meist zeichnet man deshalb den beobachteten unelastischen Wirkungsquerschnitt $d^2\sigma/d\Omega\, dE'$ als Funktion der „fehlenden Masse" W und nicht als Funktion der Elektronenenergie E'.

Die Daten in Abb. 14.11 stellen noch nicht den wirklichen unelastischen Streuquerschnitt dar. Es sind weitere Korrekturen nötig, die die Strahlungskorrekturen, d. h. die Abstrahlung von Photonen während des Streuprozesses sowie elastische und unelastische Streuprozesse der gestreuten Elektronen in Teilen der Apparatur, dem Target, der Vakuumkammer, den Detektoren usw., berücksichtigen.

Abb. 14.15 zeigt den Einfluß dieser Korrekturen auf das gemessene Elektronenspektrum. Abb. 14.15a zeigt das unkorrigierte Spektrum, Abb. 14.15b das korrigierte Spektrum und Abb. 14.15c das Verhältnis des korrigierten zum unkorrigierten Spektrum.

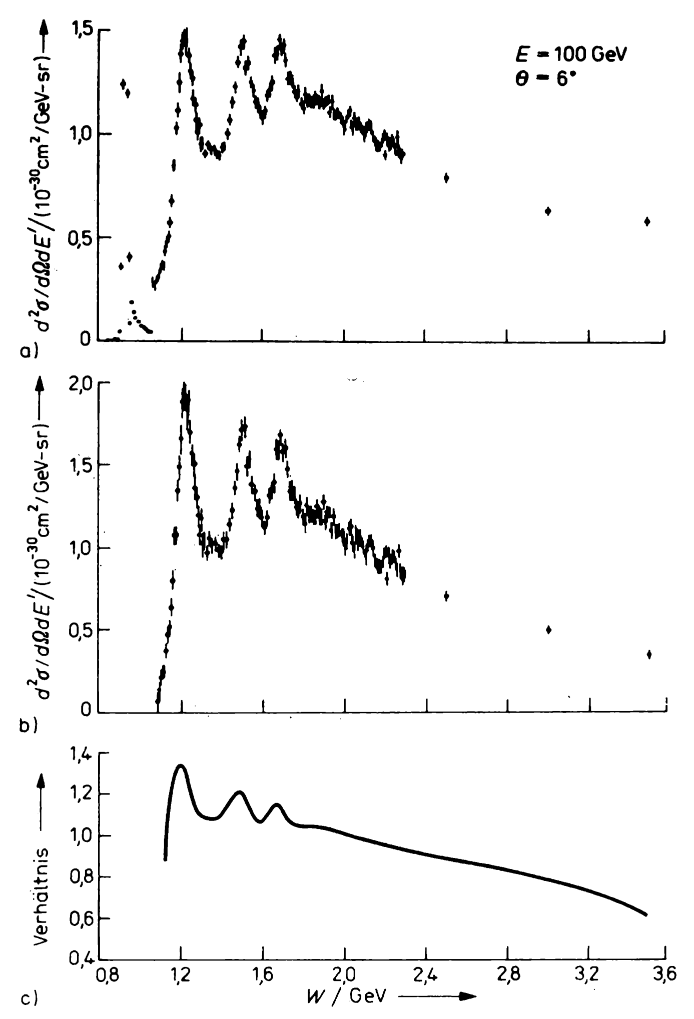


Abb. 14.15
Berücksichtigung der Strahlungskorrekturen bei der tief unelastischen Elektron-Positron-Streuung
a) das unkorrigierte Spektrum
b) das korrigierte Spektrum
c) Verhältnis des korrigierten zum unkorrigierten Spektrum
In allen Fällen wird der differentielle Wirkungsquerschnitt $d^2\sigma/d\Omega\, dE'$ für den festen Winkel $\Theta = 6°$ als Funktion der invarianten hadronischen Masse W aufgetragen

Die genauesten und umfangreichsten Messungen der tief unelastischen Lepton-Hadron-Streuung liegen heute von Experimenten mit Hilfe von Myonen- und Neutrinostrahlen an Protonenbeschleunigern vor. Im Folgenden soll der Aufbau zweier solcher Experimente kurz beschrieben werden.

Wir beschreiben als erstes ein Experiment zur Untersuchung der tief unelastischen Myon-Nukleon-Streuung, welches am Myonenstrahl des CERN-SPS installiert ist. Die Erzeugung

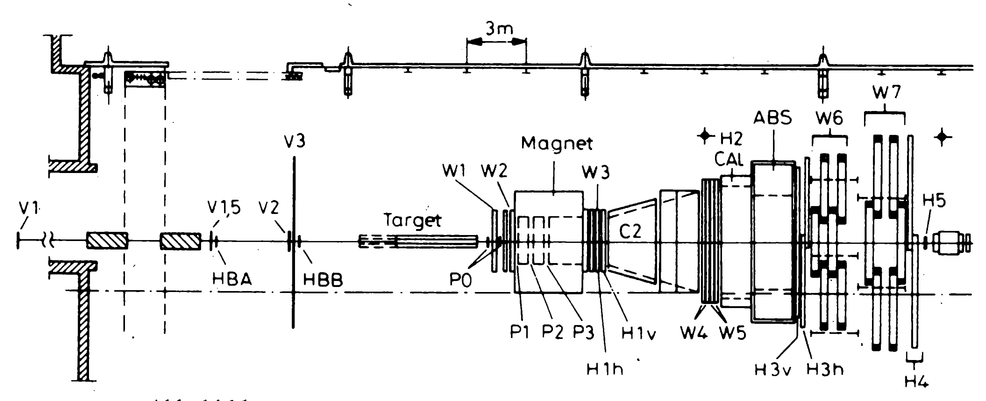


Abb. 14.16
Ein großes Spektrometer zur Messung der tief unelastischen Myon-Nukleon-Streuung im Myonenstrahl des CERN-SPS

eines intensiven Myonenstrahls an einem Protonenbeschleuniger erfordert bereits einen beträchtlichen Aufwand. Der primäre Protonenstrahl des Protonensynchrotrons wird zunächst ausgelenkt und in eine Targetzone transportiert. Durch die Wechselwirkungen der Primärprotonen im Target entstehen sehr viele π^+- und π^--Mesonen. In einem magnetischen Strahltransportsystem, bestehend aus Quadrupolmagneten für die Fokussierung und Ablenkmagneten, wird ein intensiver Strahl von π^+- oder π^--Mesonen eingefangen und über eine Strecke von mehr als einem Kilometer transportiert. In diesem Kanal zerfallen die π-Mesonen in Myonen und Neutrinos. Das fokussierende System ist so ausgelegt, daß ein großer Teil der Zerfallsmyonen weitertransportiert wird und schließlich das installierte Experiment erreicht. Der Myonenstrahl des CERN-SPS (Protonenenergie 400 GeV) enthält bei einer Myonenenergie von 200 GeV entweder $1{,}5 \cdot 10^7\ \mu^+$ oder $5 \cdot 10^6\ \mu^-$ pro Zyklus. Die maximale Energie der Myonen beträgt 280 GeV. Leptonen derartig hoher Energie stehen heute nur an Protonenbeschleunigern zur Verfügung. Abb. 14.16 zeigt den Aufbau des eigentlichen Experiments zur Messung der unelastischen Myon-Proton-Wechselwirkung. Der Myonenstrahl trifft zunächst auf ein 6 m langes Target aus flüssigem Wasserstoff. Infolge des geringen Streuquerschnittes von Myonen mit Hadronen muß das Target sehr lang gewählt werden. Die erste Stufe des magnetischen Spektrometers besteht aus einem Dipol-Magnet mit sehr großer Apertur (2 m × 1 m) mit einem Ablenkfeld von 5 Tm. Diesem Magnetfeld folgt ein Filter aus magnetisiertem Eisen, welches erlaubt, die gestreuten Myonen, von denen die meisten den Eisenblock ohne Wechselwirkung durchlaufen, von Hadronen (die im Eisenblock wechselwirken) zu unterscheiden. Drift-Kammern und Proportionalkammern sind vor und nach dem Magneten angeordnet. Sie erlauben es, die Position der Spuren geladener Teilchen genau zu bestimmen und den Impuls der gestreuten Myonen mit einer Genauigkeit von etwa 1 % anzugeben, sowie den Streuwinkel mit einer Genauigkeit von etwa $\pm 0{,}1$ mrad zu bestimmen. Die Registrierung eines Streuereignisses in der Apparatur wird ausgelöst durch ein Signal in drei Ebenen eines Szintillator-Hodoskops hinter dem magnetisierten Eisenblock, dessen Magnetfeld hauptsächlich dazu dient, niederenergetische Myonen abzulenken und auszuschließen, die vom Zerfall von π-Mesonen herrühren. Ein Čerenkov-Zähler zwischen dem Dipolmagneten und dem Eisenblock dient zur Teilchenidentifikation in einem begrenzten Impulsbereich. Ein Szintillationskalorimeter mit einer Tiefe von 5 Wechselwirkungslängen dient hauptsächlich zum Nachweis neutraler Teilchen.

Als nächstes schildern wir den Aufbau eines Experiments zur Untersuchung der tief unelastischen Neutrino-Nukleon-Streuung. Wir stellen in Abb. 14.17 zunächst die zu untersuchenden

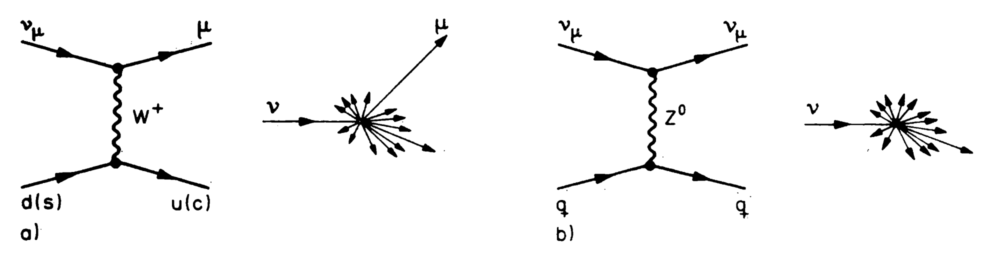


Abb. 14.17
Feynman-Diagramme und typische Ereignisse der Neutrino-Quark-Wechselwirkung
a) geladene Ströme $\nu_\mu q \to \mu q'$
b) neutrale Ströme $\nu_\mu q \to \nu_\mu q'$

Prozesse bei der Neutrino-Nukleon-Wechselwirkung dar. Das einlaufende Neutrino wechselwirkt mit den Quarks des Targets über die geladenen oder neutralen Ströme der schwachen Wechselwirkung. Im Fall der geladenen Ströme wird im Endzustand ein Myon und ein Hadronenjet erwartet. Im Fall der Wechselwirkung über neutrale Ströme läßt sich nur der sekundäre Hadronenjet beobachten. Die Beobachtung oder Nichtbeobachtung eines hochenergetischen Myons unterscheidet also beide Prozesse. Ein Neutrinodetektor sollte also in der Lage sein, ein hochenergetisches Myon zu identifizieren und seinen Streuwinkel und Impuls zu messen.
Weiterhin sollten die Impulse und Winkel der erzeugten Hadronen oder zumindest die Gesamtenergie der erzeugten Hadronen gemessen werden. Der Gesamtwirkungsquerschnitt für die Neutrino-Nukleon-Wechselwirkung ist sehr klein. Er beträgt für geladene Ströme

$$\sigma(\nu_\mu N \to \mu^- X) = 0{,}6 \cdot 10^{-38}\, E\,\mathrm{cm}^2\,,$$

$$\sigma(\bar{\nu}_\mu N \to \mu^+ X) = 0{,}28 \cdot 10^{-38}\, E\,\mathrm{cm}^2\,,$$

wobei die Neutrinoenergie E in GeV gemessen wird. Um überhaupt Streuereignisse zu finden, wird sowohl ein sehr intensiver Neutrinostrahl als auch ein sehr großes Target benötigt.

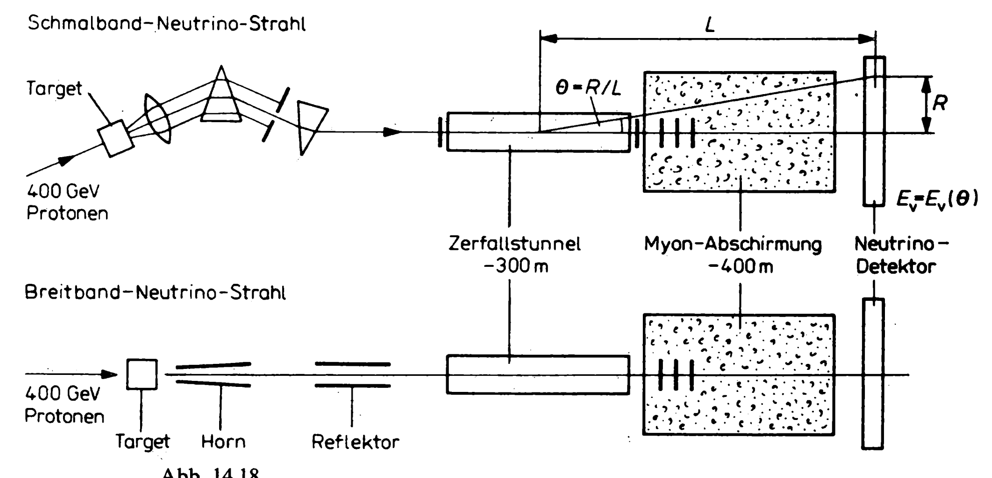


Abb. 14.18
Schematische Anordnung des schmalbandigen und breitbandigen Neutrinostrahls am CERN-SPS. Der Zerfallstunnel und die Myonen-Abschirmung werden für beide Strahlen genutzt

Neutrinostrahlen an hochenergetischen Protonenbeschleunigern sind ebenfalls wie die Myonen strahlen tertiäre Strahlen. Die Neutrinos stammen vom Zerfall sekundärer Pionen und Kaonen

$$\pi^{\pm} \to \mu^{+}(\mu^{-}) + \nu(\bar{\nu}),$$
$$K^{\pm} \to \mu^{+}(\mu^{-}) + \nu(\bar{\nu}).$$

Das Neutrino-Spektrum vom Zerfall ist flach bis zur maximalen Neutrinoenergie

$$E_{max} = E_{\pi}(1 - m_{\mu}^2/m_{\pi}^2)$$
$$E_{max} = E_{K}(1 - m_{\mu}^2/m_{K}^2).$$

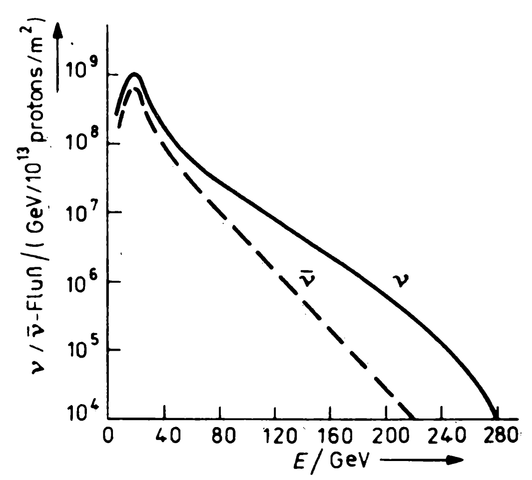


Abb. 14.19
Das Neutrino-Energiespektrum des breitbandigen Neutrinostrahls am CERN-SPS

Neutrinos vom K-Zerfall erreichen also höhere Energien. Wenn die Energie des Pions oder Kaons bekannt ist, genügt eine Kenntnis des Winkels des Neutrinos, um seine Energie zu bestimmen. In Abb. 14.18 zeigen wir schematisch den Aufbau der Neutrinostrahlen am CERN-SPS. Der primäre Protonenstrahl fällt auf ein Target. Im nachfolgenden System werden nur entweder positive oder negative Sekundärteilchen vom Target fokussiert; gleichzeitig erfolgt eine Impulsauswahl im schmalbandigen Neutrinostrahl. Nach dem fokussierenden System durchlaufen die π- und K-Mesonen einen langen Zerfallstunnel. Am Ende des Zerfallstunnels folgt eine 400 m lange Eisenabschirmung, deren Aufgabe es ist, alle Myonen (vom π- und K-Zerfall) und Hadronen aus dem Strahl zu entfernen. Zum Abstoppen eines Myons rechnet man grob 0,5 m Eisen pro GeV Energie des Myons. In der Eisenabschirmung sind gleichzeitig Myonendetektoren angebracht. Durch Messung des Flusses der Zerfallsmyonen ist es möglich, den Neutrinofluß zu berechnen. Das Energiespektrum der erzeugten Neutrinos im breitbandigen Neutrinostrahl wird in Abb. 14.19 abgebildet. Das Maximum des Spektrums liegt bei etwa 20 GeV. Die Intensität des breitbandigen Neutrinostrahls ist zwar sehr groß, aber im Falle einer Neutrino-Wechselwirkung im Detektor ist nichts über die Neutrinoenergie bekannt. Im Falle des schmalbandigen Neutrinostrahls kann die Energie durch Messung des Emissionswinkels der Neutrinos bestimmt werden. Diesen Winkel kann man durch eine Messung des transversalen Abstandes des Ereignisvertex von der Strahlachse bestimmen. Die Intensität des schmalbandigen Neutrinostrahls ist jedoch nur etwa 1 % des breitbandigen Strahls. Der kleine

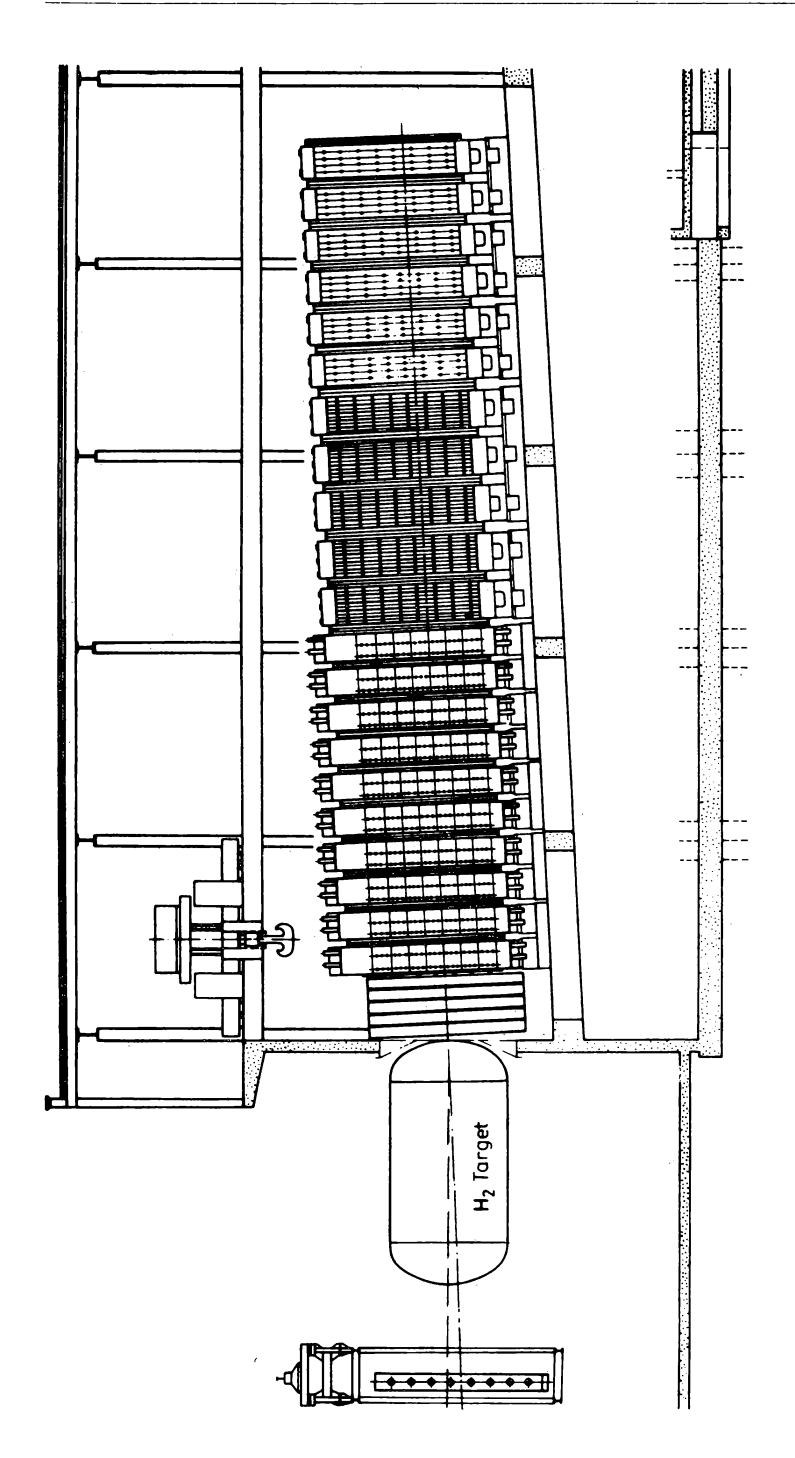


Abb. 14.20
Ein großer universeller Detektor zur Untersuchung der Neutrino-Nukleon-Wechselwirkung am CERN-SPS

Streuquerschnitt der Neutrinos und die große transversale Ausdehnung des Neutrinostrahls führen zur Forderung, daß das Neutrinotarget und der Detektor in einem Gerät vereinigt sind. In Abb. 14.20 zeigen wir einen riesigen Detektor, der im Neutrinostrahl des CERN-SPS installiert ist. Der Detektor besteht aus 1500 t Eisen in Form runder Platten mit einem Durchmesser von 3,75 m. Eisenplatten von je 75 cm Dicke sind zu toroidalen Magneten zusammengefaßt. Zwischen den Eisenplatten, deren Dicke 5 cm bei den ersten sieben Magneten und 15 cm bei den folgenden acht Magneten beträgt, sind Szintillatoren angeordnet, mit deren Hilfe die Ionisationsenergie der Hadronenkaskaden gemessen wird. Eisenplatten und Szintillatoren wirken als Ionisationskalorimeter für die Hadronenkaskaden. Die Myonen werden durch ihre Reichweite im Eisen identifiziert. Drift-Kammern zwischen den Eisenplatten messen die Position der Myonspuren und damit den Impuls der Myonen mit einer Genauigkeit von etwa 10 %.

14.2.4. Tief unelastische Streuung im Quark-Parton-Modell

Im Quark-Parton-Modell deutet man den unelastischen Streuquerschnitt als die inkohärente Summe der Streuprozesse an den punktförmigen Konstituenten des Targets. In Abb. 14.21 geben wir dafür ein Feynman-Diagramm an. Einer der punktförmigen Konstituenten des Nukleons trägt einen gewissen Bruchteil des Impulses p des Nukleons. Die unelastische Streuung besteht in der elastischen Streuung des Leptons mit diesem Konstituenten. Für die elektromagnetische Streuung von Elektronen oder Myonen an Konstituenten mit Spin 1/2 (Fermionen) des Nukleons ergibt sich die grundlegende Beziehung

$$xF_1(x) = F_2(x) = \Sigma\, e_i^2 x f_i(x)\,. \qquad (14.27)$$

Die beiden Strukturfunktionen (14.23) sind verknüpft mit den Impulsverteilungen $f_i(x)$ der Partonen i im Nukleon, e_i ist die Ladung des Partons i in Einheiten der Elektronladung. Partonverteilungsfunktionen $f_i(x)$ geben die Verteilung der Impulsanteile x der Partonen i im Nukleon. Auch die Strukturfunktionen der Neutrino- oder Antineutrino-Nukleon-Streuung lassen sich mit Hilfe dieser Partonverteilungen $f_i(x)$ darstellen; und auch dafür gilt die Callan-Gross-Beziehung $xF_1(x) = F_2(x)$. Wir gehen im weiteren davon aus, daß die geladenen Partonen des Nukleons mit den bereits im Abschnitt 14.1. eingeführten Quarks identisch sind und bezeichnen die Quarkverteilungsfunktionen mit dem Symbol des Quarks $f_i(x) = q_i(x)$. Zum Beispiel bezeichnet $\mathrm{u}(x)$ die Verteilung der u-Quarks im Proton und $\bar{\mathrm{d}}(x)$ ist die Verteilung der $\bar{\mathrm{d}}$-Quarks im Proton.

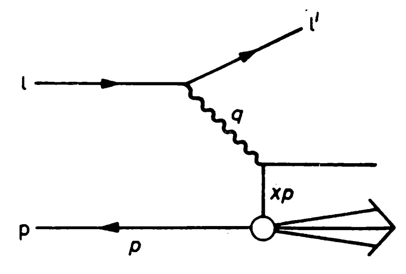


Abb. 14.21
Tief unelastische Streuung im Parton-Modell. Die unelastische Elektron-Nukleon-Streuung wird gedeutet als elastische Streuung des Elektrons mit einem Konstituenten des Nukleons, der den Impulsanteil x_p des Nukleons trägt

Aus der Isospinsymmetrie zwischen Proton und Neutron folgt sofort, daß die Quarkverteilungen im Neutron aus denen des Protons erhalten werden können

$$\begin{aligned} u(x) &= u^p(x) = d^n(x)\,, \\ d(x) &= d^p(x) = u^n(x)\,, \\ s(x) &= s^p(x) = s^n(x)\,. \end{aligned} \tag{14.28}$$

Mit diesen Bezeichnungen und den Quarkladungen $e_u = 2/3$ für u-Quarks und $e_d = -1/3$ für d- und s-Quarks erhalten wir für die Elektron-Proton- und Elektron-Neutron-Strukturfunktionen

$$\begin{aligned} F_1^{ep}(x) &= \frac{4}{9}(u(x) + \bar{u}(x)) + \frac{1}{9}(d(x) + \bar{d}(x) + s(x) + \bar{s}(x))\,, \\ F_1^{en}(x) &= \frac{4}{9}(d(x) + \bar{d}(x)) + \frac{1}{9}(u(x) + \bar{u}(x) + s(x) + \bar{s}(x))\,. \end{aligned} \tag{14.29}$$

Tabelle 14.1
Unelastische Strukturfunktionen der Neutrino- und Antineutrino-Nukleon-Streuung im Quark-Parton-Modell. Für die meisten Anwendungen vernachlässigt man den Cabibbo-Winkel Θ_C und setzt $\sin^2\Theta_C = 0$ und $\cos^2\Theta_C = 1$:

$$\begin{aligned}
F_1^{\nu p}(x) &= 2(\bar{u}(x) + d(x)\cos^2\Theta_C + s(x)\sin^2\Theta_C) \\
F_1^{\nu n}(x) &= 2(\bar{d}(x) + u(x)\cos^2\Theta_C + s(x)\sin^2\Theta_C) \\
F_1^{\bar{\nu} p}(x) &= 2(u(x) + \bar{d}(x)\cos^2\Theta_C + \bar{s}(x)\sin^2\Theta_C) \\
F_1^{\bar{\nu} n}(x) &= 2(d(x) + \bar{u}(x)\cos^2\Theta_C + \bar{s}(x)\sin^2\Theta_C) \\
F_3^{\nu p}(x) &= 2(\bar{u}(x) - d(x)\cos^2\Theta_C - s(x)\sin^2\Theta_C) \\
F_3^{\nu n}(x) &= 2(\bar{d}(x) - u(x)\cos^2\Theta_C - s(x)\sin^2\Theta_C) \\
F_3^{\bar{\nu} p}(x) &= 2(-u(x) + \bar{d}(x)\cos^2\Theta_C + \bar{s}(x)\sin^2\Theta_C) \\
F_3^{\bar{\nu} n}(x) &= 2(-d(x) + \bar{u}(x)\cos^2\Theta_C + \bar{s}(x)\sin^2\Theta_C)
\end{aligned}$$

In Tabelle 14.1 geben wir die Ausdrücke für die Neutrino- und Antineutrino-Nukleon-Strukturfunktionen in dieser Form an. Aus (14.29) folgt eine Ungleichung

$$\frac{1}{4} \leqq \frac{F_2^{en}(x)}{F_2^{ep}(x)} \leqq 4\,, \tag{14.30}$$

die auch mit den experimentellen Daten konsistent ist. Wenn wir in Tabelle 14.1 bei den Neutrino-Nukleon-Strukturfunktionen den Cabibbo-Winkel Θ_C vernachlässigen, d. h. $\cos^2\Theta_C = 1$ und $\sin^2\Theta_C = 0$ setzen, erhalten wir einige weitere grundlegende Beziehungen zwischen den Strukturfunktionen

$$\left.\begin{aligned} F_i^{\nu n}(x) &= F_i^{\bar{\nu} p}(x) \\ F_i^{\nu p}(x) &= F_i^{\bar{\nu} n}(x) \end{aligned}\right\} \quad (i = 1{,}3)\,, \tag{14.31}$$

$$F_1^{ep}(x) - F_1^{en}(x) = \frac{1}{6}(F_3^{\nu p} - F_3^{\bar{\nu} p}(x))\,.$$

Für die Streuung an Kernen (genau an solchen Kernen, die aus der gleichen Zahl von Protonen und Neutronen bestehen) sind die Summen der Strukturfunktionen des Protons und Neutrons

relevant. Dafür ergibt sich eine Beziehung zwischen den Strukturfunktionen, die in Elektron-Kern- oder Neutrino-Kern-Stößen gemessen werden:

$$\frac{F_2^{\mathrm{ep}}(x) + F_2^{\mathrm{en}}(x)}{F_2^{\nu\mathrm{p}}(x) + F_2^{\nu\mathrm{n}}(x)} = \frac{\frac{5}{9}\,(\mathrm{u}(x) + \bar{\mathrm{u}}(x) + \mathrm{d}(x) + \bar{\mathrm{d}}(x)) + \frac{2}{9}\,(\mathrm{s}(x) + \bar{\mathrm{s}}(x))}{2(u(x) + \bar{u}(x) + \mathrm{d}(x) + \bar{\mathrm{d}}(x))} \geqq \frac{5}{18}\,. \tag{14.32}$$

Wenn wir die Verteilung der s-Quarks im Nukleon vernachlässigen — und das ist eine recht gute Näherung — gilt das Gleichheitszeichen. In Abb. 14.14a hatten wir bereits gesehen, daß diese Beziehung experimentell sehr gut erfüllt ist.

Wir können auch die Beziehungen der Form (14.29) umkehren und nach den Quarkverteilungen auflösen. Dafür sind besonders die Strukturfunktionen der unelastischen Neutrino-Nukleon-Streuung in Tabelle 14.1 sehr gut geeignet. Wir erhalten z. B.

$$\begin{aligned}
\mathrm{u}(x) &= \frac{1}{4}\,(F_1^{\bar{\nu}\mathrm{p}}(x) - F_3^{\bar{\nu}\mathrm{p}}(x))\,,\\
\bar{\mathrm{u}}(x) &= \frac{1}{4}\,(F_1^{\nu\mathrm{p}}(x) + F_3^{\nu\mathrm{p}}(x))\,,\\
\mathrm{d}(x) &= \frac{1}{4}\,(F_1^{\nu\mathrm{p}}(x) - F_3^{\nu\mathrm{p}}(x))\,,\\
\bar{\mathrm{d}}(x) &= \frac{1}{4}\,(F_1^{\bar{\nu}\mathrm{p}}(x) + F_3^{\bar{\nu}\mathrm{p}}(x))\,.
\end{aligned} \tag{14.33}$$

In Abb. 14.22 geben wir einige auf diese Weise erhaltene Quarkverteilungen an. Wir finden, daß die „Valenz"-Quarks u und d des Protons mittlere x-Werte von 0,15—0,2 besitzen, während die Antiquarks, die zum „Quark-Antiquark-See" des Protons gehören, durch Werte $x < 0{,}1$ charakterisiert werden. Da die Verteilungen $xq_i(x)$ in Abb. 14.22 bei kleinen x-Werten endliche Werte annehmen, verhalten sich die Quarkverteilungen für kleine x offenbar wie $q_i(x) \sim \frac{1}{x}$. Für die Quarkverteilungen und damit die Strukturfunktionen gelten auch Beziehungen, die

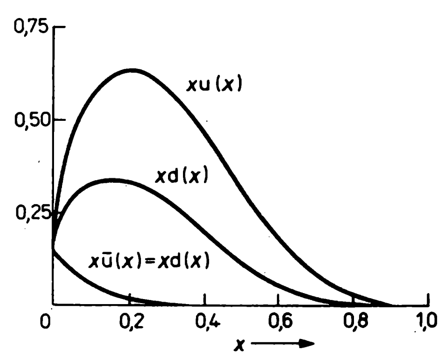


Abb. 14.22
Quarkverteilungen für u-, d-, ū- und d̄-Quarks im Proton

als Summenregeln bezeichnet werden und die mit der Erhaltung der Ladung, des Isospins und der Seltsamkeit des Protons verknüpft sind, z. B.

$$\int_0^1 (u(x) - \bar{u}(x))\, dx = 2\,,$$

$$\int_0^1 (d(x) - \bar{d}(x))\, dx = 1\,, \tag{14.34}$$

$$\int_0^1 (s(x) - \bar{s}(x))\, dx = 0\,.$$

Die mit x gewichteten Verteilungen $xq(x)$ geben die Verteilung der Impulsanteile der Quark-Partonen im Proton. Die Impulserhaltung fordert

$$\int_0^1 x\, dx\, (u(x) + \bar{u}(x) + d(x) + \bar{d}(x) + s(x) + \bar{s}(x)) = 1 - \varepsilon\,, \tag{14.35}$$

wobei ε der Anteil des Protonenimpulses ist, der von neutralen Partonen getragen wird. Wir werden im Abschnitt 14.7 sehen, daß die Gluonen, die Feldquanten der QCD, solche neutrale Partonen sind. (14.35) läßt sich mit Hilfe der gemessenen Strukturfunktionen schreiben als

$$\int_0^1 dx \left(\frac{9}{2}\,(F_2^{ep}(x) + F_2^{en}(x)) - \frac{3}{4}\,(F_2^{\nu p}(x) + F_2^{\nu n}(x))\right) = 1 - \varepsilon\,. \tag{14.36}$$

Das Experiment ergibt für dieses Integral etwa 0,5. Daraus folgt, daß die Gluonen, die weder elektromagnetische noch schwache Wechselwirkung besitzen, und die deshalb in Elektron- oder Neutrinostreuexperimenten nicht „gesehen" werden können, etwa die Hälfte des Protonenimpulses tragen.

14.3. Elektron-Positron-Annihilation in Hadronen

Seit der Mitte der siebziger Jahre wurde die Untersuchung von e^+e^--Stößen in Elektron-Positron-Speicherringen das produktivste experimentelle Verfahren der Hochenergiephysik insgesamt. In e^+e^--Stößen wurden seither eine große Zahl neuer Teilchen und neuer Erscheinungen experimentell entdeckt bzw. untersucht. Wir erwähnen hier nur: Die Entdeckung der J/Ψ (3,1 GeV/c^2)-Teilchen zusammen mit vielen anderen Teilchen des Charmonium-Systems, die Entdeckung von Mesonen mit Charm-Quantenzahlen, die Entdeckung der schweren

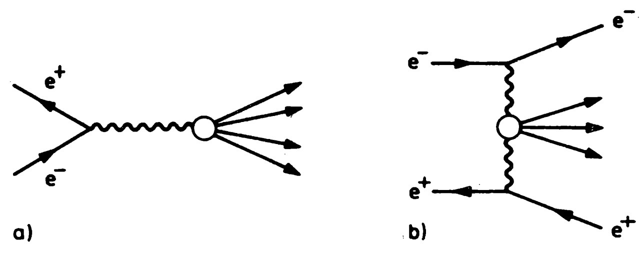


Abb. 14.23
Prozesse niedrigster Ordnung, die zur Hadronenerzeugung in e^+e^--Annihilationsreaktionen beitragen
a) Einphotonenannihilation, b) Zweiphotonenannihilation

Leptonen τ (1.782 GeV/c^2), die Untersuchung der Teilchen Y, Y′, Y″ und Y‴ das Bottomonium-Systems und schließlich den Nachweis von Quarkjets und Gluonjets. Der Vorteil der e^+e^--Annihilationsreaktionen gegenüber Hadron-Hadron-Stößen besteht darin, daß e^+ und e^- elementare punktförmige Teilchen sind, deren Wechselwirkung wohlbekannt ist. Hadronen hingegen sind zusammengesetzte Teilchen mit einer sehr komplizierten und noch nicht hinreichend verstandenen Wechselwirkung. Die experimentelle Untersuchung der e^+e^--Annihilation in Hadronen hat insbesondere weitere wichtige experimentelle Hinweise für die Quark-Dynamik gegeben.

Wir werden uns hier auf die Einphotonenannihilation (siehe Abb. 14.23a) beschränken. Die experimentellen Untersuchungen haben sich bisher fast ausschließlich auf diesen Prozeß beschränkt. Da der Wirkungsquerschnitt der Einphotonenannihilationsreaktion wie $1/E_{\text{CM}}^2$ abnimmt, aber der der Zweiphotonenwechselwirkung (Abb. 14.23b) wie $\ln E_{\text{CM}}^2$ ansteigt, ist zu erwarten, daß in Zukunft bei höheren Energien und beim Vorhandensein geeigneter Detektoren der Zweiphotonenprozeß eine immer größere Rolle spielen wird.

14.3.1. Quark-Modell der Hadronenerzeugung in der e^+e^--Annihilation

In diesem Abschnitt besprechen wir die Erzeugung von Hadronen in der e^+e^--Annihilationsreaktion. Im Abschnitt 14.4. werden wir die Teilchenfamilien des Charmonium- und Bottomonium-Systems einschließlich ihrer Erzeugung in e^+e^--Stößen beschreiben.

Das hadronische System, welches durch die Einphotonenannihilation erzeugt werden kann, hat die Quantenzahlen des Photons, also Spin-Parität-Ladungskonjugation $I^{PC} = 1^{--}$. Wenn der Gesamtdrehimpuls $I = 1$ ist, kann der Bahndrehimpuls der einlaufenden e^+ und e^- nur $l = 0$ oder $l = 2$ sein. Da im optischen Modell $l = R \cdot E$ gilt, verhält sich der Wechselwirkungsradius wie $R \sim 1/E$, und das Verhalten des Gesamtwirkungsquerschnitts für die Erzeugung von Hadronen ist wie folgt zu erwarten

$$\sigma^{\text{tot}} = \alpha^2 \pi R^2 = \frac{\alpha^2 \pi}{E_{\text{CM}}^2} \approx \frac{60\,\text{nb}}{E_{\text{CM}}^2}, \qquad (E_{\text{CM}} \text{ in GeV}). \tag{14.37}$$

Aus der Spin-Parität $I^P = 1^-$ folgt auch die Winkelverteilung der erzeugten Teilchen bezüglich der Strahlrichtung

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = a + b\cos^2\Theta. \tag{14.38}$$

Wir hatten bei der Behandlung der tief unelastischen Elektron-Nukleon-Streuung gesehen, daß die Wechselwirkung des virtuellen Photons mit dem Hadron im wesentlichen aus der Wechselwirkung des virtuellen Photons mit einem Quark des Nukleons besteht (Abb. 14.21). Folglich erwarten wir auch, daß die Reaktion $e^+e^- \to \gamma \to$ Hadronen über die Bildung eines Quark-Antiquark-Paares verläuft, siehe Abb. 14.24. Wenn die Quarks Teilchen mit Spin 1/2

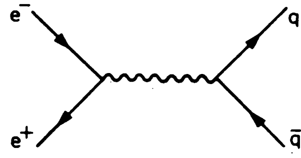


Abb. 14.24
Die Elektron-Positron-Annihilation in Hadronen verläuft über die Annihilation in ein Quark-Antiquark-Paar

sind, unterscheidet sich diese Reaktion nur durch die Ladung des Quarks von der entsprechenden Reaktion $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$, die wir im Abschnitt 13.2. bereits behandelt haben. Wir erwarten deshalb den Wirkungsquerschnitt

$$\sigma(e^+e^- \to q_i\bar{q}_i) = Q_i^2\sigma(e^+e^- \to \mu^+\mu^-) = \frac{Q_i^2\, 4\pi\alpha^2}{3E_{CM}^2}. \tag{14.39}$$

Wenn wir weiterhin annehmen, daß sich das einmal erzeugte $q\bar{q}$-Paar mit der Wahrscheinlichkeit 1 in Hadronen umwandelt, erhalten wir den hadronischen Gesamtwirkungsquerschnitt durch die Summation über alle $q\bar{q}$-Paare

$$\sigma^{tot}(e^+e^- \to \text{Hadronen}) = \sum_i Q_i^2\sigma(e^+e^- \to \mu^+\mu^-). \tag{14.40}$$

Meist werden, wie in Abb. 14.25, experimentelle Daten nur für das Verhältnis R angegeben

$$R = \frac{\sigma^{tot}(e^+e^- \to \text{Hadronen})}{\sigma^{tot}(e^+e^- \to \mu^+\mu^-)} = \sum_i Q_i^2. \tag{14.41}$$

Durch die Messung von R läßt sich also etwas über die Gesamtzahl der Quarks lernen, die bei einer bestimmten Schwerpunktsenergie erzeugt werden können. Welche Größe erwarten wir für R im Quarkmodell?

Quark-Modell	$\sum_i Q_i^2$;
u, d, s	$\frac{4}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} = \frac{2}{3}$,
u, d, s mit je 3 Farben	$3 \cdot \frac{2}{3} = 2$,
u, d, s, c mit 3 Farben	$3 \cdot \frac{10}{9} = \frac{10}{3}$,
u, d, s, c mit 3 Farben und das Lepton τ	$\frac{10}{3} + 1 = \frac{13}{3}$,
u, d, s, c, b mit 3 Farben und das Lepton τ	$3 \cdot \frac{11}{9} + 1 = \frac{11}{3} + 1 = \frac{14}{3}$.

(14.42)

Im Gebiet unterhalb der Schwellenergie für die Charm-Erzeugung, d. h. für $1 \leqq E_{CM} \leqq 3$ GeV, ergeben die Experimente $R \approx 2$. Das ist konsistent mit der Existenz dreier leichter Quarks, die wir bereits kennen. Die Quarks müssen jedoch je in drei Zuständen existieren, die sich durch die Farb-Quantenzahlen unterscheiden. Diese experimentellen Daten für R gehören zu den überzeugendsten experimentellen Hinweisen für die Farbe der Quarks. Oberhalb der Charm-Schwelle, im Gebiet $5 \leqq E_{CM} \leqq 9$ GeV ergibt das Experiment $R \approx 4{,}5$. Das ist mit der Existenz der 4 farbigen Quarks u, d, s und c und des schweren Leptons τ konsistent. Das τ-Lepton zerfällt ebenfalls hauptsächlich in Hadronen. Da seine Ladung $Q_\tau = -1$ beträgt, trägt es eine Einheit zu R bei. Oberhalb der Schwelle für $b\bar{b}$ Erzeugung bei etwa 10 GeV ändert sich R fast nicht, das ist mit der Ladung $Q_b = -\frac{1}{3}$ des b-Quarks konsistent.

Insgesamt liegen die experimentellen R-Werte im gesamten Gebiet etwas über der Erwartung (14.42). Liegt das an der Existenz weiterer noch nicht entdeckter Teilchen? In der Quantenchromodynamik erwartet man jedoch, daß sich R den asymptotischen Werten (14.42) langsam von oben nähert:

$$R = \sum_i Q_i^2[1 + b/\log(E_{CM}^2/Q_0^2) + \ldots]. \tag{14.43}$$

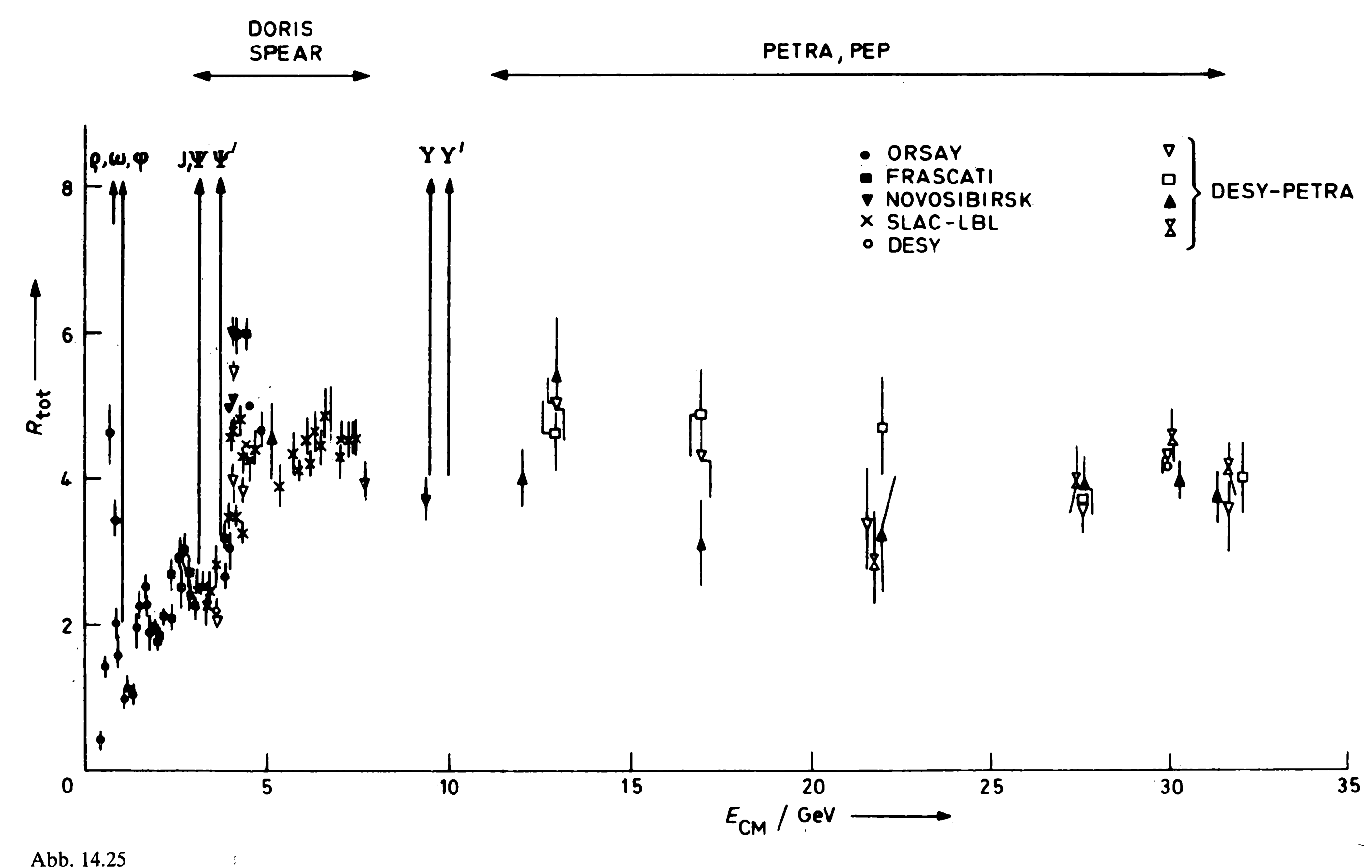


Abb. 14.25
Das Verhältnis $R = \sigma(e^+e^- \to \text{Hadronen})/(e^+e^- \to \mu^+\mu^-)$ als Funktion der Schwerpunktenergie E_{CM}. Die Signale der Vektormesonen ϱ, ω, Φ, J, ψ, ψ′, Υ und Υ′ sind zu schmal, um sie im Maßstab dieser Darstellung zu zeichnen. Die eingezeichneten Meßwerte wurden in den bezeichneten Labors gewonnen

Dabei ist Q_0^2 eine vom Experiment zu bestimmende Konstante, und für Quarks mit drei Farben gilt $b = 4/9$.

14.3.2. Erzeugung von Vektormesonen in der e^+e^--Annihilation

Die bisherige Diskussion bezieht sich auf das Hochenergieverhalten des Gesamtwirkungsquerschnittes. Bei niedrigen Energien $E_{CM} < 1{,}2$ GeV und jeweils in der Nähe der Schwellenergie für die Erzeugung eines neuen schweren Quark-Antiquark-Paares erwarten wir die Erzeugung von Vektormesonen mit den gleichen Quantenzahlen wie denen des Photons $J^{PC} = 1^{--}$. Wir hatten bereits im Abschnitt 14.1. bei der Behandlung der Vektormesonen ϱ^0, ω und Φ im Quarkmodell gesehen, daß ϱ^0 und ω aus Mischungen der Quarkzustände $u\bar{u}$ und $d\bar{d}$ bestehen und daß das Φ nahezu ein reiner $s\bar{s}$-Zustand ist. In gleicher Weise ist das 1974 gleichzeitig in Proton-Kern-Stößen und bei der e^+e^--Annihilation entdeckte J/Ψ (3,1 GeV/c^2)-Teilchen der niedrigste Charmonium-Zustand, ein gebundener Zustand der Quarks mit Charm $c\bar{c}$. Das Teilchen Y (9,46 GeV/c^2), welches 1977 zunächst in p-Kern-Stößen entdeckt und seither auch mit Hilfe der e^+e^--Annihilation untersucht wurde, ist ein gebundener Zustand der Quarks mit der Bottom-Quantenzahl $b\bar{b}$. Der Wirkungsquerschnitt für die Erzeugung eines Vektor-

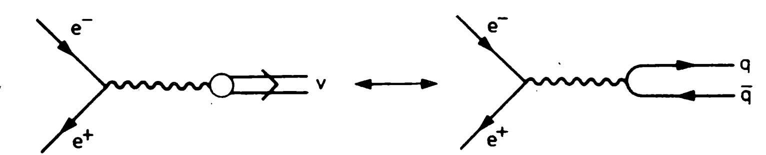


Abb. 14.26
Erzeugung von Vektormesonen in Elektron-Positron-Stößen als Erzeugung eines Quark-Antiquark-Paares, dessen gebundener Zustand das Vektor-Meson V darstellt

Tabelle 14.2
Quarkinhalt der Vektormesonen und Zerfallsbreiten der Vektormesonen in den e^+e^--Endzustand

Vektormeson	ϱ^0	ω	Φ	J/Ψ	Ψ'	Y	Y'
Masse (GeV/c^2)	0,77	0,783	1,02	3,1	3,687	9,46	10,02
Quarkmodell	$\frac{1}{2}(u\bar{u} - d\bar{d})$	$\frac{1}{2}(u\bar{u} + d\bar{d})$	$s\bar{s}$	$c\bar{c}$	$c\bar{c}$	$b\bar{b}$	$b\bar{b}$
$(\Sigma\, C_i Q_i)^2$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{4}{9}$		$\frac{1}{9}$	
$12(\Sigma\, C_i Q_i)^2$	6	0,67	1,33	5,33		1,33	
$\Gamma^V_{e^+e^-(\mathrm{Exp})}$ (keV)	6,4 ± 0,8	0,76 ± 0,17	1,1 ± 0,15	4,8 ± 0,6	2,2 ± 0,3	1,3 ± 0,2	0,3
$\Gamma^V_{\mathrm{Hadronen}}$ (Exp) (MeV)	150			0,07	0,23	≈0,05	

mesons V und seines Zerfalls in den Endzustand f wird in der Nähe der Resonanz $E_{CM} \approx M_V c^2$ durch eine Breit-Wigner-Resonanzkurve gegeben

$$\sigma(e^+e^- \to V \to f) = \frac{3\pi}{E_{CM}^2} \frac{\Gamma_{ee}^V \Gamma_f^V}{((E_{CM} - M_V)^2 + \Gamma^{V^2}/4)} . \tag{14.44}$$

Dabei ist Γ^V die gesamte Zerfallsbreite der Resonanz und Γ_{ee}^V und Γ_f^V sind die partiellen Breiten der Übergänge $V \to e^+e^-$ und $V \to f$. Wenn das Vektormeson V der gebundene Zustand eines Quarks mit seinem Antiquark ist, dann muß, wie in Abb. 14.26 angedeutet, seine Erzeugung mit der Erzeugung des entsprechenden Quark-Antiquarkpaares im e^+e^--Stoß verknüpft sein. Die Quark-Antiquark-Erzeugung mit dem Wirkungsquerschnitt $\sigma_{q\bar{q}} = Q_i^2 \sigma_{\mu^+\mu^-}$ ist proportional zum Quadrat der entsprechenden Quarkladung. Somit verstehen wir zumindest qualitativ, daß die Breite Γ_{ee}^V, die laut (14.44) über die Größe des Wirkungsquerschnittes $e^+e^- \to V$ entscheidet, in guter Näherung proportional zum Quadrat der entsprechenden Quarkladungen ist (siehe dazu Tabelle 14.2).

14.3.3. Hadronenformfaktoren im Gebiet zeitartiger Impulsüberträge

Bei niedriger Energie, im Gebiet der ϱ^0-, ω- und Φ-Vektormesonen, besteht der Gesamtwirkungsquerschnitt der Hadronenerzeugung nur aus wenigen exklusiven Endzuständen wie der Erzeugung von $\pi^+\pi^-$ oder K^+K^--Paaren. Solche Zweiteilchenerzeugungsquerschnitte, z. B. für $\pi^+\pi^-$:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(e^+e^- \to \pi^+\pi^-) = \frac{\alpha^2}{8E_{CM}^2}\left(\frac{p_\pi}{E_\pi}\right)^3 \sin^2\Theta \; |F_\pi(E_{CM}^2)|^2 \tag{14.45}$$

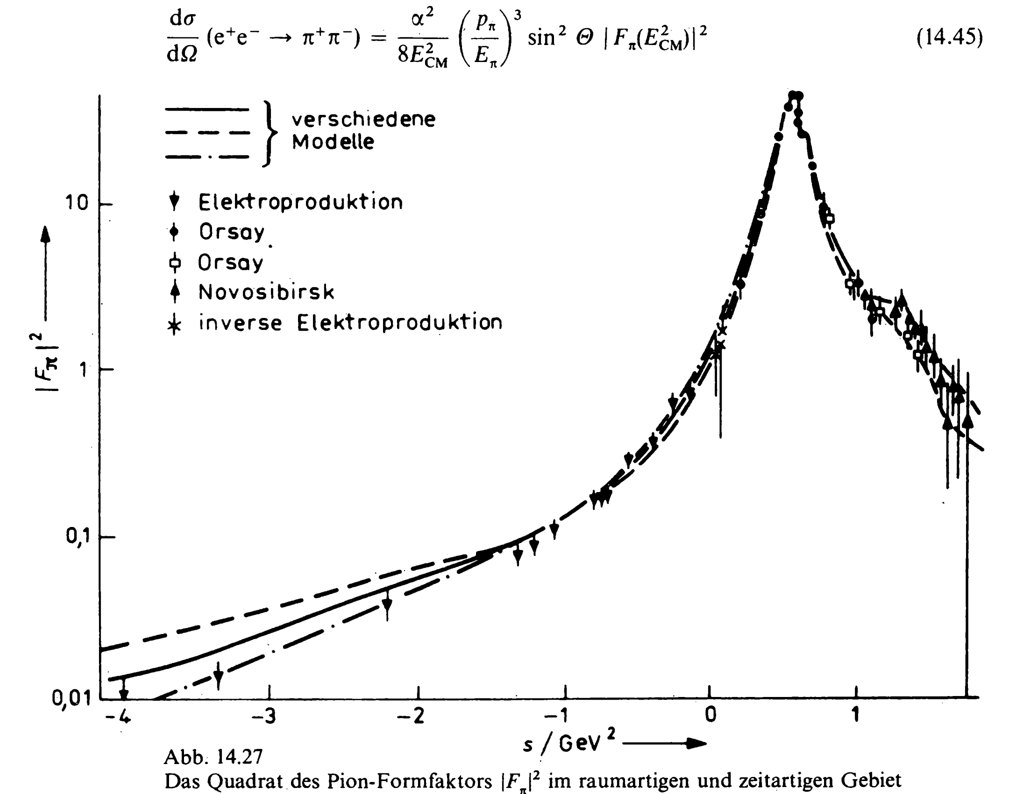


Abb. 14.27
Das Quadrat des Pion-Formfaktors $|F_\pi|^2$ im raumartigen und zeitartigen Gebiet

hängen mit dem Formfaktor F_π des π-Mesons im Gebiet zeitartiger Impulsüberträge $Q^2 = E_{CM}^2 > 0$ zusammen.

Pseudoskalare Mesonen wie Pionen oder Kaonen werden nur durch einen Formfaktor charakterisiert. Bei Streuexperimenten, wie im Fall der Elektron-Proton-Streuung im Abschnitt 14.2. abgehandelt, wird der Formfaktor im Bereich raumartiger Impulsüberträge $q^2 = -Q^2 < 0$ bestimmt. Bei der Reaktion (14.45) in der Nähe des ϱ^0-Vektormesons verhält sich der Formfaktor $F_\pi^2(E_{CM}^2)$ wie eine Breit-Wigner-Resonanzkurve (14.44).

In Abb. 14.27 zeigen wir die kombinierten experimentellen Ergebnisse für den Pion-Formfaktor F_π^2 im Bereich raumartiger und zeitartiger Impulsüberträge. Im raumartigen Gebiet wurden die Daten mit Hilfe der Elektroproduktion von π-Mesonen $eN \rightarrow eN\pi$ erhalten. Im zeitartigen Bereich stammen die Daten von der Untersuchung der Reaktion $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-$. In diesem Bereich wird der Formfaktor hauptsächlich durch die ϱ^0-Resonanz bestimmt. Im Gebiet von 1,2 GeV trägt ebenfalls das hypothetische angeregte Vektormeson $\varrho'(1250)$ bei. Der Übergang vom raumartigen zum zeitartigen Gebiet verläuft stetig.

Mit Hilfe der e^+e^--Annihilation $e^+e^- \rightarrow p\bar{p}$ lassen sich die Formfaktoren des Protons im zeitartigen Gebiet untersuchen. Diese Untersuchungen haben jedoch noch nicht die gleiche Genauigkeit wie im Fall des Pionformfaktors erreicht.

14.3.4. Fragmentation der Quarks in Hadronenjets

Kommen wir zurück zur inklusiven Hadronenerzeugung bei großen Energien. In Abb. 14.28 zeigen wir, wie man sich die Erzeugung von Hadronen im e^+e^--Stoß vorstellen kann. Der Einfachheit halber beschränken wir uns auf Mesonen. Zunächst wird ein Quark-Antiquark-Paar gebildet. Durch die Rekombination mit weiteren Quarks und Antiquarks, die im Feld des ursprünglichen Paares paarweise aus dem Vakuum erzeugt werden, entstehen Quark-Antiquark-Paare, die wir uns als Mesonen vorstellen können. Wir beschreiben diesen Vorgang im weiteren als *Fragmentation* der Quarks oder Antiquarks in Hadronen. Zur quantitativen Beschreibung dieses Fragmentationsprozesses führen wir Quarkfragmentationsfunktionen ein. Angenommen wir haben einen Quark i mit dem Impuls p, dann beschreibt die Quarkfragmentationsfunktion

$$D_{q_i}^{h}(z) \qquad (14.46)$$

die Wahrscheinlichkeit, unter den Fragmentationsprodukten ein Hadron h mit dem Impulsanteil zp des ursprünglichen Quarks zu finden. Diese Quarkfragmentationsfunktionen sind völlig analog zu den im Abschnitt 14.2 eingeführten Quarkverteilungsfunktionen $q_i^h(x)$ definiert.

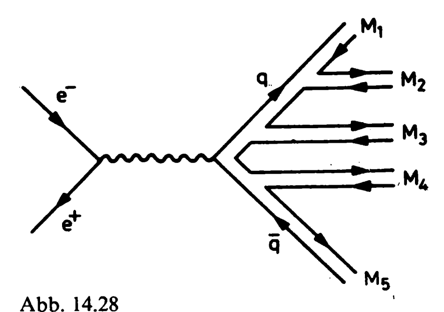


Abb. 14.28
Hadron-Erzeugung in e^+e^--Stößen. Die ursprünglich erzeugten Quarks und Antiquarks kombinieren mit zusätzlichen Quark-Antiquark-Paaren zu Mesonen

Mit Hilfe der Isospin- und Ladungskonjugationsinvarianz erhalten wir sofort einige Beziehungen zwischen verschiedenen Quarkfragmentationsfunktionen, z. B.

$$\begin{aligned} D_u^{\pi^+}(z) &= D_d^{\pi^-}(z) = D_{\bar{d}}^{\pi^+}(z) = D_{\bar{u}}^{\pi^-}(z)\,, \\ D_d^{\pi^+}(z) &= D_u^{\pi^-}(z) = D_{\bar{u}}^{\pi^+}(z) = D_{\bar{d}}^{\pi^-}(z)\,, \\ D_s^{\pi^+}(z) &= D_s^{\pi^-}(z) = D_{\bar{s}}^{\pi^+}(z) = D_{\bar{s}}^{\pi^-}(z)\,. \end{aligned} \tag{14.47}$$

Mit Hilfe der Quarkfragmentationsfunktionen können wir die inklusive Erzeugung von Hadronen in e^+e^--Stößen beschreiben

$$\frac{1}{\sigma^{\text{tot}}} \cdot \frac{d\sigma}{dz}(e^+e^- \to h + \cdots) = \frac{\sum_i Q_i^2 [D_{q_i}^h(z) + D_{\bar{q}_i}^h(z)]}{\sum_i Q_i^2}\,. \tag{14.48}$$

Dabei rührt das beobachtete Hadron h entweder von der Fragmentation des Quarks q_i oder des Antiquarks $\bar{q}_i$ her.

Wir hatten im Abschnitt 14.2 gesehen, daß sich die Quarkverteilungsfunktionen $q^h(x)$ bei kleinen Werten von x wie $q_i^h(x) \approx 1/x$ verhalten. Wenn wir analog dazu annehmen, daß sich für kleine z die Quarkfragmentationsfunktionen $D_{q_i}^h(z) \approx 1/z$ verhalten, dann ergibt sich durch Integration über z aus (14.48) die mittlere Multiplizität

$$\langle n^h \rangle = \int\limits_{z_{\min} = \frac{2m_h}{E_{CM}}}^{1} \frac{1}{\sigma^{\text{tot}}} \frac{d\sigma}{dz}\, dz = \sum_i Q_i^2 \int\limits_{z_{\min}}^{1} (D_{q_i}^h(z) + D_{\bar{q}_i}^h(z))\, dz \Big/ \sum_i Q_i^2\,. \tag{14.49}$$

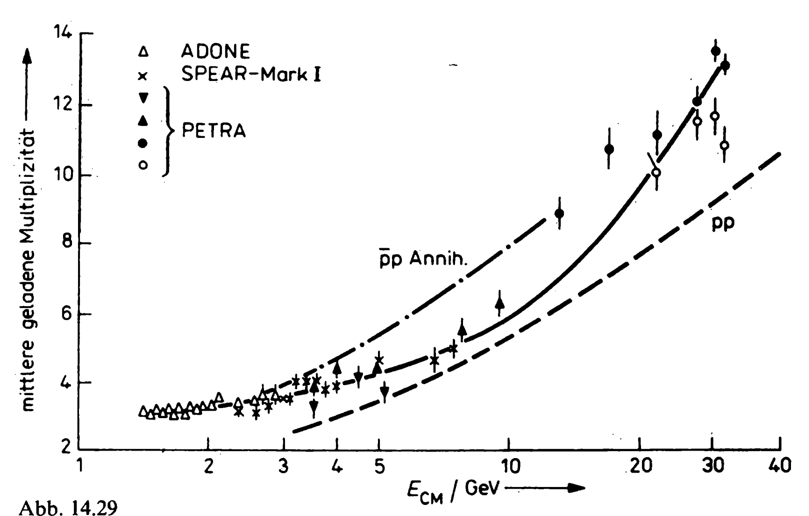


Abb. 14.29
Die mittlere Multiplizität der in e^+e^--Stößen erzeugten geladenen Teilchen als Funktion der Schwerpunktenergie E_{CM}. Die Daten werden mit der Multiplizität der erzeugten Teilchen in Proton-Proton-Stößen und bei der Proton-Antiproton-Annihilation bei gleicher Schwerpunktenergie E_{CM} verglichen

In Abb. 14.29 geben wir die in e^+e^--Stößen gemessenen mittleren Multiplizitäten der erzeugten geladenen Teilchen als Funktion der Schwerpunktenergie an. Die genaue Form des Anstieges ist unklar, aber die Daten im Energiegebiet oberhalb $E_{CM} = 4$—5 GeV sind zumindest mit einem logarithmischen Anstieg der mittleren geladenen Multiplizität konsistent.

Es läßt sich relativ einfach experimentell untersuchen, ob die Quarkfragmentationsfunktionen unabhängig von der Energie das Skalenverhalten (14.46) in der Variablen z zeigen. Da $\sigma(e^+e^- \to \mu^+\mu^-) = 4\pi\alpha^2/3E_{CM}^2$ gilt, läßt sich (14.48) umschreiben in

$$\begin{aligned} E_{CM}^2 \frac{d\sigma}{dz}(e^+e^- \to h + \cdots) &= \frac{4\pi\alpha^2}{3} \sum_i Q_i^2(D_{q_i}^h(z) + D_{\bar{q}_i}^h(z)) \\ &= 88 \sum_i Q_i^2(D_{q_i}^h(z) + D_{\bar{q}_i}^h(z))\,\text{nb} \cdot \text{GeV}^{-2}. \end{aligned} \tag{14.50}$$

In Abb. 14.30 tragen wir experimentelle Daten für $E_{CM}^2\, d\sigma/dz$ auf und finden, daß das Skalenverhalten insbesondere bei großen Werten von z recht gut gilt. Es ist zu beachten, daß bei einer Stoßenergie E_{CM} das Skalenverhalten nicht bis zu beliebig kleinen z-Werten gelten kann, sondern nur für $z \geqq 2M/E_{CM}$. Dabei ist M eine typische hadronische Masse von etwa 0,5 bis 1,0 GeV/c^2.

Die Quarkfragmentation führt zur Bildung eines Hadronenjets, bei dem die Impulse der Hadronen vorwiegend der Impulsrichtung der Quarks folgen. Anders ausgedrückt, die Impulskomponenten der Hadronen transversal zur Richtung der Quarks sind unabhängig von der Energie relativ klein. Sie folgen einer Exponentialverteilung, ähnlich wie wir sie schon für die

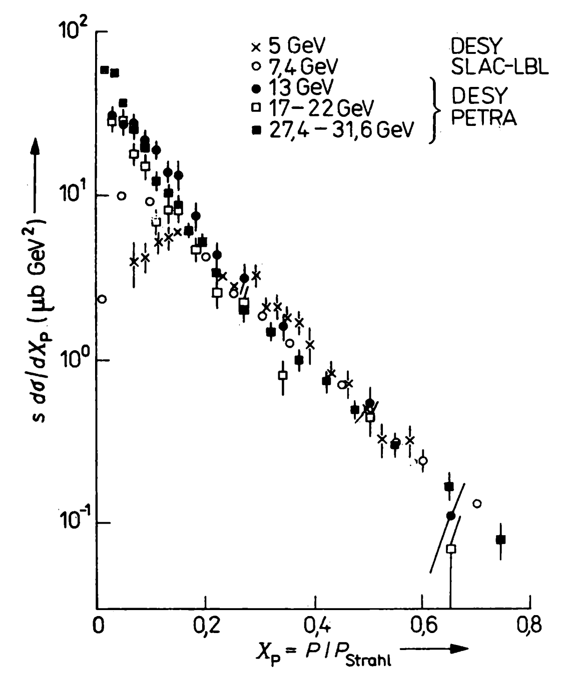


Abb. 14.30
Das Skalenverhalten des Wirkungsquerschnittes $E_{CM}^2 \frac{d\sigma}{dz}$ für die inklusive Erzeugung geladener Teilchen in e^+e^--Stößen bei Schwerpunktenergien von 5—31,6 GeV

Teilchenerzeugung in Hadron-Hadron-Stößen kennengelernt haben (13.103). Wenn $\langle p_\perp \rangle$ der konstante oder nur relativ schwach ansteigende mittlere Transversalimpuls und $\langle n \rangle$ die mittlere Hadronenmultiplizität des Prozesses $e^+e^- \to q\bar{q} \to$ Hadronen ist, dann erwarten wir für den Mittelwert des Longitudinalimpulses der Hadronen in Richtung des Quarkimpulses $\langle p_\parallel \rangle \approx \langle p \rangle \approx E_{CM}/\langle n \rangle$, und der mittlere Öffnungshalbwinkel des Quarkjets wird

$$\langle \delta \rangle = \left\langle \frac{p_\perp}{p_\parallel} \right\rangle \approx \frac{\langle p_\perp \rangle \langle n \rangle}{E_{CM}} . \tag{14.51}$$

Da $\langle p_\perp \rangle$ und $\langle n \rangle$ nur schwach mit der Energie ansteigen, erhält man $\langle \delta \rangle \approx E_{CM}^{-1/2}$.

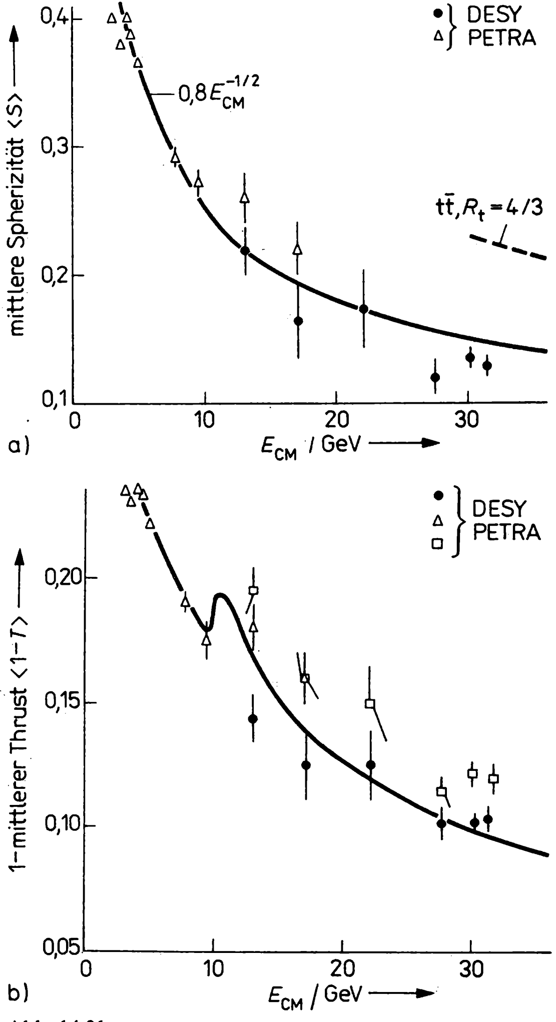


Abb. 14.31
Hadronenjeterzeugung in e^+e^--Stößen. a) Mittlere Spherizität $\langle S \rangle$ als Funktion der Schwerpunktenergie, b) Mittlerer Thrust gezeichnet in der Form $\langle 1 - T \rangle$ als Funktion der Schwerpunktenergie

Das Auftreten dieses Quark-Antiquarkjets läßt sich mit Hilfe von Variablen beschreiben, die die Form des Vielteilchenereignisses charakterisieren. Die beiden am häufigsten verwendeten Variablen sind:

$$\textit{Spherizität:}\ S = \text{Min}\ \frac{3}{2}\frac{\sum_i p_{\perp i}^2}{\sum_i p_i^2}, \qquad 0 \leqq S \leqq 1 \tag{14.52}$$

$$\textit{Thrust:}\qquad T = \text{Max}\ \frac{\sum_i |p_{\parallel i}|}{\sum_i p_i}, \qquad \frac{1}{2} \leqq T \leqq 1\,. \tag{14.53}$$

Dabei erstrecken sich die Summen über alle Hadronen der Jets. Im Falle der Spherizität sind die $p_{\perp i}$, die Teilchenimpulse, transversal zur Jetrichtung. Die Jetrichtung wird aus der Forderung bestimmt, das $\Sigma\, p_{\perp i}^2$ zum Minimum wird. Im Falle des Thrust sind die $p_{\parallel i}$ die Longitudinalimpulse der Hadronen in Richtung der Jetachse. Die Jetachse wird so gewählt, daß $\Sigma\ |p_{\parallel i}|$ zum Maximum wird. Isotrope Ereignisse ergeben eine maximale Spherizität $S = 1$ und den minimalen Thrust-Wert. Extrem jetartige Ereignisse ergeben $S = 0$ und $T = 1$. In Abb. 14.31 bilden wir die im Experiment gefundenen Mittelwerte von Spherizität und Thrust als Funktion der Energie ab. Die Tatsachen, daß die mittlere Spherizität mit der Energie wie gefordert abnimmt und daß der mittlere Thrust sich mit steigender Energie dem Wert $\langle T\rangle \to 1$ nähert, sind als experimentelle Bestätigung für die Bildung von Quarkjets zu werten.

Nicht alle e^+e^--Annihilationsereignisse zeigen bei hoher Energie die typische Form eines Quark- und Antiquarkjets. Bei den höchsten Energien von $E_{CM} \approx 30$—40 GeV lassen sich etwa 10—15% der Ereignisse als solche mit drei Jets deuten. Abb. 14.32 zeigt ein besonders schönes derartiges Beispiel. Man deutet diese Drei-Jet-Ereignisse wie in Abb. 14.33 gezeichnet als Ereignisse, bei denen neben den beiden Quarks ein energiereiches Gluon gebildet wird.

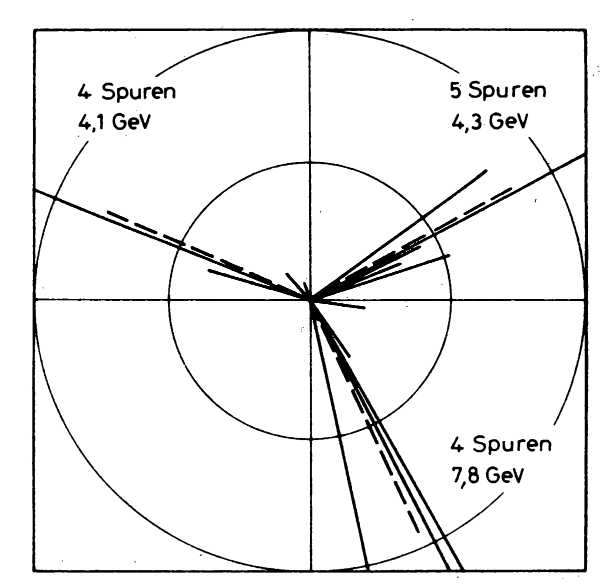


Abb. 14.32
Experimentell gefundenes Ereignis $e^+e^- \to 3$ Hadronenjets

Das Gluon fragmentiert dabei ähnlich wie die Quarks in einen Hadronenjet. Das Auftreten solcher Endzustände wurde von der Quantenchromodynamik vorhergesagt. Das Auffinden und die quantitative Untersuchung der Eigenschaften dieser Ereignisse wird als der erste experimentelle Hinweis für die Existenz der Gluonen gewertet.

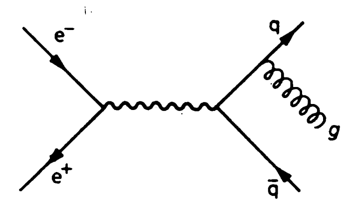


Abb. 14.33
Elektron-Positron-Annihilation in ein Quark-Antiquark-Paar und ein Gluon

14.3.5. Experimente an e^+e^--Speicherringen

Elektron-Positron-Speicherringe wurden bereits im Kapitel 3.4 vorgestellt, ebenso die wichtigsten Parameter der zur Zeit arbeitenden und im Bau befindlichen e^+e^--Speicherringe.

Die Leistungsfähigkeit eines Speicherringbeschleunigers wird durch zwei wichtige Parameter gekennzeichnet: Die Massenmittelpunktsenergie $E_{CM} = 2E$, die gleich der doppelten Strahlenergie ist, und die Luminosität.

Die Kinematik erlaubt, alle Teilchen oder Systeme von Teilchen mit Massen kleiner als E_{CM} zu erzeugen. Erhaltungssätze für innere Quantenzahlen schränken die möglichen Endzustände jedoch ein.

Wenn σ der Reaktionsquerschnitt für eine bestimmte zu untersuchende Reaktion ist, dann bestimmt die Luminosität L die Ereignisrate $\dot{u}$ im Detektor gemäß (3.37).

Die Ströme der beiden kreisenden Teilchenstrahlen sind

$$I_1 = mfN_1 \quad \text{und} \quad I_2 = mfN_2 .$$

Damit erhalten wir schließlich die Ereignisrate

$$\dot{u} = I_1 I_2 / fmS$$

und die Luminosität

$$L = I_1 I_2 / fmS .$$

Die Luminosität eines Speicherrings hängt sehr stark von der Energie ab und steigt potenzartig mit E^2 bis E^4 an. Oberhalb der Energie maximaler Luminosität fällt L sehr steil etwa wie E^{-10} ab. Es gibt also für jeden Speicherring nur ein begrenztes Energiegebiet mit hoher Luminosität in dem eine effektive Untersuchung von Wechselwirkungen möglich ist.

Ein weiterer wichtiger Parameter für einen Speicherring ist die Lebensdauer der Strahlen. Auch die Strahllebensdauer hängt von der Strahlenergie ab. Man erreicht Lebensdauern bis zu einigen Stunden.

Als nächstes sollen einige wünschenswerte Eigenschaften guter Detektoren an e^+e^--Speicherringen aufgeführt werden. Natürlich läßt sich kein Detektor konstruieren, der all diese Eigenschaften gleichzeitig besitzt.

1. *Großer Raumwinkelbereich.* Bei der Mehrzahl der e^+e^--Reaktionen werden die Sekundärteilchen in den gesamten Raumwinkelbereich emittiert. Deshalb ist es günstig, wenn der Detektor

den größtmöglichen Raumwinkel Ω erfaßt. Bei der Untersuchung einer Reaktion mit n Sekundärteilchen verhält sich die geometrische Effektivität des Detektors wie $(\Omega/4\pi)^n$. Eine vollständige kinematische Rekonstruktion eines Ereignisses ist nur möglich, wenn alle Teilchen im Detektor erfaßt wurden.

2. *Identifikation von Sekundärteilchen.* Um eine Reaktion auszuwerten, ist es häufig nötig, die Sekundärteilchen zu identifizieren. Wir unterscheiden zwei getrennte Probleme: Identifikation geladener Teilchen und Identifikation neutraler Teilchen.

Für geladene Teilchen stehen mehrere Verfahren zur Verfügung: Elektronen lassen sich durch die von ihnen ausgelösten elektromagnetischen Kaskaden identifizieren. Myonen identifiziert man durch ihr hohes Durchdringungsvermögen, da sie nicht durch Kernwechselwirkungen gestoppt werden. Wechselwirkungen mit Kernen dienen hingegen als ein Signal für Hadronen.

Für niederenergetische Teilchen erlaubt eine Laufzeitmessung zwischen zwei Detektoren mit einer Impulsmessung die Bestimmung der Masse des Teilchens. Bei höheren Energien sind dafür Čerenkov-Detektoren besser geeignet.

Man beobachtet neutrale Teilchen (γ, π^0, η^0) hauptsächlich durch die Photonen. Die Photonen werden ebenso wie Elektronen durch die von ihnen ausgelöste elektromagnetische Elektron-Photon-Kaskade identifiziert. Geeignete Detektormaterialien dafür sind Szintillatoren, Bleiglas, NaI, flüssiges Argon oder Kalorimeter, die abwechselnd aus Schichten eines schweren Materials und Detektoren bestehen.

3. *Genauigkeit der Spurvermessung.* Zur Messung von Winkelverteilungen, zur Rekonstruktion von Ereignissen usw. müssen die Positionen der Spuren so genau als möglich bestimmt werden. Man wendet Drahtkammern mit elektrischer Ausgabe (Magnetostriktive Funkenkammern, Proportionalkammern und Driftkammern) an.

4. *Impulsmessung.* Die Impulse geladener Teilchen mißt man durch die Ablenkung der Spuren im Magnetfeld. Die Genauigkeit der Impulsbestimmung hängt dabei einerseits von der Feldstärke und andererseits von der Genauigkeit ab, mit der die Spuren geometrisch vermessen werden können.

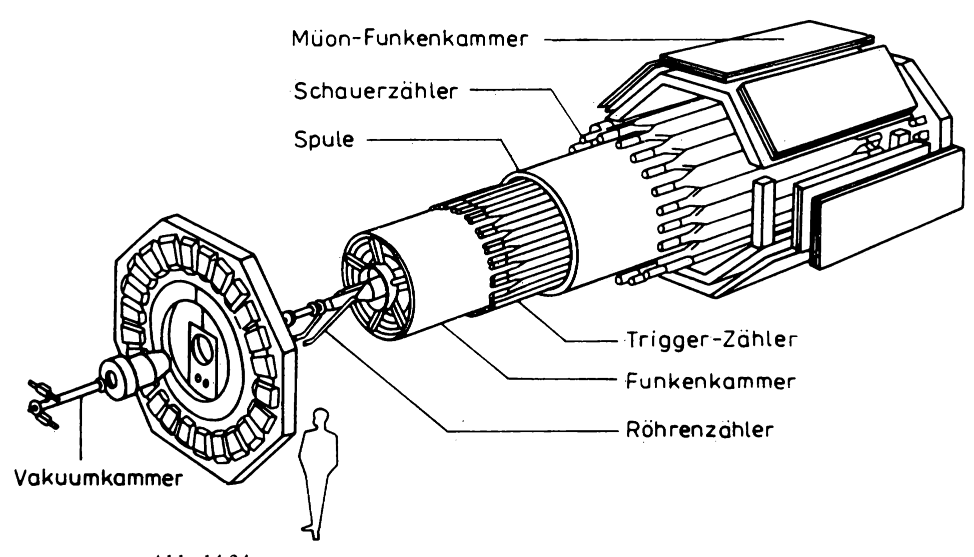


Abb. 14.34
Ein universeller Detektor MARK I zur Untersuchung der Elektron-Positron-Annihilation am Speicherring SPEAR (Stanford)

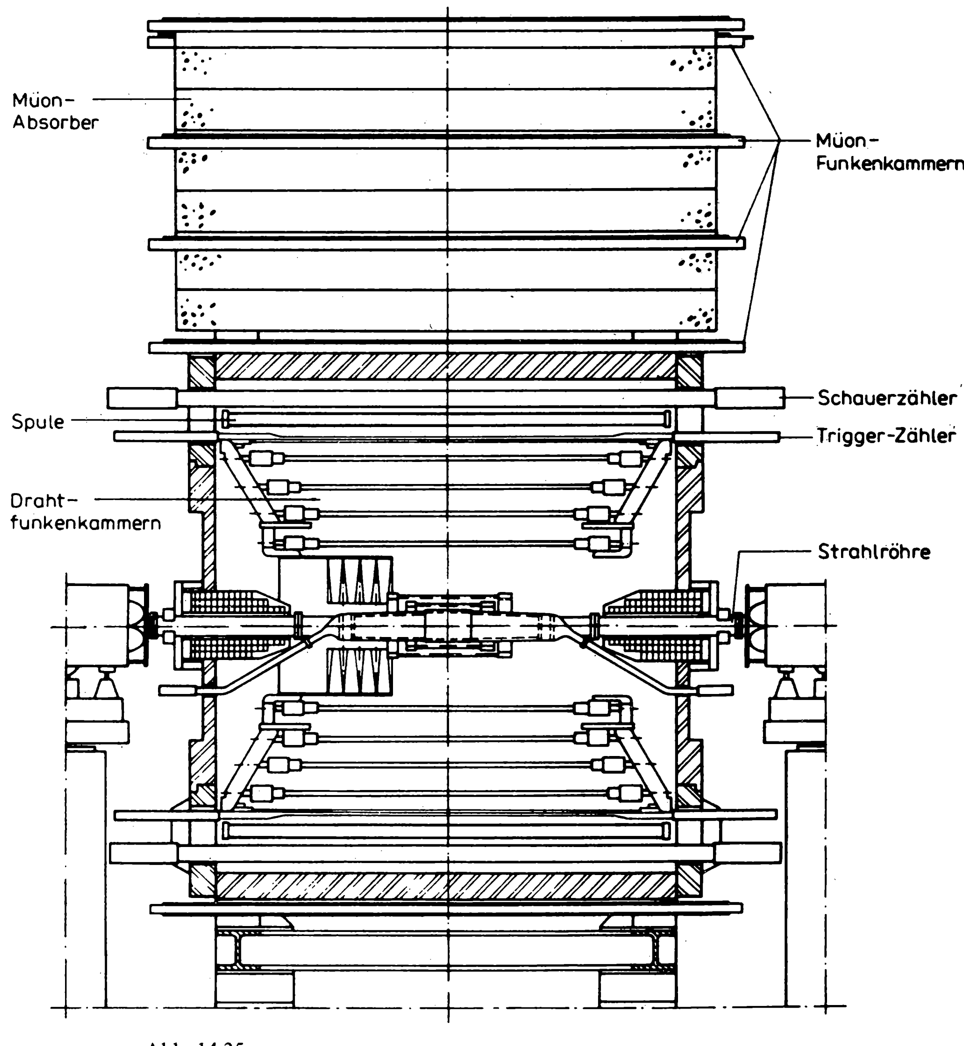


Abb. 14.35
Ein Querschnitt des Detektors MARK I

Als erstes Beispiel für einen vollständigen Detektor beschreiben wir den magnetischen Detektor der SLAC-LBL Kollaboration am Speicherring SPEAR in Stanford. Dieser Detektor ist heute nicht mehr der universellste Speicherringdetektor, aber gerade mit Hilfe dieses Detektors gelang es im Laufe der siebziger Jahre, eine Vielzahl neuer Entdeckungen zu machen. In Abb. 14.34 und 14.35 ist dieser Detektor bzw. ein Schnitt durch diesen Detektor abgebildet.

Eine Solenoidspule mit der Länge 3,6 m und dem Durchmesser von 3,3 m erzeugt ein Feld von 0,4 Tesla in Richtung der Strahlachse. Wir beginnen von der Strahlachse aus und beschreiben die Elemente, durch die ein in der e^+e^--Wechselwirkung erzeugtes Teilchen läuft: Die Vakuumkammer des Strahls hat einen Radius von etwa 8 cm und eine effektive Dicke von etwa 0,2 mm. Unmittelbar auf die Vakuumröhre folgt ein zylinderförmiger Szintillationszähler, der zum

System der Trigger-Zähler gehört. Er dient hauptsächlich dazu, Ereignisse auszuschließen, die von Höhenstrahlteilchen hervorgerufen werden. Als nächstes folgen zwei zylindrische Proportionalkammern mit Radien von 17 und 22 cm; sie bestehen aus je 512 Drähten parallel zur Strahlachse. Sie dienen hauptsächlich dazu, schwache Zerfälle von K^0-Mesonen oder Λ-Hyperonen zu identifizieren. Vier konzentrische zylindrische Funkenkammern mit magnetostriktiver Ausgabe mit Radien von 66, 91, 111 und 135 cm dienen zur genauen Vermessung der Spuren aller geladenen Teilchen. Diese Kammern erlauben es, die Spuren in einem Raumwinkelbereich von $0{,}7 \cdot 4\pi$ zu vermessen. Die mittlere Impulsauflösung für ein Teilchen von $p = 1$ GeV/c beträgt etwa 15 MeV/c. Auf diese Funkenkammern folgt eine zylindrische Anordnung von Szintillationszählern mit einer Länge von 2,60 m. Diese Zähler gehören zum Triggersystem und sie erlauben Flugzeitmessungen mit einer Genauigkeit von 0,5 ns. Mit ihrer Hilfe lassen sich π- und K-Mesonen bis zum Impuls von 600 MeV/c und Protonen von K-Mesonen bis zum Impuls von 1100 MeV/c unterscheiden. Als nächstes trifft das Teilchen auf die 9 cm dicke Solenoidspule aus Aluminium und eine zylindrische Anordnung von Schauerdetektoren, mit deren Hilfe Elektronen von Hadronen unterschieden werden können. Auf diese Schauerzähler folgt ein 20 cm dicker Eisenzylinder als Rückweg für den magnetischen Fluß. Teilchen, die diesen Eisenzylinder und die darauf folgenden Absorptionsplatten durchdringen, werden als Myonen identifiziert, Hadronen wechselwirken in diesen dicken Absorptionsplatten. Aus der Beschreibung der verschiedenen Elemente dieses Detektors wird klar, daß sich damit eine Vielzahl unterschiedlicher Ereignisse untersuchen lassen, er ist also in guter Näherung ein Universaldetektor.

Als nächstes beschreiben wir einen Spezialdetektor, der besonders zur genauesten Vermessung hochenergetischer Photonen und Elektronen konstruiert wurde. Er wurde ursprünglich am Speicherring SPEAR in Stanford installiert und diente besonders der Vermessung der Photonen-Übergänge im Charmonium-System (siehe Abb. 14.41 und Abb. 14.45 sowie Abschnitt 14.4). Der Detektor besteht aus einer kugelförmigen Anordnung von NaI-Kristallen und wird deshalb als Kristall-Ball bezeichnet.

In Abb. 14.36 wird der gesamte Detektor dargestellt. Die Vakuumkammer des Strahls besteht aus einer Aluminium-Röhre mit 11 cm Durchmesser und Wanddicke von 1,65 mm. Diese Dicke entspricht nur etwa 2—4% einer Strahlungslänge je nach Emissionsrichtung des Photons oder Elektrons. Unmittelbar auf die Vakuumkammer folgt eine zentrale Spurkammer zum Nach-

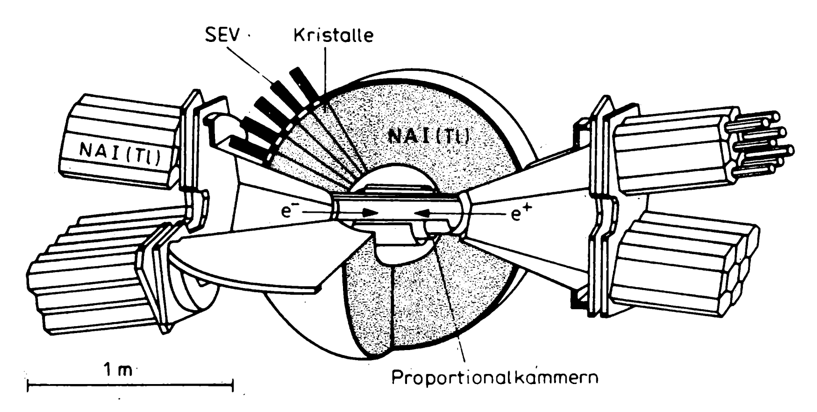


Abb. 14.36
Die Anordnung des Detektors „Kristall-Ball“ im e^+e^--Strahl

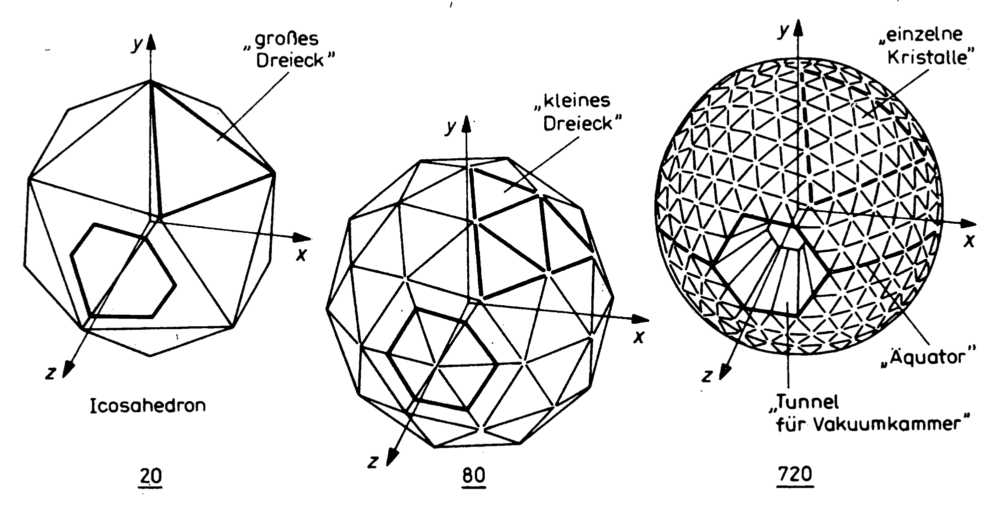


Abb. 14.37
Die Anordnung der NaI(Tl)-Kristalle im „Kristall-Ball"-Detektor

weis geladener Teilchen. Darauf folgen zwei halbkugelförmige Anordnungen von NaI(TL) Kristalldetektoren. Außerdem gibt es noch weitere NaI-Kristalle und weitere Detektoren in der Nähe der Strahlröhre. Die kugelförmige Anordnung von NaI-Kristallen, siehe Abb. 14.37, besteht aus 672 optisch isolierten NaI-Kristallen. Jeder Kristall hat eine Länge von etwa 40 cm oder 15,7 Strahlungslängen. Der innere Radius der Kristallkugel ist 25 cm, der äußere Radius etwa 63 cm. Jeder der Kristalle wird mit Hilfe eines Sekundärelektronenvervielfachers beobachtet. Abb. 14.37 beschreibt die geometrische Anordnung der Kristalle. Das sehr gute Energieauflösungsvermögen des Detektors läßt sich am besten an Hand von Abb. 14.45 beurteilen.

14.4. Die Quarkonium-Zustände

14.4.1. Die Entdeckung der Teilchen der Charmonium-Familie

Die Entdeckung des ersten Charmonium-Teilchens wurde im November 1974 gleichzeitig durch zwei Gruppen von Experimentatoren bekanntgegeben. Die von S. TING geleitete Gruppe fand das J-Teilchen im e^+e^--Spektrum von p-Be-Stößen (siehe Abb. 14.38a),

$$P + \text{Be} \to J + \cdots \qquad J \to e^+ + e^- \tag{14.54}$$

Die von B. RICHTER geleitete Gruppe fand das Ψ-Teilchen in der e^+e^--Annihilation (siehe Abb. 14.38b),

$$\begin{aligned} e^+e^- &\to \Psi \to \text{Hadronen}\,, \\ e^+e^- &\to \Psi \to e^+e^-\,, \\ e^+e^- &\to \Psi \to \mu^+\mu^-\,. \end{aligned} \tag{14.55}$$

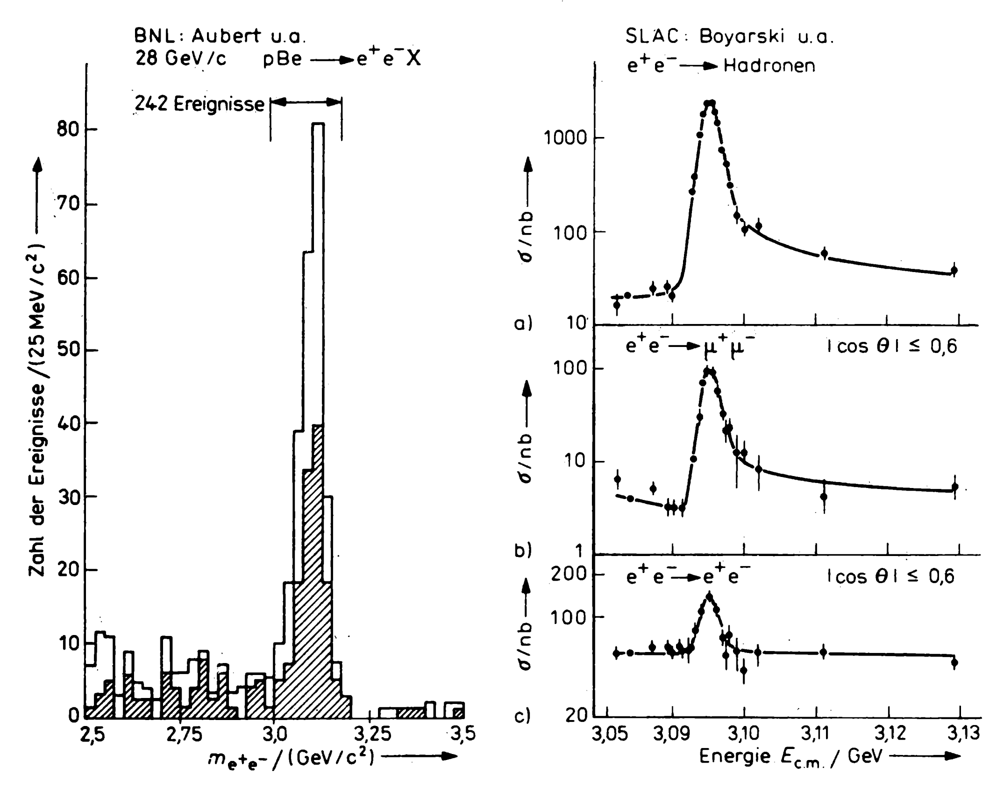


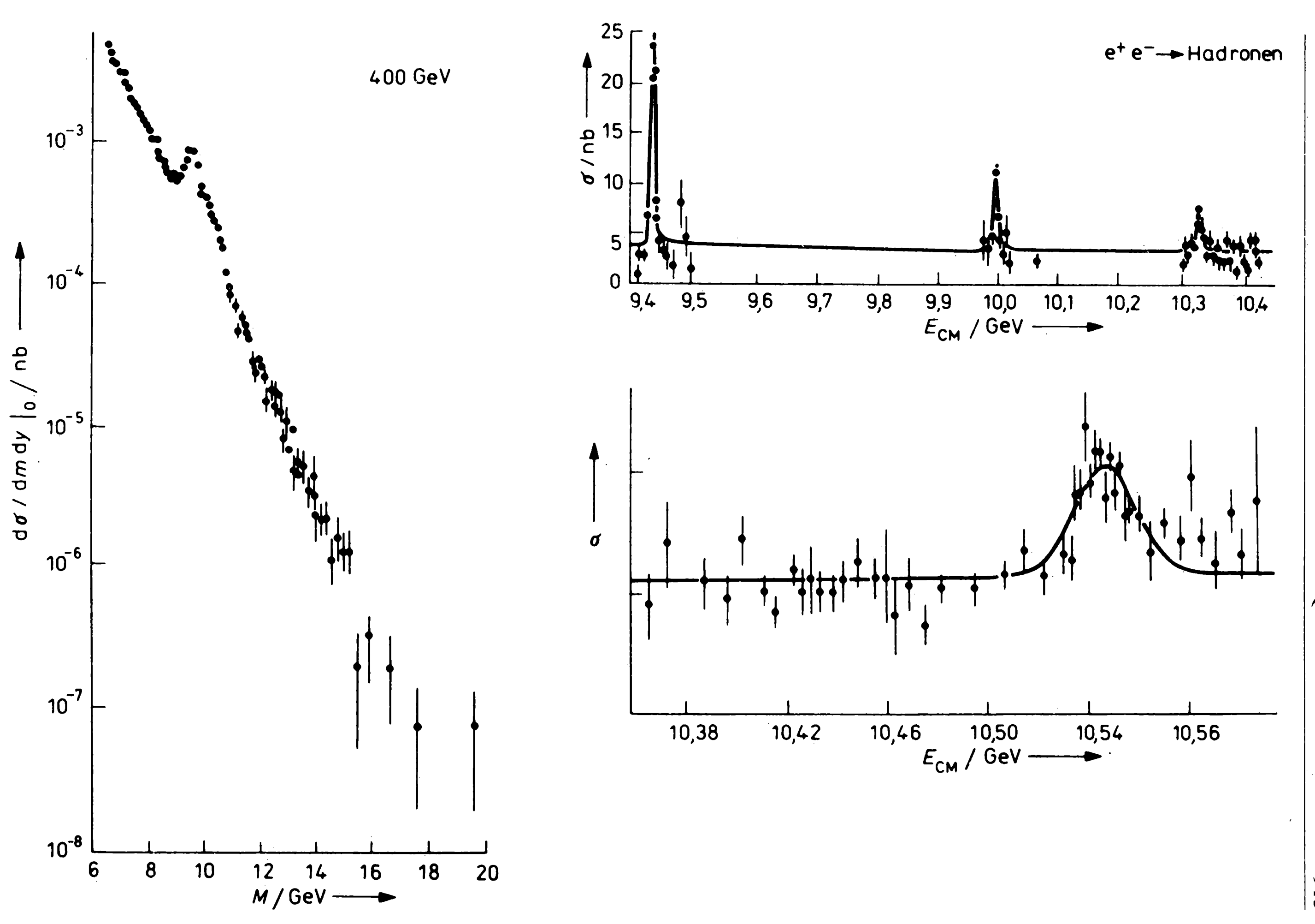
Abb. 14.38
Die ersten experimentellen Daten, mit denen das J,ψ-Teilchen entdeckt wurde. a) Das effektive e^+e^--Massenspektrum der Reaktion $p + Be \to e^+e^- + \cdots$ b) Energieabhängigkeit der Wirkungsquerschnitte $e^+e^- \to$ Hadronen, $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$ und $e^+e^- \to e^+e^-$ in der Nähe der J,ψ-Resonanz

Es handelt sich um das gleiche Teilchen, welches seither als J, Ψ bezeichnet wird. Diese Entdeckung, die 1976 durch die Verleihung des Nobelpreises an S. Ting und B. Richter gewürdigt wurde, löste eine Kettenreaktion brillanter experimenteller Entdeckungen und theoretischer Entwicklungen aus.

Wir wissen jetzt, daß das J, Ψ ein isoskalares Vektormeson mit den Quantenzahlen $J^{PC} = 1^{--}$ ist. In Tabelle 14.2 vergleichen wir die Eigenschaften des J, Ψ und des wenig später gefundenen Ψ' mit denen der anderen Vektormesonen.

Die hervorstechendste Eigenschaft der neuen Teilchen ist neben der großen Masse ihre schmale Zerfallsbreite oder lange Lebensdauer. Der Zerfall ist offenbar um einen Faktor 10^4 gegenüber dem unterdrückt, was man für normale Mesonen mit Massen von 3—4 GeV erwarten würde. Trotz der geringen Zerfallsbreite handelt es sich bei diesen Teilchen um

Abb. 14.39 ▶
Experimentelle Daten, die die Existenz des Teilchens Y und seiner Anregungszustände zeigen
a) Proton-Beryllium-Stöße $p + Be \to \mu^+ + \mu^-$
b) Elektron-Positron-Annihilation $e^+e^- \to$ Hadronen



400 GeV
dσ / dm dy |0 / nb
M / GeV
e+ e- → Hadronen
σ / nb
E_CM / GeV
σ
E_CM / GeV

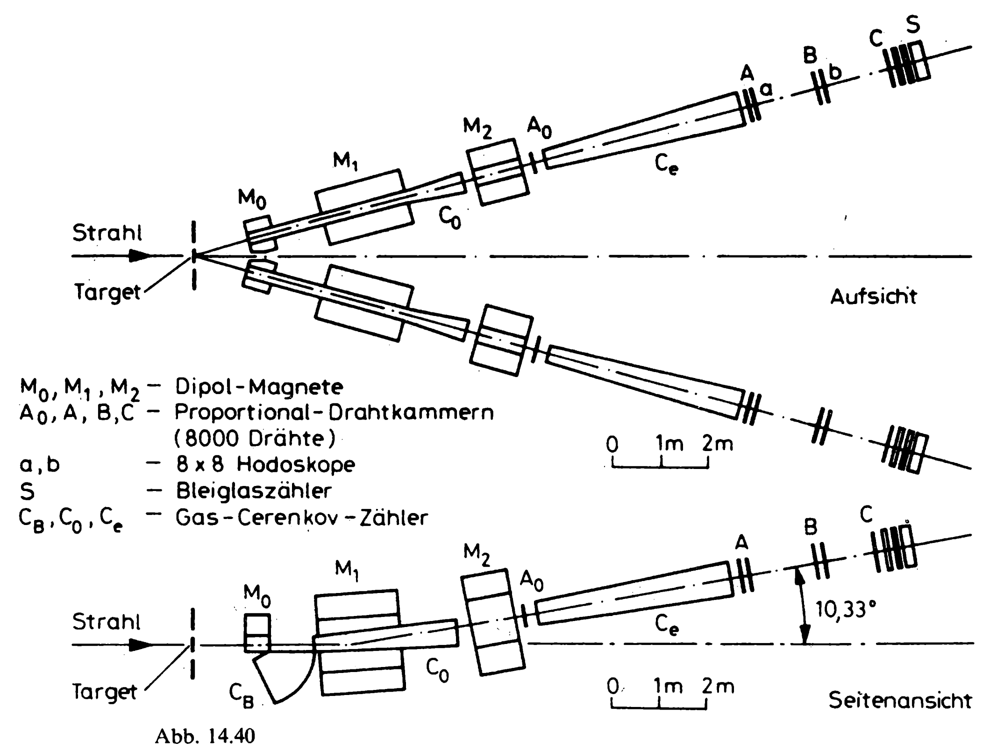


Abb. 14.40
Schematische Darstellung eines Doppelarmspektrometers zum Nachweis von Elektron-Positron-Paaren, die in Proton-Nukleon-Stößen erzeugt werden

Hadronen, stark wechselwirkende Teilchen. 1977 wurde, erneut in Proton-Be-Stößen im $\mu^+\mu^-$-Massenspektrum

$$p + \text{Be} \rightarrow \mu^+ + \mu^- + \cdots \tag{14.56}$$

ein noch wesentlich schwereres, aber ebenso schmales Vektormeson Y gefunden, siehe Abb. 14.39a. Auch dieses Teilchen und seine angeregten Zustände wurden seither in e^+e^--Annihilationsreaktionen untersucht (Abb. 14.39b).

Das Experiment der von B. Richter geleiteten Gruppe wurde mit Hilfe des im Abschnitt 14.3.5 und Abb. 14.34 und 14.35 beschriebenen Detektors durchgeführt. Die Apparatur, die von der von S. Ting geleiteten Gruppe benutzt wurde, ist in Abb. 14.40 dargestellt. Dieses Experiment war im Protonenstrahl des 30 GeV-Protonensynchrotrons des Brookhaven Labors (USA) installiert. Es besteht aus zwei identischen Spektrometern zum Nachweis des e^+e^--Paares. Die Hauptschwierigkeit dieses Experiments bestand darin, die wenigen direkt erzeugten e^+e^--Paare aus der großen Zahl gleichzeitig erzeugter Teilchen zu isolieren.

14.4.2. Erklärung der neuen schweren Teilchen im Quarkmodell, die Quarklinienregel

Das Quark-Modell gibt eine einfache Erklärung für die neuen schweren Teilchen: Neben den leichten Quarks u, d und s, die wir im Folgenden häufig als q bezeichnen wollen, existieren

weitere schwere Quarks Q und zwar mindestens der Quark c mit der Quantenzahl Charm und der Quark b mit der Quantenzahl Bottom. Durch diese neuen Quantenzahlen, die in der starken Wechselwirkung erhalten bleiben, ist der Zerfall der schweren Quarks Q in leichte Quarks Q → q nur über die schwache Wechselwirkung möglich. Die neuen schweren Teilchen sind gebundene Zustände $Q\bar{Q}$, die die neuen Quantenzahlen c und b nicht besitzen. Bei den J, Ψ und allen anderen Teilchen des Charmoniumsystems handelt es sich um $c\bar{c}$-Zustände, bei dem Y und allen anderen Teilchen des Bottomoniumsystems handelt es sich um $b\bar{b}$-Zustände. Es ist hervorzuheben, daß die Existenz von Quarks mit Charm-Quantenzahlen bereits einige Jahre vor der Entdeckung der J,Ψ-Teilchen im Rahmen der Eichfeldtheorie der elektroschwachen Wechselwirkung, auf die wir im Abschnitt 14.8 eingehen werden, vorhergesagt wurden. Diese Vorhersage wurde jedoch zunächst nicht so ernst genommen, daß man eine systematische Suche angestellt hätte. Zunächst kam im Jahre 1974 die Entdeckung der J,Ψ-Teilchen als eine echte, unvorhergesagte Überraschung. Die Interpretation der neuen Teilchen als $Q\bar{Q}$-Zustände führt sofort zur Vorhersage einer großen Zahl weiterer Teilchen. In Abb. 14.41 geben wir die bisher gefundenen Zustände des Charmoniumsystems zusammen mit ihrer spektroskopischen Klassifizierung an. Für das Bottomoniumsystem gibt es ein ähnliches Niveauschema.

Weshalb haben diese Teilchen so schmale Zerfallsbreiten? Die schmalen Zerfallsbreiten lassen sich mit Hilfe der phänomenologischen Quarklinien-Regel erklären. Man führte diese Regel ursprünglich ein, um die Unterdrückung einiger starker Zerfälle zu erklären, die nur über unverbundene Quark-Diagramme ablaufen. In Abb. 14.42 geben wir einige Beispiele für Zerfälle, die nach dieser Regel erlaubt oder verboten sind.

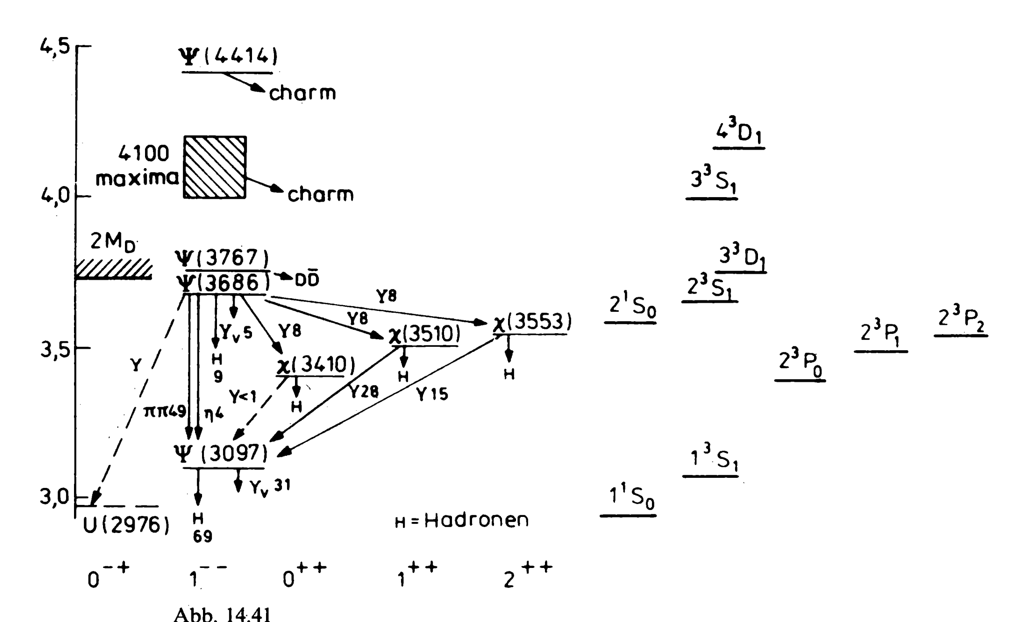


Abb. 14.41
Das Spektrum der Charmoniumzustände $c\bar{c}$
a) Experimentell gefundene Zustände. Wir geben gleichzeitig die Übergänge zwischen den Zuständen und die Verzweigungsverhältnisse einiger Zerfälle an. Weiterhin wird die Schwelle für die Erzeugung von Mesonen mit Charm (doppelte Masse des D-Mesons) angegeben
b) Spektroskopische Klassifikation der Charmoniumzustände

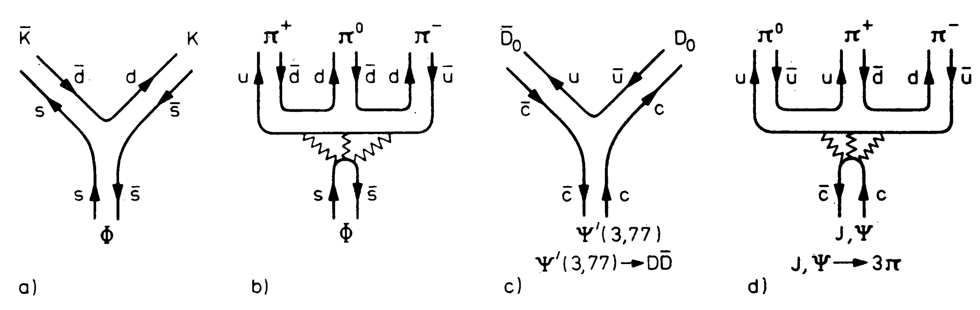


Abb. 14.42
Zur Demonstration der Quark-Linien-Regel a) $\Phi \to K\bar{K}$, erlaubt, b) $\Phi \to 3\pi$, unterdrückt, c) Ψ' (3,770) $\to D\bar{D}$ erlaubt, d) J, $\Psi \to 3\pi$, unterdrückt

Ein unverbundenes Diagramm enthält mindestens ein äußeres Hadron, welches sich durch einen Schnitt isolieren läßt, der keine Quarklinie schneidet. Zum Beispiel zeigen Abb. 14.42a und b, daß der Zerfall $\varphi \to \pi^+ + \pi^- + \pi^0$ über ein unverbundenes Diagramm abläuft, während für den Zerfall $\varphi \to K^+ + K^-$ ein verbundenes Diagramm existiert. Man findet experimentell, daß der Zerfall $\varphi \to K^+ + K^-$ bevorzugt wird, obgleich er energetisch weitaus ungünstiger ist. Da die Vektormesonen, auch das φ in Wirklichkeit aus verschiedenen $q\bar{q}$-Zuständen gemischt sind, wird der Zerfall $\varphi \to \pi^+ + \pi^- + \pi^0$ jedoch nicht maximal unterdrückt. Mit Hilfe dieser Regel lassen sich die schmalen Breiten des J, Ψ und des Ψ' sowie der Y, Y′ und Y″ dadurch erklären, daß ihre Massen kleiner sind als die Massen eines Paares von Mesonen, die die schweren Quarks c oder b enthalten. Es sind alle Zerfallsdiagramme unverbunden und alle Zerfälle durch die Quarklinienregel unterdrückt. Im Charmonium-System besitzt als erstes das Ψ'' (3,77) eine deutlich größere Zerfallsbreite. Dieses Teilchen kann in ein Paar $D\bar{D}$ von Mesonen mit Charmquantenzahlen zerfallen. Beim Bottomonium-System ist als erstes das Y‴ (10.55) breiter und kann in ein Paar $B\bar{B}$ von Mesonen mit Bottom-Quantenzahlen zerfallen.

14.4.3. Nichtrelativistische Potentialmodelle für das Quarkonium-System

Die beiden außergewöhnlichen Eigenschaften der Mesonen der Charmonium- und Bottonium-Systeme a) die Existenz vieler schmaler Zustände unterhalb der $D\bar{D}$- bzw. $B\bar{B}$-Schwellen und b) die Tatsache, daß die c- und b-Quarks viel schwerer sind als gewöhnliche Quarks, sind glückliche Umstände, die dazu geführt haben, daß wir heute diese Teilchen viel besser verstehen als die meisten der schon viel länger bekannten Hadronen.

Infolge der großen Masse der C- und b-Quarks ist es möglich, die Bindung des $Q\bar{Q}$-Systems mit Hilfe der nichtrelativistischen Schrödinger-Gleichung zu beschreiben. In den aus leichten Quarks zusammengesetzten Mesonen bewegen sich die Quarks mit relativistischen Energien, und es ist dadurch viel komplizierter, die gebundenen Zustände zu verstehen. Auch die Tatsache, daß die Charmonium- und Bottomonium-Spektren eine Vielzahl von Energieniveaus besitzen, deren Abstände von 100—600 MeV klein im Vergleich zu den Gesamtmassen sind, kann als weiteres Argument für die nichtrelativistische Natur dieser $Q\bar{Q}$-Systeme angesehen werden.

Wenn es aussichtsreich erscheint, die Eigenschaften des Quarkonium-Systems nichtrelativistisch zu beschreiben, entsteht sofort die Frage nach dem richtigen Potential der Wechselwirkung von Q und $\bar{Q}$. Wir wissen von der Untersuchung der tief unelastischen Streuung, daß sich die Quarks bei kleinen Abständen, d. h. großen Impulsüberträgen im Nukleon wie freie,

schwach wechselwirkende Teilchen verhalten. In der QCD, die dieses Verhalten beschreibt, kann diese Wechselwirkung bei kleinen Abständen störungstheoretisch auf den Austausch von Gluonen zurückgeführt werden. Diesem Gluon-Austausch entspricht im Potentialbild ein Coulombartiges Potential $V(r) = -\frac{4}{3}\alpha_s/r$, wobei α_s die Quark-Gluon-Kopplungskonstante ist. Bei großen Abständen genügt das Coulombartige Potential nicht. Durch die starke Kopplung ist es unmöglich, die Störungstheorie anzuwenden. Wir wissen, daß die Quarks nicht freigesetzt werden können (Quark-Einschluß im Hadron). Das Potential bei großen Abständen muß weiter ansteigen, um die Kraft für den Quarkeinschluß zu liefern. Wie das Potential genau ansteigt, ist nicht bekannt. Für die meisten Rechnungen verwendet man ein Potential, das bei großen Abständen r linear in r ansteigt. Ein solches Potential folgt zum Beispiel aus der Untersuchung der QCD auf einem Raum-Zeit-Gitter. Das ist zur Zeit die einzige Methode, mit deren Hilfe der Quark-Einschluß als Eigenschaft der QCD demonstriert werden kann.

Aus all dem folgt ein kombinierteres Potential der Form

$$V(r) = -\frac{4}{3}\alpha_s/r + \lambda r + V_0\,. \tag{14.57}$$

Dabei sind α_s, λ und V_0 sowie die Massen der Quarks Q Parameter, die man mit Hilfe der beobachteten Energieniveaus und Übergangswahrscheinlichkeiten bestimmt. Ein Satz von Parametern, mit dem (14.57) das Charmoniumspektrum gut beschreibt, ist z. B.

$$\begin{aligned} m_c &= 1{,}84\ \mathrm{GeV}/c^2\,, \\ \frac{4}{3}\alpha_s &= 0{,}52\,, \\ \lambda &= 0{,}18\ \mathrm{GeV}^2 = 0{,}45\ \mathrm{Fm}^{-2}\,, \\ V_0 &\approx 1\ \mathrm{GeV}\,. \end{aligned} \tag{14.58}$$

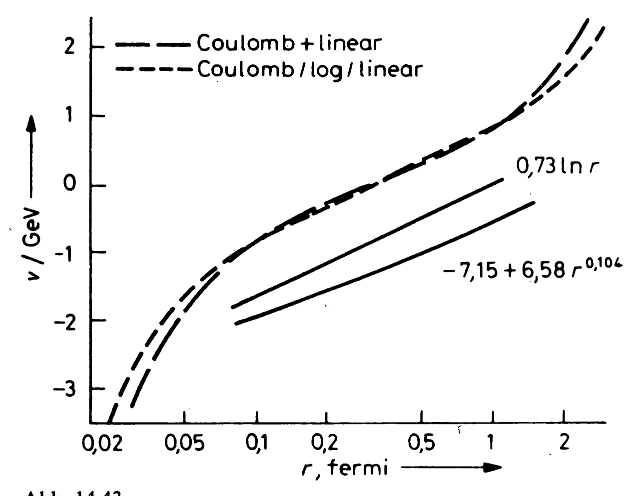


Abb. 14.43
Das nichtrelativistische Quark-Antiquark-Potential mit dessen Hilfe das Charmoniumspektrum berechnet wird. Bei kleinen Abständen ist das Potential Coulombartig, bei großen Abständen ist es ein lineares Potential $V \sim r$, welches zum Quark-Einschluß führt

Der Radius der Charmonium-Zustände ergibt sich daraus als $R = 0{,}68$ Fm, und die Bewegung der Quarks wird charakterisiert durch $\sqrt{(v/c)^2} \approx 1/5$, was die Konsistenz der nichtrelativistischen Beschreibung zeigt. Mit Hilfe der Parameter (14.58) werden auch die bekannten Niveauaufspaltungen des Bottomonium-Systems gut wiedergegeben.

In Abb. 14.43 ist die Form des Potentials (14.57) gezeichnet. Natürlich läßt sich das Potential in dem Gebiet, das für die Bildung der Charmonium- und Bottomonium-Zustände wesentlich ist, auch durch andere Funktionen darstellen, z. B. ein logarithmisches Potential der Form $V(r) = (0{,}73 \text{ GeV}) \ln r$ oder ein potenzartiges Potential der Form $V(r) = -8{,}06 + 6{,}87 \cdot r^{0,1}$. Häufig verwendet man auch das Potential eines harmonischen Oszillators

$$V(r) = \tilde{m} \frac{\omega_0^2}{2} r^2 , \tag{14.59}$$

welches ja auch die Eigenschaft des Quarkeinschlusses zeigt. Dieses Potential beschreibt die Spektren quantitativ zwar nicht völlig korrekt, es hat aber den großen Vorteil, daß sich die Wellenfunktionen, Energieniveaus und Matrixelemente explizit und einfach berechnen lassen. Die realistischen Potentiale hingegen lassen nur eine numerische Lösung zu.

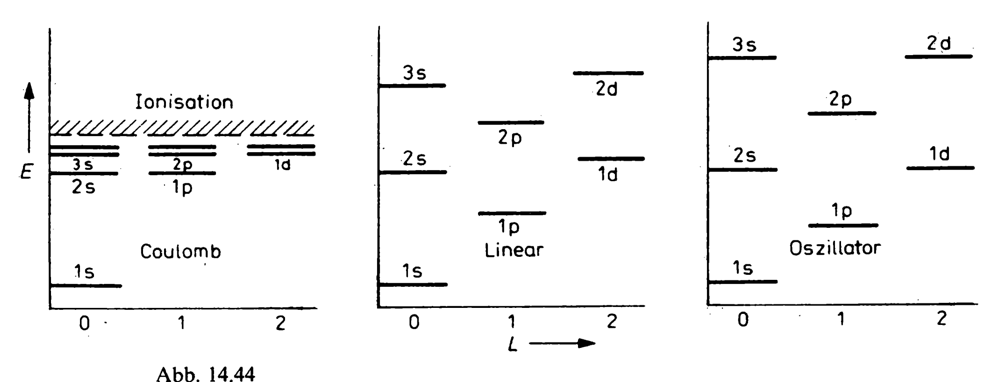


Abb. 14.44
Vergleich der Spektren, die man mit Hilfe eines a) Coulomb-Potentiales, b) Coulomb- und linearen Potential der Form (14.57) und c) dem Oszillator-Potential erhält

In Abb. 14.44 vergleichen wir die Spektren, die man mit dem Coulomb-Potential, dem Potential (14.57) und dem Oszillator-Potential erhält. Während beim Coulomb-Potential die P-Zustände mit den S-Zuständen entartet sind, liegen beim Oszillator-Potential die P-Zustände genau in der Mitte zwischen den S-Zuständen. Ein ähnliches Verhalten zeigt auch das kombinierte Coulomb- und lineare Potential (14.57). Die zusätzliche Berücksichtigung der Fein- und Hyperfeinstrukturaufspaltungen ergibt aus dem Spektrum in Abb. 14.44b die Niveaus des Charmoniumsystems in Abb. 14.41. Insgesamt ist die nichtrelativistische Behandlung des Charmonium-Systems so erfolgreich, daß man gelegentlich dieses System als das Wasserstoffatom der Quantenchromodynamik bezeichnet.

14.4.4. Charmonium-Zerfälle

Neben der Untersuchung der Energieniveaus des Charmonium-Systems besteht ein weiter Problemkreis in der Berechnung der Übergangswahrscheinlichkeiten. Der Mechanismus des Zerfalls der schmalen Charmoniumzustände in gewöhnliche Hadronen ist der folgende. Der

$Q\bar{Q}$-Zustand annihiliert in zwei oder drei Gluonen, und die Gluonen fragmentieren anschließend mit der Wahrscheinlichkeit Eins zu Hadronen, so wie wir das bereits im Abschnitt 14.3 behandelt haben. Wenn die Quark-Gluon-Kopplungskonstante klein ist, lassen sich all die mit Hilfe der Störungstheorie schon viel früher für den Zerfall des Positroniums erhaltenen Ergebnisse verwenden. Das Positronium ist ein durch die Coulomb-Kraft gebundenes System aus einem Elektron und einem Positron (siehe auch Abschnitt 6.7.2.).

Die bekannten Formeln für die Annihilation des Positroniums in Photonen sind für die $L = 0$ Singulett- und Triplett-Zustände

$$\Gamma(^1S_0 \to \gamma\gamma) = \frac{4\alpha^2}{M^2} |R_S'(0)|^2 ,$$
$$\Gamma(^3S_1 \to \gamma\gamma\gamma) = \frac{16}{9\pi} (\pi^2 - 9) \frac{\alpha^3}{M^2} |R_S(0)|^2 . \tag{14.60}$$

Dabei ist $R(0)$ die radiale Wellenfunktion am Ursprung. Für die Zerfallsbreite der P-Wellen benötigt man die Ableitung der Wellenfunktion $R_P'(0)$ am Ursprung

$$\Gamma(^3P_0 \to \gamma\gamma) = \frac{256}{3} \frac{\alpha^2}{M^4} |R_P'(0)|^2$$
$$\Gamma(^3P_2 \to \gamma\gamma) = \frac{4}{15} \Gamma(^3P_0 \to \gamma\gamma) \left(\frac{M_0}{M_2}\right)^4 . \tag{14.61}$$

Zustände des Charmoniumsystems in Abb. 14.41 mit der Ladungskonjugation $C = -1$ zerfallen in mindestens drei Photonen oder Gluonen. Zustände mit $C = +1$ zerfallen bevorzugt in zwei Gluonen. Die Vektormesonen J, Ψ und Ψ' bzw. die Y sind $^3S_1$-Zustände, für die nur Zerfälle in normale Hadronen möglich sind, die durch die Quarklinienregel unterdrückt sind.

Solche Zerfälle verlaufen über einen Drei-Gluonen-Zwischenzustand. Die hadronischen Breiten für diesen Zerfall erhält man aus (14.60), indem man α^3 durch $5\alpha_s^3/18$ ersetzt. α_s ist dabei erneut die QCD-Kopplungskonstante.

$$\Gamma(\mathrm{J}, \Psi \to ggg \to \text{Hadronen}) = \frac{160}{81\pi} (\pi^2 - g) \frac{\alpha_s^3}{m_c^2} |^3S_1(0)|^2 \tag{14.62}$$

Für den Zerfall der $^3S_1$-Zustände in e^+e^- erhält man

$$\Gamma(\mathrm{J}, \Psi \to e^+e^-) = \frac{65\pi\alpha^2}{9} \frac{1}{m_c^2} |^3S_1(0)|^2 . \tag{14.63}$$

Aus dem Verhältnis

$$\frac{\Gamma(\mathrm{J}, \Psi \to \text{Hadronen})}{\Gamma(\mathrm{J}, \Psi \to e^+e^-)} = \frac{5}{18\pi} (\pi^2 - g) \frac{\alpha_s^2}{\alpha^2} \tag{14.64}$$

und den gemessenen Breiten des J, Ψ in Tabelle 14.2 läßt sich die QCD-Kopplungskonstante

$$\alpha_s(m_{\mathrm{J},\Psi} \approx 3 \text{ GeV}) = 0{,}19 \tag{14.65}$$

bestimmen. Diese Kopplungskonstante ist so klein, daß die Anwendung der Störungstheorie gerechtfertigt ist. Wir werden im Abschnitt 14.7 auf α_s zurückkommen. Mit Hilfe von (14.62) und (14.63) erhalten wir die Beziehung

$$\frac{\Gamma(\Psi' \to \text{gewöhnliche Hadronen})}{\Gamma(\mathrm{J}, \Psi \to \text{gewöhnliche Hadronen})} \approx \frac{\Gamma(\Psi' \to e^+e^-)}{\Gamma(\mathrm{J}, \Psi \to e^+e^-)} \approx 0{,}4 , \tag{14.66}$$

die ebenfalls mit den gemessenen Zerfällen konsistent ist. Beim Vergleich mit der Gesamtbreite des Ψ' ist zu berücksichtigen, daß Ψ' — wie in Abb. 14.41 angegeben — neben den Zerfällen in

gewöhnliche Hadronen auch viele Zerfälle in die anderen Charmoniumzustände besitzt. Der dominierende Zerfall des Ψ' ist $\Psi' \to J, \Psi + 2\pi$. Interessant ist auch die Vorhersage, daß die Quarkonium-Zustände entweder in zwei oder drei Gluonen zerfallen. Die in e^+e^--Stößen erzeugten $^3S_1$-Zustände zerfallen in 3 Gluonen. Das Υ-Teilchen mit der Masse von 9,46 GeV/c^2 ist das massivste zur Zeit bekannte Teilchen. Wenn es zerfällt, erhalten die drei Gluonen im Endzustand Energien, die noch zu klein sind, um die Drei-Gluon-Jet-Natur des Endzustandes deutlich erkennen zu können. Durch indirekte Methoden wurde jedoch gezeigt, daß die Verteilung der Endzustandsteilchen mit der Emission von drei Gluonen-Jets konsistent ist. Die Beobachtung noch massiverer Quarkonium-Systeme, z. B. des tt-Zustandes aus Top-Antitop-Quarks mit Massen von mehr als 60 GeV/c^2 würde durch den Zerfall in drei Gluonen-Jets die Möglichkeit schaffen, die Eigenschaften der Gluonen-Jets eingehend zu untersuchen.

Die zwischen dem J, Ψ (3.1) und dem Ψ' (3,69) liegenden ^3P_J-Zustände lassen sich in e^+e^--Stößen hauptsächlich über den Kaskadenzerfall

$$\begin{aligned} \Psi' &\to \gamma + {}^3P_J \\ {}^3P_J &\to \gamma + J, \Psi \end{aligned} \tag{14.67}$$

als direkte Linien im Photonenspektrum, sowie über ihre hadronischen Zerfälle $^3P_J \to 2\pi$, $4\pi, \ldots$ als Maxima in den $2\pi, 4\pi, \ldots$ Massenverteilungen nachweisen. Die Untersuchung der γ-Linien im Kaskadenzerfall führte ebenfalls zur ersten richtigen Identifizierung des $^1S_0$-Zustandes U (2,976). In Abb. 14.45 geben wir das inklusive Photonenspektrum an, in dem all die in Abb. 14.41 eingezeichneten γ-Kaskadenübergänge vom Ψ' aus zu erkennen sind.

Für den pseudoskalaren $^1S_0$-Zustand, der auch als η_c bezeichnet wird, ist der Zerfall in gewöhnliche Hadronen über zwei Gluonen möglich. Diese Zerfallsbreite ist proportional zu α_s^2 statt α_s^3

$$\Gamma(^1S_0 \to gg \to \text{Hadronen}) = \frac{32\pi}{3}\,\alpha_s^2\,\frac{|^1S_0(0)|^2}{m_c^2}\,. \tag{14.68}$$

Wenn die $^1S_0$- und $^3S_1$-Zustände die gleiche radiale Wellenfunktion haben, erhält man für $\alpha_s = 0{,}19$

$$\Gamma(^1S_0 \to \text{Hadronen}) = \frac{27\pi}{5(\pi^2 - 9)\,\alpha_s}\,\Gamma(^3S_1 \to \text{Hadronen}) = 5\ \text{MeV}\,. \tag{14.69}$$

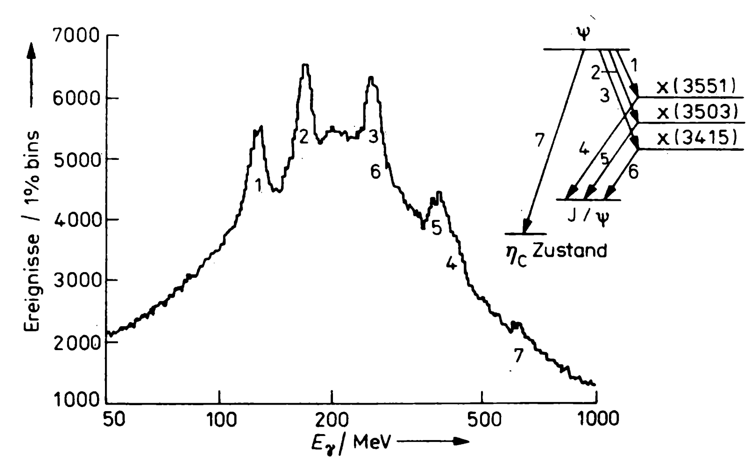


Abb. 14.45
Inklusives Photonenspektrum von Zerfall Ψ → γX

Die Zerfallsbreite der pseudoskalaren Zustände ist also wesentlich größer als die Breiten von J, Ψ oder Ψ'. Diese Zustände konnten leider bisher nicht ausreichend untersucht werden, da sie nicht direkt in e^+e^--Stößen erzeugt werden können. Man hofft, in Zukunft die Produktion des η_c über die Zwei-Photonenaustauschreaktion

$$e^+e^- \to e^+e^- + \eta_c \tag{14.70}$$

nachweisen zu können, da η_c die richtigen Quantenzahlen hat, um an zwei Photonen zu koppeln.

14.4.5. Hadronen mit Charm- und Bottom-Quantenzahlen

Die Deutung der neuen, schweren Teilchen als Charmonium-System wurde erst dann sicher, als es gelang, Mesonen der Zusammensetzung $Q\bar{q}$ und $\bar{Q}q$, die die schweren Quarks Q und ihre Quantenzahlen enthalten, nachzuweisen. Das gelang für die Mesonen mit Charm-Quantenzahlen $c\bar{q}$ und $\bar{c}q$ ebenfalls mit Hilfe der e^+e^--Annihilation. Als geeignetste Erzeugungsreaktion für die D-Mesonen mit Massen von 1,863 (D^0) und 1,868 GeV/c^2 (D^+) erwies sich die Erzeugung über das Ψ'' (3,767)

$$e^+e^- \to \Psi'' \to D + \bar{D}\,. \tag{14.71}$$

Um die Mesonen mit Charm-Quantenzahlen zu verstehen, verwenden wir wieder, wie im Abschnitt 14.1, das Quarkmodell. Die drei leichten Quarks u, d und s bilden ein SU(3)-Triplett in der I_3-Y-Ebene. Die Hinzunahme eines weiteren Quarks c mit der Ladung $Q = 2/3$, Isospin $I_3 = 0$, Strangeness $S = 0$ und Charm $c = 1$ führt uns auf das fundamentale SU(4)-Quartett, dessen Gewichtsdiagramm eine Pyramide ist, siehe Abb. 14.46a. In der SU(3) bilden die $q\bar{q}$-Mesonen ein Nonett (Singulett und Oktett). In der SU(4) wird daraus ein 16-Plett (Singulett und 15-Plet). Es kommen also je Sieben pseudoskalare und Vektormesonen hinzu. Dieses

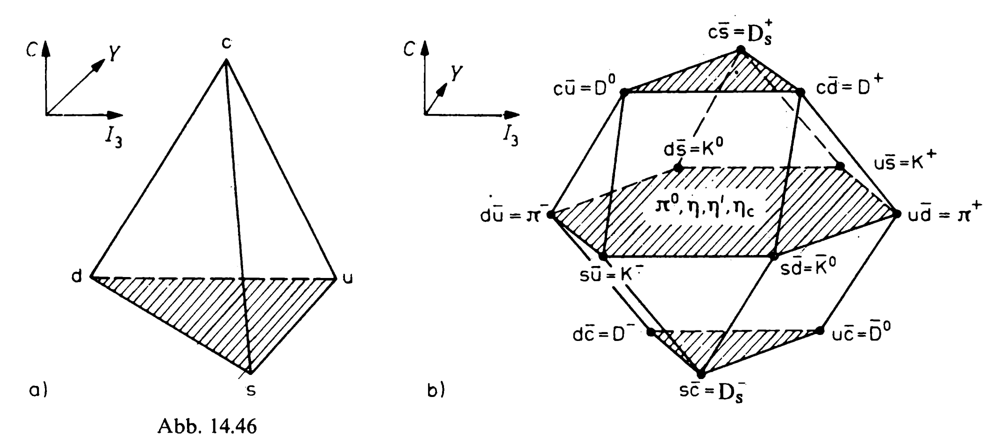


Abb. 14.46
SU(4)-Gewichtsdiagramme
a) Fundamentales Quark-Quartett
b) 16-plett der pseudoskalaren Mesonen

16-Plet ist in Abb. 14.46b angegeben. Die neuen Teilchen sind die folgenden (wir geben als erstes das pseudoskalare Meson als zweites das Vektormeson an):

$$\begin{aligned} c\bar{u} &= D^0, D^{0*}; \\ c\bar{d} &= D^+, D^{+*}; \\ c\bar{s} &= D_s^+, D_s^{+*}; \\ \bar{c}u &= \bar{D}, \bar{D}^{0*}; \\ \bar{c}d &= D^-, D^{-*}; \\ \bar{c}s &= D_s^-, D_s^{-*}. \end{aligned} \tag{14,72}$$

und schließlich gehören dazu auch die beiden Charmonium-Zustände

$$c\bar{c} = \eta_c, J, \Psi. \tag{14.73}$$

Der Charmoniumzustand η_c kann im Prinzip mit den SU(3)-Singulettkomponenten von η und η' gemischt sein. Ähnlich kann das J, Ψ mit dem ω und φ gemischt sein. Wenn das der Fall ist, dann enthalten η, η', ω und φ ebenfalls einen Anteil $c\bar{c}$.

Auch für die Baryonen lassen sich analoge SU(4)-Multipletts konstruieren. Man findet dabei, daß sowohl die SU(3)-Oktett- als auch die SU(3)-Dekuplett-Baryonen in SU(4)-20-Plets enthalten sind. Von diesen neuen Baryonen wurden bisher nur wenige identifiziert.

In Tabelle 14.3. geben wir die Massen und Lebensdauern der bisher am besten bekannten Hadronen mit Charm und Bottom an. Insbesondere die Messung der sehr kurzen Lebensdauern dieser seltenen Teilchen erwies sich als sehr aufwendig und kompliziert. Infolge der sehr kurzen Spurlängen dieser Teilchen von der Erzeugung zum Zerfall ließen sich diese Lebensdauern zunächst nur in Kernspuremulsionsplatten vermessen. Infolge der Seltenheit der Erzeugung dieser Teilchen im Neutrinostrahl oder im Photonstrahl mußte der Zerfallsvertex der Teilchen grob mit Hilfe von Blasenkammeraufnahmen oder anderen Spurdetektoren bestimmt werden.

Tabelle 14.3
Massen und Lebensdauern von Hadronen mit Charm und Bottom

Teilchen	Isospin Spin, Parität $T(I^P)$	Masse MeV/c^2	Mittlere Lebensdauer (s)
$D^\pm$	$\frac{1}{2}(0^-)$	1869,3 ± 0,5	$(10{,}66 \pm 0{,}23) \cdot 10^{-13}$
$D^0, \bar{D}^0$	$\frac{1}{2}(0^-)$	1864,5 ± 0,5	$(4{,}2 \pm 0{,}08) \cdot 10^{-13}$
$D_s^\pm$	$0\,(0^-)$	1968,8 ± 0,7	$\left(4{,}5 {}^{+0{,}3}_{-0{,}26}\right) \cdot 10^{-13}$
Λ_{c^+}	$0\left(\frac{1}{2}^+\right)$	2284,9 ± 0,6	$\left(1{,}41 {}^{+0{,}15}_{-0{,}12}\right) \cdot 10^{-13}$
$B^\pm$	$\frac{1}{2}(0^-)$	5278,6 ± 2,0	$(12{,}9 \pm 0{,}5) \cdot 10^{-13}$ (B$^\pm$ und B^0, $\bar{B}^0$)
$B^0, \bar{B}^0$	$\frac{1}{2}(0^-)$	5278,7 ± 0,2	

Es ist seither gelungen, spezielle Blasenkammern mit besonders großem Auflösungsvermögen (bis zu 30 μm) und hoher Aufnahmefrequenz (bis zu 30 Aufnahmen pro Sekunde) zu konstruieren, die ebenfalls in der Lage sind, solche kurzen Spuren aufzulösen. Als dritte ebenfalls neue Experimentiertechnik setzt man heute sogenannte elektronische Mikrovertexdetektoren ein, das sind Spurdetektoren aus Halbleitermaterial mit hohem räumlichen Auflösungsvermögen.

Hadronen mit Bottom-Quantenzahlen wurden bisher noch nicht so genau identifiziert wie die Hadronen mit Charm. Alle bisherigen Kenntnisse über diese Teilchen stammen vom Zerfall des vierten $b\bar{b}$-Mesons γ''' mit der Masse von 10,570 GeV/c^2. Dieses Meson ist deutlich breiter als die drei ersten $b\bar{b}$-Zustände (siehe Abb. 14.39b). Die Masse dieses Teilchens ist größer als die Masse eines Paars von $B\bar{B}$-Mesonen; es zerfällt über ein verbundenes Quarkliniendiagramm in ein $B\bar{B}$-Paar. Durch die Untersuchung besonders der Endzustände im γ'''-Zerfall, die Leptonen (Elektronen oder Müonen) oder K-Mesonen enthalten, gelang es selbst schon einige Verzweigungsverhältnisse des B-Zerfalls zu bestimmen. Das wichtigste dieser Ergebnisse ist zweifellos das Verzweigungsverhältnis für den schwachen Zerfall des b-Quarks in u- oder c-Quarks.

$$\frac{b \to u + l + \bar{\nu}_e}{b \to c + l + \bar{\nu}_e} = 0{,}1\,.$$

14.5. Harte Streuprozesse

Unter harten Streuprozessen versteht man solche, die sich verstehen lassen als eine elementare Wechselwirkung eines Quark-Partons innerhalb eines Hadrons mit Leptonen oder Quark-Partonen anderer Hadronen. Die Voraussetzungen für einen solchen harten Streuprozeß sind nur dann gegeben, wenn die dabei auftretenden Impulsüberträge oder Energien der elementaren Reaktionen genügend groß sind. Die wichtigsten harten Streuprozesse sind: 1. Hadron-Erzeugung in tief unelastischen Lepton-Hadron-Stößen. 2. Hadron-Erzeugung bei der Elektron-Positron-Annihilation. Diese beiden Gebiete wurden bereits in den Abschnitten 14.2 und 14.3 behandelt. 3. Lepton-Paar-Erzeugung in Hadron-Hadron-Stößen. 4. Hadron-Hadron-Stöße, bei denen Teilchen oder Jets mit großen Transversalimpulsen erzeugt werden. 5. Die Erzeugung von schweren Teilchen, insbesondere Charmonium-Zuständen oder Hadronen mit Charm oder Bottom in Hadron-Hadron-Stößen.

Wir werden uns hier auf die Behandlung der Lepton-Paar-Erzeugung und der Hadron-Erzeugung bei großen Transversalimpulsen beschränken.

14.5.1. Lepton-Paar-Erzeugung in Hadron-Hadron-Stößen

Die Lepton-Paar-Erzeugung in Hadron-Hadron-Stößen läßt sich im Rahmen des Quark-Parton-Modells durch ein von S. D. DRELL und T. M. YAN vorgeschlagenes Modell verstehen. Dieses Modell stimmt im Wesentlichen mit allen bekannten experimentellen Daten überein. Die Quantenchromodynamik rechtfertigt dieses Modell und liefert gleichzeitig wichtige Präzisierungen und Korrekturen.

Im Parton-Modell beschreibt man energiereiche Hadronen als ein Bündel von Quark-Partonen, von denen jedes einen bestimmten Anteil des Hadronenimpulses trägt. Das Drell-Yan-Modell beschreibt die Reaktion

$$h_1 + h_2 \to l^+ + l^- + \cdots \qquad (14.77)$$

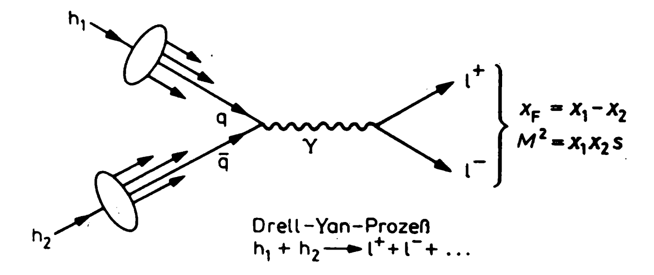


Abb. 14.47
Die Erzeugung eines Leptonenpaares im Hadron-Hadron-Stoß beschrieben im Drell-Yan-Modell

wie in Abb. 14.47 angegeben als elektromagnetische Annihilation eines Quarks und Antiquarks aus den beiden stoßenden Hadronen in ein virtuelles zeitartiges Photon, welches anschließend in ein Lepton-Paar zerfällt.

Wenn x_1 und x_2 die Impulsanteile der Quarks und Antiquarks in den Hadronen bezeichnen, dann sind die Impulse des Quarks und Antiquarks im Schwerpunktsystem des Stoßes $\frac{1}{2}x_1E_{CM}$ bzw. $\frac{1}{2}x_2E_{CM}$. Ohne Berücksichtigung eines Transversalimpulses der stoßenden Quarks ergibt sich dasFeynman x_F und die invariante Masse M^2 des Leptonenpaares als

$$\begin{aligned} x_F &= x_1 - x_2 \\ M^2 &= x_1 \cdot x_2 \cdot E_{CM}^2 . \end{aligned} \tag{14.78}$$

Der Gesamtwirkungsquerschnitt für die elektromagnetische Annihilation eines Quark-Antiquark-Paares der Energie E und mit den Ladungen Q in ein Paar geladener Leptonen $q\bar{q} \to l^+l^-$ ist

$$\sigma(\bar{q}q \to l^+l^-) = \frac{4\pi\alpha^2 Q^2}{3E^2} . \tag{14.79}$$

Der Wirkungsquerschnitt für den Prozeß (14.77), bei dem der Quark q des Hadrons h_1 mit dem Antiquark $\bar{q}$ des Hadrons h_2 annihiliert, hängt zusätzlich von der Wahrscheinlichkeit $f_q^{h_1}(x_1)\,dx_1$ ab, den Quark q mit dem Impulsanteil x_1 im Hadron h_1 zu finden und der entsprechenden Wahrscheinlichkeit $f_{\bar{q}}^{h_2}(x_2)\,dx_2$ den Antiquark im Hadron h_2 zu finden. Wir ersetzen E^2 in (14.79) durch $x_1, x_2E_{CM}^2$ und erhalten

$$d^2\sigma = \frac{4\pi\alpha^2}{3x_1x_2E_{CM}^2}\, Q^2 f_q^{h_1}(x_1)\, f_{\bar{q}}^{h_2}(x_2)\, dx_1\, dx_2 . \tag{14.80}$$

Um alle Beiträge zum Wirkungsquerschnitt zu bekommen, berücksichtigen wir die Quarks q und die Antiquarks $\bar{q}$ aus beiden Hadronen und summieren über alle Arten von Quarks. Weiterhin berücksichtigen wir die Farbe der Quarks. Da jeweils nur Quarks der gleichen Farbquantenzahlen in ein virtuelles Photon annihilieren können, erhält der Wirkungsquerschnitt für drei Farben des Quarks einen Faktor 1/3

$$\frac{d^2\sigma}{dx_1\,dx_2} = \frac{4\pi\alpha^2}{3E_{CM}^2}\,\frac{1}{3}\sum_i \frac{Q_i^2}{x_1x_2}\,[f_{q_i}^{h_1}(x_1)\, f_{\bar{q}_i}^{h_2}(x_2) + f_{\bar{q}_i}^{h_1}(x_1)\, f_{q_i}^{h_2}(x_2)] . \tag{14.81}$$

Schließlich ersetzen wir die Variablen x_1 und x_2 durch die Variablen M^2 und x_F des Leptonpaares

$$x_1 = \frac{1}{2}\left(x_F + \sqrt{x_F^2 + \frac{4M^2}{E_{CM}^2}}\right),$$
$$x_2 = -\frac{1}{2}\left(x_F - \sqrt{x_F^2 + \frac{4M^2}{E_{CM}^2}}\right), \tag{14.82}$$
$$dM^2\, dx_F = (x_1 + x_2)\, E_{CM}^2\, dx_1\, dx_2$$

und erhalten

$$\frac{d^2\sigma}{dM^2\, dx_F} = \frac{4\pi\alpha^2}{3M^4}\frac{1}{3}\sum_i \frac{x_1 x_2}{x_1 + x_2}\, Q_i^2 [f_{q_i}^{h_1}(x_1)\, f_{\bar{q}_i}^{h_2}(x_2) + f_{\bar{q}_i}^{h_1}(x_1)\, f_{q_i}^{h_2}(x_2)]. \tag{14.83}$$

Dieser Wirkungsquerschnitt zeigt unabhängig von den speziellen Quarkverteilungsfunktionen $f(x_1)$ und $f(x_2)$ das einfache Skalenverhalten

$$M^4 \frac{d^2\sigma}{dM^2\, dx_F} = F_{h_1 h_2}(x_F, \tau)\,. \tag{14.84}$$

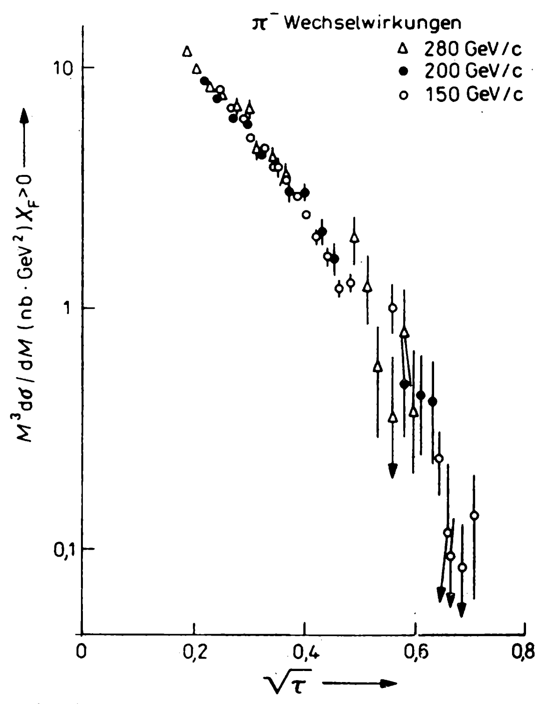


Abb. 14.48
Test des τ-Skalenverhaltens der Leptonpaarerzeugung in π^--Nukleon-Stößen

Die Skalenvariable τ ist dabei definiert als $\tau = M^2/E_{\mathrm{CM}}^2$. Die Funktion $F_{\mathrm{h_1h_2}}$ hängt natürlich von der Art der stoßenden Hadronen ab. Nach der Integration über das Feynman x_{F} des Leptonenpaares erhalten wir das Skalenverhalten

$$M^4 \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}M^2} = G_{\mathrm{h_1h_2}}(\tau)\,. \tag{14.85}$$

In Abb. 14.48 ist zu sehen, daß ein solches Skalenverhalten auch im Experiment gefunden wird.

Das Drell-Yan-Modell macht ebenfalls eine bestimmte Vorhersage für die Winkelverteilung der Leptonen, die für die Annihilation von Fermionen die gleiche sein sollte wie für die Reaktion $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$, die wir im Abschnitt 13.2 betrachtet hatten, siehe (13.15). Im Ruhsystem des Leptonenpaares erwarten wir

$$\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\cos\Theta} \prec 1 + \cos^2\Theta\,, \tag{14.86}$$

wobei Θ der Polarwinkel des Leptons bezüglich der $q\bar{q}$-Stoßrichtung ist. Die experimentell gefundene Winkelverteilung stimmt gut mit (14.86) überein.

Verwendet man für die Experimente Hadronenstrahlen aus Teilchen wie $\pi^\pm$, K^- oder $\bar{p}$, die Valenz-$\bar{u}$- oder $\bar{d}$-Antiquarks enthalten, die mit den u- und d-Quarks eines Nukleonentargets annihilieren können, dann erwartet man wesentlich größere Wirkungsquerschnitte für die Leptonenpaarerzeugung als für Strahlen aus Protonen oder K^+-Mesonen.

Das Verhältnis der Leptonpaarerzeugung durch π^+- und π^--Strahlen mit einem isoskalaren Target (gleiche Zahl von Protonen und Neutronen) wird in der Grenze großer τ-Werte durch

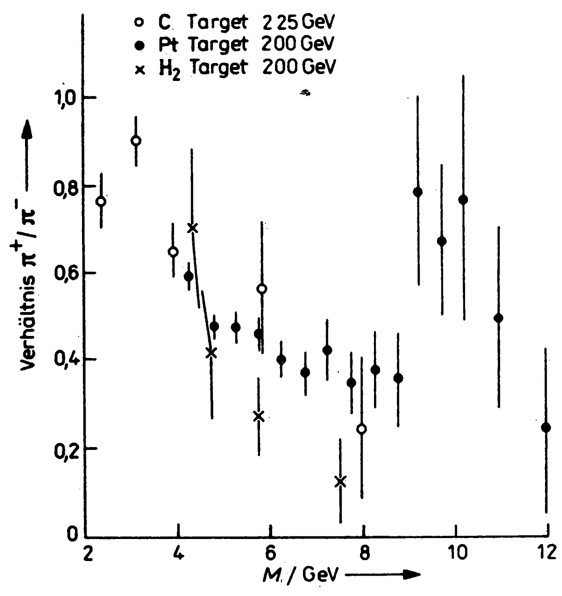


Abb. 14.49
Verhältnis der π^+- zur π^--induzierten Dimyon-Erzeugung als Funktion der effektiven Masse M des Myonenpaares

das Verhältnis der Quadrate der Ladungen der d-Quarks $(1/3)^2$ zu denen der u-Quarks $(2/3)^2$ bestimmt.

$$\frac{\sigma(\pi^+ N \to l^+ l^-)}{\sigma(\pi^- N \to l^+ l^-)} = \frac{Q_d^2}{Q_u^2} = \frac{1}{4}. \tag{14.87}$$

In Abb. 14.49 sehen wir trotz großer experimenteller Fehler, daß das Verhältnis der Daten diesem Wert bei großen Massen der Leptonenpaare nahekommt. Bei der Bildung dieses Verhältnisses verwendet man nur den Teil der Wirkungsquerschnitte (siehe Abb. 14.50) außerhalb der Reonanzmaxima, die durch die J,Ψ- und γ-Vektormesonen hervorgerufen werden.

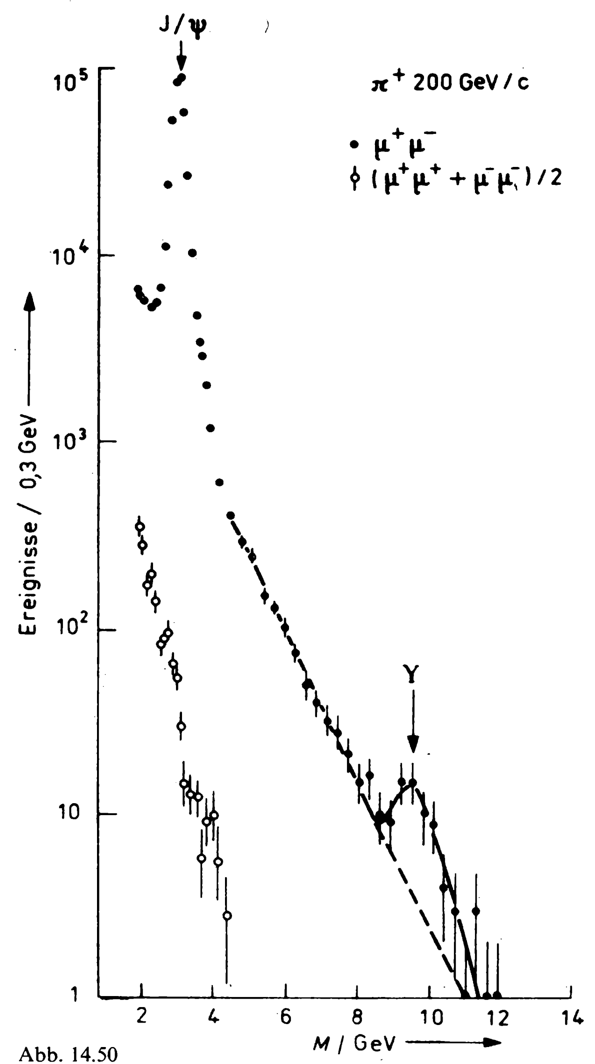


Abb. 14.50
Die Dimyon-Massenverteilung, gemessen mit Hilfe eines 200 GeV π^+-Strahls auf einem Platin-Target. Die beiden Maxima entstehen durch die Erzeugung der Vektormesonen J, Ψ (3,1) und Υ (9,46)

Für Teilchen wie $\pi^\pm$, $K^\pm$ und $\bar{p}$, für die es nicht möglich ist, die Quarkverteilungen mit Hilfe von tief unelastischen Streuexperimenten zu bestimmen, erweist sich die Leptonpaar-Erzeugung als der günstigste Prozeß zur experimentellen Bestimmung der Quarkverteilungen.

Das hier geschilderte einfache Drell-Yan-Modell wird durch die QCD verfeinert. Einige dieser Korrekturen betreffen die Verwendung von Quark-Verteilungen $f(x, Q^2)$ mit Abweichungen von Skalenverhalten in (14.81) und (14.83), die Berücksichtigung der Transversalimpulse der stoßenden Partonen im Hadron sowie QCD-Korrekturen höherer Ordnungen, die den gesamten Wirkungsquerschnitt (14.83) vergrößern.

14.5.2. Erzeugung von Hadronen mit großen Transversalimpulsen in Hadron-Hadron-Stößen

Im Quark-Parton-Modell erwartet man in Hadron-Hadron-Stößen auch harte rein hadronische Streuprozesse. Dabei treten elastische Streuprozesse zweier Partonen mit den Impulsanteilen x_1 und x_2 aus den einlaufenden Hadronen auf.

Nach der Parton-Parton-Streuung fragmentieren die gestreuten Partonen zu Hadronenjets. Dieser Prozeß wird in Abb. 14.51 dargestellt.

Für einen elementaren Streuprozeß der punktförmigen Partonen und exaktes Skalenverhalten der Quarkverteilungsfunktionen $f_q^h(x)$ und Quarkfragmentationsfunktionen $D_q^h(z)$ erwarten wir in diesem Bild das folgende Verhalten der inklusiven Hadronenerzeugung bei großen Transversalimpulsen

$$E\,\frac{d^3\sigma}{d^3p}\,(h_1 + h_2 \to h + \cdots) = \frac{1}{E_{CM}^4}\,f(x_\perp, \cos\Theta) = \frac{1}{p_\perp^4}\,g(x_\perp, \cos\Theta)\,. \tag{14.88}$$

Dabei ist die Variable $x_\perp$ definiert als $x_\perp = 2p_\perp/E_{CM}$.

Hier fällt der inklusive Wirkungsquerschnitt bei großen Transversalimpulsen nur prozentartig, das heißt wesentlich langsamer mit steigendem Transversalimpuls $p_\perp$ ab, als die Extrapolation des bei kleinen Transversalimpulsen gefundenen exponentiellen Abfalls (13.100) erwarten ließe. Auch die Form der einzelnen Streuereignisse folgt direkt aus diesem Bild. Man erwartet die Emission zweier Hadronenjets mit großen Transversalimpulsen in einer Ebene koplanar mit den einlaufenden Hadronen. Die Azimutalwinkel der beiden Jets werden entgegengesetzt erwartet. Dagegen unterscheiden sich die Polarwinkel der beiden Jets infolge des Longitudinalimpulses des 2-Jet-Systems (d. h., beide Jets sind nicht kolinear).

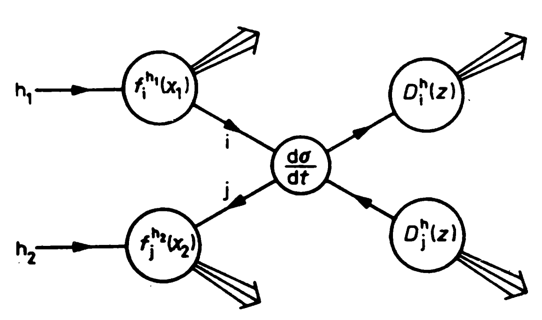


Abb. 14.51
Hadronenerzeugung bei großen Transversalimpulsen im Quark-Parton-Modell

Tatsächlich wurden 1973 Teilchen bei großen Transversalimpulsen beobachtet. Aber der gemessene Erzeugungsquerschnitt bei Transversalimpulsen bis zu 6—8 GeV/c hatte die Form

$$E\frac{d^3\sigma}{d^3p} \approx 1{,}54 \cdot 10^{-26} p_\perp^{-8{,}24} \exp(-26{,}1 x_\perp) \frac{\text{cm}^2}{\text{GeV}^2}. \tag{14.89}$$

Dieser Wirkungsquerschnitt zeigte zwar das erwartete $x_\perp$-Skalenverhalten, aber die Potenz $p_\perp^{-8}$ schien eine einfache Interpretation im Partonmodell auszuschließen.

Erst nach dem Aufkommen der QCD- und des QCD-verbesserten Partonmodells konnte dieses Verhalten verstanden werden. Als elementare Streuprozesse müssen neben der Quark-Quark-Streuung auch die Quark-Gluon- und die Gluon-Gluon-Streuung berücksichtigt werden. In Tabelle 14.4 geben wir alle beitragenden QCD-Wirkungsquerschnitte niedrigster Ordnung an. Weiterhin muß die Q^2-Abhängigkeit sowohl der QCD-Kopplungskonstanten $\alpha_s(Q^2)$ als auch der Partonverteilungen und Partonfragmentationsfunktionen (siehe Abschnitt 14.7) berücksichtigt werden, und es müssen die Partontransversalimpulse in Betracht gezogen werden. Nur durch Berücksichtigung all dieser Effekte kann das Verhalten (14.89) bei relativ kleinen Transversalimpulsen verstanden werden. Gleichzeitig erwartet man in diesem Bild, daß die

Tabelle 14.4
Differentielle Streuquerschnitte einiger harter Streuprozesse in der niedrigsten Ordnung der QCD. q und g stehen für Quarks und Gluonen. In der Tabelle geben wir nur den Ausdruck Σ an. Der vollständige Wirkungsquerschnitt hat die Form $\frac{d\sigma}{dt} = \frac{\pi\alpha_s^2}{s^2}\Sigma$. s, t und u sind die Mandelstamvariablen des Prozesses

Prozeß	Σ
$q_1q_2 \to q_1q_2$ $q_1\bar{q}_2 \to q_1\bar{q}_2$	$\frac{4}{9}\frac{s^2+u^2}{t^2}$
$q_1q_1 \to q_1q_1$	$\frac{4}{9}\left(\frac{s^2+u^2}{t^2}+\frac{s^2+t^2}{u^2}\right)-\frac{8}{27}\frac{s^2}{ut}$
$q_1\bar{q}_1 \to q_2\bar{q}_2$	$\frac{4}{9}\frac{t^2+u^2}{s^2}$
$q_1\bar{q}_1 \to q_1\bar{q}_1$	$\frac{4}{9}\left(\frac{s^2+u^2}{t^2}+\frac{t^2+u^2}{s^2}\right)-\frac{8}{27}\frac{u^2}{st}$
$q\bar{q} \to gg$	$\frac{32}{27}\frac{u^2+t^2}{ut}-\frac{8}{3}\frac{u^2+t^2}{s^2}$
$gg \to q\bar{q}$	$\frac{1}{6}\frac{u^2+t^2}{ut}-\frac{3}{8}\frac{u^2+t^2}{s^2}$
$qg \to qg$	$-\frac{4}{9}\frac{u^2+s^2}{us}+\frac{u^2+s^2}{t^2}$
$gg \to gg$	$\frac{9}{2}\left(3-\frac{ut}{s^2}-\frac{us}{t^2}-\frac{st}{u^2}\right)$

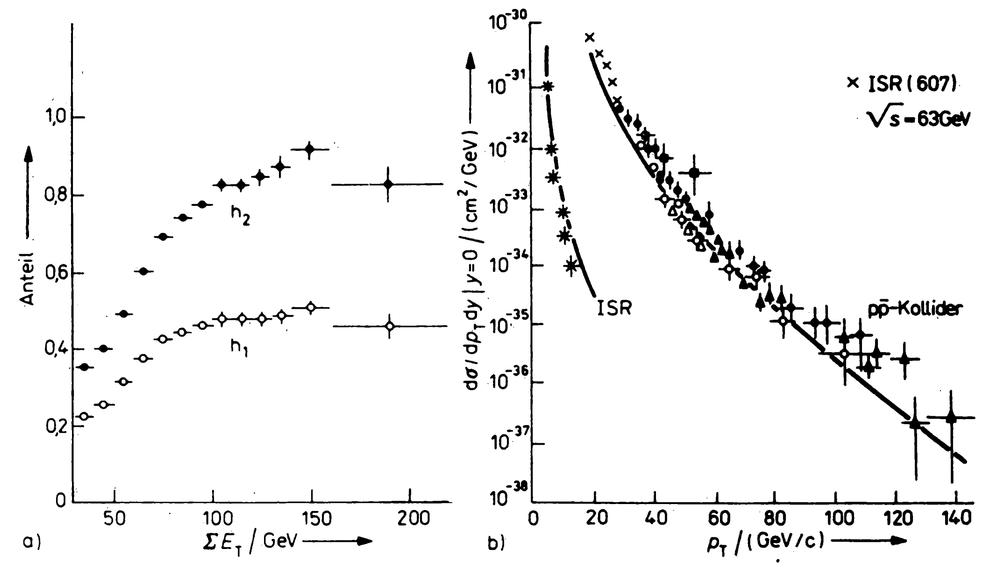


Abb. 14.52

a) Die Anteile h_1 (und h_2) der gesamten transversalen Energie $\Sigma\, E_t$ die von einem (zwei) Jets getragen werden, als Funktion von $\Sigma\, E_t$

b) Die inklusive Erzeugung von Hadronenjets mit großem Transversalimpuls bei den Energien des Proton-Antiproton-Kolliders (540 GeV) und bei 60 GeV (CERN-ISR). Die Daten verschiedener Experimente werden mit den Ergebnissen der QCD-Störungstheorie verglichen

effektive Potenz der $p_\perp$-Abhängigkeit des Wirkungsquerschnittes langsam mit steigendem Transversalimpuls und steigender Stoßenergie abnimmt und erst bei sehr großen Energien und $p_\perp$-Werten das Ergebnis des naiven Modells $p_\perp^{-4}$ erreicht. Ein solches Abnehmen der effektiven Potenz mit steigendem Transversalimpuls wurde seither auch experimentell gefunden. In Abbildung 14.52a zeigen wir zunächst experimentelle Daten vom CERN-Proton-Antiproton-Kollider, die belegen, daß Stoßereignisse mit genügend großer transversaler Energie hauptsächlich Ereignisse mit zwei Hadronenjets bei großem Transversalimpuls sind. Die Summe der transversalen Energien ist dabei die Größe $E_\perp = (p_\perp^2 + m^2)^{1/2}$ summiert über alle geladenen und ungeladenen Sekundärteilchen des Ereignisses. In Abb. 14.52b vergleichen wir die Daten für die inklusive Erzeugung von Jets mit großem Transversalimpuls bei Stoßenergien im Schwerpunktsystem von 60 GeV und 540 GeV mit einer QCD-Rechnung, die all die oben beschriebenen Effekte berücksichtigt. Wir finden eine konsistente Beschreibung der Daten. Diese Abbildung zeigt gleichzeitig den starken Anstieg der Teilchenerzeugung bei großem Transversalimpuls mit der Stoßenergie.

Es ist jedoch nicht nur die inklusive Transversalimpulsverteilung die mit dem Bild der harten Streuung der Konstituenten übereinstimmt. Obgleich die Experimente sehr kompliziert sind, gelingt es, immer mehr Einzelheiten bei diesen Prozessen zu verstehen. In Abb. 14.53 zeigen wir in verschiedener Darstellung zwei Ereignisse der p̄p-Streuung bei der Schwerpunktsenergie von 540 GeV. In jedem der Ereignisse ist deutlich ein Paar von wohlkollinierten Hadronenjets zu sehen. Neben diesen Ereignissen mit zwei Jets mit großem Transversalimpuls beobachtet man auch Ereignisse mit drei solchen Jets, wo also ähnlich wie bei der e^+e^--Annihilation in den Abbildungen 14.32 und 14.33 zusätzlich ein harter Gluonenjet erzeugt wird.

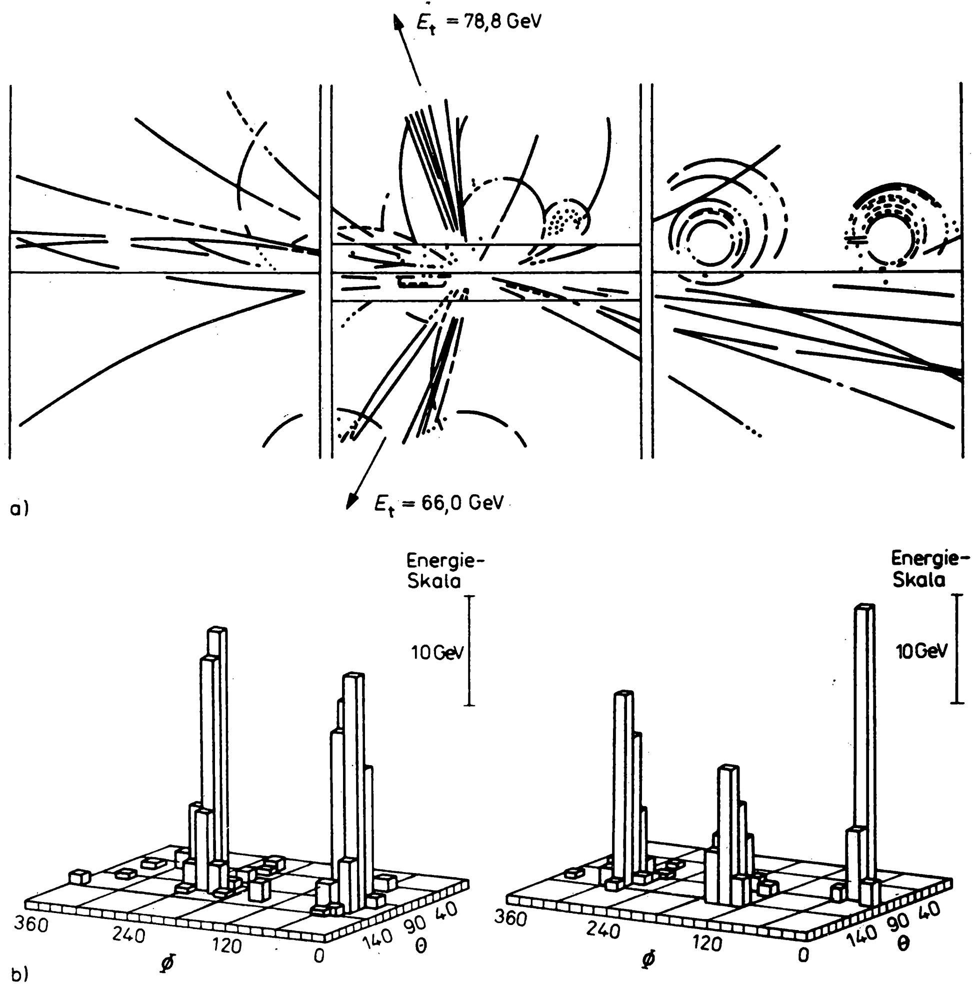


Abb. 14.53
a) Ein Ereignis des UA1-Detektors am CERN Proton-Antiproton-Kollider. Es sind deutlich die beiden Jets mit großem Transversalimpuls zu sehen. Diese beiden Jets tragen etwa 25% der gesamten Schwerpunktsenergie des Stoßes
b) Ereignis mit zwei Jets mit großem Transversalimpuls aufgenommen vom UA2-Experiment am Proton-Antiproton-Kollider. Aufgetragen wird die transversale Energie über der Θ-Φ-Ebene
c) Drei-Jet-Ereignis in der gleichen Darstellung wie b)

Auch die Winkelverteilung, die dem harten Quark-Quark-Subprozeß in Tabelle 14.4. entspricht, stimmt mit dem Experiment überein. Dieser Nachweis gelang in einem Experiment, bei dem Proton-Proton-Stöße bei den Schwerpunktsenergien von 45 und 62 GeV am CERN-ISR-Speicherring untersucht wurden. Als erstes sei festgestellt, siehe dazu Abb. 14.54, daß ein einzelnes nachgewiesenes π^0-Meson bei Transversalimpulsen von mehr als 6 GeV im Mittel etwa 90% der Gesamtenergie des dazugehörigen Hadronenjets trägt. Dieses π^0-Meson repräsentiert

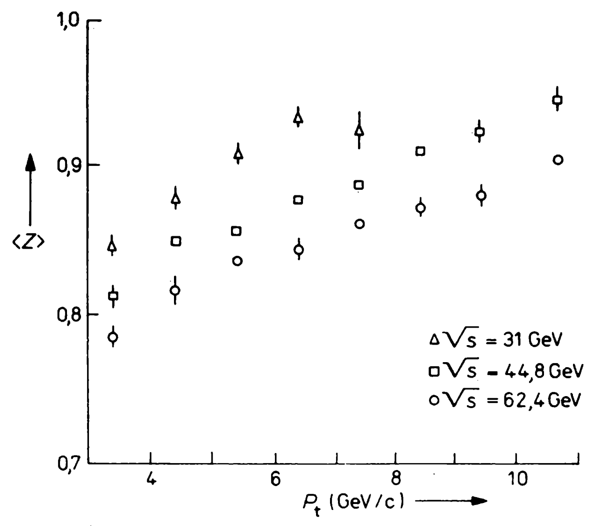


Abb. 14.54
Der Impulsanteil des Jets $Z = P_{\pi^0}/P_{\text{Jet}}$, den ein Trigger-$\pi^0$ trägt, als Funktion des Transversalimpulses des nachgewiesenen π^0-Mesons

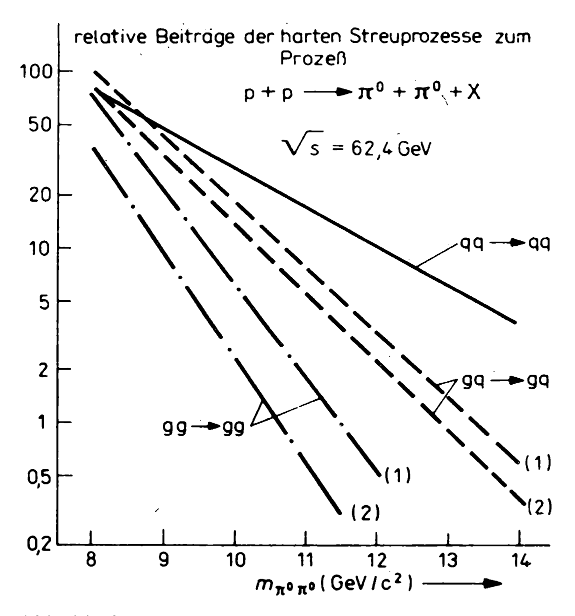


Abb. 14.55
Relative Beiträge der harten Streuprozesse Valenzquark-Valenzquark (qq → qq), Gluon-Valenzquark (gq → gq) und Gluon-Gluon (gg → gg) zum Prozeß $p + p \to \pi^0 + \pi^0 + X$. Die Kurven (1) und (2) wurden mit unterschiedlichen Fragmentationsfunktionen der Gluonen erhalten

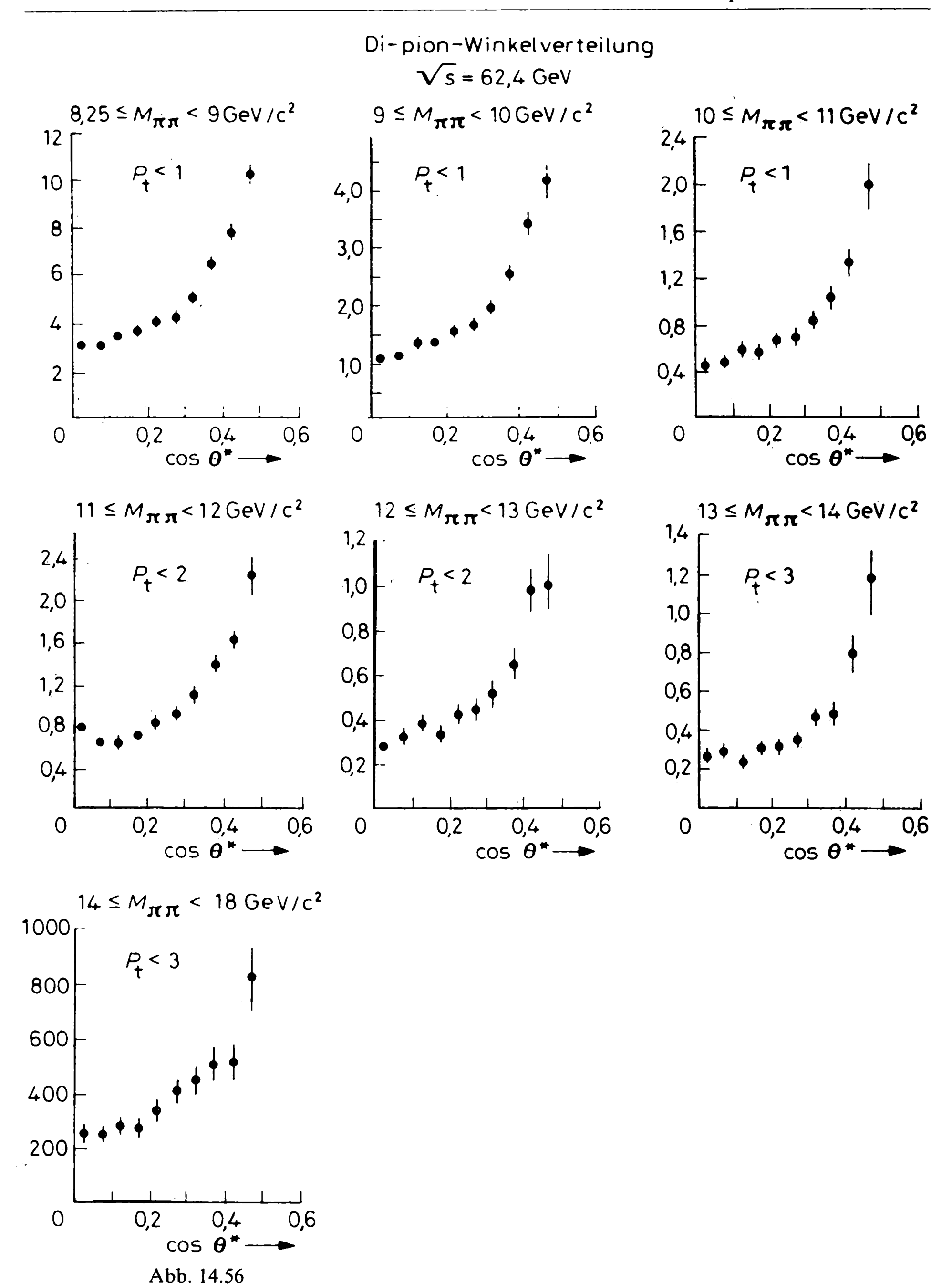


Abb. 14.56
Die Winkelabhängigkeit des Erzeugungsquerschnitts $d\sigma/dM\, d\Theta^*$ aufgetragen als Funktion von $\cos\Theta^*$ für verschiedene Intervalle der invarianten Masse $M_{\pi\pi}$ des Systems der beiden π^0-Mesonen

also in sehr guter Näherung den Jet selbst. Die Untersuchung der inklusiven Erzeugung zweier π^0-Mesonen mit entgegengesetzten großen Transversalimpulsen erlaubt es also, die 2-Jet-Erzeugung und damit den harten Streuprozeß der Konstituenten der Hadronen i und j in Abb. 14.51 zu untersuchen. Ausgehend von den Subprozessen in Tabelle 14.4 stellt man leicht fest, daß bei der betrachteten Stoßenergie und bei den untersuchten Transversalimpulsen (bzw. der Gesamtenergie des π^0-π^0-Systems) ein Subprozeß — und zwar die Quark-Quark-Streuung — weitgehend dominiert, siehe dazu Abb. 14.55.

Die Winkelverteilungen der π^0-Mesonen in dem longitudinalen Ruhesystem der beiden π^0-Mesonen lassen sich messen, siehe Abb. 14.56. Sie stimmen sehr gut mit den aus dem Quark-Quark-Streuprozeß in Tabelle 14.4 folgenden Winkelverteilungen überein.

14.5.3. Experimente an Proton-Proton- und Proton-Antiproton-Kollidern

Wir beschreiben zunächst ein Experiment, siehe Abb. 14.57, welches am CERN-ISR-Proton-Proton-Speicherring installiert wurde. Dieses Experiment diente besonders zum Nachweis von Elektronen und Photonen bei großen Transversalimpulsen. Zum Beispiel wurden die im letzten Abschnitt beschriebenen Experimente zur π^0-Paar-Erzeugung bei großen Transversalimpulsen (Abb. 14.54—14.56) an diesem Detektor durchgeführt. Weitere Experimente sind: Messung der Produktion von Photonen und Mesonen bei großen Transversalimpulsen. Untersuchung der Elektron-Positron-Paar-Erzeugung über den im Abschnitt 14.5.1. beschriebenen Drell-Yan-Mechanismus. Untersuchung der Erzeugung von J,Ψ- und Ψ'- sowie der Y-Teilchen in Proton-Proton-Stößen, dabei werden diese Teilchen an Hand ihres Zerfalls in e^+e^--Paare nachgewiesen.

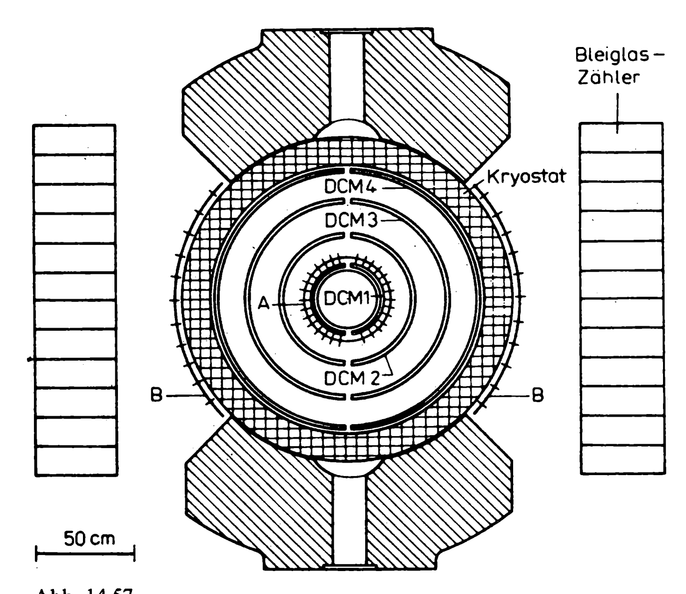


Abb. 14.57
Querschnitt (senkrecht zum Strahl) durch einen Detektor zum Nachweis von geladenen und neutralen Teilchen mit großen Transversalimpulsen am Proton-Proton-Speicherring CERN-ISR

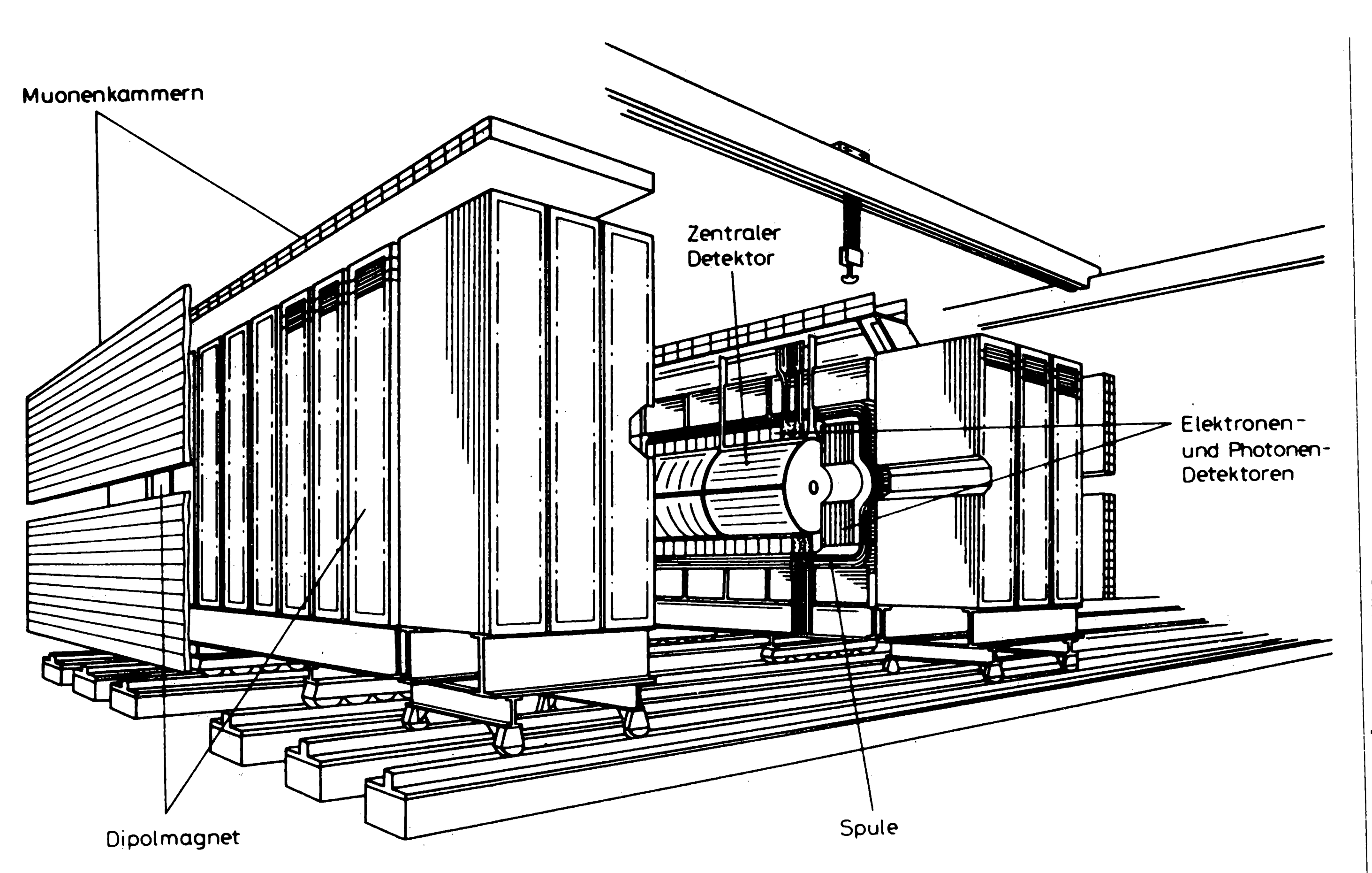


Abb. 14.58
Darstellung des großen universellen Detektors des UA1-Experiments zur Untersuchung von Proton-Antiproton-Stößen am $\bar{p}p$-Kollider des CERN-SPS

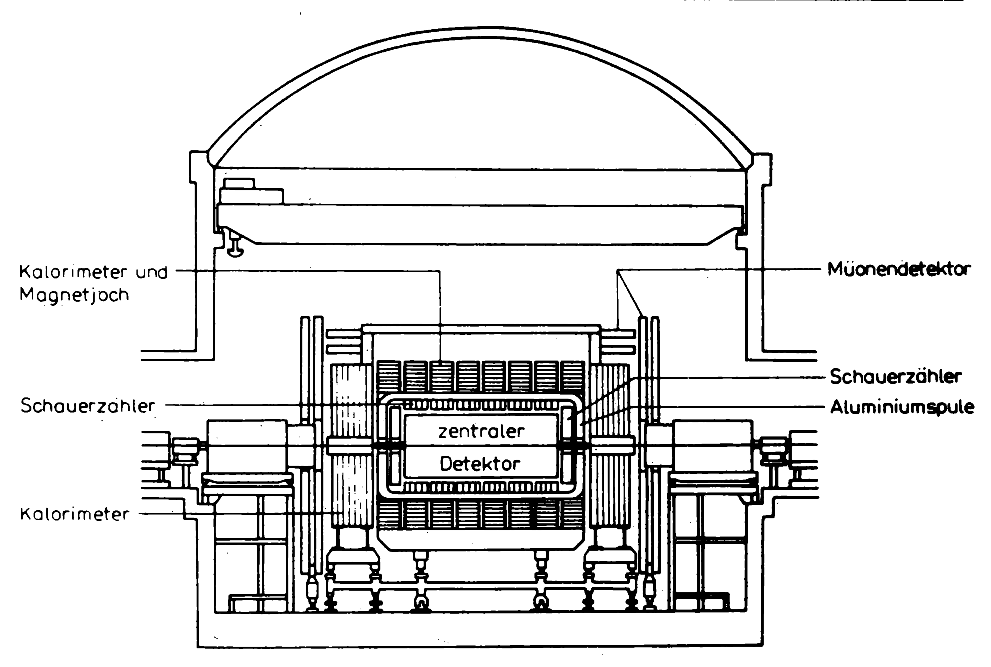


Abb. 14.59
Querschnitt (parallel zum Strahl) durch den universellen $\bar{p}$p-Detektor von Abb. 14.58

Suche nach schweren Hadronen, die in e^+e^--Paare zerfallen, z. B. den Hadronen des vorhergesagten Toponiumsystems, die aus einem t- und einem $\bar{t}$-Quark bestehen. Abb. 14.57 zeigt einen Schnitt durch den Detektor senkrecht zur Vakuumröhre, in der die Protonen kreisen. Das wichtigste Element des Detektors sind zwei Anordnungen von Bleiglas-Čerenkov-Zählern zum Nachweis und zur Energiebestimmung von Photonen und Elektronen. Beide Bleiglaswände weisen Teilchen nach, die bei Winkeln um $\Theta = 90^\circ$ im Schwerpunktsystem des Stoßes emittiert werden. Die innere Wand sieht einen Raumwinkelbereich von $\Delta\Omega = 0{,}87$, die äußere Wand sieht $\Delta\Omega = 1{,}42$. Diese Bleiglas-Detektoren sind außerhalb eines supraleitenden Solenoid-Magneten angeordnet, der ein longitudinales Magnetfeld erzeugt. Innerhalb des Solenoids folgt direkt nach der Vakuumkammer eine zylinderförmige Anordnung von 32 Szintillationszählern und einigen zylinderförmigen Driftkammern, mit deren Hilfe geladene Teilchen nachgewiesen werden. Außerhalb des Solenoids befindet sich eine zweite Anordnung von Szintillationszählern. Als zweites beschreiben wir einen der größten existierenden Detektoren, der am CERN-SPS Proton-Antiproton-Kollider installiert wurde, siehe Abb. 14.58 und 14.59. Mit diesem und einigen anderen Detektoren werden erstmalig Stoßereignisse bei der Schwerpunktenergie von 540 GeV in Antiproton-Proton-Stößen untersucht. Insbesondere ist das einer der beiden Detektoren mit deren Hilfe 1983 die $W^\pm$- und Z^0-Eichbosonen der elektroschwachen Wechselwirkung mit Massen um 80 und 90 GeV/c^2 nachgewiesen wurden, siehe dazu auch den Abschnitt 14.8.5. Weiterhin wurde mit diesem Detektor die Teilchenerzeugung bei großem Transversalimpuls untersucht, siehe dazu den Abschnitt 14.5.2.

Ein großer Dipolmagnet erzeugt transversal zur Bewegungsrichtung der primären Protonen und Antiprotonen ein Magnetfeld von 0,7 Tesla. Die Spurkammer im Zentrum des Magneten

ist 6 m lang mit einem Radius von 1,3 m. Sie besteht aus etwa 10000 Drähten. Von jedem Draht wird die Impulshöhen- und Zeitinformation einzeln ausgeschrieben. Damit läßt sich eine räumliche Auflösung der Spuren von 250 μm und eine Messung der spezifischen Ionisation dE/dx verwirklichen. Außerhalb dieser Spurkammer folgt noch im Magnetfeld ein Kalorimeter zur Messung der von Elektronen oder Photonen verursachren elektromagnetischen Kaskaden. Ein Hadronenkalorimeter ist ins Eisenjoch des Magneten eingebaut. Schließlich ist die gesamte Apparatur auf 3 Seiten von einem Myonendetektor bedeckt.

Die Kalorimeter und Myonendetektoren bestehen aus insgesamt 8000 Szintillationsdetektoren. Die Apparatur erlaubt es, Elektronen und Myonen von geladenen Hadronen zu unterscheiden. Bei der Energie des $\bar{p}p$-Kolliders enthält ein mittleres Stoßereignis etwa 30 geladene und zusätzlich 15 neutrale Sekundärteilchen. Zur Aufzeichnung eines einzigen Ereignisses zeichnet die Apparatur 10^5 Bits Informationen auf.

In Abb. 14.53b und 14.77 geben wir Beispiele für Ereignisse, die mit Hilfe dieses Detektors aufgezeichnet wurden.

14.6. Eichfeldtheorien

Die Maxwellsche Theorie des Elektromagnetismus und die Quantenelektrodynamik, die einheitliche Feldtheorie der elektromagnetischen und schwachen Wechselwirkung und schließlich die Quantenchromodynamik, die Theorie der starken Wechselwirkung, sind Eichfeldtheorien. Durch die Herausbildung der beiden letztgenannten Eichfeldtheorien, verbunden mit den experimentellen Entdeckungen, hat die Theorie der Elementarteilchen im letzten Jahrzehnt eine Entwicklung genommen, die sich vielleicht nur mit der Herausbildung der Quantenmechanik in den zwanziger Jahren vergleichen läßt. Heute wird intensiv an großen einheitlichen Theorien gearbeitet, in der die elektroschwache Wechselwirkung und die starke Wechselwirkung durch eine einheitliche Eichfeldtheorie beschrieben wird. Natürlich reicht der Umfang dieses Kapitels nicht, diese theoretischen Entwicklungen auch nur annähernd zu beschreiben. Deshalb kann es unser Ziel nur sein, die wichtigsten Begriffe und Vorstellungen darzulegen und Anregungen für eine weiterführende Beschäftigung zu geben.

14.6.1. Globale Symmetrien

Der Symmetriebegriff erweist sich als überaus fruchtbar in der Physik. Wir wollen im folgenden die wohlbekannten Symmetrien in Raum und Zeit, wie die Translationssymmetrie oder die Rotationssymmetrie und die inneren Symmetrien, die auf die Erhaltung der Ladung, des Isospins oder der Parität eines Teilchens führen, als *globale Symmetrien* bezeichnen.

Um zu Eichfeldtheorien zu kommen, müssen wir den Symmetriebegriff erweitern und lokale Symmetrien einführen. Zunächst betrachten wir jedoch Beispiele für globale Symmetrien. Die Wellenfunktion $\psi(x)$ beschreibe Fermionen, deren kräftefreie Bewegung durch den Feld-Lagrangean beschrieben wird

$$L_0 = \bar{\psi}(x)\,(\mathrm{i}\gamma_\mu\,\partial^\mu - m)\,\psi(x)\,. \tag{14.90}$$

Dabei bezeichnet ∂_μ die Ableitungsoperatoren $\partial_\mu = \partial/\partial x_\mu$. Wir untersuchen die Invarianz der Wellenfunktion unter einer Phasentransformation

$$\begin{aligned} \psi(x) &\to \mathrm{e}^{\mathrm{i}\Theta}\,\psi(x)\,, \\ \partial_\mu\psi(x) &\to \mathrm{e}^{\mathrm{i}\Theta}\,\partial_\mu\psi(x)\,. \end{aligned} \tag{14.91}$$

Es handelt sich dabei um die Symmetrie unter der Abelschen Gruppe U(1). Einsetzen von (14.91) in (14.90) zeigt sofort, daß der Lagrangean unter dieser Gruppe invariant ist.

Ähnlich läßt sich die Invarianz unter einer nichtabelschen Gruppe zeigen. Wir betrachten als Beispiel die SU(2) als globale innere Symmetrie (z. B. Isospinsymmetrie). Die $\Phi^i(x)$ seien $i = 1, \dots, n$ Felder. Der Lagrangean

$$L_0[\Phi^i(x), \partial_\mu \Phi^i(x)] \tag{14.92}$$

ist invariant unter der SU(2)-Gruppe mit den Erzeugenden $T_a = i\tau_a$, wobei τ_a die bekannten Pauli-Matrizen sind, da die Transformation der Felder

$$\Phi^i(x) \to \Phi^i(x) + \Theta^a (T_a)^i_j \, \Phi^i(x) \tag{14.93}$$

die gleiche ist wie die Transformation der Ableitungen der Felder

$$\partial_\mu \Phi^i(x) \to \partial_\mu \Phi^i(x) + \Theta^a (T_a)^i_j \, \partial_\mu \Phi^i(x) \,. \tag{14.94}$$

14.6.2. Lokale Symmetrien oder Eichtransformationen

Die infinitesimalen Parameter Θ^a in der oben betrachteten globalen Symmetrietransformation waren x-unabhängig. Die Phase der $\psi(x)$-Felder ist nicht meßbar und kann willkürlich gewählt werden; sie muß jedoch an allen Orten und zu allen Zeiten gleich gewählt werden. Das ist physikalisch unbefriedigend; es wäre schöner, könnte man die Phase lokal in einem Gebiet von den Abmessungen des Experiments wählen, ohne Aussagen über die Phase an räumlich und zeitlich fernen Orten zu machen.

Wir betrachten erneut das Beispiel (14.90) mit der Abelschen Gruppe $U(1)$ und fordern statt (14.91) die *lokale Symmetrie*

$$\psi(x) \to e^{i\Theta(x)} \, \psi(x) \,. \tag{14.95}$$

Der Phasenparameter Θ hängt jetzt von x ab. Wenn wir (14.95) als Symmetrieoperation auffassen, ergibt sich sofort ein Problem: Die Ableitungen der Felder transformieren sich anders als die Felder selbst:

$$\partial_\mu \psi(x) \to e^{i\Theta(x)} \, \partial_\mu \psi(x) + i e^{i\Theta(x)} \psi(x) \, \partial_\mu \Theta(x) \,. \tag{14.96}$$

Der Ausweg besteht darin, eine neue Ableitung, die sogenannte kovariante Ableitung D einzuführen mit der Eigenschaft, sich zu transformieren wie die Felder

$$D_\mu \psi(x) \to e^{i\Theta(x)} \, D_\mu \psi(x) \,. \tag{14.97}$$

Um D zu finden, definieren wir zunächst ein Eichfeld $A_\mu(x)$, welches sich wie folgt transformieren soll

$$A_\mu(x) \to A_\mu(x) + \frac{1}{e} \partial_\mu \Theta(x) \,, \tag{14.98}$$

wobei e eine Konstante ist. Mit Hilfe von A_μ definieren wir die kovariante Ableitung D_μ

$$D_\mu \equiv \partial_\mu + ie A_\mu \,. \tag{14.99}$$

Wir finden Invarianz unter der Eichtransformation, wenn wir im Lagrangean L_0 die Ableitung ∂_μ durch D_μ ersetzen.

$$\begin{aligned} L_0 \to L_1 &\equiv \bar{\psi}(x) \, (i\gamma_\mu D^\mu - m) \, \bar{\psi}(x) \\ &= \bar{\psi}(x) \, (i\gamma_\mu \partial^\mu - m) \, \bar{\psi}(x) - e \, \bar{\psi}(x) \, \gamma_\mu \bar{\psi}(x) \, A^\mu(x) \,. \end{aligned} \tag{14.100}$$

Wenn wir das Eichfeld $A_\mu(x)$ als das Feld des Photons interpretieren, dann hat die Forderung der lokalen Symmetrie oder Eichinvarianz unter der Abelschen Gruppe U(1) mit dem letzten Term von (14.100) gerade den Wechselwirkungsterm zwischen dem Elektron und Photon der Quantenelektrodynamik erzeugt. Die Forderung der lokalen Invarianz bedingt das Eichfeld, das Photon und seine Wechselwirkung. Wir sehen, daß die stärkere Forderung der lokalen Symmetrie zu weitreichenden Folgerungen führt. Um zum Lagrangean der QED zu kommen, müssen wir zu (14.100) nur noch den Term der kinetischen Energie für das Photon addieren

$$L_1 \to L_2 \equiv L_1 - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}(x) F^{\mu\nu}(x) ,\qquad F_{\mu\nu}(x) = \partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x) . \tag{14.101}$$

Bei unserer Herleitung hat sich kein Term der Form $A_\mu A^\mu$ ergeben; daraus folgt, daß das Photon masselos ist. Wir verallgemeinern sofort: Alle Eichfelder sind masselos.

Die lokale Symmetrie läßt sich auch für nichtabelsche Gruppen fordern. Wir betrachten erneut als Beispiel die SU(2)-Gruppe. Aus (15.4) wird mit $\Theta^a \to \Theta^a(x)$

$$\varphi^i(x) \to \varphi^i(x) + \Theta^a(x)\,(T_a)^i_j\,\varphi^j(x) \qquad i = 1, \dots , n,\; a = 1, \dots , N . \tag{14.102}$$

Erneut enthält die Ableitung einen Zusatzterm, der die Symmetrie von L_0 stört

$$\partial_\mu\varphi^i(x) \to \partial_\mu\varphi^i(x) + \Theta^a(x)\,(T_a)^i_j\,\partial_\mu\varphi^j(x) + (T_a)^i_j\,\varphi^j(x)\,\partial_\mu\Theta^a(x) . \tag{14.103}$$

Durch die Einführung von N Eichfeldern $W^a_\mu(x)$ mit der Transformation

$$W^a_\mu(x) \to W^a_\mu(x) + f^a_{bc} W^c_\mu \Theta^b + \frac{1}{g}\,\partial_\mu\Theta^a(x) , \tag{14.104}$$

wobei g eine Konstante ist und die f^a_{bc} die Strukturkonstanten der Gruppe sind

$$[T_a, T_b] = f^c_{ab} T_c , \tag{14.105}$$

läßt sich erneut eine kovariante Ableitung definieren

$$\mathrm{D}_\mu\varphi^i(x) \equiv \partial_\mu\varphi^i(x) - g(T_a)^i_j\,W^a_\mu(x)\,\varphi^j(x) , \tag{14.106}$$

die sich wieder so transformiert wie die Felder selbst.

Wenn wir im Langrangean (14.92) die kovariante Ableitung einführen

$$L_0[\varphi^i(x), \partial_\mu\varphi^i(x)] \to L_1[\varphi^i(x), \mathrm{D}_\mu\varphi^i(x)] , \tag{14.107}$$

erhalten wir L_1 invariant unter der lokalen nichtabelschen Transformation. Wir fügen erneut einen Term für die kinetische Energie der Eichfelder hinzu

$$L_1 \to L_2 = L_1 - \frac{1}{4} G^a_{\mu\nu} G^{\mu\nu}_a . \tag{14.108}$$

Dabei sind die $G^a_{\mu\nu}$ jedoch etwas komplizierter als im Abelschen Fall

$$G^a_{\mu\nu}(x) = \partial_\mu W^a_\nu(x) - \partial_\nu W^a_\mu(x) - g f^a_{bc} W^b_\mu W^c_\nu . \tag{14.109}$$

Wir finden im nichtabelschen Fall wie oben, daß die Eichfelder masselos sind. Zusätzlich ergeben sich in der nichtabelschen Eichfeldtheorie (siehe (14.108) und (14.109)) Terme, durch die drei oder vier Eichfelder gekoppelt werden. Solche Terme treten im abelschen Fall nicht auf. Diese Tatsache interpretieren wir wie folgt: Nichtabelsche Eichbosonen tragen Ladungen, im Gegensatz zum abelschen Fall, wo die Eichbosonen ungeladen sind. Diese Eigenschaft der Selbstkopplung der Eichbosonen macht die nichtabelschen Eichfeldtheorien wesentlich komplizierter als abelsche Eichfeldtheorien wie die QED.

14.6.3. Spontane Symmetriebrechung

Man findet spontane Symmetriebrechung in einer Vielzahl physikalischer Systeme. Ein solches System ist durch die Instabilität der symmetrischen Lösung und durch die Entartung des Grundzustandes gekennzeichnet. Wir interessieren uns für die spontane Brechung einer lokalen Symmetrie als Mechanismus, den Eichbosonen eine Masse zu geben. Wir benötigen Theorien mit massiven Feldquanten, um die kurzreichweitige Wechselwirkung im Fall der schwachen Wechselwirkung der Elementarteilchen zu beschreiben.

Wir betrachten zunächst die spontane Brechung einer globalen Symmetrie am Beispiel eines komplexen skalaren Feldes $\varphi(x)$ mit dem Lagrangean

$$L_1 = (\partial_\mu \varphi)(\partial^\mu \varphi^*) - \mu^2 \varphi\varphi^* - \lambda(\varphi\varphi^*)^2 , \tag{14.110}$$

der unter der globalen U(1)-Transformation invariant ist

$$\varphi(x) \to e^{i\Theta} \varphi(x) . \tag{14.111}$$

Der Feld-Hamiltonian dieses Systems hat die Form

$$\begin{aligned} H &= (\partial_0 \varphi)(\partial_0 \varphi^*) + (\partial_i \varphi)(\partial_i \varphi^*) + V(\varphi) , \\ V(\varphi) &= \mu^2 \varphi\varphi^* + \lambda(\varphi\varphi^*)^2 . \end{aligned} \tag{14.112}$$

Die beiden ersten Terme sind immer positiv und verschwinden nur für $\varphi =$ konst. Der Grundzustand des Systems entspricht deshalb dem Fall $\varphi =$ konst. $=$ Minimum von $V(\varphi)$. Das Potential V besitzt ein Minimum, wenn $\lambda > 0$, für $\mu^2 \geqq 0$ haben wir das Minimum bei $\varphi = 0$, und für $\mu^2 < 0$ ist das Minimum ein Kreis in der komplexen φ-Ebene mit dem Radius $v = \left(-\frac{\mu^2}{2\lambda}\right)^{1/2}$ (Abb. 14.60). Für jeden Punkt des Kreises wird die Symmetrie (14.111) spontan gebrochen.

Wir betrachten den Fall $\mu^2 < 0$, bei dem die spontane Symmetriebrechung auftritt, und verschieben das Feld, um eine stabile Lösung zu erhalten. Wir wählen z. B. einen Punkt auf der reellen Achse der φ-Ebene

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} [v + \psi(x) + i\chi(x)] , \tag{14.113}$$

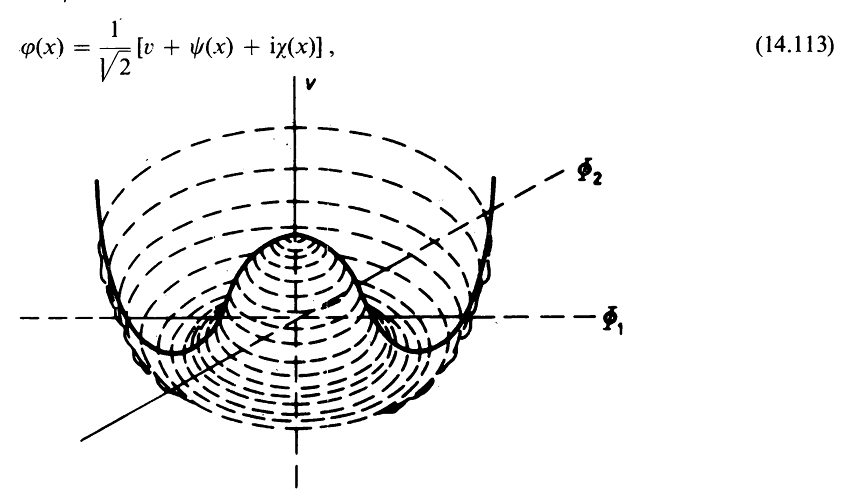


Abb. 14.60
Zeichnung des Potentials $V = \mu^2 \Phi\Phi^* + \lambda(\Phi\Phi^*)^2$ in der Komplexen Φ-Ebene für den Fall $\lambda > 0$ und $\mu^2 < 0$

wobei wir jetzt statt des ursprünglichen komplexen Feldes $\varphi(x)$ die beiden reellen Felder $\psi(x)$ und $\chi(x)$ eingeführt haben. Durch Einsetzen von (14.113) in (14.110) erhalten wir

$$\begin{aligned} L_1(\varphi) \to L_2(\psi, \chi) = & \frac{1}{2}(\partial_\mu\psi)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu\chi)^2 \\ & - \frac{1}{2}(2\lambda v^2)\,\psi^2 - \lambda v\psi(\psi^2 + \chi^2) \\ & - \frac{\lambda}{4}(\psi^2 + \chi^2)^2 . \end{aligned} \tag{14.114}$$

In dieser Form enthält unser System die beiden wechselwirkenden skalaren Teilchen ψ und χ mit den Massen

$$m_\psi^2 = 2\lambda v^2 , \qquad m_\chi^2 = 0 . \tag{14.115}$$

Das Auftreten eines Teilchens χ mit verschwindender Masse wird durch das Theorem von J. Goldstone vorhergesagt. Man bezeichnet dieses Teilchen auch als Goldstone-Boson. Für jede Erzeugende einer spontan gebrochenen globalen Symmetrie tritt ein Goldstone-Boson auf.

Bis hierher haben wir nichts gewonnen. Wir fanden bisher, daß in Eichfeldtheorien masselose Eichbosonen auftreten. Das genügt uns für das Photon und für die Gluonen. Jetzt finden wir, daß die spontane Brechung der globalen Symmetrie weitere masselose Teilchen einführt, die wir nicht benötigen.

Wenn wir eine Eichfeldtheorie spontan brechen, geschieht allerdings etwas Überraschendes. Diese Erscheinung wurde von mehreren Theoretikern gefunden und wird als Higgs-Mechanismus bezeichnet.

Wir betrachten die spontane Brechung eines Modells mit lokaler U(1)-Symmetrie. Dazu führen wir in (14.110) statt ∂_μ die kovarianten Ableitungen D_μ ein und fügen den Term der kinetischen Energie des Photonenfeldes hinzu

$$L_1 = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 + |(\partial_\mu - iA_\mu)\,\varphi|^2 - \mu^2\varphi\varphi^* - \lambda(\varphi\varphi^*)^2 . \tag{14.116}$$

L_1 ist invariant unter der Eichtransformation

$$\begin{aligned} \varphi &\to e^{i\Theta(x)}\,\varphi(x) , \\ A_\mu &\to A_\mu + \frac{1}{2}\partial_\mu\Theta(x) . \end{aligned} \tag{14.117}$$

Für $\mu^2 < 0$ und $\lambda > 0$ finden wir spontane Brechung der lokalen Symmetrie. Durch Einsetzen von (14.113) in (14.116) erhalten wir

$$\begin{aligned} L_1 \to L_2 = & -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 + \frac{e^2v^2}{2}A_\mu^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu\psi)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu\chi)^2 \\ & - \frac{1}{2}(2\lambda v^2)\,\psi^2 - evA_\mu\,\partial^\mu\chi + \cdots . \end{aligned} \tag{14.118}$$

Die erste Überraschung ist, daß ein Term proportional zu A_μ^2 auftritt. Das Eichfeld A_μ hat eine Masse bekommen. Durch eine weitere Transformation

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\,[v + \varrho(x)]\,e^{i\xi(x)/v} , \\ A_\mu(x) &= B_\mu(x) + \frac{1}{ev}\,\partial_\mu\xi(x) \end{aligned} \tag{14.119}$$

erhalten wir

$$L_1 \to L_3 = -\frac{1}{4} B_{\mu\nu}^2 + \frac{e^2 v^2}{2} B_\mu^2 + \frac{1}{2} (\partial_\mu \varrho)^2 - \frac{1}{2} (2\lambda v^2)\, \varrho^2$$

$$- \frac{\lambda}{4} \varrho^4 + \frac{1}{2} e^2 B_\mu^2 (2 v_\varrho + \varrho^2) \tag{14.120}$$

und finden als zweite Überraschung, daß das Feld $\zeta(x)$ verschwunden ist. In (14.120) gibt es zwei massive Teilchen: die massiven Vektorteilchen B_μ und die skalaren Teilchen ϱ. Das ursprüngliche masselose Vektorfeld hatte zwei (transversale) Freiheitsgrade. Das neue massive Vektorfeld B_μ hat drei Freiheitsgrade, dafür ist das masselose Goldstone-Boson mit seinem einen Freiheitsgrad verschwunden. Sein Freiheitsgrad tritt als longitudinale Komponente des Vektorfeldes B auf.

14.7. Quantenchromodynamik

14.7.1. Farbige Quarks

Wir haben in den Abschnitten 14.1.—14.5. die Gründe dargelegt, die dazu geführt haben, daß die Quarks heute allgemein als die fundamentalen Bestandteile der Hadronen angesehen werden. Diese Gründe lassen sich in drei Klassen zusammenfassen:

1. Die Hadronenspektroskopie sowohl der altbekannten leichten Hadronen, als auch die der neuentdeckten schweren Hadronen der Quarkoniumsysteme;
2. die tief unelastische Lepton-Hadron-Streuung und dabei insbesondere die Beobachtung, daß sich das genäherte Bjorken-Skalenverhalten durch das Quark-Parton-Modell erklären läßt, sowie die Beziehungen, die wir zwischen der unelastischen Elektronen- und Neutrinostreuung erhalten haben;
3. die Elektron-Positron-Annihilation in Hadronen, dabei insbesondere der Wert des Verhältnisses $R = \sigma(e^+e^- \to \text{Hadronen})/\sigma(e^+e^- \to \mu^+\mu^-)$ und die experimentelle Beobachtung von Quark- und Gluonenjets bei hohen Energien.

Das Ziel der theoretischen Elementarteilchenphysik besteht darin, eine Theorie zu entwickeln, die es gestattet, die Dynamik der Quarks zu berechnen, die die oben genannten Manifestationen der Quarks erklärt und weitere experimentelle Vorhersagen macht. Dieses Ziel wurde noch nicht völlig erreicht. Die großen Fortschritte der siebziger und achtziger Jahre bestehen jedoch darin, daß es viele qualitative Argumente dafür gibt, daß die Quantenchromodynamik die richtige Theorie der starken Wechselwirkung ist. Unsere Fähigkeit, aus dieser Theorie etwas zu berechnen, ist noch stark begrenzt, hauptsächlich deswegen, weil die Kopplung in dem gegenwärtig zugänglichen kinematischen Gebiet zu groß und deshalb die Störungstheorie nur begrenzt anwendbar ist. Trotzdem hat es im Gebiet großer Impulsüberträge oder kleiner Abstände, in dem Gebiet, wo die als „asymptotische Freiheit" bezeichnete Eigenschaft der QCD zum Tragen kommt, beträchtliche Fortschritte gegeben. Es muß die Zielstellung der experimentellen und theoretischen Arbeit der nächsten Jahre sein, diese Ansätze zu wirklich quantitativen Tests weiterzuentwickeln.

Bevor wir weiter auf die QCD eingehen, tragen wir nochmals einige Gründe dafür zusammen, daß Quarks in drei verschiedenen Zuständen existieren, mit drei verschiedenen Ladungen, die wir Farbladungen oder kurz Farbe der Quarks nennen.

1. Die Größe des Verhältnisses R in der e^+e^--Annihilation läßt sich nur dann verstehen, wenn Quarks in drei Farben existieren. Speziell unterhalb der Charm-Schwelle haben wir gefunden (siehe Abschnitt 14.4.)

$$R = \frac{\sigma(e^+e^- \to \text{Hadronen})}{\sigma(e^+e^- \to \mu^+\mu^-)} = \sum_i Q_i^2 = \begin{cases} \frac{2}{3} & \text{für u, d, s Quarks ohne Farbe,} \\ 2 & \text{für u, d, s Quarks mit drei Farben,} \end{cases} \tag{14.121}$$

wobei der für farbige Quarks erwartete Wert im Experiment gefunden wird.

2. Die Baryonenspektroskopie liefert den klassischen Grund für die Einführung der Farbfreiheitsgrade der Quarks. Die Baryonen sind Fermionen und sollten eine antisymmetrische Wellenfunktion haben. Im Quarkmodell ohne Farbe sind die Eigenfunktionen jedoch völlig symmetrisch, wie sich am leichtesten für die $\Delta^{++} = u^\uparrow u^\uparrow u^\uparrow$-Nukleonenresonanz oder für das Teilchen $\Omega^- = s^\uparrow s^\uparrow s^\uparrow$ zeigen läßt. Diese Hadronen haben den Spin 3/2, die Pfeile deuten die Spineinstellung der Quarks an, die Spineigenfunktion ist wie die Bahneigenfunktion völlig symmetrisch. Wenn Quarks in drei Farben (α, β, γ = rot, blau, gelb) existieren, dann lassen sich leicht antisymmetrische Farbeigenfunktionen bilden, z. B.

$$\Delta^{++} = \frac{1}{\sqrt{6}} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \, |u_\alpha^q u_\beta^q u_\gamma^q\rangle \, . \tag{14.122}$$

Dabei ist $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}$ der völlig antisymmetrische Tensor.

3. Bei der Erzeugung von Leptonenpaaren in Hadron-Hadron-Stößen entsteht das Leptonenpaar durch die Annihilation eines Quarks q aus dem einen Hadron mit einem Antiquark der gleichen Art $\bar{q}$ aus dem anderen Hadron in ein virtuelles zeitartiges Photon. Das zeitartige massive Photon zerfällt in das e^+e^-- oder $\mu^+\mu^-$-Paar, siehe Abschnitt 14.5. Wenn die q und $\bar{q}$ Farbquantenzahlen besitzen, können sie nur dann in ein Photon annihilieren, wenn sie auch die gleiche Farbe besitzen. Der Wirkungsquerschnitt für die Lepton-Paar-Erzeugung wird dadurch für Quarks mit N_c Farben um den Faktor $1/N_c$ kleiner als der Wirkungsquerschnitt, den man für Quarks ohne Farbe erhält. Zur Erklärung der experimentellen Daten benötigt man diesen Faktor 1/3.

4. Das schwere Lepton τ zerfällt zu etwa 20% in ein Elektron und Neutrinos und zu ebenfalls 20% in ein Myon und Neutrinos. Diese Verzweigungsverhältnisse lassen sich dann einfach verstehen, wenn die Quarks in drei Farben existieren (siehe Abb. 14.61).

5. Wie wir im Abschnitt 14.7.2. sehen werden, liefern die Farbquantenzahlen der Quarks auch Gründe dafür, daß die Kräfte zwischen den Quarks nur zu gebundenen Zuständen in $q\bar{q}$- und qqq-Systemen führen, aber nicht in qq, qqqq usw.

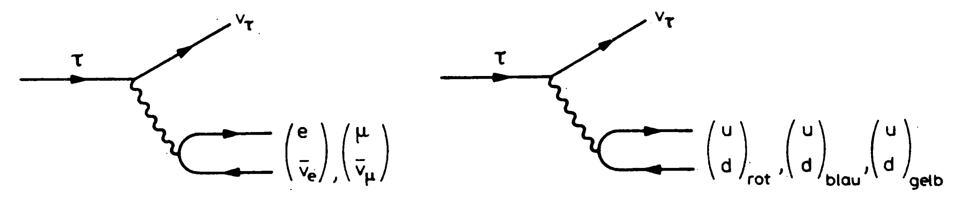


Abb. 14.61
Zerfall des τ-Leptons in Leptonen und in Hadronen. Jeder der 5 Zerfallskanäle hat etwa die gleiche Wahrscheinlichkeit von 20%

14.7.2. Die nichtabelsche Eichfeldtheorie der Quarks und Gluonen

Die fundamentalen Teilchen der QCD sind die Quarks $q_\alpha^j(x)$, Fermionen mit dem Spin 1/2 und gebrochener elektrischer Ladung und die Gluonen A_μ^a, nichtabelsche Eichbosonen mit dem Spin 1, die sowohl mit den Quarks als auch mit anderen Gluonen wechselwirken.

Die Quarkfelder $q_\alpha^j(x)$ sind Spinorfelder. Die Indizes j und α bezeichnen innere Freiheitsgrade. Der Index j bezeichnet die Art des Quarks (u, d, s, c, b). Die Quarkart hat keine dynamische Bedeutung für die QCD, wohl aber für die elektromagnetische und schwache Wechselwirkung. Der Index α bezeichnet die Farbfreiheitsgrade (α = rot, blau, gelb). Die Gründe für genau drei Farben der Quarks wurden oben dargelegt.

Die Symmetriegruppe $SU_c(3)$ beschreibt die Farbsymmetrie der Quarks. Es ist eine exakte Symmetrie, die nichts mit der genäherten SU(3)-Symmetrie der u-, d- und s-Quarks zu tun hat, die wir im Abschnitt 14.1. besprochen haben. Die grundlegende Idee der QCD besteht darin, die $SU_c(3)$-Farbgruppe als eine lokale nichtabelsche Symmetrie oder Eichinvarianz aufzufassen. Wie im Abschnitt 14.6. gezeigt wurde, erfordert die lokale Symmetrie die Einführung von kompensierenden Eichfeldern. Das sind für die $SU_c(3)$-Gruppe acht Eichfelder $A_\mu^\alpha(x)$; $a = 1, 2, \dots, 8$, die sich die adjungierte Darstellung der $SU_c(3)$-Gruppe transformieren. Dieses Oktett A_μ^α von Eichfeldern sind die farbigen Gluonen.

Der Lagrangean der QCD hat also die Form

$$L_{\text{QCD}} = \mathrm{i}\bar{q}_\alpha^j \gamma_\mu D_{\alpha\beta}^\mu q_\beta^j - \frac{1}{4} G_{\mu\nu}^a G^{a\mu\nu} , \qquad (14.123)$$

$$\alpha, \beta = 1, 2, 3 , \qquad a = 1, 2, \dots, 8 , \qquad j = 1, 2, \dots, N .$$

Dabei ist $D_{\alpha\beta}^\mu$ die kovariante Ableitung

$$D_{\alpha\beta}^\mu q_\beta^j = \left(\delta_{\alpha\beta}\delta^\mu - \mathrm{i}g\lambda_{\alpha\beta}^a \frac{A_\mu^a}{2} \right) q_\beta^j , \qquad (14.124)$$

und es gilt, siehe (14.109),

$$G_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c . \qquad (14.125)$$

Die λ^a sind die SU(3)-Matrizen und die f^{abc} sind die SU(3)-Strukturkonstanten

$$[\lambda^a, \lambda^b] = 2\mathrm{i} f^{abc} \lambda^c . \qquad (14.126)$$

Wir vergleichen die QCD mit der Quantenelektrodynamik (QED).

Die QED ist eine abelsche Eichfeldtheorie mit der Eichgruppe U(1). Die QCD ist eine nichtabelsche Eichfeldtheorie mit der Eichgruppe $SU_c(3)$.

Die QED beschreibt die Wechselwirkung von Fermionen mit Ladung durch den Austausch von Photonen, den ungeladenen Eichbosonen der U(1)-Eichtheorie. Die QCD beschreibt die Wechselwirkung der farbigen Quarks durch den Austausch eines Oktetts von farbigen Gluonen, den Eichbosonen der nichtabelschen $SU_c(3)$-Eichgruppe.

Das Photon der QED koppelt sowohl geladene Leptonen als auch geladene Quarks. Die Gluonen der QCD koppeln nur an Quarks. Leptonen sind elementare Fermionen ohne Farbquantenzahlen und deshalb ohne starke Wechselwirkung.

Die elektrische Ladung existiert in einem Zustand und seinem Inversen $Q = \pm Q_i$. Die Farbe der Quarks ist eine Ladung, für die es drei unterschiedliche Zustände gibt. Die Farbe der Gluonen existiert in acht verschiedenen Zuständen.

Das Photon der QED ist ungeladen. Die Gluonen der QCD sind Eichbosonen einer nichtabelschen Gruppe, die — wie im Abschnitt 14.6. gezeigt — selbst Ladungen tragen und deshalb sowohl mit Quarks als auch mit Gluonen wechselwirken.

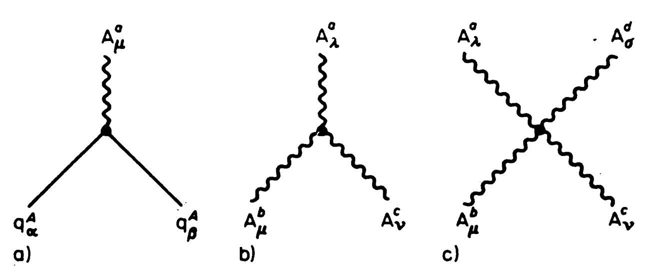


Abb. 14.62
Die drei Kopplungen der QCD dargestellt durch
a) den Quark-Quark-Gluon Vertex,
b) den Gluon-Gluon-Gluon Vertex und
c) den Vier-Gluonen-Vertex

In Ab. 13.2 hatten wir die Kopplung des Elektrons an das Photon durch den Elektron-Elektron-Photon-Vertex dargestellt. Die Kopplungen der QCD werden in Abb. 14.62 gezeigt. Neben dem Quark-Quark-Gluon-Vertex gibt es den Drei-Gluonen- und den Vier-Gluonen-Vertex.

Wie wir wissen, existieren in der Natur sowohl Teilchen mit positiven und negativen elektrischen Ladungen, als auch elektrisch neutrale Teilchen. Im Gegensatz dazu wurden bisher keine Teilchen mit Farbquantenzahlen gefunden. Das deutet darauf hin, daß nur farbneutrale Teilchen oder Singuletts bezüglich der Farb-$SU_c(3)$-Gruppe existieren können, daß also die farbigen Quarks und Gluonen permanent in den farbneutralen Hadronen eingeschlossen sind. Betrachten wir die irreduziblen Darstellungen, die sich aus Kombinationen von Quarks q ($SU_c(3)$-Tripletts $\underline{3}$) und Antiquarks $\bar{q}$ ($SU_c(3)$-Antitripletts $\bar{\underline{3}}$) bilden lassen. $\underline{1}$ steht dabei für ein Singulett, $\underline{8}$ für ein Oktett usw.

$$\begin{aligned} q &: \underline{3}\,, \\ q\bar{q} &: \underline{3} \otimes \bar{\underline{3}} = \underline{1} \oplus \underline{8}\,, \\ qq &: \underline{3} \otimes \underline{3} = \underline{6} \oplus \bar{3}\,, \\ qq\bar{q} &: \underline{3} \otimes \underline{3} \otimes \bar{\underline{3}} = \underline{3} \oplus \bar{\underline{6}} \oplus \underline{3} \oplus \underline{15}\,, \\ qqq &: \underline{3} \otimes \underline{3} \otimes \underline{3} = \underline{1} \oplus \underline{8} \oplus \underline{8} \oplus \underline{10}\,. \end{aligned} \tag{14.127}$$

Man beachte, daß Singulettdarstellungen nur für $q\bar{q}$-Mesonen und qqq-Baryonen existieren. Wenn es wahr ist, daß nur Farb-Singuletts in der Natur auftreten dürfen, dann verstehen wir damit, weshalb Baryonen und Mesonen, aber keine qq- oder $qq\bar{q}$-Zustände existieren dürfen. Wir haben damit den Quark-Einschluß durch den äquivalenten Farb-Einschluß in den Hadronen beschrieben.

Es ist bekannt, daß als Folge der Coulomb-Anziehung der Konstituenten neutraler Moleküle die zwischenmolekulare van-der-Waals-Kraft zustande kommt. In gleicher Weise können wir uns die Kernkraft, d. h.die Kraft zwischen zwei farbneutralen Nukleonen, als Folge der Farbwechselwirkung der Konstituenten der Nukleonen vorstellen. In diesem Bild ist also die Kernkraft zwischen zwei Nukleonen eine abgeleitete, keine elementare Wechselwirkung.

14.7.3. Asymptotische Freiheit als Eigenschaft der QCD

Es ist in der Quantenelektrodynamik wohlbekannt, daß sich die Feinstrukturkonstante $\alpha = e^2/hc$, die effektive Elektron-Elektron-Photon-Kopplungskonstante, mit dem Impulsübertrag Q^2 des Photons ändert. Diese Q^2-Abhängigkeit der Ladung resultiert aus der Berücksichtigung der

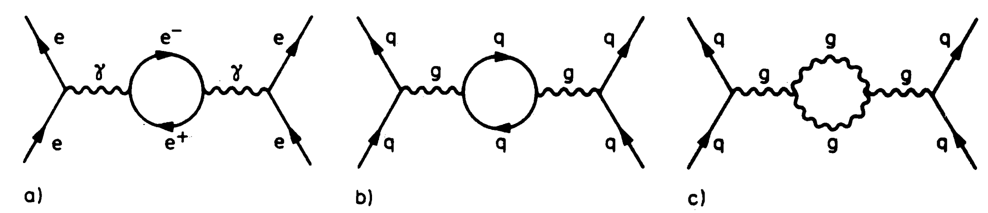


Abb. 14.63
a) Korrektur niedrigster Ordnung zur Elektron-Elektron-Kopplung in der QED
b) Korrektur niedrigster Ordnung zur Quark-Gluon-Kopplung infolge eines virtuellen Quark-Antiquark-Paares
c) Korrektur niedrigster Ordnung zur Quark-Gluon-Kopplung infolge eines virtuellen Gluon-Paares

Feynman-Diagramme höherer Ordnung zu den Streuprozessen, die wir im Abschnitt 13.2. betrachtet haben. So erhält man für die Elektron-Elektron-Streuung durch die Berechnung der Korrektur erster Ordnung in Abb. 14.63a

$$\alpha(Q^2) = \alpha(\mu^2)\left[1 + \frac{\alpha(\mu^2)}{3\pi}\ln\frac{Q^2}{\mu^2}\right]. \tag{14.128}$$

Dabei ist μ^2 ein willkürlicher Normierungspunkt für die Kopplungskonstante. Aufsummation aller höheren Korrekturen mit Potenzen von $\ln Q^2/\mu^2$ ergibt

$$\alpha(Q^2) = \frac{\alpha(\mu^2)}{1 - \dfrac{\alpha(\mu^2)}{3\pi}\ln\dfrac{Q^2}{\mu^2}}. \tag{14.129}$$

Dieser Ausdruck bedeutet, daß die effektive Kopplung $\alpha(Q^2)$ der QED mit Q^2 zunimmt (siehe Abb. 14.64). Da der Anstieg nur logarithmisch erfolgt, bleibt $\alpha(Q^2)$ bei allen praktisch wichtigen Energien klein.

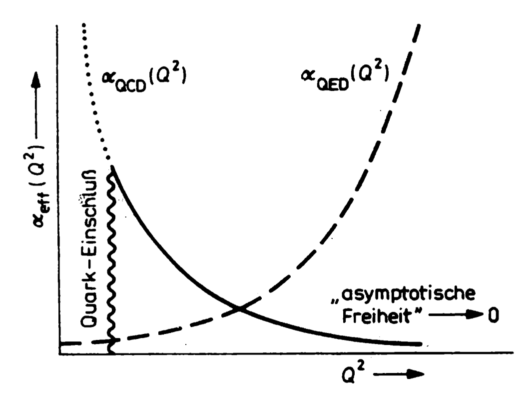


Abb. 14.64
Das Verhalten der effektiven Kopplungskonstanten in der Störungstheorie. In der QED ist die effektive Kopplungskonstante $\alpha(Q^2)$ klein bei kleinen Q^2 oder großen Abständen, sie wird groß bei großen Q^2 oder kleinen Abständen. In der QCD ist die effektive Kopplung $\alpha_s(Q^2)$ klein bei großen Q^2 oder kleinen Abständen, (asymptotische Freiheit), sie wird groß bei kleinen Q^2 oder großen Abständen (Quarkeinschluß)

Der physikalische Grund für die Vergrößerung der effektiven Ladung mit zunehmendem Q^2 des Photons ist klar. Bei kleinem Q^2 oder großen Abständen „sieht" das Photon durch die Vakuumpolarisation der virtuellen Elektron-Positron-Paare des die Ladung umgebenden Feldes nur eine abgeschirmte Ladung. Mit steigendem Q^2 löst das Photon ein kleineres Gebiet auf, und die abschirmende Wirkung nimmt ab.

Die gleiche Untersuchung läßt sich in der QCD durchführen. Im Unterschied zur QED beinhalten die Korrekturen niedrigster Ordnung in Abb. 14.63 b und c sowohl Quark-Antiquark-Paare als auch Gluonenpaare. Das Ergebnis nach der Aufsummation ist

$$\alpha_s(Q^2) = \frac{\alpha_s(\mu^2)}{1 + B\alpha_s(\mu^2) \ln \dfrac{Q^2}{\mu^2}} \tag{14.130}$$

mit

$$B = \frac{33 - 2N_f}{12}. \tag{14.131}$$

N_f ist die Zahl der Quarkarten. Mit $N_f = 4$ erhält man $B = 25/12\pi$. B bleibt jedoch bis zu 16 Quarkarten positiv. Das Verhalten der effektiven Kopplung der QCD (14.130) unterscheidet sich grundlegend vom Verhalten der QED-Kopplungskonstanten. $\alpha_s(Q^2)$ nimmt mit steigendem Q^2 ab. Die Vakuumpolarisation durch Quark-Antiquark-Paare in Abb. 14.63b allein würde zum gleichen Ansteigen der Kopplung mit Q^2 wie in (14.129) führen. Aber dadurch, daß die Feldquanten, die Gluonen, selbst Farbladung tragen, wird die Farbladung der Quarks räumlich verschmiert. Ein Teil der Ladung wird von dem umgebenden Gluonfeld getragen. Wenn der Impulsübertrag Q^2 des einlaufenden Gluons anwächst, „sieht" dieser nur die Ladung in einem kleineren Raumgebiet. Dieser zweite Effekt der Verschmierung der Ladung durch das Gluonfeld ist in der QCD der dominierende Effekt. Er führt zum Abfall der Kopplungskonstanten mit Q^2 wie in Abb. 14.64 gezeichnet. Dieser Effekt, der auftritt, wenn weniger als $N_f = 17$ Quarkarten existieren, wird als „Asymptotische Freiheit" der QCD bezeichnet. Die QCD-Kopplungskonstante wird klein bei großen Q^2, d. h. bei kleinen Abständen. In diesem Gebiet sind die Quarks nur schwach gekoppelt, sie verhalten sich fast wie freie Teilchen. Da die Kopplungskonstante klein ist, ist es aussichtsreich, Ergebnisse mit Hilfe der Störungstheorie zu erhalten.

Die QCD als Theorie der starken Wechselwirkung entstand durch die Entdeckung der asymptotischen Freiheit durch H. D. Politzer und D. J. Gross und F. Wilczek im Jahre 1973.

Die Kopplungskonstante (14.130) läßt sich durch die Substitution

$$\Lambda^2 = \mu^2 \exp\left(-\frac{1}{B\alpha_s(\mu^2)}\right) \tag{14.132}$$

vereinfachen. Wir erhalten den Standardausdruck

$$\alpha_s(Q^2) = \frac{1}{B \ln Q^2/\Lambda^2}. \tag{14.133}$$

In dieser Form ist Λ der einzige Parameter der QCD, der durch das Experiment zu bestimmen ist. Die Auswertung bisheriger Experimente ergibt Λ-Werte zwischen 0,1 und 0,5 GeV.

Die Kehrseite der asymptotischen Freiheit ist das Ansteigen der QCD-Kopplungskonstanten $\alpha_s(Q^2)$ bei kleinen Q^2 oder großen Abständen. Das ist das Gebiet, welches für die gebundenen Zustände verantwortlich ist. Man kann spekulieren, daß der Anstieg der Kopplungskonstanten bei großen Abständen gerade zum Quark-Einschluß in den Hadronen führt. Eine solche Aussage ist jedoch bisher quantitativ schwer faßbar, da infolge der Größe der Kopplungskonstanten die Störungstheorie versagt.

Nur Theorien mit nichtabelschen Eichfeldern zeigen die Eigenschaft der asymptotischen Freiheit. Phänomenologisch ist das Verhalten der tief unelastischen Lepton-Hadron-Streuung, die Tatsache, daß sich die Quarks bei großen Impulsüberträgen Q^2 im Hadron wie freie Teilchen verhalten, der stärkste Hinweis darauf, daß die starke Wechselwirkung die Eigenschaft der asymptotischen Freiheit besitzt. Die tief unelastischen Streuexperimente liefern damit ein starkes Argument dafür, daß die richtige Theorie der starken Wechselwirkung eine nichtabelsche Eichtheorie sein muß. Das gleiche physikalische Bild, welches die Q^2-Abhängigkeit der effektiven Kopplungskonstante $\alpha_s(Q^2)$ verständlich macht, ergibt auch die Q^2-Abhängigkeit der Quark- und Gluonverteilungsfunktionen.

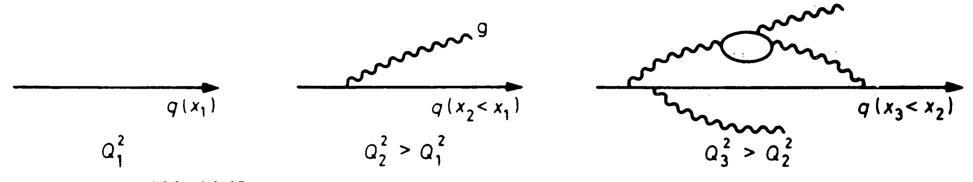


Abb. 14.65
Die Struktur eines Quark, „gesehen" von Photonen mit ansteigendem Q^2

Abb. 14.66
Q^2-Abhängigkeit von (a) Quark- (b) Antiquark- und (c) Gluon-Verteilungen im Proton. Mit ansteigenden Q^2 werden die Kurven in der Form ———, – – –, —·—·— und —··—·· gezeichnet

Wir untersuchen mit einem Photon des Auflösungsvermögens Q_1^2 einen Quark q im Hadron, der den Impulsanteil x_1 trägt, siehe Abb. 14.65. Ein Photon mit größerem $Q_2^2 > Q_1^2$ „sieht", daß der Quark q ein virtuelles Gluon emittiert hat, also trägt der Quark nur noch einen geringeren Impulsanteil $x_2 < x_1$, und das Gluon trägt $x_g = x_1 - x_2$. Bei noch höherem Q_3^2 löst das Photon noch mehr von der inneren Struktur des Quarks q auf; folglich wird der Impulsanteil, den der Quark selbst trägt, kleiner und kleiner, der restliche Impuls wird sowohl von Gluonen als auch von „Seequarks", d. h. Quarks und Antiquarks virtueller Paare, getragen. In Abb. 14.66 zeigen wir die resultierende schwache logarithmische Q^2-Abhängigkeit der Quark- und Gluonverteilungsfunktionen im Hadron. Die in Abb. 14.14 bereits gezeigten experimentellen Daten zeigen qualitativ genau die erwartete Q^2-Abhängigkeit der Strukturfunktionen.

14.7.4. Quarkeinschluß

Der Quarkeinschluß ist eine Eigenschaft der QCD, die durch viele Überlegungen und theoretische Modelle nahegelegt wird, die jedoch noch nicht streng bewiesen wurde.

In Abb. 14.67 vergleichen wir typische Feldkonfigurationen zwischen zwei elektrischen Ladungen und zwischen zwei Quarks. Zwischen zwei Ladungen bildet sich das wohlbekannte Dipolfeld aus. Die Konfiguration der Feldlinien ändert sich nicht wenn der Abstand zwischen den Ladungen vergrößert wird. Das nichtabelsche Gluonenfeld zwischen zwei Quarks verhält sich bei sehr kleinen Abständen beider Quarks, dort wo die Störungstheorie anwendbar ist, sehr ähnlich zum elektrischen Feld zwischen zwei Ladungen. Wenn wir den Abstand der Quarks vergrößern, kommt die Selbstwechselwirkung des Gluonfeldes zum Tragen, und es bildet sich

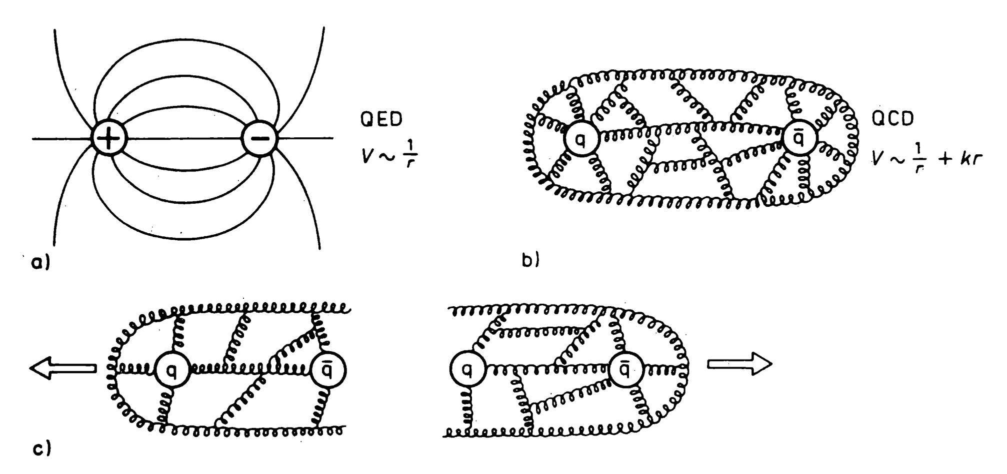


Abb. 14.67
a) Konfiguration des (abelschen) Feldes zwischen zwei elektrischen Ladungen in der QED. Die Wechselwirkung wird durch das Coulomb-Potential $V(r) \sim 1/r$ beschrieben
b) Konfiguration des (nichtabelschen) Feldes der Farb-Gluonen zwischen zwei farbigen Quarks der QCD. Bei kleinen Abständen verhält sich das Potential wie $1/r$, bei großen Abständen des Quark-Antiquark-Paars bildet sich das Feld in Form einer Fluß-Röhre aus und das Potential geht in ein lineares Potential $V(r) \sim r$ mit der Eigenschaft des Quarkeinschlusses über
c) Wenn die Flußröhre zwischen den Farbladungen bricht, bildet sich ein neues Quark-Antiquark-Paar. Die beiden Bruchstücke sind nicht isolierte Quarks, sondern wieder zwei farbneutrale Mesonen

das Feld in Form einer Flußröhre oder eines Fadens zwischen den Quarks heraus. Wenn wir versuchen, den Quark und Antiquark immer weiter voneinander zu trennen, kann die Flußröhre brechen, indem an der Bruchstelle ein neues Quark-Antiquark-Paar entsteht. Die beiden Bruchstücke sind nicht isolierte Quarks und Antiquarks sondern wieder zwei farbneutrale Mesonen. Der Versuch, ein Meson in Quark und Antiquark zu zerlegen, endet wie der Versuch, einen Stabmagneten zu zerschneiden, man erhält nicht getrennte Nord- und Südpole sondern wieder zwei magnetische Dipole.

Wir betrachten einen Zustand mit dem Quark bei $x = 0$ und dem Antiquark bei $x = R$.

$$|\mathrm{q}(0), \bar{\mathrm{q}}(R)\rangle \tag{14.134}$$

Die Grundzustandsenergie dieses Quark-Antiquark-Zustandes sei $E(R)$. Für Teilchen ohne die Eigenschaft des Quarkeinschlusses, also für zwei elektrische Ladungen, erwarten wir

$$E(R) \xrightarrow[R\to\infty]{} 2m\,, \tag{14.135}$$

wenn m die Masse eines der Teilchen ist. Quarkeinschluß bedeutet, daß $E(R)$ ohne Grenze wächst, wenn wir R vergrößern:

$$E(R) \xrightarrow[R\to\infty]{} \sigma R\,. \tag{14.136}$$

Der Parameter σ wird dabei als die Fadenspannung bezeichnet. Aus der Untersuchung der Charmonium- und Bottomonium-Spektren läßt sich die Fadenspannung σ bestimmen (siehe Abschnitt 14.4.).

Um den Quarkeinschluß als Eigenschaft der QCD zu zeigen, müßten wir (14.136) beweisen. Dieser Beweis läßt sich bisher nur in der Gitterformulierung der QCD führen. Eichfeldtheorien, die nicht in Raum-Zeit-Kontinuum sondern näherungsweise auf einem diskreten Raum-Zeit-Gitter formuliert sind, wurden erstmals von K. WILSON vorgeschlagen. In den Jahren seit 1980 gelang es insbesondere durch die numerische Auswertung dieser Gitter-QCD mit Hilfe von Monte-Carlo-Techniken, den Quarkeinschluß (14.136) zu demonstrieren und die Fadenspannung zu berechnen. Noch nicht gesichert ist jedoch der Grenzübergang von der Gitterformulierung zurück zur QCD in der stetigen Raum-Zeit.

Besonders aus Untersuchungen der Gittereichfeldtheorie folgt, daß Quarks und Gluonen nicht unter allen äußeren Bedingungen in farbneutralen Hadronen eingeschlossen sind. Bei hohen Temperaturen ($kT \approx 150$—250 MeV) und hohen Dichten ($\nu' = n_{\mathrm{q}} + n_{\bar{\mathrm{q}}} \geqq 2$—$4\,\mathrm{Fermi}^{-3}$, n_{q} und $n_{\bar{\mathrm{q}}}$ seien die Zahl der Quarks bzw. Antiquarks pro Volumeneinheit; die Dichte normaler

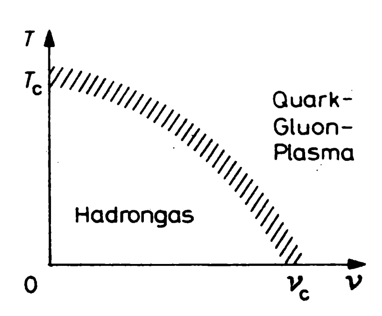


Abb. 14.68
Die erwartete Form des Phasendiagramms der Hadronenmaterie. Bei kleiner Temperatur T und kleiner Dichte ν sind Quarks eingeschlossen, es existiert ein Hadronengas. Bei hoher Temperatur und Dichte existieren freie Quarks, es bildet sich ein Quark-Gluonen-Plasma

Kernmaterie beträgt etwa $\nu \approx 0{,}5\,\text{Fermi}^{-3}$) erwartet man einen Phasenübergang von der Phase mit Quarkeinschluß, in der hadronische Materie in Form eines Hadronengases existiert, zur Phase ohne Quarkeinschluß, in der hadronische Materie in Form eines Quark-Gluon-Plasmas existiert. In Abb. 14.68 geben wir das erwartete Phasendiagramm in der T-ν-Ebene an. Es ist bisher nicht sicher bekannt, ob der erwartete Phasenübergang von erster oder zweiter Art sein soll. Wir können uns diesem Phasenübergang von unten — aus der Hadron-Gas-Phase — nähern, in der sich die uns zugänglichen Teile des Kosmos befinden, indem wir hadronische Materie aufheizen (zum Beispiel in hochenergetischen Stößen schwerer Ionen) oder komprimieren (zum Beispiel im Inneren eines Neutronensterns).

Bei der Annäherung an den Phasenübergang werden zunächst immer mehr und immer schwerere Hadronen erzeugt bis schließlich am Phasenübergang all diese Hadronen zu einem Quark-Gluon-Plasma verschmelzen. Oberhalb des Phasenübergangs gibt es keine Hadronen mehr sondern nur noch ein Gas wechselwirkender Quarks, Antiquarks und Gluonen.

Dieser Phasenübergang ist von Interesse für die frühen Entwicklungsphasen des Kosmos und für die Entwicklung von Neutronensternen. Auf der Erde, unter Laborbedingungen, läßt sich dieser Phasenübergang höchstens in Stößen hochenergetischer schwerer Ionen untersuchen. Die Energie der heute zur Verfügung stehenden Schwerionenbeschleuniger reicht jedoch nicht, um in die Nähe des vorhergesagten Phasenübergangs zu kommen.[1]) Man hofft, die erforderliche Aufheizung und Kompression der Kernmaterie in Stößen relativistischer schwerer Ionen zu erreichen, wenn die Schwerpunktenergie pro Nukleon-Nukleon-Stoß der Schwerionenreaktion den Wert von 10—20 GeV erreicht.

14.7.5. Phänomenologische Anwendungen der Quantenchromodynamik

Die asymptotische Freiheit der QCD rechtfertigt das Quark-Parton-Modell so, wie es zur Beschreibung der tief unelastischen Streuung und anderer harter Streuprozesse bei großen Impulsüberträgen Q^2 angewandt wird.

Gleichzeitig präzisiert die QCD jedoch das Quark-Parton-Modell: Die Quark-Gluon-Kopplungskonstanten α_s ist durch die Q^2-abhängige Kopplungskonstante (14.133) zu ersetzen.

Die Quarkverteilungen und die unelastischen Strukturfunktionen mit exaktem Bjorken-Skalenverhalten sind durch die von der QCD geforderten Verteilungen mit einer logarithmischen Q^2-Abhängigkeit, also mit logarithmischer Abweichung vom Skalenverhalten, zu ersetzen

$$q_i(x, Q^2)\,, \qquad F_i(x, Q^2)\,. \tag{14.137}$$

Auch für die Quarkfragmentationsfunktionen sagt die QCD eine entsprechende Abweichung vom Skalenverhalten voraus

$$D_q^h(z, Q^2)\,. \tag{14.138}$$

Schließlich wird durch die störungstheoretische Untersuchung der QCD klar, wie Korrekturen höherer Ordnung zum Quark-Parton-Modell zu berechnen sind. Das ist ein Gebiet, welches insbesondere in den letzten Jahren intensiv untersucht wurde.

Die störungstheoretische Untersuchung der QCD in dem Gebiet, wo die Kopplungskonstante infolge der asymptotischen Freiheit klein ist, führt zum QCD-verbesserten Quark-Parton-Modell.

Im Bereich kleiner Impulsüberträge, wo die Störungstheorie infolge der Größe der Kopplungskonstanten nicht anwendbar ist, und wo der Quark-Einschluß die charakteristische Eigenschaft ist, versucht man ebenfalls, das Verhalten der QCD durch phänomenologische Modelle zu

---

[1]) Seit dem Jahre 1986 gelingt es im CERN-SPS-Protonensynchrotron Sauerstoffionen auf eine Energie von 200 GeV pro Nukleon zu beschleunigen. Diese Energie könnte ausreichen, um erste experimentelle Hinweise für das Quark-Gluon-Plasma zu finden.

beschreiben. Hierzu gehören in erster Linie die im Abschnitt 14.4. behandelten Potentialmodelle zur Beschreibung der Quarkonium-Teilchen. Ein anderes Modell dieser Art, welches auch für leichte Hadronen angewandt wird, ist das sogenannte Quark-Bag-Modell, in dem durch ein zusätzlich eingeführtes äußeres Potential erzwungen wird, daß sich die Quarks nur innerhalb eines begrenzten Hohlraums, des Bags, bewegen können. Solche Modelle führen auf eine detaillierte Beschreibung des Anregungsspektrums der Quarks und Gluonen innerhalb des Hohlraums.

14.8. Die elektroschwache Eichfeldtheorie

14.8.1. Probleme der phänomenologischen Vier-Fermionen-Theorie

Wir haben im Abschnitt 13.3. die phänomenologische Vier-Fermionen-Theorie der schwachen Wechselwirkung kennengelernt. Der Lagrangean, der die geladenen Ströme beschreibt, hat die Form .

$$L_F = \frac{G}{\sqrt{2}} \cdot J^\lambda(x)\, J_\lambda^+(x)\,. \tag{14.139}$$

Dabei ist G die Fermi-Konstante, und der Strom

$$J^\lambda(x) = l^\lambda(x) + h^\lambda(x) \tag{14.140}$$

enthält einen leptonischen Strom der Form

$$l^\lambda = \bar{\mu}(x)\,\gamma_\lambda(1 + \gamma_5)\,\nu_\mu(x) + \bar{e}(x)\,\gamma_\lambda(1 + \gamma_5)\,\nu_e(x)\,, \tag{14.141}$$

wobei $\mu(x)$, $e(e)$, $\nu_\mu(x)$ und $\nu_e(x)$ für die Spinorfelder der entsprechenden Leptonen stehen, und einen hadronischen Strom, den wir jetzt nach Einführung des Quarkmodells mit Hilfe der Quark-Spinoren $\mathrm{u}(x)$, $\mathrm{d}(x)$ und $\mathrm{s}(x)$ beschreiben.

$$h^\lambda(x) = \bar{\mathrm{u}}(x)\,\gamma_\lambda(1 + \gamma_5)\,[\cos\Theta_C\,\mathrm{d}(x) + \sin\Theta_C\,\mathrm{s}(x)]\,. \tag{14.142}$$

Die geladenen schwachen Ströme koppeln den u-Quark an eine Cabibbo-rotierte Linearkombination der d- und s-Quarks, die offenbar die richtige für die schwache Wechselwirkung zuständige Eigenfunktion der Quarks mit der Ladung $Q_i = -\frac{1}{3}$ darstellt. Θ_C ist der Cabibbo-Winkel ($\cos^2\Theta_C \approx 0{,}95$).

Ausgehend vom Strom-Strom-Lagrangean (14.139) war bis zum Jahre 1980 eine sehr genaue Beschreibung aller vorliegenden experimentellen Ergebnisse der schwachen Wechselwirkung möglich. Trotzdem handelt es sich um keine wirkliche Theorie. Die Vier-Fermionen-Kopplung hat prinzipielle theoretische Mängel. So berechnet man zum Beispiel den Gesamtwirkungsquerschnitt für den Prozeß

$$\nu_e + e^- \to \nu_e + e^- \tag{14.143}$$

als

$$\sigma(\nu_e + e^- \to \nu_e + e^-) = \frac{G^2}{\pi}\,E_{CM}^2\,. \tag{14.144}$$

Dieser Wirkungsquerschnitt steht im Widerspruch zur Unitaritätsgrenze

$$\sigma \leqq \frac{4\pi}{E_{CM}^2}\,, \tag{14.145}$$

die für die S-Wellenreaktion (14.143) ($l = 0$) aus dem Ausdruck (13.65) folgt, wenn wir für $\eta_l \, e^{2i\delta_l}$ den Wert -1 einsetzen, der den maximalen Wirkungsquerschnitt ergibt.

Wir müssen also folgern, daß mindestens bei der Schwerpunktenergie

$$E_{CM}^2 = \frac{2\pi}{G} \approx (600 \text{ GeV})^2 \tag{14.146}$$

ein Widerspruch der Vier-Fermi-Wechselwirkung zum Experiment zu erwarten ist. Solche Energien werden mit Hilfe der CERN-SPS-Proton-Antiproton-Speicherringe erstmals erreicht.

Auf der Suche nach einer besseren Theorie der schwachen Wechselwirkung versuchte man deshalb, geleitet durch das Vorbild der QED, eine Theorie zu konstruieren, bei der die Wechselwirkung der Fermionen durch den Austausch eines massiven Vektorbosons vermittelt wird. Das Boson muß sehr schwer sein, da die schwache Wechselwirkung extrem kurzreichweitig ist. Als Wechselwirkungsterm im Lagrangean setzte man deshalb an

$$L_W = gJ^\lambda(x)\, W_\lambda(x)\,. \tag{14.147}$$

Dabei ist $W_\lambda(x)$ das Feld eines geladenen massiven Vektorbosons $W^\pm$ mit der Masse m_W. Die Kopplungskonstante g steht in Beziehung zur Fermikonstanten G

$$\frac{G}{\sqrt{2}} = \frac{g^2}{m_W^2}\,. \tag{14.148}$$

Zur Beschreibung der neutralen Ströme würde man ein entsprechendes massives neutrales Z^0-Boson einführen.

Jedoch auch eine solche Theorie ist unbefriedigend und hat keine Vorteile gegenüber der Vier-Fermion-Kopplung. Die Theorie ist nicht renormierbar, d. h., es lassen sich keine sinnvollen Korrekturen höherer Ordnung in der Störungstheorie berechnen. Nur die 1. Ordnung der Störungstheorie ist sinnvoll, aber es tritt erneut, wenn auch für andere Prozesse, eine Verletzung der Unitaritätsgrenze auf; z. B. beim Prozeß

$$\nu_e + \bar{\nu}_e \rightarrow W^+ + W^- \tag{14.149}$$

berechnet man im Widerspruch zur Unitaritätsgrenze (14.145) den Wirkungsquerschnitt

$$\sigma = \frac{G^2 E_{CM}^2}{3\pi}\,. \tag{14.150}$$

14.8.2. Konstruktion einer Eichfeldtheorie der elektromagnetischen und schwachen Wechselwirkung

Auf der Grundlage der von C. N. Yang und P. Mills erstmals untersuchten nichtabelschen Eichfeldtheorie gelang es S. Glashow, A. Salam und S. Weinberg, ein einheitliches Modell zur Beschreibung sowohl der elektromagnetischen als auch der schwachen Wechselwirkung zu konstruieren. Dieses Modell wurde zu einer befriedigenden Theorie der elektroschwachen Wechselwirkung, als es G.'t Hooft 1972 gelang, die Renormierbarkeit nichtabelscher Eichtheorien nachzuweisen und als in den folgenden Jahren einige wichtige Vorhersagen der elektroschwachen Theorie wie die Existenz neutraler Ströme und die Existenz von Quarks mit Charm-Quantenzahlen experimentell bestätigt wurden.

Wir benötigen für die einheitliche elektroschwache Theorie mindestens vier Eichbosonen, das Photon γ und die geladenen und neutralen schweren Vektorbosonen der schwachen Wechselwirkung ($W^\pm$, Z^0). Mit Hilfe der $SU(2) \times U(1)$ als Eichgruppe ergab sich gerade die richtige Zahl von Eichfeldern. Da Eichfelder, wie wir im Abschnitt 14.6. gesehen haben, zunächst

masselose Felder sind, wird ein zusätzlicher Mechanismus benötigt, den $W^{\pm}$- und Z^0-Feldern eine Masse zu geben. Der Mechanismus der spontanen Symmetriebrechung, auf den wir im Abschnitt 14.6. kurz eingegangen sind, ist ein solcher Mechanismus, der auch die Renormierbarkeit der Theorie erhält.

In dieser Theorie klassifizieren wir die Fermionen als Multipletts der SU(2)-Gruppe, die auch als die Gruppe des schwachen Isospins bezeichnet wird. Wenn wir uns vom Experiment leiten lassen, wird klar, daß wir die schwach wechselwirkenden linksdrehenden Fermionen als Dubletts und die nicht schwach wechselwirkenden rechtsdrehenden Fermionen als Singuletts einzuordnen haben. Für die Leptonen ergeben sich die folgenden Multipletts

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_L, \quad \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu \end{pmatrix}_L, \quad \begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau \end{pmatrix}_L, \quad e_R, \quad \mu_R, \quad \tau_R. \tag{14.151}$$

Wenn Neutrinos masselos sind, existieren sie nicht in rechtsdrehenden Zuständen.

Die lokale Eichsymmetrie bedingt sofort die Form der Kopplungen der Fermionen an die Eichfelder

$$\mathrm{SU(2)}: \frac{g}{\sqrt{2}} (\nu_e e)_L^+ \gamma_0 \gamma^\mu (A_\mu^a \tau^a) \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_L \tag{14.152}$$

$$\mathrm{U(1)}: \frac{g'}{\sqrt{2}} (\nu_e e)_L^+ \gamma_0 \gamma^\mu (B_\mu I) \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_L, \quad \frac{g'}{\sqrt{2}} e_R^+ \gamma_0 \gamma^\mu B_\mu e_R . \tag{14.153}$$

Dabei sind die τ^a die SU(2)-Pauli-Matrizen, und A_μ^a bezeichnet die drei Eichfelder der SU(2)-Gruppe und B_μ das Eichfeld der U(1). Durch Ausmultiplizieren läßt sich (14.152) umschreiben

$$\frac{g}{\sqrt{2}} (A_\mu^+ \bar{\nu}_L \gamma^\mu e_L + A_\mu^- \bar{e}_L \gamma^\mu \nu_L) + \frac{g}{\sqrt{2}} A_\mu^0 (\bar{\nu}_L \gamma^\mu \bar{\nu}_L + \bar{e}_L \gamma_\mu e_L). \tag{14.154}$$

Wir sehen, die geladenen Eichbosonen $A^{\pm}$ koppeln nur an die linksdrehenden Fermionen. Wenn wir die $A^{\pm}$- mit den $W^{\pm}$-Bosonen identifizieren, haben wir damit bereits die richtige Struktur der geladenen schwachen Ströme erhalten. Das A^0-Boson kann nicht das Photon sein, da es auch an die ungeladenen Neutrinos koppelt, und da es eine V-A-Kopplung hat und nicht wie das Photon eine reine V-Kopplung. Andererseits läßt sich das A^0 auch nicht mit dem Vektorboson Z^0 der neutralen schwachen Ströme identifizieren. Es ist experimentell bekannt, daß die neutralen Ströme zwar eine Mischung von Vektor- und Achsialvektorströmen sind, aber keine V-A-Kopplung besitzen.

Wir müssen also das Photon und das Z^0 als Linearkombinationen aus den A^0- und B-Feldern bilden. Wir fordern für das Photon eine Linearkombination ohne Kopplung an das Neutrino und mit einer reinen Vektorkopplung an die geladenen Fermionen und erhalten das Z^0-Boson dann als eine dazu orthogonale Linearkombination

$$\text{Photon:} \quad A_\mu = \cos\Theta_W B_\mu + \sin\Theta_W A_\mu^0, \tag{14.155}$$

$$Z^0: \quad Z_\mu = -\sin\Theta_W B_\mu + \cos\Theta_W A_\mu^0. \tag{14.156}$$

Aus den ursprünglichen SU(2)- und U(1)-Kopplungskonstanten g und g' findet man die Kopplung des Photons

$$e = \frac{gg'}{\sqrt{g^2 + g'^2}}, \tag{14.157}$$

und mit

$$\sin \Theta_W = \frac{g'}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \tag{14.158}$$

ergibt sich für die Elektronenladung

$$e = g \sin \Theta_W . \tag{14.159}$$

Der Winkel Θ_W wird als der schwache Mischungswinkel bezeichnet.

In Abb. 14.69 geben wir die Kopplungen der Eichfelder $W^\pm$, Z^0 und γ in Form einiger grundlegender Vertices der elektroschwachen Wechselwirkung an. Auch hier finden wir wieder die für nichtabelsche Eichtheorien typische Kopplung dreier Eichbosonen.

Mit Hilfe dieser Vertices lassen sich die Feynman-Diagramme niedrigster Ordnung für beliebige Prozesse der schwachen Wechselwirkung konstruieren. In Abb. 14.70 geben wir dafür einige Beispiele an. Wir weisen besonders auf den Prozeß in Abb. 14.70c hin. Die zweiten und dritten Diagramme für den Prozeß $e^+e^- \to W^+W^-$ treten nur in einer nichtabelschen Eichtheorie mit selbstwechselwirkenden Eichbosonen auf. Es sind gerade diese zusätzlichen Diagramme und ihre Interferenz mit dem ersten Diagramm, welche die Verletzung der Unitaritätsgrenze verhindern, die in diesem Prozeß mit dem ersten Diagramm allein auftreten würde.

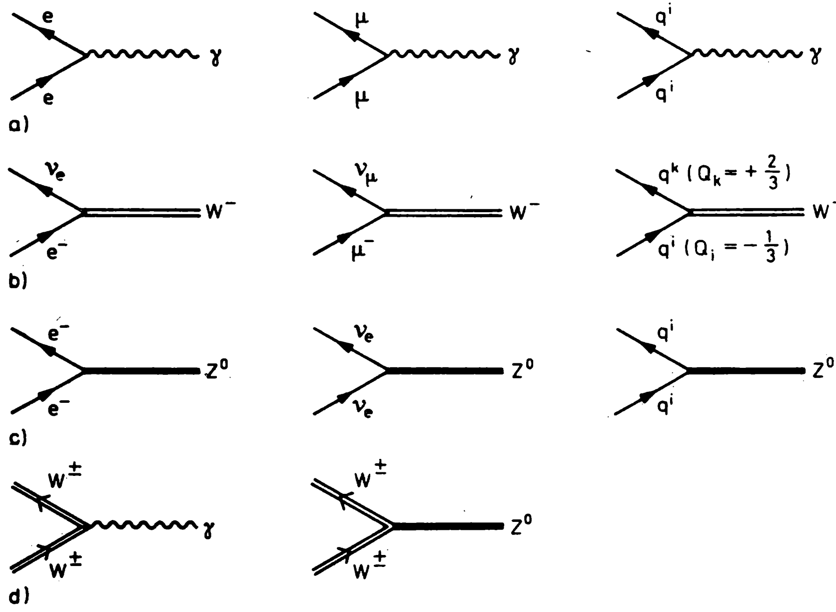


Abb. 14.69
Vertices der elektroschwachen Wechselwirkung
a) Fermion-Photon-Wechselwirkung
b) Wechselwirkung von Fermionen mit geladenen Vektorbosonen
c) Wechselwirkung von Fermionen mit neutralen Vektorbosonen
d) Eichkopplungen der Bosonen

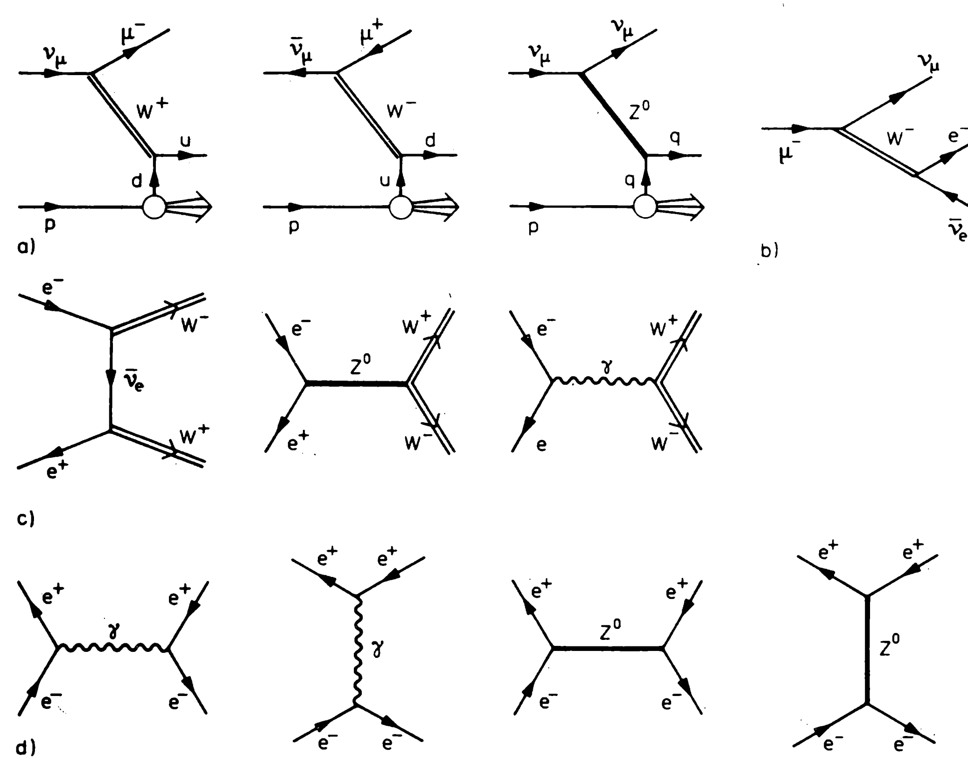


Abb. 14.70
Feynman-Diagramme niedrigster Ordnung für einige Prozesse der schwachen Wechselwirkung
a) Tief unelastische Neutrino-Nukleon- und Antineutrino-Nukleon-Streuung. Der dritte Prozeß führte zur Entdeckung der neutralen Ströme in Neutrinostreuereignissen ohne Myon im Endzustand
b) Zerfall des Myons
c) Der Prozeß $e^+e^- \to W^+ + W^-$.
Durch die Anwesenheit der zweiten und dritten Diagramme mit den Eichkopplungen dreier Bosonen wird die Verletzung der Unitaritätsgrenze verhindert, die auftritt, wenn nur das erste Diagramm verwendet wird
d) Elektron-Positron-Wechselwirkung $e^+e^- \to e^+e^-$ bei sehr hohen Energien. In der Nähe der Schwerpunktenergie $E_{CM} \approx M_{Z^0}c^2$ erwartet man ein dramatisches Maximum des Wirkungsquerschnittes infolge der Erzeugung des Z^0-Eichbosons (siehe Abb. 14.73)

14.8.3. Die Vorhersage der Existenz eines vierten Quarks

Die richtigen Kopplungen der Quarks an die Vektorbosonen sind schwerer zu verstehen. Erinnern wir uns: Bis zur Mitte der siebziger Jahre kannte man nur drei Quarks u, d und s. An der schwachen Wechselwirkung beteiligte sich nur das Dublett

$$\begin{pmatrix} u \\ d_\Theta \end{pmatrix}_L, \quad d_\Theta = d \cos \Theta_C + s \sin \Theta_C, \tag{14.160}$$

während die dazu orthogonale Linearkombination $s_\Theta = -d \sin \Theta_C + s \cos \Theta_C$ keine schwache Wechselwirkung zeigte. Für das Dublett (14.160) finden wir die geladenen Ströme wie für die Leptonen in Form einer V-A-Kopplung. Problematisch sind jedoch die neutralen Ströme. Es ist experimentell wohlbekannt, daß keine neutralen Ströme existieren, die die Seltsamkeit ändern. Eine solche Reaktion wäre z. B. der Zerfall

$$K^0 \to \mu^+ + \mu^- , \tag{14.161}$$

der im Quarkmodell wie in Abb. 14.71 ablaufen würde, aber nicht beobachtet wurde. Für das Dublett (14.160) erhält man jedoch die Kopplungen des Z^0 wie folgt

$$u\bar{u},\ d\bar{d} \cos^2 \Theta_C , \qquad s\bar{s} \sin^2 \Theta_C , \qquad 2d\bar{s} \cos \Theta_C \sin \Theta_C . \tag{14.162}$$

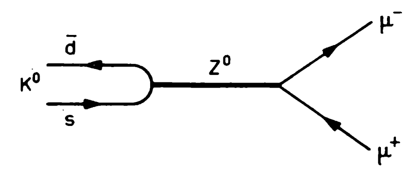


Abb. 14.71
Der nicht beobachtete Zerfall $K^0 \to \mu^+\mu^-$

Der letzte Term sagt gerade die Existenz solcher Seltsamkeit ändernden neutralen Ströme voraus. Dieses Problem wurde von S. GLASHOW, J. ILIOPOULOS und L. MAIANI (GIM-Mechanismus) durch die Einführung eines vierten Quarks c mit der Quantenzahl Charm gelöst. Dieser Quark koppelt an s_Θ

$$\begin{pmatrix} c \\ s_\Theta \end{pmatrix}_L , \qquad s_\Theta = -d \sin \Theta_C + s \cos \Theta_C . \tag{14.163}$$

Von diesem Dublett erhalten wir folgende Kopplungen an das Z^0:

$$c\bar{c},\ d\bar{d} \sin^2 \Theta_C , \qquad s\bar{s} \cos^2 \Theta_C , \qquad -2d\bar{s} \sin \Theta_C \cos \Theta_C . \tag{14.164}$$

Aus (14.164) und (14.162) zusammen fallen gerade die störenden Seltsamkeit ändernden neutralen Ströme heraus. Gleichzeitig wurde die Existenz des vierten Quarks c vorhergesagt, der, wie im Abschnitt 14.4. ausgeführt, 1974 wirklich im Experiment gefunden wurde.

14.8.4. Massive Vektorbosonen durch spontane Symmetriebrechung

Der im Abschnitt 14.6.3. dargestellte Mechanismus der spontanen Symmetriebrechung ist in der Lage, den Vektorbosonen $W^\pm$ und Z^0 Massen zu geben. Im Glashow-Weinberg-Salam-Modell verwendet man dazu ein Dublett komplexer skalarer Higgs-Felder

$$\Phi = \begin{pmatrix} \Phi^0 \\ \Phi^- \end{pmatrix}, \qquad \bar{\Phi} = \begin{pmatrix} \Phi^+ \\ -\Phi^{0*} \end{pmatrix} \tag{14.165}$$

Mit Hilfe des Potentials

$$V(\Phi) = \mu^2\Phi^2 + \lambda\Phi^4 ; \qquad \mu^2 < 0 \tag{14.166}$$

erhalten wir spontane Symmetriebrechung. Wir wählen den Vakuumerwartungswert $\langle\Phi\rangle = V$ und verschieben das Feld

$$\varrho = \Phi - V . \tag{14.167}$$

Dadurch erhalten wir aus dem Term der ursprünglichen Higgs-Boson-Vektorboson-Kopplung

$$g^2 \Phi^2 A^a_\mu A^{a\mu} \tag{14.168}$$

unter anderem den Massenterm für die Vektorbosonen

$$g^2 V^2 A^a_\mu A^{a\mu} \,. \tag{14.169}$$

Daraus ergibt sich schließlich die Massenformel für die Vektorbosonen $W^\pm$ und Z^0

$$m^2_{W^\pm} = \frac{\sqrt{2}\, e^2}{8\, G \sin^2 \Theta_W} = \left(\frac{37{,}4 \text{ GeV}}{\sin \Theta_W}\right)^2 , \tag{14.170}$$

$$m_{Z^0} = \frac{m_{W^\pm}}{\cos \Theta_W} \,. \tag{14.171}$$

Das Photon bleibt masselos.

Der schwache Mischungswinkel Θ_W wurde durch eine Vielzahl experimenteller Untersuchungen recht gut bestimmt als $\sin^2 \Theta_W = 0{,}215 \pm 0{,}014$, siehe Abb. 14.72. Es ist bemerkenswert, daß alle Experimente den gleichen Wert für $\sin^2 \Theta_W$ ergeben. Das bedeutet, daß die schwachen neutralen Ströme wirklich die von der $SU(2) \times U(1)$-Eichfeldtheorie vorhergesagten Eigenschaften haben.

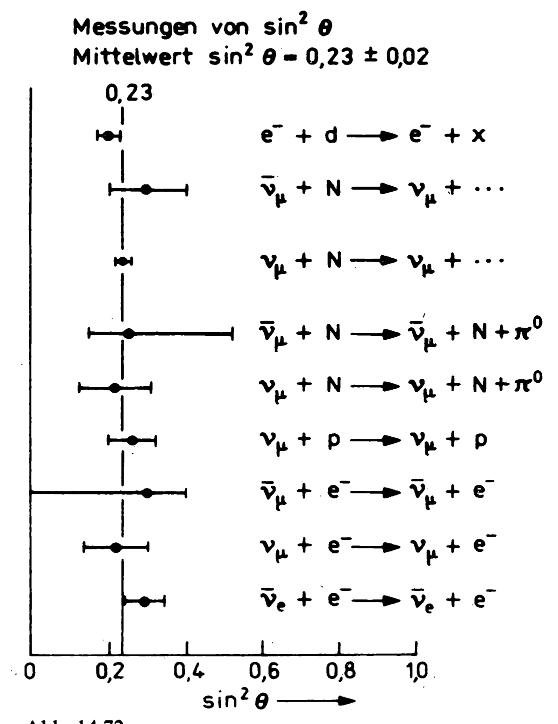


Abb. 14.72
Zusammenfassung der in verschiedenen Experimenten ermittelten Werte des schwachen Mischungswinkels $\sin^2 \Theta_W$

Mit Hilfe dieses Wertes für den schwachen Mischungswinkel sowie durch Berücksichtigung von Korrekturen höherer Ordnung erhalten wir für die Massen der Eichbosonen die folgenden Vorhersagen

$$m_W = 83 \begin{array}{c}+3{,}0\\-2{,}8\end{array} \text{GeV}/c^2\,,$$
$$m_{Z^0} = 93{,}8 \begin{array}{c}+2{,}5\\-2{,}4\end{array} \text{GeV}/c^2\,. \tag{14.172}$$

Mit $\sin^2 \Theta_W$ ist einer der beiden Parameter der Theorie experimentell bestimmt. Der zweite Parameter g ist ebenfalls meßbar, z. B. könnte man g durch Messung der Zerfallsbreite der $W^{\pm}$-Bosonen $\Gamma(W^- \to e^- + \bar{\nu}_e)$ bestimmen. Das heißt, mit Hilfe von Experimenten der schwachen Wechselwirkung ist es möglich, die elektrische Ladung

$$e = g \sin \Theta_W \tag{14.173}$$

zu bestimmen. Deshalb ist es gerechtfertigt, von einer *einheitlichen* Theorie der schwachen und elektromagnetischen Wechselwirkung zu sprechen.

Ein geladenes Vektorbosen, z. B. das W^-, zerfällt entweder in ein Leptonenpaar oder ein Quarkpaar

$$\begin{aligned} &W^- \to l\bar{\nu}_l\,; \quad l\bar{\nu}_l = (e^-\bar{\nu}_e)\,, \quad (\mu^-\bar{\nu}_\mu)\,, \quad (\tau^-\bar{\nu}_\tau)\,, \\ &W^- \to q\bar{q}'\,; \quad q\bar{q}' = (d\bar{u})\,, \quad (s\bar{c})\,, \quad (b\bar{t})\,. \end{aligned} \tag{14.174}$$

Für alle leptonischen Zerfälle findet man die partielle Zerfallsbreite

$$\Gamma(W \to l\nu_l) = G_F m_W^3/6\pi\sqrt{2} = 250\ \text{MeV} \tag{14.175}$$

und für die Quarkzerfälle

$$\Gamma(W \to \text{Hadronen}) = \left(G_F m_W^3/2\pi\sqrt{2}\right)\left[1 - \frac{m_t^2}{2m_W^2} + \left(\frac{m_t^6}{6m_W^6}\right)\right]$$
$$\times\left(1 + \frac{\alpha_s}{\pi}\right) = 2{,}20\ \text{GeV} \qquad (\text{für } m_t = 30\ \text{GeV}/c^2)\,. \tag{14.176}$$

Dabei ist m_t die Masse des Top-Quarks und α_S der Wert der QCD-Kopplungskonstanten bei der Massenskala m_W. Die Gesamtbreite der W-Bosonen und ihr leptonisches Verzweigungsverhältnis erwartet man also als

$$\Gamma(W \to \text{Alles}) = 2{,}95\ \text{GeV}\,,$$
$$\frac{\Gamma(W \to l\nu_l)}{\Gamma(W \to \text{Alles})} = 8{,}5\,\%\,. \tag{14.177}$$

Die Zahl der möglichen Zerfälle des neutralen Eichbosons Z^0 ist noch wesentlich größer. Auch das Z^0 kann entweder in ein Leptonenpaar oder in ein Quarkpaar zerfallen.

$$\begin{aligned} &Z^0 \to l\bar{l}\,; \quad l\bar{l} = (e^+e^-)\,, \quad (\nu_e\bar{\nu}_e)\,, \quad (\mu^+\mu^-)\,, \quad (\nu_\mu\bar{\nu}_\mu)\,, \quad (\tau^+\tau^-)\,, \\ &(\nu_\tau\bar{\nu}_\tau)\,, \\ &Z^0 \to q\bar{q}\,; \quad q\bar{q} = (d\bar{d})\,, \quad (u\bar{u})\,, \quad (s\bar{s})\,, \quad (c\bar{c})\,, \quad (b\bar{b})\,, \quad (t\bar{t})\,. \end{aligned} \tag{14.178}$$

Für die partiellen Zerfallsbreiten erhält man

$$\begin{aligned} \Gamma(Z^0 \to l\bar{l}) &= (G_F m_Z^3/6\pi\sqrt{2})\,(g_V^2 + g_A^2)\,, \\ \Gamma(Z^0 \to q\bar{q}) &= (G_F m_Z^3/2\pi\sqrt{2})\,(q_V^2 + q_A^2)\,. \end{aligned} \tag{14.179}$$

Dabei sind die g_V, q_V und g_A, q_A die Vektor- und Achsialvektor-Kopplungskonstanten des Z^0 mit den Leptonen bzw. Quarks

$$\begin{aligned} g_V &= I_3^l - 2\,|Q_l|\sin^2\Theta\,; & q_V &= I_3^q - 2\,|Q_q|\sin^2\Theta\,, \\ g_A &= I_3^l\,; & q_A &= I_3^q\,. \end{aligned} \tag{14.180}$$

Die I_3^l und I_3^q sind dabei die dritten Komponenten des schwachen Isospins und die Q_l und Q_q sind die elektrischen Ladungen der Leptonen und Quarks. Durch Einsetzen der Zahlenwerte erhält man schließlich die folgenden Breiten und Verzweigungsverhältnisse

$$\begin{aligned} &\Gamma(Z^0 \to l\bar{l}) = 92\ \text{MeV}\,; \qquad l = e, \mu, \tau\,, \\ &\Gamma(Z^0 \to \nu\bar{\nu}) = 181\ \text{MeV}\,; \qquad \nu = \nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau\,, \\ &\Gamma(Z^0 \to \text{Hadronen}) = 2{,}12\ \text{GeV}\,, \\ &\Gamma(Z^0 \to \text{Alles}) = 2{,}94\ \text{GeV}\,, \\ &\frac{\Gamma(Z^0 \to e^+e^-)}{\Gamma(Z^0 \to \text{Alles})} = 3{,}1\,\%\,. \end{aligned} \tag{14.181}$$

Aus den elementaren Vertices in Abb. 14.69 folgt, daß sich die Vektorbosonen in Lepton-Lepton-Stößen, z. B. der e^+e^--Annihilation oder in Hadron-Hadron-Stößen erzeugen lassen.

So war die genaue Untersuchung der Erzeugung und des Zerfalls der Z^0-Eichbosonen ein wesentliches Motiv für die e^+e^--Kollider-Projekte LEP bei CERN in Genf und SLC in Stanford (USA) (siehe Tabelle 14.3). In e^+e^--Stößen werden Z^0-Eichbosonen in großer Zahl und großer Reinheit, d. h. praktisch ohne störende Untergrundereignisse erzeugt. In Abb. 14.73 zeigen wir die Zahl der am LEP-Kollider erwarteten Ereignisse pro Tag in der Nähe des Z^0-Maximums im e^+e^--Wirkungsquerschnitt.

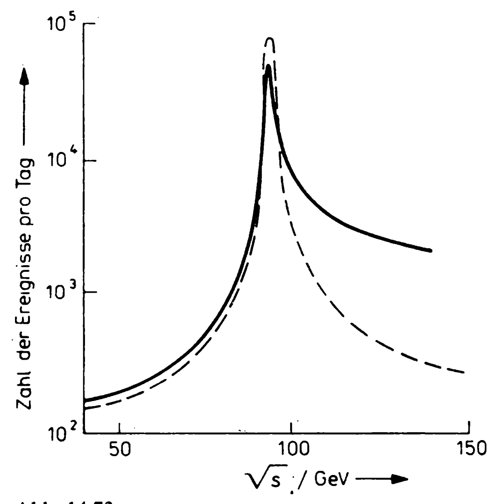


Abb. 14.73
Elektron-Positron-Annihilation bei Energien von 50—150 GeV im Schwerpunktsystem. Gezeigt wird das erwartete Maximum des Wirkungsquerschnittes bei der Energie $M_{Z^0}c^2$. Die Abbildung gibt die Zahl der Ereignisse, die pro Tag an dem im Bau befindlichen Elektron-Positron-Kollider LEP erwartet werden

14.8.5. Die Entdeckung der $W^{\pm}$- und Z^0-Vektorbosonen

Da die $W^{\pm}$- und Z^0-Eichbosonen in Proton-Antiproton-Stößen am CERN-Kollider nachgewiesen wurden, behandeln wir ausführlicher die Erzeugung der Eichbosonen in Hadron-Hadron-Stößen.

Die Erzeugung der Eichbosonen wird im Quark-Parton-Modell durch einen Prozeß beschrieben, der dem im Abschnitt 14.5.1. beschriebenen Drell-Yan-Prozeß zur Erzeugung massiver Leptonenpaare sehr ähnlich ist, siehe Abb. 14.74. W^+- und W^--Bosonen werden in den folgenden elementaren Prozessen erzeugt.

$$\begin{aligned} &u + \bar{d} \to W^+ , \qquad u + \bar{s} \to W^+ , \\ &\bar{u} + d \to W^- , \qquad \bar{u} + s \to W^- . \end{aligned} \tag{14.182}$$

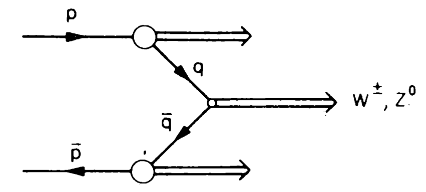


Abb. 14.74
Mechanismus der Erzeugung von $W^{\pm}$- und Z^0-Eichbosonen in Hadron-Hadron-Stößen im Quark-Parton-Modell

Der Gesamtwirkungsquerschnitt für die Erzeugung ist

$$\sigma_{W^{\pm}} = \sqrt{2}\, G_F \pi \tau \int_{\tau}^{1} dx\, W^{\pm}(x, \tau/x)/x \tag{14.183}$$

mit

$$\begin{aligned} W^+(x_1, x_2) = \frac{1}{3} \{ &[u_1(x_1)\, \bar{d}(x_2) + \bar{d}_1(x_1)\, u_2(x_2)] \cos^2 \Theta_c \\ &+ [u_1(x_1)\, \bar{s}_2(x_2) + \bar{s}_1(x_1)\, u_2(x_2)] \sin^2 \Theta_c \} . \end{aligned} \tag{14.184}$$

Θ_c ist dabei der Cabibbo-Winkel und wir haben die gleichen Variablen wie beim Drell-Yan-Prozeß eingeführt $\tau = M^2/s = x_1 x_2$, $x = (x_1 - x_2) = 2P_L/\sqrt{s}$. Für die W^--Erzeugung muß man in (14.184) die Quark- und Antiquarkverteilungen vertauschen. Der Wirkungsquerschnitt für die Z^0-Erzeugung ist

$$\sigma_{Z^0} = 2\sqrt{2}\, G_F \pi \tau \int_{\tau}^{1} dx\, Z^0(x, \tau/x)/x \tag{14.185}$$

mit

$$\begin{aligned} Z^0(x_1, x_1) = \frac{1}{3} \Big\{ &[u_1(x_1)\, \bar{u}_2(x_2) + \bar{u}_1(x_1)\, u_2(x_2)] \left[\frac{1}{4} - \frac{2}{3} \sin^2 \Theta_W + \frac{5}{9} \sin^4 \Theta_W \right] \\ &+ [d_1(x_1)\, \bar{d}_2(x_2) + \bar{d}_1(x_1)\, d_2(x_2) + s_1(x_1)\, \bar{s}_2(x_2) + \bar{s}_1(x_1)\, s_2(x_2)] \\ &\times \left[\frac{1}{4} - \frac{1}{3} \sin^2 \Theta_W + \frac{2}{9} \sin^4 \Theta_W \right] \Big\} . \end{aligned} \tag{14.186}$$

Zur Berechnung des Wirkungsquerschnittes verwendet man die Q^2-abhängigen Quarkverteilungen und erhält den gesamten Wirkungsquerschnitt für die $W^{\pm}$- und Z^0-Erzeugung in Proton-

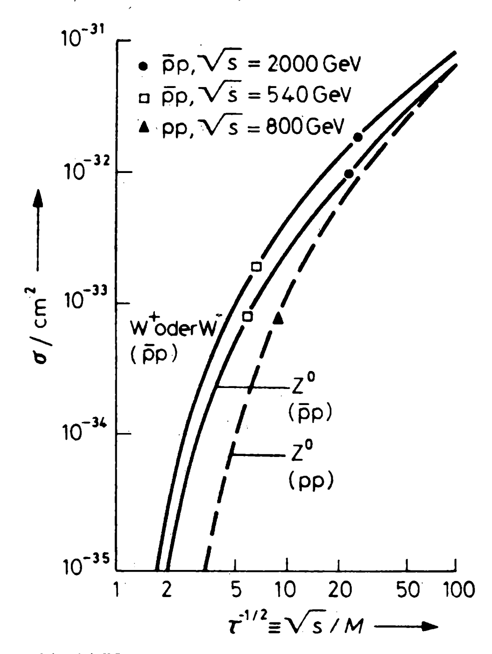


Abb. 14.75
Gesamtwirkungsquerschnitt zur Erzeugung der $W^{\pm}$- und Z^0-Eichbosonen in Proton-Proton- und Proton-Antiproton-Stößen als Funktion der Variablen $\tau^{-1/2} = \sqrt{s}/M$, berechnet im Quark-Parton-Modell mit Q^2-abhängigen Strukturfunktionen

Proton- und Proton-Antiproton-Stößen wie in Abb. 14.75 angegeben. Mit steigender Energie des Stoßes steigt der Erzeugungsquerschnitt steil an. Bei der Energie von 540 GeV des CERN-SPS-Proton-Antiproton-Kolliders findet man

$$\sigma_{W^+} \approx 1{,}8\ \text{nb}; \qquad \sigma_{Z^0} \approx 0{,}85\ \text{nb}. \tag{14.187}$$

Einmal erzeugt, erwartet man die Hauptzerfälle der $W^{\pm}$- und Z^0-Eichbosonen, wie oben beschrieben, in Quark-Antiquark-Jets. Man sollte also Quark- und Antiquark-Jets mit großem Transversalimpuls suchen. Der Untergrund infolge der QCD-Streuung von Quarks und Gluonen wird jedoch etwa 10mal größer erwartet als das Signal vom Zerfall der Eichbosonen. Die Aussichten, die Eichbosonen über Quark-Antiquark-Jets zu beobachten, sind deshalb sehr gering. Lediglich im Falle schwerer Quarks, die zunächst über die schwache Wechselwirkung zerfallen, kann man einen möglichen Nachweis der Eichbosonen erwarten. Ein Beispiel ist

$$\begin{array}{l} W^- \to b\ \bar{t} \\ \quad\ \ \bar{t} \to \bar{b}\ l^-\ \bar{\nu}_l \\ \quad\ \ b \to c\ l^-\ \bar{\nu}_l\,. \end{array} \tag{14.188}$$

Hier treten zwei gleichnamig geladene Leptonen auf. Tatsächlich wurde der Prozeß (14.188) im Jahre 1984 vom UA1-Experiment am CERN-Kollider genutzt, um erste experimentelle Argumente für die Existenz des Top-Quarks t zu geben. Es wurden sechs Ereignisse gefunden, die mit dem Prozeß (14.188) und einer Masse des Top-Quarks von 30—40 GeV/c^2 konsistent sind.

Obgleich der Zerfall der $W^{\pm}$ in geladene Leptonen und die dazugehörigen (Anti-)Neutrinos nur ein Drittel der Wahrscheinlichkeit der hadronischen Zerfälle besitzt, ist diese Zerfallsmode

wesentlich einfacher nachzuweisen. Es tritt ein geladenes Lepton, e oder μ mit großem Transversalimpuls auf. Gleichzeitig muß ein großer fehlender Transversalimpuls auf das nicht nachweisbare Neutrino hinweisen. Wie in Abb. 14.76 gezeigt, besitzt die Transversalimpulsverteilung des gelandenen Leptons ein deutliches Jacobi-Maximum bei einem Transversalimpuls von etwa $p_\perp \approx M_W c/2$. Dieses Maximum ist verschmiert infolge des Transversalimpulses mit dem das $W^\pm$ erzeugt wird (typisch etwa $p_\perp \approx 10$ GeV/c) und infolge der endlichen Zerfallsbreite des $W^\pm$. Gleichzeitig erwartet man infolge der V-A-Kopplung der $W^\pm$-Bosonen eine Vorwärts-Rückwärts-Asymmetrie der Leptonen. Das l^+ wird vorzugsweise in der Richtung der primären Antiprotonen $\bar{p}$, das l^- in der Richtung der primären Protonen p emittiert. Die Winkelverteilung der geladenen Leptonen hat die Form $(1 + \cos \Theta^*)^2$ wobei Θ^* der Winkel im Schwerpunktsystem ist, unter dem das geladene Lepton erzeugt wird.

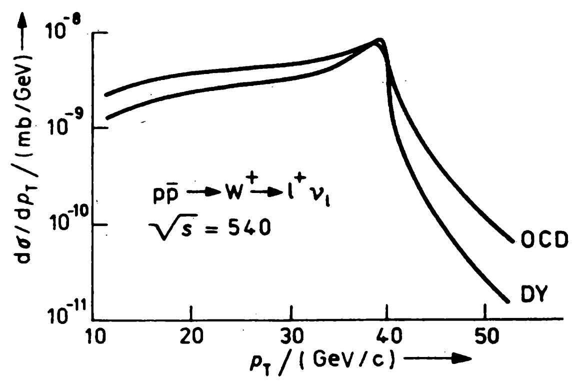


Abb. 14.76
Das Jacobi-Maximum in der Transversalimpulsverteilung des geladenen Leptons von der Erzeugung und dem Zerfall des W^+-Bosons in Proton-Antiproton-Stößen am CERN-Kollider

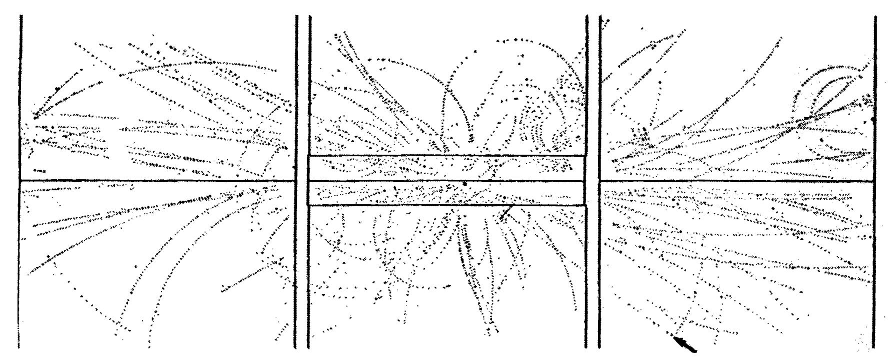


Abb. 14.77
Ein Ereignis, aufgenommen mit dem Detektor des UA1-Experiments am CERN-Proton-Antiproton-Kollider. Im Proton-Antiproton-Stoß wird neben vielen anderen Teilchen ein W^--Eichboson erzeugt, welches durch die gekennzeichnete Elektronenspur identifiziert werden kann

Der Nachweis der Z^0-Eichbosonen über die geladenen Leptonen ist sehr einfach und klar. Man erwartet zwei identifizierte Leptonen mit entgegengesetzter Ladung. Störende Untergrundprozesse infolge der Leptonenpaarerzeugung über den Drell-Yan-Prozeß sind vernachlässigbar klein.

Der in Abschnitt 3.5.1. beschriebene CERN-SPS-Proton-Antiproton-Kollider wurde unter Leitung von Carlo Rubbia mit dem Ziel gebaut, die $W^\pm$- und Z^0-Eichbosonen nachzuweisen. An diesem Kollider sind zwei große Universaldetektoren UA1 und UA2 installiert. In Abb. 14.58 und 14.59 haben wir den Detektor des von C. Rubbia geleiteten UA1-Experiments bereits kennengelernt. Das zweite Experiment UA2 wird von P. Darriulat geleitet. Beiden Experi-

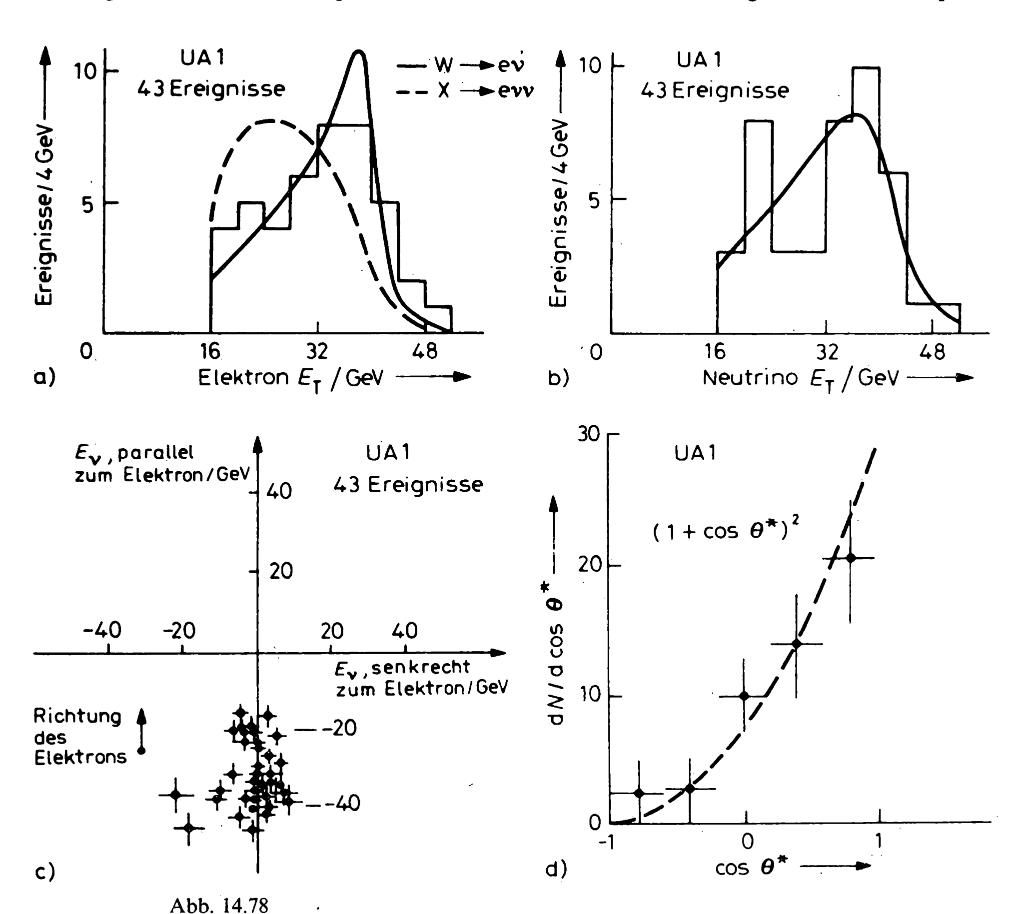


Abb. 14.78

a) Transversale Energieverteilung des Elektrons vom Zerfall W → eν. Das Histogramm der Meßdaten wird mit Kurven verglichen, die durch Monte-Carlo-Simulation des 2- oder 3-Teilchenzerfalls des W erhalten wurden

b) Transversale Energieverteilung der Neutrinos vom Zerfall W → eν

c) Die fehlende transversale Energie E_ν vektoriell aufgetragen relativ zur Richtung des beobachteten Elektrons vom W → eν-Zerfall

d) Verteilung des Emissionswinkels des Elektrons Θ^* im Ruhesystem des erzeugten W-Eichbosons. Die experimentellen Punkte werden mit der Vorhersage der V-A-Theorie verglichen

menten gelang im Jahre 1983 zunächst der Nachweis der $W^{\pm}$-Eichbosonen und anschließend der Nachweis der Z^0-Bosonen. In Abb. 14.77 zeigen wir ein vom UA1 Detektor aufgenommenes Ereignis in dem ein W^--Eichboson erzeugt wird. Das Signal für das W^- ist die durch einen Pfeil gekennzeichnete Spur eines Elektrons mit großem Transversalimpuls. Insgesamt wurden 1983 vom UA1-Experiment 52 Ereignisse $W \to e\nu^-$ und 14 Ereignisse $W \to \mu\nu$ und vom UA2-Experiment 37 Ereignisse $W \to e\nu$ gefunden. Diese Ereignisse zeigen in der transversalen Energieverteilung der Elektronen (Abb. 14.78a) und in der fehlenden transversalen Energie (Abb. 14.78b) (der unbeobachtbaren Neutrinos) je ein Jacobi-Maximum. Weiterhin ist der fehlende Transversalimpuls dem gemessenen Transversalimpuls des Elektrons fast genau entgegengerichtet (Abb. 14.78c). Die kombinierten Daten beider Experimente ergeben die Masse des $W^{\pm}$-Bosons als

$$m_W = 82{,}1 \pm 1{,}7\ \text{GeV}/c^2\,. \tag{14.189}$$

Auch die Winkelverteilung der erzeugten Elektronen im Schwerpunktsystem des Stoßes entspricht genau den Erwartungen, siehe Abb. 14.78d.

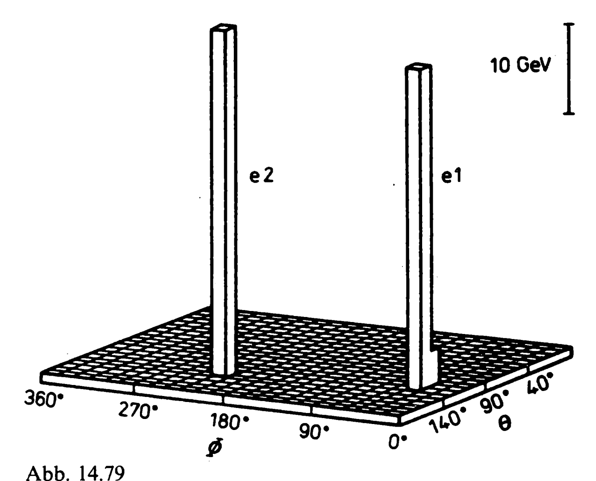


Abb. 14.79
Ein Ereignis der Proton-Antiproton-Wechselwirkung vom UA2-Detektor des CERN-Kolliders. In diesem Ereignis wird ein Z^0-Eichboson erzeugt. Aufgetragen wird die transversale Energie über der Θ-Φ-Ebene

In Abb. 14.79 zeigen wir ein vom UA2-Experiment aufgenommenes Ereignis, in dem ein Z^0-Eichboson erzeugt wird, welches anschließend in ein Elektron-Positron-Paar zerfällt. Gezeigt wird die in den Elementen des elektromagnetischen Kalorimeters deponierte Energie über der Φ-Θ-Ebene. Durch die Signale in den Spurdetektoren wurde angezeigt, daß es sich um Elektronen und Positronen handelt. Vom UA1-Experiment wurden 4, vom UA2-Experiment 8 Ereignisse mit $Z^0 \to e^+e^-$ und vom UA1-Experiment 5 Ereignisse mit $Z^0 \to \mu^+\mu^-$ registriert. In Abb. 14.80 zeigen wir die Massenverteilung der e^+e^-- und $\mu^+\mu^-$-Paare beider Experimente. Das Maximum bei der Masse des Z^0-Bosons ist sehr klar und völlig frei von jeder Art von Untergrundereignissen. Aus den Daten beider Experimente folgt der Wert für die Masse des Z^0

$$m_{Z^0} = 93{,}0 \pm 1{,}7\ \text{GeV}/c^2\,. \tag{14.190}$$

Der Vergleich mit der Vorhersage (14.172) zeigt, daß die gefundenen Massen der $W^{\pm}$- und Z^0-Bosonen innerhalb der Fehlergrenzen völlig mit den aus der $SU(2) \times U(1)$-Eichfeldtheorie

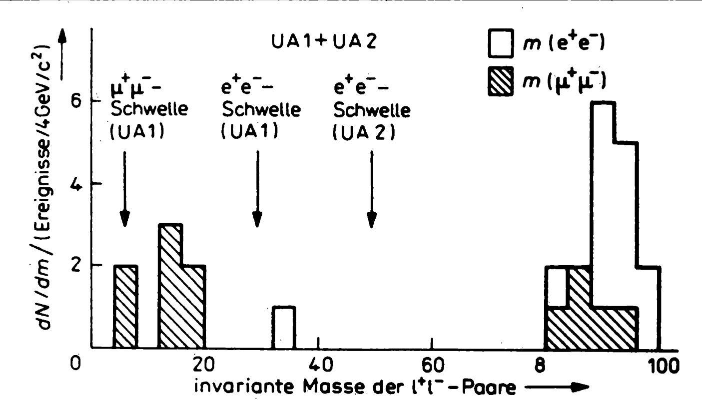


Abb. 14.80
Verteilung der invarianten Massen der am CERN-Kollider erzeugten e^+e^-- und $\mu^+\mu^-$-Paare. Das Z^0-Maximum ist sehr klar zu sehen

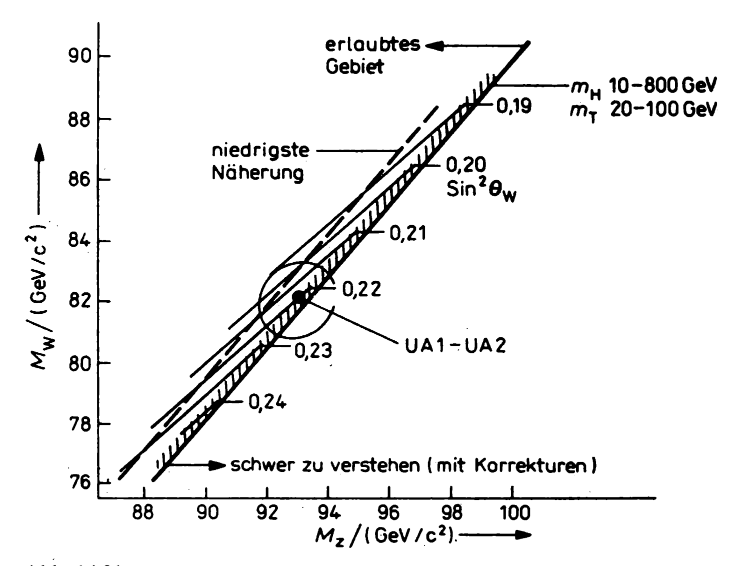


Abb. 14.81
Vergleich der Massen der $W^{\pm}$- und Z^0-Eichbosonen mit der Vorhersage der $SU(2) \times U(1)$-Eichfeldtheorie

vorhergesagten Massen übereinstimmen. In Abb. 14.81 zeigen wir, daß die gefundenen Massen miteinander und mit der Theorie konsistent sind. Aus der experimentellen Massenbestimmung folgt für den elektroschwachen Mischungswinkel der Wert

$$\sin^2 \Theta_W = 0{,}220 \pm 0{,}009\,, \qquad (14.191)$$

ein Wert, der ebenfalls mit dem oben angegebenen Wert, der aus allen vorhergehenden Experimenten folgte, konsistent ist.

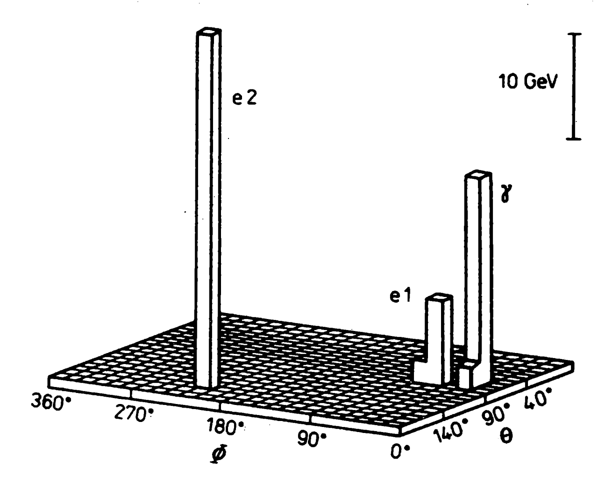


Abb. 14.82
Transversale Energieverteilung eines Ereignisses am CERN-Kollider über der Θ-Φ-Ebene. Bei diesem Ereignis zerfällt ein Z^0-Eichboson in ein Elektron-Positron-Paar und ein Photon

Wir können also zusammenfassen. Der experimentelle Nachweis der $W^{\pm}$- und Z^0-Eichbosonen und die Tatsache, daß diese Bosonen genau die vorhergesagten Eigenschaften haben ist ein sehr starkes Argument für die Richtigkeit der elektroschwachen Eichfeldtheorie.

Gleichzeitig ergab das Experiment zunächst jedoch Hinweise dafür, daß die elektroschwache Eichfeldtheorie noch nicht vollständig ist oder daß bei den Energien der Z^0-Bosonen neue noch nicht verstandene physikalische Prinzipien wirksam werden. Drei der insgesamt 17 gefundenen Z^0-Bosonen zerfallen in ein Paar geladener Leptonen *und* ein zusätzliches Photon. In Abb. 14.82 zeigen wir ein Beispiel für eines dieser Ereignisse. Bei keinem einzigen der 103 gefundenen $W^{\pm}$-Ereignisse wurde ein solcher radiativer Zerfall beobachtet. Zerfälle $Z^0 \to l^+l^-\gamma$ und $W^{\pm} \to l\nu\gamma$ werden im Prinzip von der Quantenelektrodynamik vorhergesagt, jedoch etwa 100 mal weniger häufig als im Falle der Z^0 beobachtet.[1])

14.8.6. Stand und gegenwärtige Probleme der elektroschwachen Eichfeldtheorie

Wir fassen die wichtigsten der bereits experimentell überprüften und der noch zu überprüfenden Vorhersagen der elektroschwachen Eichfeldtheorie zusammen. Zunächst einige der bereits experimentell verifizierten Vorhersagen:

1. Existenz neutraler Ströme, jedoch keiner die Seltsamkeit ändernden neutralen Ströme. Reaktionen, die auf die schwachen neutralen Ströme zurückzuführen sind, wurden erstmals 1973 in Form von unelastischen Neutrino-Nukleon-Streuereignissen in der Blasenkammer Gargamelle bei CERN beobachtet (siehe Abb. 14.83).

---

[1]) In den Jahren nach 1984 stellte sich heraus, daß es sich bei diesen $l^+l^-\gamma$-Ereignissen nur um statistische Schwankungen handelte. Diese Ereignisse sind konsistent mit den Vorhersagen der QED.



Abb. 14.83
Eines der ersten Neutrinostreuexperimente in der Blasenkammer Gargamelle, das auf die neutralen schwachen Ströme zurückzuführen ist. Das einlaufende Neutrino kommt vertikal von unten. Die Wechselwirkung erzeugt ein Rückstoß-Proton (rückwärts laufend) und mehrere energiereiche Sekundärteilchen (vorwärts laufend) die in der Blasenkammer weiter wechselwirken und dadurch als Hadronen identifiziert werden. Es fehlt in dem Ereignis eine Spur für das Myon, welches in Neutrinoreaktionen auftritt, die über die geladenen Ströme ablaufen

2. Existenz einer vierten Art von Quarks mit der Ladung $2e/3$ und der Quantenzahl Charm. Wie im Abschnitt 14.4. beschrieben, wurden diese Quarks als erstes in den J,Ψ-Teilchen gefunden. Später wurden auch Mesonen entdeckt, die die Charm-Quantenzahl tragen. In Abb. 14.84 zeigen wir ein Blasenkammerereignis der Reaktion $\nu p \to D^* p \mu^-$, in dem ein solches Meson D^* erzeugt wird, welches durch die nachfolgenden Zerfälle und Wechselwirkungen eindeutig identifiziert werden kann.

3. Die Effekte der schwachen neutralen Ströme lassen sich nicht nur in Neutrino-Wechselwirkungen identifizieren, sondern auch in der Wechselwirkung von Elektronen mit Nukleonen. Zwar ist die dabei gleichzeitig auftretende elektromagnetische Wechselwirkung viel stärker, aber die Anwesenheit der schwachen Wechselwirkung läßt sich infolge ihrer paritätsverletzenden Natur identifizieren. Experimente dieser Art betreffen die Streuung polarisierter Elektronen an polarisierten Nukleonen und den Nachweis einer Rotation der Polarisationsebene des Lichts bei atomaren Übergängen.

4. Die Experimente am CERN-Proton-Antiproton-Kollider, die durch die Verleihung des Nobelpreises für Physik im Jahre 1984 an Carlo Rubbia und Simon van der Meer gewürdigt wurden, haben die Vorhersagen hinsichtlich der Existenz und der Eigenschaften der $W^\pm$- und Z^0-Eichbosonen sehr überzeugend experimentell bestätigt.

Als nächstes kommen wir zu den Vorhersagen, die bisher noch nicht experimentell bestätigt werden konnten.

5. Es ist zu erwarten, daß sich in absehbarer Zeit die nicht-abelsche Natur der Kopplungen der Eichbosonen ebenfalls experimentell überprüfen läßt. Experimente, die dafür in Frage kommen, sind die Paarerzeugung von Eichbosonen in Elektron-Positron- oder Proton-Antiproton-Stößen.

$$\left.\begin{array}{l} e^+e^- \\ \bar{p}p \end{array}\right\} \to W^+W^-; \qquad Z^0Z^0; \qquad W^\pm\gamma; \ldots \tag{14.192}$$

6. Die elektroschwache Theorie sagt ebenfalls die Existenz skalarer Higgs-Bosonen voraus. Die Existenz dieser Teilchen ist für den Mechanismus der spotanen Symmetriebrechung und die Erzeugung der Massen der Vektorbosonen und Fermionen notwendig. Leider macht die Theorie keine Aussagen über die Massen der Higgs-Teilchen, und leider sind die vorhergesagten Kopplungen an bekannte Teilchen recht schwach. Deshalb sind die Aussichten zum Nachweis dieser Teilchen zumindest ungewiß. Der Mechanismus der spontanen Symmetriebrechung, wofür die Higgs-Bosonen ursprünglich in die Theorie eingeführt wurden, ist zweifellos der am wenigsten verstandene Aspekt der elektroschwachen Eichfeldtheorie. Im einfachsten Modell nimmt man die Existenz eines oder mehrerer Multiplets elementarer Higgs-Bosonen an. Das Hierarchieproblem ist jedoch ein sehr ernstes theoretisches Problem aller Modelle mit elementaren Higgs-Teilchen. Dieses Problem besteht in divergenten Strahlungskorrekturen, die den Massenparameter mit Higgs-Potential (und damit die Massenskala der schwachen Wechselwirkung $(\sqrt{2}\,G)^{-1/2}$) renormieren und ohne unnatürliche weitere Annahmen in die Größenordnung der Planck-Masse $m_P = 10^{19}$ GeV/c^2 statt wie beobachtet auf 246 GeV/c^2 bringen. Hauptsächlich um dieses Hierarchie-Problem zu umgehen, diskutiert man supersymmetrische Modelle (wo die oben genannten divergenten Strahlungskorrekturen nicht auftreten) oder Technicolor- oder Hypercolor-Modelle, wo die Higgs-Teilchen nicht elementar, sondern (ähnlich wie das π-Meson im Falle der QCD) gebundene Zustände von schweren Techni-Quark-Antiquark-Paaren sind.

Wir kommen auf das ursprüngliche Modell mit elementaren Higgs-Teilchen zurück. Im minimalen Modell beginnt man mit einem Dublett komplexer Higgs-Teilchen, aus drei der ursprüng-

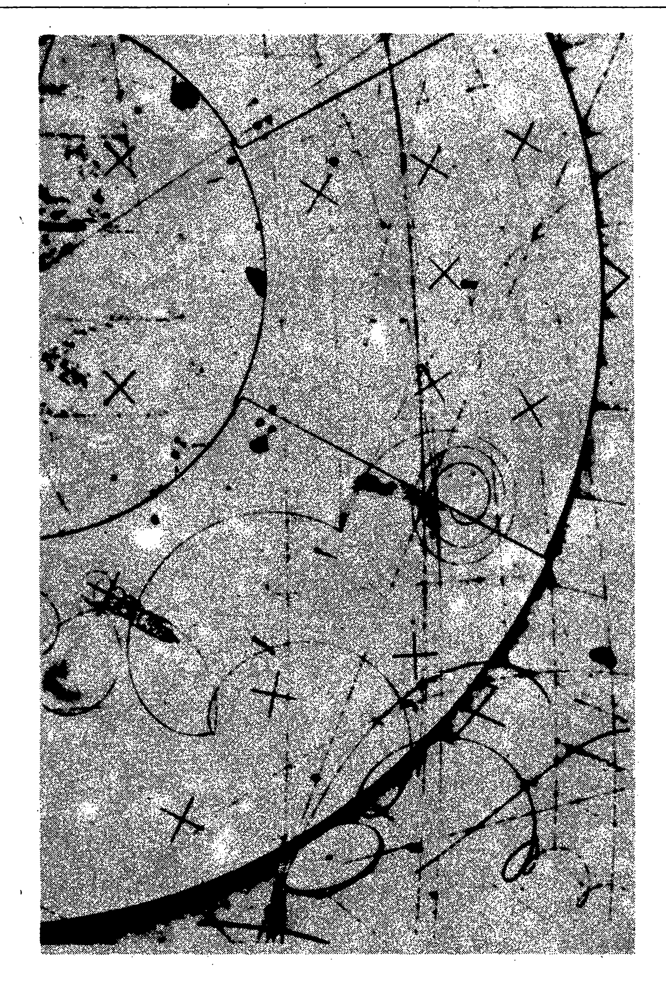
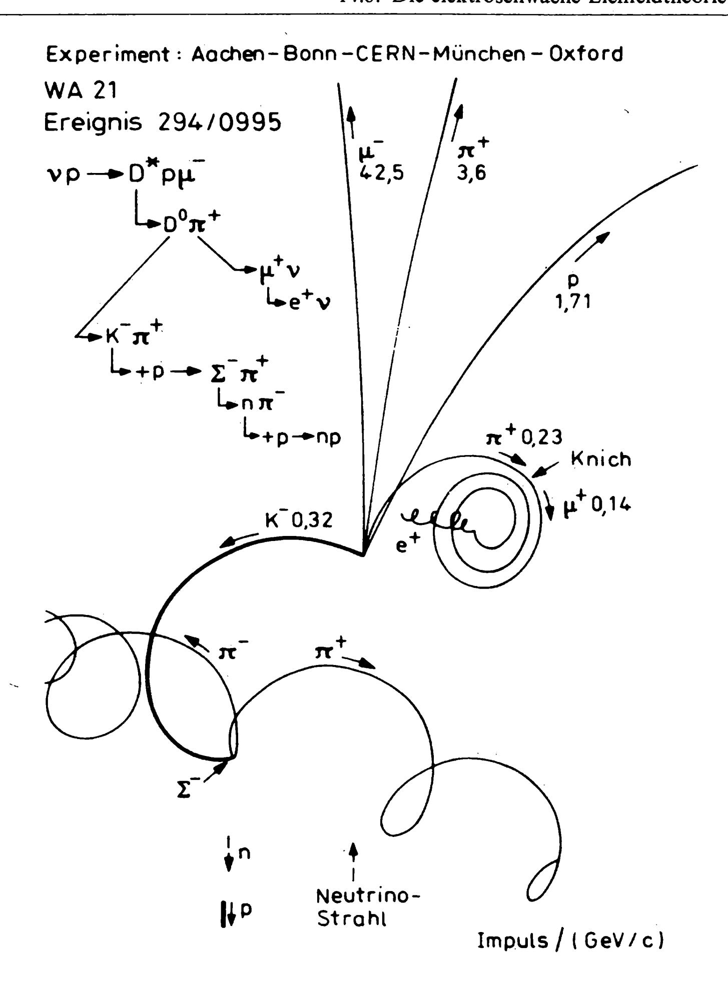


Abb. 14.84
Produktion und Zerfall eines Mesons D* mit der Quantenzahl Charm in einer Neutrino-Proton-Wechselwirkung. Wir zeigen die Blasenkammeraufnahme zusammen mit einer Zeichnung, (siehe Seite 971) in der die Spuren identifiziert sind

lichen vier Freiheitsgrade werden die longitudinalen Komponenten der massiven Eichbosonen, ein skalares Higgs-Teilchen H verbleibt und sollte beobachtbar sein. Man kann aber auch mit mehreren ursprünglichen Higgs-Multipletts beginnen, mit dem Ergebnis, daß dann auch mehrere physikalische Higgs-Bosonen erwartet werden. Für die Massen der Higgs-Teilchen gibt es nur theoretische Ungleichungen. Im minimalen Modell mit einem Higgs-Boson gilt $m_H > 10{,}3\ \mathrm{GeV}/c^2$. Eine solche Masse entsteht bereits durch Berücksichtigung von Korrekturen höherer Ordnung.



Higgs-Teilchen koppeln am stärksten an Fermionen-Antifermionen-Paare der höchstmöglichen Masse m_i. Wenn die Masse der Higgs-Teilchen klein ist, dann sind die aussichtsreichsten Nachweisreaktionen der Zerfall schwerer Vektormesonen wie der J, Ψ (3.1), Υ (9.46) usw. in H + γ. Dabei wird das Higgs-Teilchen H immer von einem virtuellen Paar von c-, b- oder t-Quarks emittiert. Anschließend zerfällt das Higgs-Teilchen vorzugsweise in das schwerste kinematisch mögliche Fermionen-Antifermionen-Paar. Für größere Massen des Higgs-Teil-

chens sind mögliche Erzeugungsreaktionen $e^+e^- \to Z^* \to Z + H$ oder $e^+e^- \to Z \to Z^* + H$ (Z^* stellt dabei ein virtuelles Z^0-Boson dar) oder in Hadron-Hadron-Stößen $q\bar{q} \to W^* \to W + H$, $q\bar{q} \to Z^* \to Z + H$ oder $gg \to t + \bar{t} + H$. Wenn die Higgs-Masse größer als $m_H > 2M_W$ ist, dann wird die einfachste Nachweisreaktion der Zerfall $H \to W^+ + W^-$.

Im Fall von Modellen mit mehr als einem Higgs-Teilchen gilt die obige Grenze $m_H > 10{,}3$ GeV/c^2 nicht mehr und auch die möglichen Erzeugungs- und Zerfallsreaktionen werden komplizierter.

14.9. Große einheitliche Theorien der Elementarteilchen

14.9.1. Warum eine einheitliche Theorie

Die im Abschnitt 14.8. beschriebene Theorie der elektroschwachen Wechselwirkung auf der Basis der $SU(2) \times U(1)$-Eichsymmetrie stellt die enge Verbindung zwischen der elektromagnetischen und der schwachen Wechselwirkung heraus. Ist es möglich, in solch ein Schema auch die viel stärkeren Quarkwechselwirkungen, die durch die QCD beschrieben werden, einzubeziehen? Jede der behandelten Wechselwirkungsarten gehorcht einer Eichfeldtheorie. Das legt nahe, eine vereinigende Beschreibung mit Hilfe einer Eichtheorie zu suchen, die auf einer größeren einfachen Gruppe G basiert. Diese Gruppe G müßte die Gruppe $SU(3)_{\text{Farbe}} \times SU(2) \times U(1)$ ent-

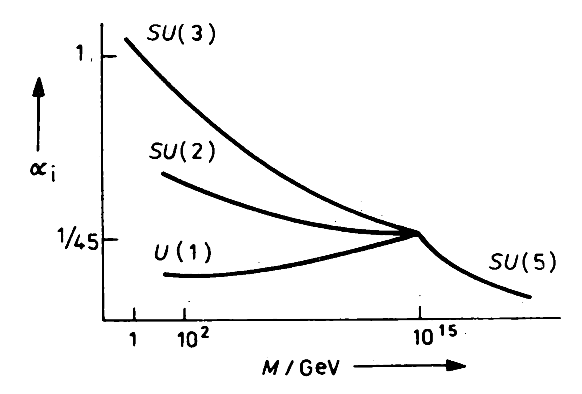


Abb. 14.85
Bei hoher Energie ($M \cong 10^{15}$ GeV) vereinigen sich die Kopplungskonstanten der $SU(3)_{\text{Farbe}}$, der SU(2) des schwachen Isospins und der U(1) zu einer Kopplungskonstante

halten. Diese Symmetriegruppe G würde *eine* Wechselwirkung repräsentieren, die durch *eine* Kopplungskonstante charakterisiert ist, die jedoch bei den gegenwärtig dem Experiment zugänglichen Energien in die beobachtete starke, elektromagnetische und schwache Wechselwirkung aufspaltet (d. h. gebrochen ist), wobei jede dieser Wechselwirkungen durch die uns bekannte typische Kopplungskonstante — sagen wir g_3 für die Farb-SU(3), und g_2 und g_1 für die $SU(2) \times U(1)$ der elektroschwachen Wechselwirkung — charakterisiert wird. Strahlungskorrekturen verursachen, wie im Abschnitt 14.7. diskutiert, die Energieabhängigkeit der Kopplungs-

konstanten: g_3 fällt (das ist charakteristisch für die asymptotische Freiheit der QCD, Abschnitt 14.7.) mit steigender Energie bzw. kleineren Abständen, g_2 fällt langsamer als g_3, und g_1 wächst an. So ist es möglich, daß bei sehr hohen Energien bzw. sehr kurzen Abständen diese Kräfte gleich stark werden, wie es in Abb. 14.85 gezeigt ist. Abschätzungen geben für die Vereinigungsenergie die Größenordnung $E_0 \sim 10^{15}$ GeV an; bei solch hohen Energien oder Massen — bzw. Abständen von $\sim 10^{-29}$ cm — sollten die Elementarteilchen nur *eine* Kraft mit *einer* Kopplungskonstanten spüren. Gewiß sind die 10^{15} GeV, bei denen alle Elementarteilchen einer einheitlichen Kraft unterliegen könnten, für terrestrische Experimente unerreichbar. Man hat jedoch die Hoffnung, daß sich Aussagen solcher Modelle auch mit den gegenwärtig zur Verfügung stehenden experimentellen Möglichkeiten überprüfen lassen. Diese spezielle Vorhersage betrifft den Zerfall des Protons (siehe Abschnitt 14.9.3.).

14.9.2. Ein einheitliches Modell auf der Basis der SU(5)-Eichgruppe

Die bereits herausgearbeitete Einordnung der Quarks und Leptonen in Generationen kann ein wichtiger Ausgangspunkt für eine vereinigte Theorie sein: Eine Generation von Fermionen soll das grundlegende Multiplett einer einheitlichen Theorie bilden; jede weitere Generation könnte dann eine Wiederholung bei höheren Massen darstellen. Damit hätte man die Wechselwirkung innerhalb einer Generation vereinheitlicht. Um die elektroschwache Kraft, der bekanntlich Quarks und Leptonen unterliegen, mit der starken Wechselwirkung, der nur die Quarks folgen, zusammenzufassen, müssen Quarks und Leptonen gleichartig behandelt werden. Sie gemeinsam in *ein* Multiplett einzuordnen, käme dieser Forderungen entgegen. Die erste Generation der leichten Fermionen beinhaltet die Quarks u und d in ihren drei Farben und die Leptonen e^- und ν_e. Quarks und Elektronen treten als rechts- (R) und links (L)-drehende, Neutrinos nur als linksdrehende Felder auf; sie werden in Dubletts und Singuletts eingeordnet (siehe Abschnitt 14.8.)

$$\begin{matrix} \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_L & \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L^r & \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L^b & \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L^g \\ e_R^- , & u_R^r, d_R^r , & u_R^b, d_R^b , & u_R^g, d_R^g . \end{matrix} \tag{14.193}$$

Eine Generation — hier ist die erste gezeigt — beinhaltet folglich 15 Fermionfelder.

Für die vereinigte Kraft wirken alle einem Multiplett angehörenden Teilchen gleichartig — sie spürt keinen Unterschied zwischen den verschiedenen Zuständen eines Multipletts; erst die Symmetriebrechung ruft Unterschiede zwischen den verschiedenen Teilchen eines Multipletts hervor. Somit ist es verständlich, daß Übergänge zwischen allen Mitgliedern einer Generation, die ja ein und demselben Multiplett zugeordnet sind, möglich sind, speziell auch solche zwischen Quarks und Leptonen. Damit „zerfallen" Quarks und ziehen den Zerfall auch der sonst stabilen Hadronen — speziell des Protons nach sich. Innerhalb der Farb-SU(3) oder der elektroschwachen SU(2) × U(1) ist das freilich nicht möglich. Erst die Vereinigung dieser Wechselwirkungen eröffnet diese Möglichkeit. Mehrere Möglichkeiten bieten sich an, eine Gruppe G zu wählen, auf deren Basis eine einheitliche Eichtheorie entwickelt werden kann, die bei

Symmetriebrechung die Farb-SU(3) und die elektroschwache $SU(2) \times U(1)$ enthalten. Wir werden zur Illustration hier nur ein Beispiel behandeln. Von H. GEORGI und S. L. GLASHOW wurde die einheitliche SU(5)-Eichfeldtheorie vorgeschlagen, die allerdings kaum noch Chancen hat, die Daten realistisch zu beschreiben.

Die spezielle Gruppenstruktur legt folgende Multiplettzuordnung nahe:

Einordnung der 15 Fermionenfelder in ein rechtsdrehendes Quintett $\underline{5}$ und ein linksdrehendes Dekuplett $\underline{10}$:

$$\underline{5} = \begin{pmatrix} d_r \\ d_b \\ d_g \\ e^+ \\ \bar{\nu}_e \end{pmatrix}_R \quad \text{und} \quad \underline{10} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & \bar{u}_g & -\bar{u}_b & -u_r & -d_r \\ -\bar{u}_g & 0 & \bar{u}_r & -u_b & -d_b \\ \bar{u}_b & -\bar{u}_r & 0 & -u_g & -d_g \\ u_r & u_b & u_g & 0 & -e^+ \\ d_r & d_b & d_g & e^+ & 0 \end{pmatrix}_L . \tag{14.194}$$

Bei dieser Zuordnung sind Quarks, Antiquarks, Leptonen und Antileptonen einer Generation gleichberechtigt in einem Multiplett enthalten; damit sind Übergänge zwischen ihnen allen erlaubt,

Quarks $\leftrightarrow$ Antiquarks,
Leptonen $\leftrightarrow$ Antileptonen,
Quarks $\leftrightarrow$ Leptonen.

Die hier nicht enthaltenen Teilchen e_L^-, $\bar{e}$, ν_{eL}, $(\bar{d}_r\bar{d}_b\bar{d}_g)$, $(\bar{d}_r\bar{d}_b\bar{d}_g)_L$, $(u_r u_b u_g)_R$, $(\bar{u}_r\bar{u}_b\bar{u}_g)$ sind den konjugierten Darstellungen $\bar{\underline{5}}$ und $\overline{\underline{10}}$ zugeordnet.

Diese Zuordnung benutzt nur linksdrehende Neutrinos (rechtsdrehende Antineutrinos). Damit bleiben Neutrinos in dieser einfachsten Version eines vereinigten Modells masselos.

Innerhalb eines Multipletts addieren sich die elektrischen Ladungen zu Null: Das mag die Ladungsquantisierung und die uns bekannte Ladungszuordnung zu den Quarks erklären.

Wie bei den anderen Eichtheorien wird auch hier die Wechselwirkung durch die Eichbosonen dieser Theorie übertragen. Das sind beim SU(5)-Modell 24 Eichbosonen, von denen uns bereits 12 bekannt sind. Es sind dies die 8 Gluonen der QCD und die Eichbosonen γ, $W^\pm$ und Z^0 der elektroschwachen Wechselwirkung.

Die weiteren 12 recht exotischen Eichbosonen

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}^r \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}^b \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}^g \tag{14.195}$$

und ihre Antiteilchen vermitteln die Übergänge der Quarks und Leptonen eines Multipletts. Sie müssen sehr schwer sein, denn ihr Einfluß kann ja bei gegenwärtigen Energien (fast) nicht festgestellt werden. Abschätzungen führen auf Massen $m_X \sim m_Y \sim 10^{14}$ GeV/c^2. Sie tragen Farbe und gebrochene elektrische Ladungen $q_X = \pm 4/3$, $q_Y = \pm 1/3$. Der riesige Sprung in den Massen von den heute erreichbaren $\sim 10^2$ GeV/c^2, bei denen sich die $W^\pm$ und Z^0 Vektorbosonen zeigen, zu den $\sim 10^{14}$ GeV/c^2 der X- und Y-Vektorbosonen macht diese so weitreichenden Spekulationen etwas zweifelhaft.

14.9.3. Der Protonenzerfall

Das entscheidende Experiment für diese Modelle ist die Suche nach dem Nachweis des Protonenzerfalls. Die exotischen superschweren Eichbosonen X und Y koppeln Quarks an Leptonen und können z. B. einen Quark in einen Antiquark verwandeln oder zwei Quarks

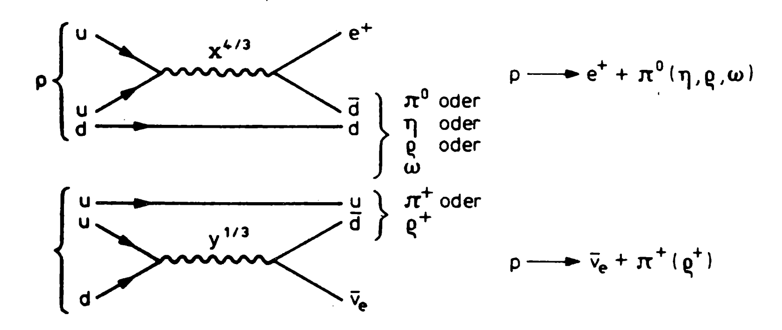


Abb. 14.86
Zwei Beispiele für den Zerfall eines Protons

miteinander annihilieren. Das Proton als Drei-Quark-System kann dann z. B. in ein Lepton und ein Meson zerfallen (siehe Abb. 14.86). Somit verletzt die durch die X- und Y-Bosonen übertragene Kraft den Satz der Baryonenzahlerhaltung, der von allen übrigen Wechselwirkungsarten respektiert wird. Ähnlich wie man die schwache Wechselwirkung auch bei Anwesenheit der viel stärkeren elektromagnetischen und starken Wechselwirkungen durch ihre Paritätsverletzung nachweisen kann, verrät auch hier die Verletzung der Baryonenzahl B diese superschwache vereinheitlichte Kraft. Im Rahmen der SU(5) Theorie ist nicht B, sondern die Größe $B - L$ (L = Leptonenzahl) eine Erhaltungsgröße.

Die Zerfallsrate des Protons hängt ab von der inversen vierten Potenz einer Masse, die eng mit der Vereinigungsmasse zusammenhängt; ihr Wert beträgt etwa

$$M_s \sim (3 - 6) \cdot 10^{14}\,\text{GeV}\,. \qquad (14.196)$$

Ihre Unsicherheit bedingt auch die Unsicherheit in der Abschätzung der Lebensdauer des Protons in diesem Modell

$$\tau_p = 10^{27} - 10^{31}\ \text{Jahre}\,. \qquad (14.197)$$

Zum Vergleich führen wir an, daß das Alter des Universums auf $2 \cdot 10^{10}$ Jahre veranschlagt wird. Die wichtigsten Zerfallskanäle sind $p \rightarrow e^+ +$ Pionen und $p \rightarrow \nu_e +$ Pionen.

Experimentell wurde für die Protonenlebensdauer bisher eine untere Grenze von

$$\tau_p \geqq 10^{32}\ \text{Jahre} \qquad (14.198)$$

angegeben. Damit scheint das SU(5) Modell bereits ausgeschlossen zu sein.

Im Hinblick auf die Bedeutung der Größe von τ_p als Entscheidungsexperiment für große einheitliche Eichfeldtheorien wurden in den letzten Jahren mehrere große Experimente zur Messung von τ_p aufgebaut. Wie muß ein solches Experiment aufgebaut sein? Der Detektor muß eine sehr große Masse haben. Abb. 14.87 gibt die Zahl der beobachtbaren Zerfallsereignisse als Funktion der Masse des Detektors und der Lebensdauer des Protons an. Um Lebensdauern von mehr als 10^{32} Jahren nachweisen zu können, haben diese Detektoren Massen bis zu zehntausend Tonnen. Natürlich sollte ein derartig großer Detektor aus einem möglichst billigen Material bestehen. Dafür bietet sich Wasser an. Beim Zerfall

$$p \rightarrow e^+ + \pi^0 \qquad (14.199)$$
$$\quad\quad\quad\ \llcorner\!\!\rightarrow 2\gamma$$

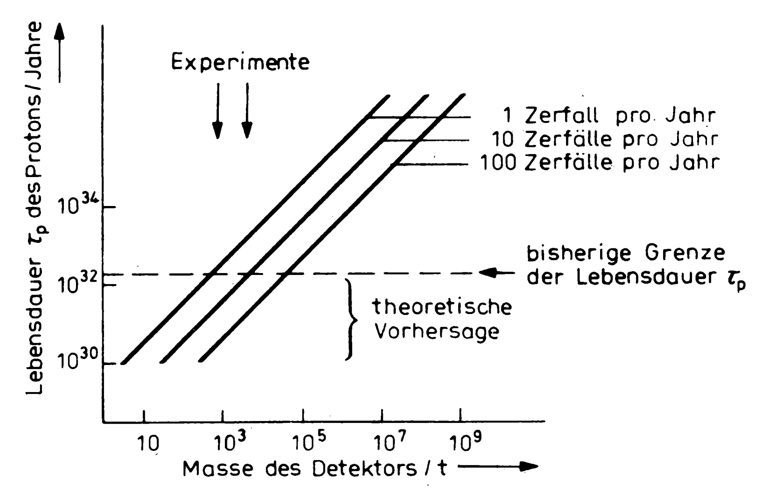


Abb. 14.87
Große Detektoren aus Wasser sind geeignet, um die extrem seltenen Zerfälle von Protonen zu beobachten. In dem Bild ist die Zahl der erwarteten Zerfallsereignisse als Funktion der zu bestimmenden Lebensdauer des Protons (in Jahren) angegeben. Diese Zahl wächst mit steigender Detektormasse. Nur in Detektoren mit einer Masse von 10^3—10^4 Tonnen könnte man einen oder mehrere Zerfälle pro Jahr registrieren

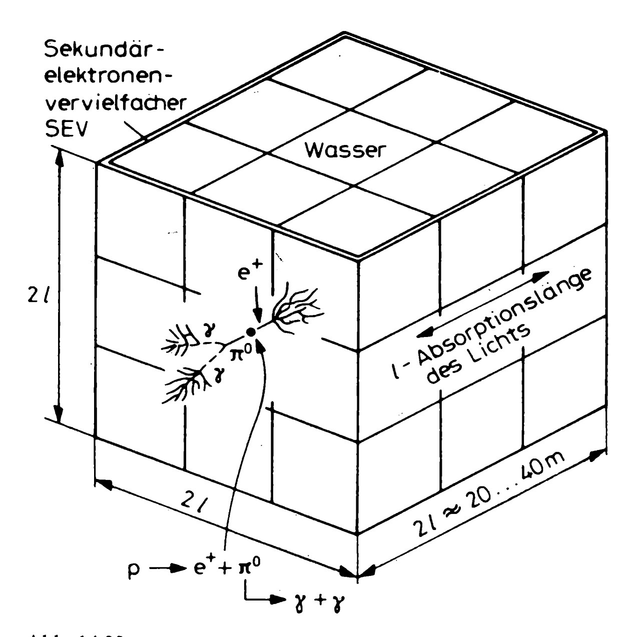


Abb. 14.88
Der typische Experimentaufbau für den Nachweis des Protonzerfalls. Zur Beobachtung der Ereignisse werden zehntausende Sekundärelektronenverfielfacher benötigt

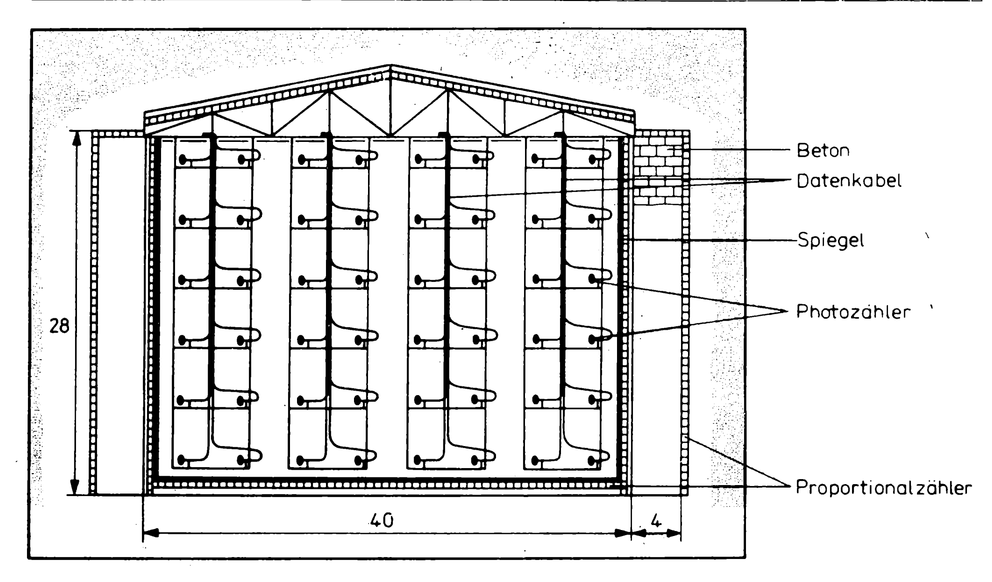


Abb. 14.89
Vorschlag für die Anordnung der Čerenkov-Zähler zum Nachweis des Protonenzerfalls in einem großen Wasserdetektor

entstehen im Wasser drei elektromagnetische Kaskaden (siehe Abb. 14.88). Die Elektronen und Positronen der Kaskade emittieren Čerenkov-Strahlung hauptsächlich im sichtbaren Bereich. Um dieses Licht aus dem großen Wasservolumen gut auffangen zu können muß man mit Wasser besonderer Reinheit arbeiten. Glücklicherweise hat reines Wasser gerade im Bereich des sichtbaren Lichts eine besonders geringe Absorption. Der prinzipielle Aufbau eines derartigen Experiments ist also sehr einfach. Ein großes Wasservolumen wird von Sekundärelektronenvervielfachern zum Nachweis des Čerenkov-Lichts beobachtet, siehe Abb. 14.89. Um störende Reaktionen abzuschirmen, die durch die Höhenstrahlung verursacht werden, muß man das Experiment tief unter der Erde, z. B. in einem Bergwerk, durchführen. Als einziger störender Einfluß bleiben Reaktionen, die durch hochenergetische Neutrinos hervorgerufen werden. Man schätzt ab, daß diese störenden Neutrinoereignisse die Messung von Lebensdauern größer als 10^{33} Jahre verhindern.

Die oben angegebene Grenze $\tau_p > 10^{32}$ Jahre ist das Ergebnis der bisherigen Arbeit einiger dieser Detektoren.

14.9.4. Andere Vorhersagen großer einheitlicher Theorien

Mit Hilfe der in Abschnitt 14.9.2. beschriebenen einheitlichen SU(5)-Eichfeldtheorie läßt sich der im Abschnitt 14.8. angegebene schwache Mischungswinkel $\sin^2 \Theta_\omega$ berechnen. Die Berechnung ergibt

$$\sin^2 \Theta_\omega = 0{,}215 \pm 0{,}002\,, \tag{14.200}$$

während das Experiment nach Berücksichtigung von Strahlungskorrekturen

$$\sin^2 \Theta_\omega = 0{,}215 \pm 0{,}012 \tag{14.201}$$

ergibt. Diese Übereinstimmung ist zur Zeit das stärkste Argument für die Richtigkeit großer einheitlicher Theorien. Von A. POLYAKOV und von G.'T HOOFT wurde gezeigt, daß jede einheitliche Eichfeldtheorie, deren Eichgruppe auch die Abelsche Gruppe U(1) der Quantenelektrodynamik enthält, magnetische Monopols als Lösungen besitzt. Ein Beispiel ist die oben behandelte SU(5)-Eichfeldtheorie:

$$\begin{aligned} SU(5) &\rightarrow SU(3)_{\text{Farb-QCD}} \times [SU(2) \times U(1)]_{\text{elektroschwach}} \\ &\rightarrow SU(3)_{\text{Farb-QCD}} \times U(1)_{\text{QED}} . \end{aligned} \tag{14.202}$$

Die magnetischen Monopole der einheitlichen Theorien besitzen die gleiche Polstärke wie die 1931 von P. A. M. DIRAC vorhergesagten magnetischen Monopole. Zusätzlich sagen die Eichfeldtheorien jedoch auch die Masse dieser magnetischen Monopole voraus.

$$M_{\text{M}} \approx \frac{m_{\text{X}}}{\alpha} \approx 10^{16}\ \text{GeV}/c^2 \tag{14.203}$$

m_{X} ist dabei die Masse der schweren X-Eichbosonen, die die Wechselwirkung unter Verletzung der Baryonenzahl vermitteln, und α ist die einheitliche Kopplungskonstante der Theorie. Seit dieser neuen Vorhersage magnetischer Monopole sind Experimente zu ihrem Nachweis zu weiteren wichtigen Entscheidungsexperimenten für die Richtigkeit einheitlicher Eichfeldtheorien geworden.

In einheitlichen Eichfeldtheorien mit etwas komplizierterem Aufbau als die oben beschriebene einfachste SU(5)-Theorie erwartet man, daß Neutrinos nicht wie bisher angenommen, masselos sind. Die erwarteten Massen lassen sich jedoch noch nicht sehr genau berechnen. Als wahrscheinlichster Massenbereich wird

$$10^{-5} \leqq m_\nu \leqq 100\ \text{eV}/c^2 \tag{14.204}$$

angegeben. Neutrinomassen in der Nähe der oberen Grenze lassen sich durch die genaue Untersuchung des Elektron-Energiespektrums beim β-Zerfall messen. Es gibt ein Experiment welches durch Messung des β-Zerfalls des Tritiums eine Neutrinomasse von $18 \leqq m_{\nu e} \leqq 48\ \text{eV}/c^2$ erhielt, dieses Ergebnis muß jedoch noch durch unabhängige Experimente bestätigt werden.[1]

Falls die Neutrinomassen am unteren Ende des Bereichs (14.204) liegen, lassen sie sich durch die Untersuchung der Neutrinooszillation, z. B. der von der Sonne emittierten Neutrinos, bestimmen. Unter Neutrinooszillationen versteht man die Umwandlung der verschiedenen Neutrinoarten ineinander. Diese gegenseitige Umwandlung verläuft dann, wenn Neutrinos leicht unterschiedliche Massen haben in ähnlicher Weise wie im Abschnitt 13.3.5. für die Umwandlung der neutralen K^0-Mesonen ineinander beschrieben.

14.10. Wichtige Fragen der gegenwärtigen Hochenergiephysik

Das halbe Jahrhundert seit ~1930, in dem sich die Physiker mit den Elementarteilchen im heutigen Sinne befaßt haben, hat enorme Fortschritte in unserem Verständnis des Mikrokosmos gebracht:

Quarks und Leptonen sind für uns heute die Bausteine der Materie; wir kennen viele Regelmäßigkeiten ihrer Eigenschaften und können ihre Kräfte beschreiben. Mit den Eichfeldtheorien für die elektroschwache Wechselwirkung und für die starke Wechselwirkung besitzen wir erstmals echte Theorien der Elementarteilchen.

---

[1]) Im Jahre 1987 liegen inzwischen die Ergebnisse weiterer Ergebnisse vor, die kleinere obere Grenzen für die Neutrinomasse angeben.

Diese Theorien, insbesondere die elektroschwache Eichfeldtheorie, sind jedoch nicht so einfach wie man es von einer wirklich fundamentalen Theorie erwarten sollte. Insbesondere treten mit den Massen der Quarks und Leptonen, mit den Kopplungskonstanten und Mischungswinkeln (z. B. dem Cabibbo-Winkel Θ_C) etwa 20 freie unverstandene Parameter in dieser Theorie auf.

Weitere ernste theoretische Probleme sind das oben genannte Hierarchieproblem und das der skalaren Teilchen, die zwar für die Konstruktion der Theorien benötigt werden, aber bisher noch nicht entdeckt wurden.

Aus all diesen Gründen kann man zu der Überzeugung gelangen, daß die bisherigen Eichfeldtheorien bei all ihren Erfolgen möglicherweise nur effektive, bei den heute untersuchten niedrigen Energien unterhalb 1 TeV gültige, Theorien sind, die bei höheren Energien durch eine vollständigere Theorie zu ersetzen sind.

Aus diesem Grund untersucht man theoretisch neue Möglichkeiten zur Konstruktion von Theorien, erwähnt seien nur Supersymmetrische Theorien, Subkomponentenmodelle, Technicolor- oder Hypercolor-Theorien, Kaluza-Klein-Theorien und Super-String-Theorien, wo bei sehr kleinen Abständen in der Größenordnung der Planck-Länge ($\approx 10^{-33}$ cm) eine größere Zahl von Raum-Zeit-Dimensionen vorliegt, z. B. d + 3 Raum und eine Zeitdimension, während bei größeren Abständen nur die üblichen 3 + 1 Dimensionen beobachtbar sind. All diese theoretischen Ansätze, auch wenn sie zum Teil mit sehr großer Intensität bearbeitet werden, sind natürlich bis jetzt noch rein spekulativ. Ohne solche theoretischen Spekulationen wäre aber die Konstruktion einer umfassenderen Theorie unmöglich.

Wir führen eine Liste von offenen Fragen an, die sich zweifellos noch fortsetzen läßt.

— Warum gibt es mehrere Generationen von Quarks und Leptonen, würde nicht *eine* Generation zum Aufbau der Materie genügen; sind etwa die schweren Quarks und Leptonen angeregte Zustände der leichtesten Quarks und Leptonen?

Diese Frage wurde erstmals mit der Entdeckung des Myons aktuell, aber noch heute besitzen wir keine ernstzunehmende Erklärung für diese Wiederholung der Generationen.

— Was ist die Ursache für die Unsymmetrie zwischen Materie und Antimaterie, die sich in der (geringfügigen) Verletzung der CP-Invarianz in speziellen Prozessen ausdrückt?
  Ist das die Ursache für die augenfällige Unsymmetrie zwischen Materie und Antimaterie im Kosmos und auch dafür, daß im Kosmos zahlenmäßig auf jedes Baryon eine Milliarde Photonen kommen?
— Zerfällt das Proton?
— Warum gibt es keine freien Quarks?
— Haben die Neutrinos eine Ruhmasse?
— Kann man — aufbauend auf Gemeinsamkeiten im theoretischen Verständnis der starken und elektroschwachen Wechselwirkungen — auch die Gravitation in eine (super-)vereinigte Kraft einbeziehen?
— Existieren in der Natur die von einheitlichen Theorien vorhergesagten magnetischen Monopole?
— Sind eventuell Quarks, Leptonen und Eichbosonen als gebundene Zustände noch elementarer Teilchen (Preons, Subquarks)zu verstehen?

Literaturhinweise zu Kapitel 14

Aber 73, Ait 82, Ani 84, Bai 82, Bal 79, Bar 77, Bec 81, Bet 86, Bog 76, Clo 79, Cre 83, Fad 78, Far 82, Fel 77, Fey 72, Fra 79, Fre 78, Gai 83, Geo 82, Gib 76, Hal 84, Hua 82, Hum 76, Itz 80, Kok 69, Lea 82, Lee 81, Nac 86, Nam 84, Oku 81, Oku 84, Pol 74, Qui 81, Ram 81, Ran 79, Reb 83, Tay 76, Wes 83, Wii 76

15. Nukleare Astrophysik, Elementarteilchen und Kosmologie

15.1. Kosmische Strahlen

1. Bereits im Jahre 1912 gelang die Entdeckung, daß aus dem Kosmos ein ständiger Strom geladener, hochenergetischer Teilchen auf die Erdoberfläche einfällt. Seine Intensität beträgt etwa 2—4 Teilchen pro cm^2 und Sekunde. Seither wurde diese sogenannte kosmische Strahlung sehr umfassend und an den verschiedensten Orten — von tiefen Schächten bis zu den kosmischen Flugkörpern — untersucht.

2. Die aus dem Kosmos in unser Sonnensystem gelangende sogenannte primäre kosmische Strahlung weist nach unseren bisherigen Kenntnissen die folgenden Eigenschaften auf:

a) Sie besteht hauptsächlich aus Protonen und Alphateilchen,
b) der Anteil an Li, Be- und B-Kernen in dieser Strahlung ist zwar gering, jedoch etwa 10^5fach höher als der mittleren Häufigkeit dieser Elemente im Kosmos entsprechen würde,
c) das Verhältnis der Isotopenhäufigkeit $^3He/^4He$ in der kosmischen Strahlung ist 200fach höher als der mittleren Häufigkeitsverteilung entsprechend,
d) auch Kerne schwerer Elemente sind mit wesentlich höherer Wahrscheinlichkeit vertreten,
e) es treten weniger als 1 %, d. h. praktisch keine Antihadronen auf,
f) der Anteil hochenergetischer Elektronen beträgt nur etwa 1 % im Vergleich zu dem der Kernteilchen; davon wiederum sind lediglich rund 10 % Positronen,
g) das Teilchenspektrum besitzt eine mittlere Energie von 10 GeV/N, erstreckt sich bis zu Energien von $E_{max} \simeq 4 \cdot 10^{12}$ GeV und ist weit entfernt von einer Gleichgewichtsverteilung (siehe (10.288)); es läßt sich vielmehr mit dem empirischen Ausdruck

$$N(E) \sim E^{-2.6} \tag{15.1}$$

für Protonenenergie $E > 5$ GeV nähern,
h) die primäre kosmische Strahlung ist annähernd isotrop und über lange Zeiträume ($\sim 10^9$ a) konstant, sie entspricht einer Quellstärke von 10^{42} Ws/a,
i) unterhalb der Energie 1 GeV/N geht die spektrale Verteilung nach Null.

3. Die o.g. Eigenschaften lassen bisher noch keine endgültigen Schlußfolgerungen über den Ursprung der primären kosmischen Strahlung zu. Die wahrscheinlichste Annahme besagt, daß Supernovae und Neutronensterne in unserer Galaktik die Quellen dieser Strahlung sein können. Hierfür spricht, daß in unserer Galaktik etwa alle 30 Jahre eine Supernova entsteht, die 10^{44} ... $10^{45.5}$ Ws Energie abgibt. Für die Erklärung der Energieverteilung werden darüber hinaus Beschleunigungsmechanismen in galaktischen Magnetfeldern angenommen.

Die relativ hohe Präsenz von leichten und schweren Kernen ist nur als Ergebnis sogenannter Fragmentationsprozesse, d. h. der Wechselwirkung von Protonen und Alphateilchen mit einer Flächendichte von 10/g $\cdot$ cm^{-2} der Kerne des Restgases im kosmischen Raum erklärbar. Bei einer Teilchendichte im Kosmos von $10^{-2}/cm^{-3}$ entspricht das einem mittleren Weg der kosmischen Strahlung bis zur Erde von etwa $3 \cdot 10^{24}$ m oder einer Laufzeit von $3 \cdot 10^8$ a. Diese letzte Größe wird auch als Lebensdauer eines kosmischen Teilchens in der Galaktik angenommen.

Die große Lebensdauer erklärt auch die beobachtete Isotropie und zeitliche Konstanz, da Schwankungen des Entstehungsortes, der Entstehungszeit und -intensität herausgemittelt werden.

4. Ein im zeitlichen Mittel relativ geringer Teil der auf die Erde einfallenden primären kosmischen Strahlung hat seinen Ursprung in der Sonne. Der Ausstoß hochenergetischer Protonen und Alphateilchen aus der Sonne erfolgt hauptsächlich während der Perioden maximaler Sonnenaktivitäten, in denen bis über zehn Eruptionen der Chromosphäre pro Jahr beobachtet werden. Die Energie der emittierten Teilchen liegt dabei unter 400 MeV, jedoch kann die Intensität der einfallenden Strahlung kurzzeitig bis auf Werte von 10^8 Teilchen pro cm^2 und Sekunde steigen. Als Beschleunigungsmechanismus werden durch hohe Plasmaströme verursachte Magnetfelder angenommen.

5. Wesentlichen Einfluß auf den Eintritt der primären kosmischen Strahlung in den Bereich der Erde übt das Erdmagnetfeld aus. Erstens verhindert dieses Feld den Eintritt von Teilchen in die Erdatmosphäre, deren Impuls unter einem von der geomagnetischen Breite abhängenden Minimalwert p_{min} liegt. Am Äquator liegt dieser Wert bei $p_{\text{min}}^{\text{Äq}} = 15\ \text{GeV}/c$, während der am Pol $p_{\text{min}}^{\text{Pol}} = 0$ ist. Die daraus resultierende Abhängigkeit der Intensität von der geomagnetischen Breite wird als Breiteneffekt bezeichnet.

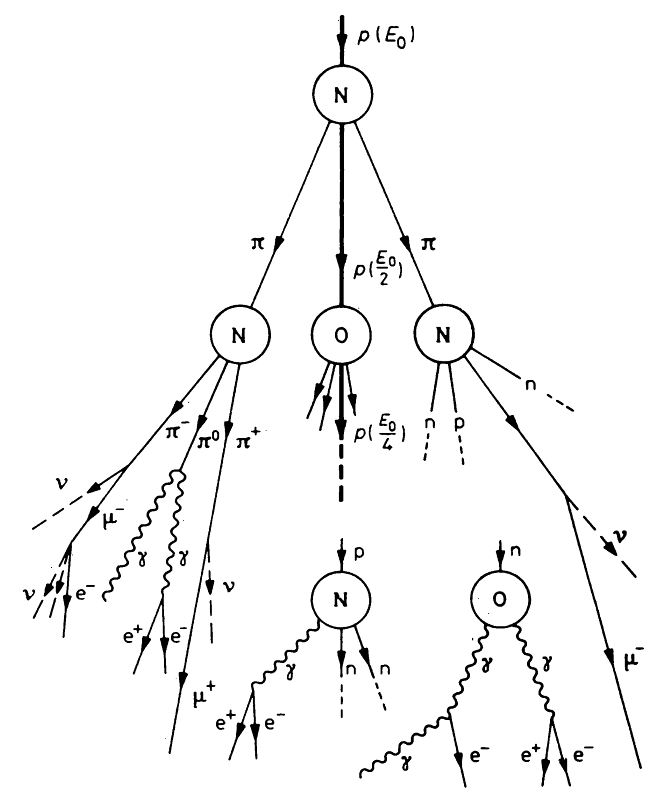


Abb. 15.1
Schematische Darstellung der Ausbildung eines Kaskadenschauers bei Einfall eines hochenergetischen kosmischen Protons in die Erdatmosphäre (vgl. mit Abbn. 4.20 und 4.21)

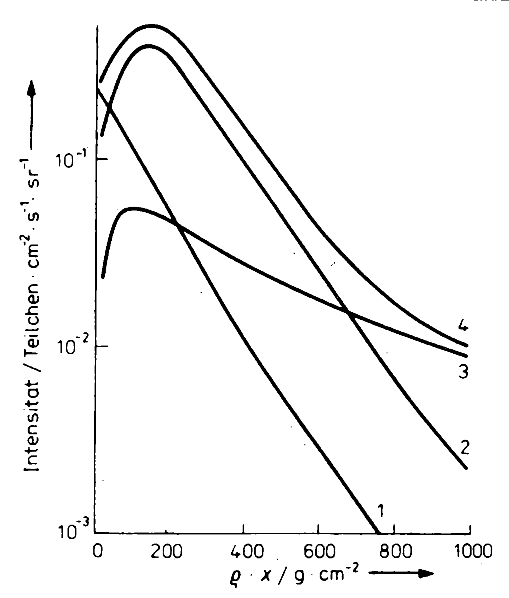


Abb. 15.2
Abhängigkeit der Intensität der verschiedenen sekundären Komponenten der kosmischen Strahlung von der in der Atmosphäre durchlaufenen Flächenmasse; 1 — Nuklearkomponente, 2 — Elektronen-Photonen-Komponente, 3 — Müonenkomponente, 4 — Gesamtintensität

Zweitens verhindert das Erdmagnetfeld den Eintritt geladener Teilchen in die Erdatmosphäre innerhalb eines bestimmten Winkelbereiches über dem Horizont. Für positiv geladene Teilchen aus östlicher Richtung kommend, besteht somit über dem Horizont ein verbotener Winkelbereich. Es kommt zur Ausbildung einer Ost-West-Asymmetrie, die sich mit einer richtungsabhängigen Zählereinrichtung leicht nachweisen läßt.

Schließlich bildet das Erdmagnetfeld für Teilchen in bestimmten Energie- und Impulsbereichen Magnetfallen. In diese Bereiche eingedrungene oder in ihnen entstandene Teilchen werden gespeichert, das ist die Ursache für die Entstehung der sogenannten Strahlungsgürtel der Erde.

6. Die in die Erdatmosphäre eindringende primäre kosmische Strahlung löst an den Gasatomen 0 und N vielfältige Wechselwirkungskaskaden aus (siehe Abb. 15.1). In den ersten Stößen entstehen daher über Spallations- und Teilchenerzeugungsreaktionen hauptsächlich sekundäre Protonen, Neutronen und Pionen, in geringerem Umfang auch Kaonen, Alphateilchen u. a. Teilchen (Nuklearkomponente). Infolge des Beta-Zerfalls instabiler Teilchen entstehen Müonen, Neutrinos und Gammaquanten. Infolge der großen Reichweite werden die Müonen auch als „harte Komponente" bezeichnet. Die in vielen Prozessen gebildeten Photonen setzen schließlich in großem Umfang Elektronen und Positronen frei (weiche Komponente). Auf Abb. 15.2 ist die relative Intensität der drei Komponenten als Funktion der durchlaufenen Flächenmasse (Meeresspiegel entspricht 1000 g/cm^2) dargestellt. Weder die primäre kosmische Strahlung noch die aktive Nuklearkomponente gelangen mit endlicher Wahrscheinlichkeit auf die Erdoberfläche, hier werden vielmehr hauptsächlich Elektronen, Photonen und Müonen registriert. Der größte Teil der Energie des primären kosmischen Teilchens wird über Ionisationsbremsung an die Gasmoleküle der Erdatmosphäre übertragen.

15.2. Energiequellen der Sterne

1. Während der Ursprung der primären kosmischen Strahlung bisher noch nicht endgültig geklärt werden konnte, bestehen relativ klare Vorstellungen über die Prozesse der Energiefreisetzung in der Sonne und anderen Sternen. Die Temperatur der äußeren Bereiche der Sonne beträgt 6000 K, während im Inneren die Temperatur bis auf Werte um $1{,}4 \cdot 10^7$ K ansteigt. Die wesentlichsten Bestandteile sind Wasserstoff (70%) und Helium (29%), während schwerere Elemente (Sauerstoff, Kohlenstoff u. a.) mit weniger als 1% vorhanden sind. Infolge der Gravitation wird die riesige Masse der Sonne $M = 2 \cdot 10^{33}$ g zusammengezogen und erhitzt, wobei im Zentrum bei einem Druck von $6 \cdot 10^{11}$ at die Dichte auf etwa 100 g/cm³ ansteigt. Die infolge ständig ablaufender thermonuklearer Prozesse freiwerdende Energie wirkt jedoch einer immer stärkeren Kompression durch die Gravitationskräfte entgegen, so daß sich ein Gleichgewicht zwischen der erzeugten und abgestrahlten Energie bei bestimmten Werten der Temperatur und Dichte einstellt.

2. Welches sind die Nuklearprozesse, die eine Freisetzung thermonuklearer Energie in Zeitmaßstäben von 10^9 Jahren und bei fehlendem Deuterium ermöglichen? Offenbar sind es nicht die für Fusionsreaktoren unter irdischen Bedingungen vorgesehenen Prozesse (11.110). Die Fusion von zwei Protonen oder Alphateilchen bzw. die Verschmelzung von Protonen und Alphateilchen geht nicht vonstatten, da ${}^2_2\mathrm{He}$, ${}^8_4\mathrm{Be}$ bzw. ${}^5_3\mathrm{Li}$ nicht stabil gegenüber sofortigem Kernzufall sind. Der einzige Einstieg in die Fusion von Wasserstoff ist die exotische Reaktion

$$\mathrm{p} + \mathrm{p} \to \mathrm{d} + \mathrm{e}^+ + \nu_e, \tag{15.2}$$

die über eine Beimischung schwacher Wechselwirkung abläuft. Der Wirkungsquerschnitt dieser Reaktion ist daher sehr klein, er wird mit 10^{-23} b bei 1 MeV angenommen. Die mittlere Lebenszeit eines Protons unter Bedingungen der Sonne gegenüber der Umwandlung gemäß (15.2) in ein Deuteron beträgt 10^{10} a. Dies erklärt, warum die Energieabgabe der Sonne über Milliarden Jahren fast konstant ist und keine explosionsartige Umwandlung erfolgt. Das aus (15.2) gebildete Deuterium verbrennt praktisch sofort über den Prozeß

$$\mathrm{d} + \mathrm{p} \to {}^3_2\mathrm{He} + \gamma\,. \tag{15.3}$$

Das entstandene ${}^3_2\mathrm{He}$ durchläuft entweder die Reaktion

$${}^3_2\mathrm{He} + {}^3_2\mathrm{He} \to {}^4_2\mathrm{He} + 2\mathrm{p}\,, \tag{15.4}$$

die zur Bildung des stabilen ${}^4_2\mathrm{He}$ mit hohem Energiegewinn führt, oder die Reaktion

$${}^3_2\mathrm{He} + {}^4_2\mathrm{He} \to {}^7_4\mathrm{Be} + \gamma\,. \tag{15.5}$$

Im zweiten Fall wird die Reaktionskette durch die Prozesse

$${}^7_4\mathrm{Be} + \mathrm{e}^- \to {}^7_3\mathrm{Li} + \nu_e\,, \tag{15.6}$$

$${}^7_3\mathrm{Li} + \mathrm{p} \to 2\,{}^4_2\mathrm{He} \tag{15.7}$$

oder

$${}^7_4\mathrm{Be} + \mathrm{p} \to {}^8_5\mathrm{B} + \gamma\,, \tag{15.8}$$

$$\left.\begin{aligned} &{}^8_3\mathrm{B} \to {}^8_4\mathrm{Be} + \mathrm{e}^+ + \nu_e\,,\\ &{}^8_4\mathrm{Be} \to 2\,{}^4_2\mathrm{He} \end{aligned}\right. \tag{15.9}$$

abgeschlossen. Die Reaktionskette (15.2) bis (15.9) trägt die Bezeichnung Wasserstoffzyklus In seinem Ergebnis werden vier Protonen zu einem Alphateilchen verschmolzen, wobei 26,7 MeV freigesetzt werden, von denen bis zu 20% durch Neutrinos abgestrahlt werden.

3. Neben dem Wasserstoffzyklus ist auch der sogenannte Kohlenstoffzyklus denkbar, in dem Kohlenstoff-, Stickstoff- und Sauerstoffkerne nukleare Katalysatoren für die thermonukleare Verschmelzung $4\,p \to {}^4_2He$ bilden (siehe Abb. 15.3). Der Kohlenstoffzyklus geht bei Temperaturen bis $1{,}4 \cdot 10^7$ K langsamer als der Wasserstoffzyklus vonstatten. In der Sonne überwiegt daher der letztere, in heißeren Sternen kann jedoch der Kohlenstoffzyklus ausschlaggebend sein.

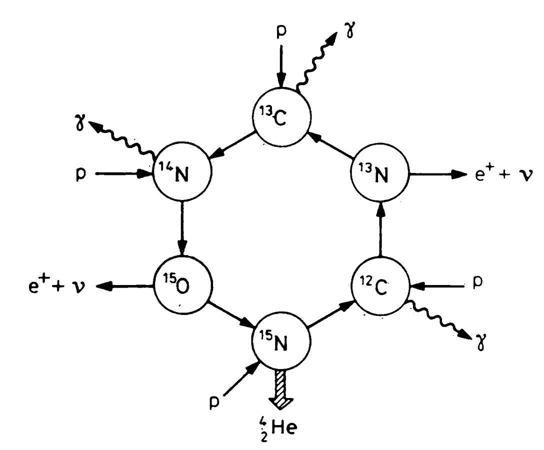


Abb. 15.3
Reaktionsschema des Kohlenstoff-Zyklus

4. In dem Maße, wie der Wasserstoff in den zentralen Bereichen verbrennt und ein Heliumkern verbleibt, verlagern sich die thermonuklearen Prozesse in die Peripherie. Neben einem dichten Heliumkern ist dieses Stadium der sogenannten Roten Riesen durch einen wachsenden Radius und steigende Leuchtstärke gekennzeichnet.

Nach dem Verbrennen des Wasserstoffs können weitere thermonukleare Prozesse erst wieder einsetzen, wenn durch Gravitationskompression der Heliumkern Dichten um $10^6/\mathrm{g \cdot cm^{-3}}$ und Temperaturen um 10^8 K erreicht hat. Es kommt dann zur Verschmelzung des Heliums zu Wasserstoff über den Dreifachstoß

$$3\,{}^4_2He \to {}^{12}_6C + 7{,}65\ \mathrm{MeV} \tag{15.10}$$

und die Bildung von ^{16}O über die Reaktion

$${}^{12}_6C + {}^4_2He \to {}^{16}_8O + \gamma\,. \tag{15.11}$$

Für einen Stern mit der Masse der Sonne wird für die Phase der Verbrennung des Heliums ein Zeitraum von 10^7 a abgeschätzt. In sehr massiven Sternen können bei Temperaturen bis 10^9 K die Kernverschmelzungen bis hin zu Kernen im Eisen-Gebiet ablaufen.

15.3. Neutronensterne

1. Sind die im Abschnitt 15.2. beschriebenen Fusionsprozesse, in massiven Sternen bis hin zur Bildung von Eisen, abgelaufen, so gibt es in Abhängigkeit von der Sternenmasse folgende weiteren Entwicklungsmöglichkeiten: Für Sterne mit Massen $< 1{,}2\,M_\odot$ verhindert der innere Druck des entarteten Elektronengases eine unbegrenzte Kompression des Sternes durch die

Gravitationskräfte. Der Stern erkaltet langsam und verlischt. Diesen Entwicklungsweg gehen die sogenannten „Weißen Zwerge“.

2. Bei Sternen im Massenbereich 1,2 ... 1,6 Sonnenmassen ist der Druck des Elektronengases nicht ausreichend, um die Gravitationskräfte aufzuwiegen, es kommt zur weiteren Kompression, Erhöhung der Dichte bis auf Werte um $2 \cdot 10^{14}/\mathrm{g} \cdot \mathrm{cm}^{-3}$ und allmählichen „Neutronisierung“ der Materie. Darunter ist der Einfang der Hüllenelektronen durch den Kern und dessen Zerfall in freie Neutronen zu verstehen. Der Radius dieser Sterne wird verschwindend klein, so würde der Radius einer neutronisierten Sonne nur

$$\left(\frac{M_\odot}{\frac{4\pi}{3}\varrho}\right)^{1/3} = \left(\frac{2 \cdot 10^{33}\,\mathrm{g}}{\frac{4\pi}{3}\,2 \cdot 10^{14}\,\mathrm{g} \cdot \mathrm{cm}^{-3}}\right)^{1/3} \simeq 14\,\mathrm{km}$$

betragen.

3. Betrachten wir die Umwandlung von Eisen in Neutronenmaterie: Bei Dichten über $1{,}15 \cdot 10^9\,\mathrm{g} \cdot \mathrm{cm}^{-3}$ liegt die Fermi-Grenze des Elektronengases in Eisen höher als die Grenzenergie des β-Spektrums aus dem Zerfall des Isotopes $^{56}_{25}\mathrm{Mn}$. Der Zerfall dieses Isotopes kann umgekehrt werden, es bildet sich das neutronenreichere $^{56}_{25}\mathrm{Mn}$

$$^{56}_{26}\mathrm{Fe} + \mathrm{e}^- \rightarrow {}^{56}_{25}\mathrm{Mn} + \nu_e\,, \tag{15.12}$$

das wiederum in $^{56}_{24}\mathrm{Cr}$ nach

$$^{56}_{25}\mathrm{Mn} + \mathrm{e}^- \rightarrow {}^{56}_{24}\mathrm{Cr} + \nu_e \tag{15.13}$$

übergehen kann.

Mit der ständigen Zunahme des Druckes, können immer neutronenreichere Isotope gebildet werden, bis schließlich freie Neutronen emittiert werden:

$$^{A}_{Z}\mathrm{X} + \mathrm{e}^- \rightarrow {}^{A-1}_{Z-1}\mathrm{X} + \mathrm{n} + \nu\ . \tag{15.14}$$

Für $^{56}_{26}\mathrm{Fe}$ tritt dies bei einer Fermi-Energie von 22 MeV, das entspricht einer Dichte von $4 \cdot 10^{11}\,\mathrm{g} \cdot \mathrm{cm}^{-3}$, auf. Mit weiter zunehmender Dichte steigt die Zahl freier Neutronen und erreicht bei $2 \cdot 10^{14}\,\mathrm{g} \cdot \mathrm{cm}^{-3}$ einen 10^2fach höheren Wert als die Dichte der verbleibenden Elektronen.

Die erstmals 1967 beobachteten sogenannten Pulsare werden als Neutronensterne interpretiert.

15.4. Entstehung der chemischen Elemente

1. Auf Abb. 15.4 ist die kosmische Häufigkeitsverteilung der chemischen Elemente dargestellt, die zumindest im Bereich unserer Galaxis durch die unterschiedlichsten Beobachtungen immer wieder bestätigt wird. Die Häufigkeitsverteilung der Elemente auf der Erde stimmt — bis auf den wesentlich geringeren Anteil an Wasserstoff und Helium — damit überein. Die Verteilung weist zwei stark unterschiedliche Bereiche auf: Im Gebiet $A < 100$ sinkt die Häufigkeit mit steigendem A im Mittel exponentiell, während für $A > 100$ die Häufigkeitsverteilung, bis auf die Peaks im Bereich magischer Zahlen, $Z = 50$, $N = 50, 82, 126$, fast konstant ist.

2. Durch die thermonuklearen Prozesse (15.2) bis (15.11) ist die relative Häufigkeit von $^4_2\mathrm{He}$, $^{12}_{6}\mathrm{C}$ und $^{16}_{8}\mathrm{O}$ zu erklären. Durch weitere Prozesse der Verschmelzung mit $^4_2\mathrm{He}$ bilden sich insbesondere die gg-Isotope $^{20}_{10}\mathrm{Ne}$, $^{24}_{12}\mathrm{Mg}$ und $^{28}_{14}\mathrm{Si}$ mit erhöhter Häufigkeit. Die anomal geringe

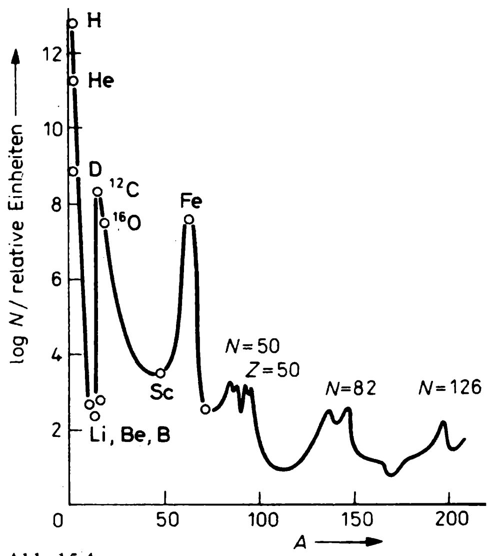


Abb. 15.4
Relative Häufigkeitsverteilung der chemischen Elemente im Kosmos

Häufigkeit der Elemente Li, Be und B ist damit zu begründen, daß ihre Bildung über die Reaktionen (15.5) und (15.6) langsam verläuft, während sie über (15.7) und (15.8) schnell wieder verbrannt werden.

3. Die Entstehung von Elementen schwerer als Sauerstoff erfolgt, wenn es nach Verbrennen des Heliums zur weiteren Kompression und Erhitzung der Sterne auf Temperaturen über $6 \cdot 10^8$ K kommt. Dann tritt eine intensive Verbrennung des Kohlenstoffs ein:

$$\begin{aligned} {}^{12}_{6}\mathrm{C} + {}^{12}_{6}\mathrm{C} &\rightarrow {}^{20}_{10}\mathrm{Ne} + {}^{4}_{2}\mathrm{He} \\ &\rightarrow {}^{23}_{11}\mathrm{Na} + \mathrm{p} \\ &\rightarrow {}^{23}_{12}\mathrm{Mg} + \mathrm{n} \\ &\rightarrow {}^{24}_{12}\mathrm{Mg} + \gamma\,. \end{aligned} \tag{15.15}$$

Auch Kohlenstoff und Sauerstoff gehen die entsprechenden Reaktionen ein:

$${}^{12}_{6}\mathrm{C} + {}^{16}_{8}\mathrm{O} \rightarrow {}^{24}_{12}\mathrm{Mg} + {}^{4}_{2}\mathrm{H} \quad \text{usw.}, \tag{15.16}$$

$${}^{16}_{8}\mathrm{O} + {}^{16}_{8}\mathrm{O} \rightarrow {}^{28}_{14}\mathrm{Si} + {}^{4}_{2}\mathrm{He} \quad \text{usw.} \tag{15.17}$$

4. Bei Temperaturen über $3 \cdot 10^9$ K treten zunehmend Foto-Kernprozesse auf, in Folge derer wiederum leichtere Teilchen für die Synthese der nächst höheren Massenzahlen zur Verfügung stehen:

$$\begin{aligned} &\gamma + {}^{28}_{14}\mathrm{Si} \rightarrow {}^{24}_{12}\mathrm{Mg} + {}^{4}_{2}\mathrm{He} \\ &{}^{4}_{2}\mathrm{He} + {}^{28}_{14}\mathrm{Si} \rightarrow {}^{32}_{16}\mathrm{S} + \gamma \quad \text{usw.} \end{aligned} \tag{15.18}$$

Infolgedessen entstehen Elemente im Massenzahlbereich $A = 28 \ldots 57$. Es stellt sich ein breites Maximum der Häufigkeitsverteilung im Gebiet um Eisen ein, in dem die maximale Bindungsenergie pro Nukleon vorliegt. Im darüber liegenden Bereich läuft der Fusionsprozeß endotherm.

5. Im Massenzahlbereich $A > 100$ kann die beobachtete Massenzahlverteilung nicht durch Fusionsprozesse mit geladenen Teilchen erklärt werden. Sie ist vielmehr das Ergebnis sukzessiver Einfangprozesse von Kernen mit langsamen Neutronen und β^--Zerfällen. Die Maxima der Häufigkeitsverteilung bei $N = 50, 82, 126$ sind dabei auf die entsprechenden Minima im Einfangsquerschnitt der magischen Kerne zurückzuführen, die einen „Stau" dieser Isotope in der beobachteten Häufigkeitsverteilung zur Folge haben.

15.5. Modell des heißen Urknalls

Die Elementarteilchenphysik beschäftigt sich mit den kleinsten Bausteinen der Materie, die Kosmologie untersucht dagegen die Entwicklung des Weltalls in den größten Raum- und Zeitgebieten. Dennoch kommt es seit Anfang der 80er Jahre zu einer immer engeren Zusammenarbeit.

Die heute am meisten akzeptierten Vorstellungen über die Entwicklung des Universums sind im Modell des Urknalls zusammengefaßt. Entsprechend diesem Modell expandiert das Weltall seit etwa $2 \cdot 10^{10}$ Jahren.

Die bisherige kosmologische Theorie des Urknalls erklärt drei wichtige Eigenschaften des Kosmos:

1. die von Hubble u. a. aus der Rotverschiebung der Spektrallinien gemessene Fluchtbewegung der Galaxien,
2. die von Penzias und Wilson entdeckte isotrope kosmische Mikrowellenstrahlung von 2,7 K und
3. das Verhältnis der Elemente Helium und Wasserstoff im Kosmos.

Thermodynamik, Relativitätstheorie und die Kenntnisse der Reaktionsbedingungen der möglichen Elementarteilchenreaktionen gestatten, sozusagen auf den Zeitpunkt der Explosion zurückzuextrapolieren.

Aus astronomischen Beobachtungen folgt eine homogene isotrope Expansionsbewegung des Kosmos, die für einen festen Zeitpunkt durch das Hubblesche Gesetz beschrieben wird

$$\boldsymbol{v} = H(t)\, \boldsymbol{r}\,,$$

oder anders ausgedrückt, wenn $R(t)$ ein kosmologischer Abstandsparameter ist, gilt

$$H(t) = \frac{\dot{R}(t)}{R(t)}\,. \tag{15.19}$$

Der beste Wert für die gegenwärtige Hubble-Konstante ist

$$50\,\frac{\text{km}}{\text{sec Mpc}} \leqq H \leqq 100\,\frac{\text{km}}{\text{sec Mpc}} \tag{15.20}$$

oder

$$10^{10}\ \text{Jahre} \leqq \frac{1}{H} \leqq 2 \cdot 10^{10}\ \text{Jahre}\,. \tag{15.21}$$

Unter Zugrundelegung der Theorie der Sternentwicklung folgert man, daß die ältesten Fixsterne ein Alter von $12-15 \cdot 10^9$ Jahren haben. Ähnliche Zahlen erhält man durch die radioaktive Altersbestimmung.

Die kritische kosmische Massendichte beträgt

$$\varrho_c = \frac{3H^2}{8\pi G} \approx 10^{-28}\,\text{g/cm}^3\,. \tag{15.22}$$

Für Massendichten $\varrho > \varrho_c$ ist das Universum geschlossen, d. h., nach der gegenwärtigen Expansionsphase folgt eine Phase der Kontraktion. Astrophysikalische Abschätzungen der „sichtbaren" Materie in Sternen und Galaxien ergeben $\varrho \lesssim 0{,}06\varrho_c$. Das würde ein offenes Universum andeuten. Wir werden jedoch sehen, daß im Kosmos weitere „nichtstrahlende" Materie existieren muß. Trotzdem scheint die offene Lösung zur Zeit die Gesamtheit unserer Kenntnisse vom Kosmos besser zu beschreiben.

In Tab. 15.1 und Abb. 15.5 geben wir einige wichtige Zeiten der Entwicklung des Kosmos im Modell des heißen Urknalls zusammen mit der Temperatur und charakteristischen Ereignissen an. Für Zeiten kurz nach dem Urknall ist die Materie im thermischen Gleichgewicht. Die jeweilige Temperatur ergibt sich einfach als invers zur Rotverschiebung. Photonen der Energie $\hbar\omega_0$ haben zur Zeit t die Energie $\hbar\omega_0 R_0/R(t)$. Die gegenwärtige Energieverteilung $e^{-\hbar\omega_0/kT_0}$ folgt aus der Energieverteilung zur Zeit t

$$\exp\left(-\frac{\hbar\omega_0 R_0/R(t)}{R_0 kT_0/R(t)}\right).$$

Tabelle 15.1
Zeiten, Temperaturen und Ereignisse im Modell des heißen Urknalls

Zeit (sec)	Temperatur kT (GeV)	Ereignis
10^{-44}	10^{19}	Planck-Zeit, für $t < t_P$ Gravitation wird starke Wechselwirkung
10^{-35}—10^{-36}	10^{15}	Entstehung der Baryonen-Antibaryonen-Asymmetrie Inflationsphase
10^{-10}	10^{2}	Brechung der $SU(2) \times U(1)$ Symmetrie der elektroschwachen Wechselwirkung
10^{-6}	10^{0}	Quark-Hadronen-Phasenübergang
10^{-2}	10^{-2}	Neutrinos entkoppeln
10^{2}	10^{-4}	D- und ^{4}He-Synthese
10^{12}	10^{-9}	Bildung neutraler Atome aus dem ursprünglichen Plasma; Entkopplung der kosmischen Mikrowellenstrahlung
10^{16}—10^{17}		Bildung der Galaxien
3—$30 \cdot 10^{17}$		Gegenwart

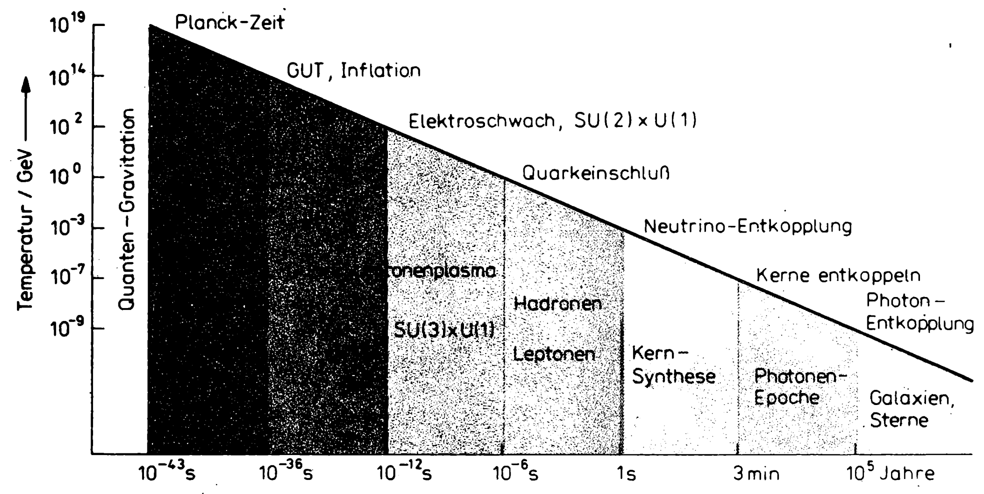


Abb. 15.5
Die mittlere thermische Energie von 1 GeV entspricht einer Temperatur von etwa 10^{13} K. Aufgetragen ist die Temperatur als Funktion der Zeit nach dem Urknall. Unser gegenwärtiger Kenntnisstand, das Fehlen einer quantisierten Theorie der Gravitation, erlaubt keine Aussagen über den Zustand des Kosmos zu Zeiten früher als der Planck-Zeit (10^{-43} s) nach dem Urknall. In der ersten Sekunde erwarten wir auf Grund unserer Kenntnis der Elementarteilchen-Wechselwirkungen drei Phasenübergänge.

10^{-35} s nach dem Urknall spaltet sich die einheitliche Wechselwirkung der Quarks und Leptonen, wie sie durch große einheitliche Theorien beschrieben wird, in zwei getrennte Wechselwirkungen auf: die starke Wechselwirkung der Quarks (Quantenchromodynamik) sowie die elektroschwache Wechselwirkung der Quarks und Leptonen. Mit diesem Phasenübergang geht eine stürmische Entwicklung des Kosmos einher, die als Inflation bezeichnet wird. Gleichzeitig entsteht die kosmische Baryon-Antibaryon-Asymmetrie.

10^{-12} s nach dem Urknall spaltet sich die einheitliche elektroschwache Wechselwirkung der Quarks und Leptonen in die getrennten schwachen und elektromagnetischen Kräfte auf.

10^{-6} s nach dem Urknall erwarten wir den Übergang von freien Quarks zu Hadronen, in denen die Quarks permanent gebunden sind.

Die bisher geschilderte Entwicklung in der ersten Sekunde muß noch als hypothetisch angesehen werden. Die weitere Entwicklung des Kosmos im Modell des Urknalls zu Zeiten nach der ersten Sekunde ist hingegen weitgehend gesichert. 1 s nach dem Urknall entkoppeln die Neutrinos, und es beginnt die Bildung leichter Kerne.

3 min nach dem Urknall ist die Synthese der leichten Kerne abgeschlossen. In der Folgezeit besteht der Kosmos aus einem Plasma von Kernen, Elektronen und Photonen. Man spricht von der Periode der Strahlungsdominanz.

10^5 a nach dem Urknall entkoppeln die Photonen, und es bilden sich die ersten Atome und Moleküle. Die damals entkoppelten Photonen beobachten wir heute in Form der kosmischen 3-K-Mikrowellenstrahlung. In der Folgezeit bilden sich Galaxien und Sterne; das Leben entsteht.

Das ist eine Verteilung mit der Temperatur

$$T(t) = \frac{R_0 T_0}{R(t)} . \tag{15.23}$$

Da die Reaktionsgeschwindigkeiten bei extrem hohen Temperaturen und Dichten sehr groß sind, können wir davon ausgehen, daß zu jedem Zeitpunkt das statistische Gleichgewicht

herrscht. Alle Wechselwirkungen der Teilchen werden durch asymptotisch freie Eichfeldtheorien beschrieben, bei denen die Wechselwirkungen bei hoher Energie schwach sind. Deshalb ist es weiterhin möglich, die kosmische Materie durch das Modell des idealen Gases zu beschreiben. Für ein relativistisches ideales Gas bekommen wir die Zustandsgleichung (p ist der Druck, ϱ die Dichte)

$$\frac{p}{c^2} = \frac{1}{3}\varrho \,, \tag{15.24}$$

und es läßt sich die Änderung der Temperatur T mit der Zeit t wie folgt angeben:

$$\frac{\mathrm{d}(kT)}{2(kT)^3} = -\left(\frac{45}{\pi^3 nG}\right)^{-1/2} \mathrm{d}t \,. \tag{15.25}$$

Dabei ist $n = N_{\mathrm{B}} + \frac{7}{8}N$ die Zahl der Bosonenfreiheitsgrade plus 7/8 der Zahl der Fermionenfreiheitsgrade, die sich für $T \gg m$ als masselos behandeln lassen. Mit $n \approx 100$ ergibt sich aus (15.25) einfach

$$t \approx \frac{10^{-6}}{(kT)^2}\,; \qquad (kT) \text{ in GeV} \,. \tag{15.26}$$

Wir kommen auf Tab. 15.1 und Abb. 15.5 zurück und diskutieren kurz die einzelnen Zeilen.

Bei $kT \geqq 10^{19}$ GeV wird die Gravitationswechselwirkung so stark, daß die Wirkungsquerschnitte die Unitaritätsgrenze (14.145) verletzen. Das heißt, die Gravitation wird eine starke Wechselwirkung, und jede theoretische Beschreibung ist völlig unklar.

Bei Temperaturen oberhalb $kT \geqq 10^{15}$ GeV ist die Symmetrie (z. B. die SU(5)-Symmetrie, siehe Abschnitt 14.9.2) der großen einheitlichen Eichfeldtheorien ungebrochen.

Die schweren Vektorbosonen dieser Wechselwirkung sind bei diesen Temperaturen in großer Zahl vorhanden. Da diese Bosonen die Baryonenzahlverletzung vermitteln, verschwindet die resultierende Baryonenzahl im Gleichgewichtszustand oberhalb dieser Temperatur. Die gegenwärtige Asymmetrie zwischen Baryonen und Antibaryonen im Kosmos entsteht bei Temperaturen nahe $kT \approx 10^{15}$ GeV, wenn die B-verletzende Wechselwirkung zu schwach wird, um das Gleichgewicht aufrechtzuerhalten. Während dieses Phasenübergangs kommt es ebenfalls möglicherweise zu einer Phase der Inflation (siehe Abschnitt 15.7.).

Bei viel kleineren Temperaturen $kT \approx 10^0 - 10^2$ GeV wird die $SU(2) \times U(1)$ Symmetrie gebrochen, d. h., schwache und elektromagnetische Wechselwirkung treten getrennt auf. Bei diesen Temperaturen kommt es auch zu dem Phasenübergang zwischen dem Quark-Gluon-Plasma bei hoher Temperatur zum Hadronengas bei kleiner Temperatur. Es sind uns bisher keine beobachteten Folgeerscheinungen dieser Übergänge bekannt.

Bei $kT < 10$ MeV wird die Wechselwirkung der Neutrinos so schwach, daß die meisten von ihnen seither nicht wieder gestreut wurden. Man sagt, die Neutrinos entkoppeln, und nur die Gravitationswirkung der Neutrinos kann noch für die weitere Entwicklung des Kosmos wichtig sein.

Oberhalb $kT = 1$ MeV reicht die Bindungsenergie des Deuteriums nicht aus, um wesentliche Mengen Deuterium unter dem ständigen Fluß energiereicher Photonen stabil zu erhalten. Protonen und Neutronen existieren als freie Teilchen. Unterhalb $kT < 100$ keV bildet sich Deuterium, und in d—d-Reaktionen bilden sich die sehr stabilen ^{4}He-Kerne.

Protonen und He-Kerne kombinieren erst bei Temperaturen unterhalb $kT \leqq 1$ eV zu neutralen Atomen. Vorher gab es viele Wechselwirkungen der Photonen mit den geladenen Teilchen. Nach der Bildung der neutralen Atome entkoppeln die Photonen. Diese Photonen werden heute als kosmische 2,7-K-Mikrowellenstrahlung beobachtet.

15.6. Kosmische Neutrinos

Bei Temperaturen $kT \approx 10$ MeV läßt sich die Neutrinowechselwirkung durch die gewöhnliche 4-Fermionen-Wechelwirkung beschreiben (siehe Abschnitt 13.3.). Die Wechselwirkungsrate ist proportional zu $n\sigma$, wobei $\sigma \approx G_F^2(kT)^2/\pi$ der Streuquerschnitt für Neutrinos ist, und n ist die Dichte der Fermionen, mit denen die Neutrinos wechselwirken, also hauptsächlich der Elektronen und Neutrinos, sowie ihrer Antiteilchen.

Die statistische Mechanik eines relativistischen Gases ergibt $n \approx 3\,(kT)^3$. Die Wechselwirkungsrate fällt also mit $n\sigma \approx G_F^2 T^5$ außerordentlich schnell mit der Temperatur ab und verschwindet praktisch unterhalb $kT \approx 10$ MeV.

Schon oberhalb $kT = 20$ MeV sind die Neutrinowechselwirkungen sehr häufig, und gäbe es keine Neutrinos, würden sie sofort in Prozessen der schwachen Wechselwirkung erzeugt. Durch solche Betrachtungen läßt es sich leicht zeigen, daß die Annahme des statistischen Gleichgewichts nicht nur für die Neutrinos, sondern für alle Teilchen im Modell des heißen Urknalls gerechtfertigt ist.

Die kosmische 2,7-K-Mikrowellenstrahlung enthält 600 Photonen pro cm^3. Neben diesen kosmischen Photonen erwarten wir eine kosmische Neutrinostrahlung, die bei der Temperatur $kT = 10$ MeV entkoppelte. Die Dichte dieser Neutrinos ist nicht einfach die gleiche wir die Photonendichte. Ein Faktor 3/4 ist nötig, um den Unterschied zwischen einem idealen Fermionen- und Bosonengas zu berücksichtigen. Zwischen der Entkopplung der Neutrinos und der Entkopplung der Photonen bei $kT \approx 1$ eV annihilierten die kosmischen e^+e^- hauptsächlich in Photonen. Das passiert etwa bei $kT \approx m_e c^2$. Bei dieser Annihilation bleibt die Gesamtentropiedichte etwa konstant, d. h., die Entropie des Photonengases erhöht sich auf 11/4 des ursprünglichen Wertes, während die Entropie der Neutrinos ungeändert bleibt. Insgesamt erwarten wir also eine Neutrinodichte pro Familie (ν_e, ν_μ, ν_τ, ...)

$$n_{\nu+\bar{\nu}} = \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{11} \cdot 600\ \mathrm{cm}^{-3} = 160/\mathrm{cm}^3 \tag{15.27}$$

im heutigen Kosmos. Leider ist der direkte Nachweis dieser Neutrinos kaum möglich. Diese Neutrinos spielen, wenn sie eine endliche Ruhemasse besitzen, jedoch durch ihre Gravitation möglicherweise auch im heutigen Kosmos eine wichtige Rolle. Wir können zunächst einfach eine Grenze für die Neutrinomasse angeben. Die Beobachtung der Rotverschiebung, Altersbestimmungen usw. deuten an, daß die kosmische Massendichte kaum größer als $\varrho/\varrho_c \approx 2$ sein kann. Zusammen mit der berechneten Neutrinodichte $n_{\nu+\bar{\nu}}$ ergibt sich daraus sofort eine Grenze für die Masse kosmologisch stabiler Neutrinos ($\tau_\nu > 10^{17}$ s). Diese Grenze ist

$$\sum_f m_\nu \lesssim 130\ \mathrm{eV}\,. \tag{15.28}$$

Die Summe läuft wieder über alle Familien von Neutrinos. Diese Grenze betrifft natürlich nur Neutrinos, die zur Zeit der Entkopplung noch vorhanden waren, d. h. solche mit Massen $m_\nu \lesssim 20$ MeV.

15.7. Die Entstehung des Heliums

Der Anteil des Heliums an der Materie im Kosmos ist neben der Existenz der 2,7-K-Mikrowellenstrahlung die zweite quantitativ überprüfte Vorhersage des Modells des heißen Urknalls.

Man beobachtet im Kosmos einen ^{4}He-Anteil von etwa 25 Gewichtsprozent (Sonnenatmosphäre, planetare Nebel etc.). Es scheint ausgeschlossen, daß soviel Helium in Sternen

erzeugt wurde; deshalb wird allgemein angenommen, daß ^{4}He (und D) von kosmologischem Ursprung sein muß.

Die numerische Berechnung der Fusionsreaktionen während des heißen Urknalls ergibt eine sehr gute Übereinstimmung mit der beobachteten Häufigkeit von ^{4}He. Oberhalb $kT \geqq 100$ keV sind Deuterium-Kerne noch zu selten. Unterhalb dieser Temperatur wird D gebildet, und es wandelt sich in Kernreaktionen ziemlich schnell in das stabilere ^{4}He um. Der wichtigste Parameter zur Berechnung des ^{4}He-Anteils Y ist das Verhältnis der Zahl der Protonen und Neutronen P/N zum Zeitpunkt mit $kT \sim 100$ keV:

$$Y = \frac{2}{1 + P/N}. \tag{15.29}$$

Bei hohen Temperaturen, im Wärmegleichgewicht, kann man den Massenunterschied zwischen Protonen und Neutronen vernachlässigen und erhält $P/N \approx 1$. Wären die Protonen und Neutronen noch bei $kT = 100$ keV im Gleichgewicht, erhielte man

$$P/N = \mathrm{e}^{\Delta c^2/100\,\mathrm{keV}} \approx e^{13}, \tag{15.30}$$

wobei Δ die n—p-Massendifferenz ist. Das Verhältnis von Protonen zu Neutronen wird durch Reaktionen wie $\nu + \mathrm{n} \leftrightarrow \mathrm{e}^- + \mathrm{p}$ aufrecht erhalten; wie wir gesehen haben, entkoppeln die Neutrinos aber bei etwa $kT = 10$ MeV. Die genaue Rechnung, die auch die wohlbekannten genauen Wirkungsquerschnitte für die $\nu + \mathrm{n} \leftrightarrow \mathrm{e}^- + \mathrm{p}$ Reaktion berücksichtigt, ergibt $P/N \approx 7$ und folglich $Y \approx 0{,}25$. Die genaue Rechnung hängt auch von dem Verhältnis der Zahl der Baryonen zu Photonen n_B/n_γ und von der Zahl der Neutrinoarten ab. Der obige Wert wurde mit $N_\nu = 3$ Neutrinoarten erhalten. In Abb. 15.6 geben wir Y als Funktion der Zahl der Neutrino-

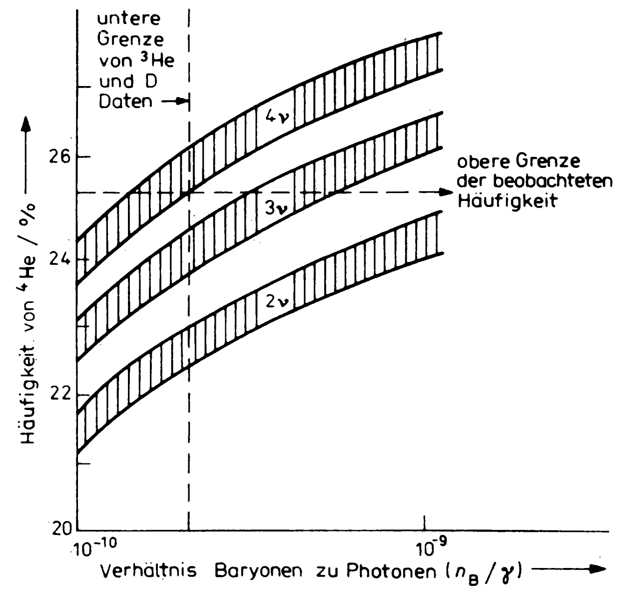


Abb. 15.6
Das Massenverhältnis des kosmologisch erzeugten ^{4}He hängt von der Zahl der Neutrinoarten n_ν und vom Verhältnis der Baryonen zu den Photonen im Kosmos ab. Die Daten lassen sich am besten mit $n_\nu = 3$ und nicht mehr als $n_\nu = 4$ erklären.

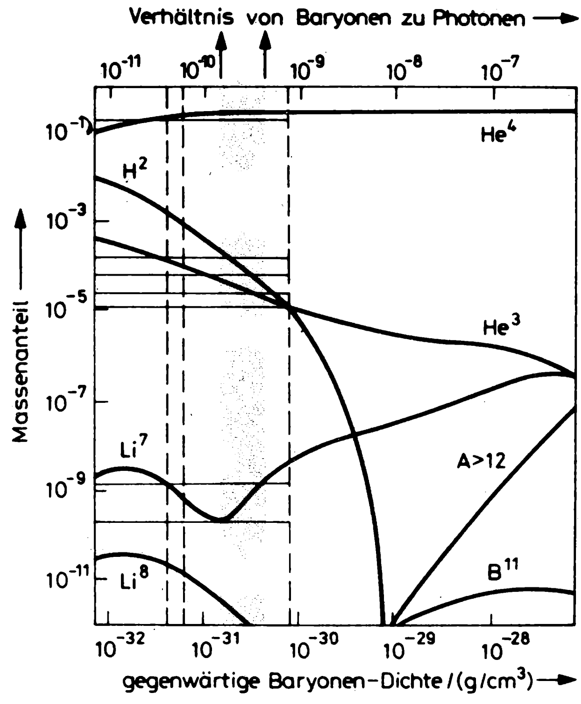


Abb. 15.7
Gemessene Isotopenhäufigkeit verglichen mit den Vorhersagen der Theorie des Urknalls (schwarze Kurven). Die horizontalen Streifen geben die beobachteten Häufigkeiten von ^{4}He, ^{2}H, ^{3}He und ^{7}Li. Alle Daten sind mit einem Baryon- zu Photon-Verhältnis zwischen $3 \cdot 10^{-10}$ und $7 \cdot 10^{-10}$ konsistent (vertikales gestricheltes Gebiet).

arten an. Mit dem beobachteten ^{4}He-Anteil sind nur $N_\nu \leqq 4$ Neutrinoarten verträglich. In Abb. 15.7 vergleichen wir weiterhin die berechneten Anteile von ^{4}He, ^{2}H, ^{3}He und ^{7}Li mit den im Kosmos beobachteten Häufigkeiten. Für alle diese Isotope beschreibt das Modell vom heißen Urknall die Häufigkeiten sehr gut.

15.8. Die fehlende Masse und die Bildung der Galaxien

Neutrinos mit einer nichtverschwindenden Masse würden einige wichtige astrophysikalische Fragen klären.

Die Rotationsgeschwindigkeit von Gaswolken um die Galaxis als Funktion ihres Abstandes vom Zentrum der Galaxis läßt sich mit Hilfe der Dopplerverschiebung der 21 cm-Emissionslinie des atomaren Wasserstoffs messen. Die gemessene Geschwindigkeitsverteilung zeigt an, daß schwere Materie auch außerhalb des leuchtenden Kerns einer Galaxis existiert. Für eine Massenverteilung innerhalb eines Radius R würde man für Abstände $r > R$ Keplersche Geschwindigkeiten $v \propto r^{-1/2}$ erwarten. Man mißt jedoch Geschwindigkeiten, die sich mit dem Radius nicht ändern, weit über den Radius der leuchtenden Materie der Galaxis. Das deutet auf eine Massenverteilung $\varrho(v) \propto 1/r^2$ im Halo der Galaxis hin. Weiterhin muß die Gesamtmasse der Galaxis das Mehrfache der leuchtenden Masse der Sterne betragen.

Auch zur Erklärung des Verhaltens von Clustern von Galaxien, wie z. B. des Coma-Clusters, sucht man nach einer „fehlenden Masse". Wenn man die Massen der Galaxien des Clusters zugrunde legt, deutet der Virialsatz an, daß diese Cluster nicht durch die Gravitation gebunden sein können. Das ist jedoch im Widerspruch zur beobachtenden Form des Clusters. Um die Bindung zu erklären, benötigt man eine „fehlende Masse", die 10 bis 20mal größer ist als die sichtbare Masse der Galaxien.

Um diese fehlende Masse durch Neutrinos zu erklären, müssen die Neutrinos eine Masse von mindestens $m_\nu c^2 \geqq 30$ eV haben. Die Fermi-Statistik begrenzt die Zahlendichte der Neutrinos mit Geschwindigkeiten kleiner als die Entweichgeschwindigkeit aus der Galaxis; damit ist auch die Neutrino-Massendichte begrenzt.

Eine Neutrinomasse von $m_\nu c^2 \approx 30$ eV würde auch die Bildung der Galaxien verständlich machen.

Größere Fluktuationen der Baryonendichte im Kosmos können erst nach Bildung neutraler Atome ($kT \approx 10$ eV) entstehen. Zu früheren Zeiten bildet das noch nicht entkoppelte Photonengas ein Medium, in dem geladene Teilchen nicht beschleunigt werden können. Außerdem wären auch die Fluktuationen der Baryonendichte mit adiabatischen Fluktuationen der Photonendichte verknüpft. Aber solche Fluktuationen würde man noch heute in der kosmischen Mikrowellenstrahlung beobachten. Die Beobachtungsergebnisse begrenzen jedoch die Anisotropie der Mikrowellenstrahlung auf Werte $\leqq 10^{-4}$. Können solche kleinen Schwankungen so schnell anwachsen wie zur Erklärung der Galaxienbildung nötig ist? Numerische Rechnungen deuten an, daß das nur der Fall ist, wenn die Massendichte im Kosmos nahe der kritischen Dichte ϱ_c liegt.

Obgleich also Dichten $\varrho \approx \varrho_c$ günstig für die Erklärung der Galaxienentstehung sind, kann man die Entstehung der leichten Kerne wie D oder ^{3}He nur verstehen, wenn die Baryonendichte beträchtlich kleiner als ϱ_c ist. Neutrinos könnten die gewünschte zusätzliche Massendichte erklären, wenn ihre Masse in der Nähe von $m_\nu c^2 \approx 30$ eV liegt.

15.9. Entstehung der Baryonen-Antibaryonen-Asymmetrie

Wir besitzen zur Zeit noch keine definitive Theorie für das Entstehen der Baryonen-Antibaryonen-Asymmetrie in den frühen Zeiten der kosmischen Entwicklung. Die Entwicklung der letzten Jahre, insbesondere auf dem Gebiet der großen einheitlichen Eichfeldtheorien, hat jedoch zu großen Fortschritten beim Verständnis dieses Problems geführt.

Wir gehen davon aus, daß Materie in Form von Baryonen im Kosmos überall dominiert, daß also auch entfernte Galaxien aus Baryonen statt Antibaryonen bestehen. Es ist nicht einfach, diese Annahme zu beweisen. Schließlich erhalten wir fast alle Informationen aus dem Kosmos in Form elektromagnetischer Strahlung, und das Photon ist sein eigenes Antiteilchen.

Die Beobachtung von Kernen bei gleichzeitiger Nichtbeobachtung von Antikernen in der Höhenstrahlung liefert ein Beweisstück. Der Ursprung der Höhenstrahlung ist jedoch noch unklar. Auch beobachtet man einige Antiprotonen in der Höhenstrahlung, diese können jedoch Sekundärteilchen hochenergetischer Stöße sein. Gebiete, wo kosmische Regionen aus Materie und Antimaterie aufeinandertreffen, sollten als intensive Quellen hochenergetischer γ-Strahlen erkennbar sein. Solche Quellen wurden bisher nicht beobachtet. Da Galaxien und Cluster aus Galaxien neben den Sternen auch interstellares Gas enthalten, müssen sie entweder ganz aus Materie oder aus Antimaterie bestehen. Gäbe es im Kosmos Inseln aus Antibaryonen, dann wären diese Inseln zumindestens sehr groß. Das ist aber wieder sehr schwer mit der Homogenität und Isotropie der 2,7-K-Mikrowellenstrahlung zu vereinbaren. Gäbe es keine Baryonen-Antibaryonen-Asymmetrie, dann hätten Proton-Antiproton-Vernichtungsreaktionen im Ver-

laufe der kosmischen Entwicklung ihre Dichte auf sehr kleine Werte reduziert. Man berechnet $n_p/n_\gamma \approx 10^{-19}$, das ist weitaus kleiner als im gegenwärtigen Kosmos beobachtet wird.

Mit Hilfe des Verhältnisses n_B/n_γ der Zahlendichten von Baryonen zu Photonen mißt man die Asymmetrie quantitativ. Der Zähler n_B läßt sich aus der Kenntnis der Massen und der Zahl von Galaxien abschätzen. Der Nenner n_γ ist seit der experimentellen Messung der kosmischen Mikrowellenstrahlung bekannt. Man erhält das Verhältnis im Gebiet

$$10^{-9} \geqq \frac{n_B}{n_\gamma} \geqq 10^{-11} .$$

Dieses Verhältnis hat sich seit der Zeit kurz nach dem Urknall kaum noch verändert. Da die Baryonenzahl in sehr guter Näherung eine erhaltene Quantenzahl ist, hat sich die Zahl der Baryonen nicht verändert. Die Zahl der Photonen hat sich seit der Temperatur $kT \approx 10^{15}$ GeV etwa um einen Faktor 30 vergrößert. Nur dann, wenn der Kosmos seither eine Phase mit großen Abweichungen vom statistischen Gleichgewicht durchgemacht hat (z. B. einen Phasenübergang 1. Ordnung), könnte sich das Verhältnis n_B/n_γ um einen weiteren großen Faktor verändert haben.

Eine Theorie zur Erklärung des Entstehens der Baryonenasymmetrie muß einige Forderungen erfüllen:

(1) Prozesse mit Verletzung der Baryonenzahl $\Delta B \neq 0$ müssen auftreten. Große einheitliche Eichfeldtheorien erfüllen diese Forderung.
(2) Die die Baryonenzahl verletzende Wechselwirkung muß zwischen Materie und Antimaterie unterscheiden. Das bedeutet, daß sowohl die Ladungskonjugationsinvarianz C, als auch das Produkt CP verletzt werden muß. Die in den Eichfeldtheorien enthaltene schwache Wechselwirkung erfüllt auch diese Forderung.
(3) Es muß eine Abweichung vom Wärmegleichgewicht auftreten. Im Gleichgewicht ist die Zeitumkehr T eine gute Symmetrie. Prozesse, die vorwärts und rückwärts in der Zeit ablaufen, können nicht unterschieden werden, die Zahl der Quarks bleibt gleich der Zahl der Antiquarks. Zu geringen Abweichungen vom Gleichgewicht kommt es durch die Expansionsbewegung des Kosmos und die dabei auftretende Verringerung der Temperatur. Dabei verringert sich die Zahl der durch die einheitlichen Eichfeldtheorien vermittelten Wechselwirkungen, und die Baryonen-Asymmetrie entsteht.

15.10. Kosmische magnetische Monopole

Wie bereits im Abschnitt 14.9.4. behandelt, sagen einheitliche Eichfeldtheorien die Existenz magnetischer Monopole voraus. Nur in den ersten 10^{-35} Sekunden nach dem heißen Urknall kann die Temperatur hoch genug gewesen sein für die Erzeugung so schwerer Teilchen wie der Monopole. Die meisten dieser Monopole sollten noch heute existieren, denn sie können nur durch Annihilation mit einem Antimonopol verschwinden. Wenn also die einheitlichen Eichfeldtheorien richtig sind und das kosmologische Modell des heißen Urknalls bis zu so frühen Zeiten wie 10^{-35} Sekunden gilt, dann müssen diese schweren Monopole im Kosmos existieren.

Wieso wurden dann bisher keine magnetischen Monopole gefunden? In den 50 Jahren seit der Diracschen Hypothese der magnetischen Monopole wurden viele Experimente durchgeführt. Aber es wurde nach *leichten* Monopolen gesucht. Im Gegensatz zu sehr leichten und daher relativistischen Monopolen haben die schweren Monopole nur Geschwindigkeiten von 10^{-4} bis 10^{-2} der Lichtgeschwindigkeit. Über die Ionisationswirkung solcher schweren langsamen Monopole ist jedoch fast nichts bekannt.

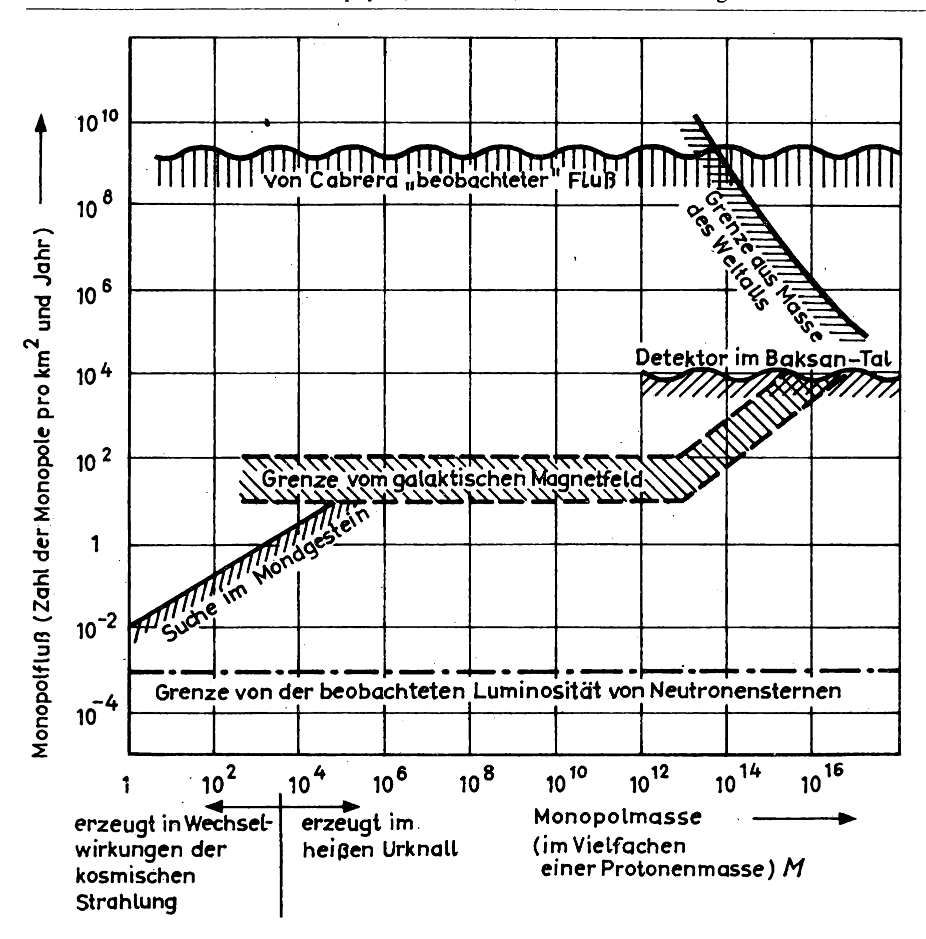


Abb. 15.8
Grenzen für den kosmischen Monopolfluß als Funktion der Monopolmasse

Es gibt mehrere Möglichkeiten, Grenzen für die Zahl der Monopole im Kosmos anzugeben (siehe Abb. 15.8).

(1) Da die Gesamtmasse im Kosmos begrenzt ist, ergibt sich auch eine Grenze der Zahl so besonders massiver Objekte wie der Monopole. Aus dieser Betrachtung folgt, daß im All auf 10^{14} Protonen höchstens ein Monopol kommt. Dem entspricht ein Monopolfluß von

$$\Phi_M \leqq 3 \cdot 10^6 \text{ Monopole pro km}^2 \text{ und Jahr .}$$

(2) In unserer Galaxis existiert ein schwaches Magnetfeld von etwa $3 \cdot 10^{-10}$ T. Trotz dieser Schwäche ist das galaktische Magnetfeld sehr effektiv, Monopole auf hohe Energien zu beschleunigen, so daß sie die Galaxis verlassen können. Die Fluchtgeschwindigkeit aus der Galaxis beträgt etwa ein Hundertstel der Lichtgeschwindigkeit. Die Beschleunigung einer größeren Zahl von Monopolen würde dem Magnetfeld soviel Energie entziehen, daß die

elektrischen Ströme, die es erzeugen, merklich gebremst würden. Die Existenz des Magnetfeldes gibt eine Grenze für den Fluß

$$\Phi_M < 10^3 \text{ Monopole pro km}^2 \text{ und Jahr .}$$

(3) Direkte Messungen des Monopolflusses auf der Erde sind ebenfalls möglich. Der größte zur Zeit existierende Detektor steht in der UdSSR im Baksantal des Kaukasus. Die Messungen ergeben die Grenze

$$\Phi_M < 10^4 \text{ Monopole pro km}^2 \text{ und Jahr .}$$

(4) Von B. Cabrera wurde 1982 mit Hilfe einer supraleitenden Spule ein Ereignis gefunden, das als Durchgang eines magnetischen Monopols gedeutet werden kann. Der Durchgang eines magnetischen Monopols führt zum Anstieg des magnetischen Flusses durch die Spule um genau zwei Flußquanten. Angegeben als Grenze für den Monopolfluß erhält man daraus eine Zahl, die wesentlich größer ist als alle anderen Grenzen

$$\Phi < 10^9 \text{ Monopole pro km}^2 \text{ und Jahr .}$$

Das gleiche Experiment und einige weitere ähnliche und verbesserte Experimente haben jedoch seit 1982 kein weiteres Ereignis gefunden, welches sich als Durchgang eines magnetischen Monopols deuten ließe. Dadurch ist diese Grenze heute höchstens noch

$$\Phi < 10^7 \text{ Monopole/km}^2\text{, Jahr .}$$

(5) Von V. A. Rubakov wurde vorhergesagt, daß magnetische Monopole den Zerfall von Baryonen in großer Zahl katalysieren. Wenn sich das bestätigt und wenn Monopole gefunden werden, könnte diese Eigenschaft hervorragend zur Lösung des Energieproblems beitragen. Zumindestens lassen sich mit Hilfe dieser Vorhersage neue Grenzen für den Fluß kosmischer Monopole angeben. Damit werden alle Experimente zum Nachweis des Protonenzerfalls gleichzeitig Experimente zum Nachweis von magnetischen Monopolen. Die einschränkendste Grenze erhält man durch die folgenden Betrachtungen: Monopole, die auf einen Neutronenstern fallen, werden von diesem eingefangen. Kosmisch sehr alte Neutronensterne könnten im Laufe von 10^8 Jahren sehr viele Monopole einfangen, die im Innern des Neutronensterns sehr viele Zerfälle von Neutronen veranlassen. Wenn man annimmt, daß alle von einem Neutronenstern emittierte Strahlung von diesem Prozeß herrührt, so erhält man als Grenze für den kosmischen Monopolfluß

$$\Phi \leqq 10^{-3} \text{ Monopole pro km}^2 \text{ und Jahr .}$$

15.11. Das kosmologische Modell der Inflation

Die oben geschilderten Erfolge des kosmologischen Modells vom Urknall erklären sich aus den Eigenschaften des Modells später als eine Sekunde nach dem Urknall. Schwierigkeiten treten auf, wenn man die Konsequenzen der Theorie des Urknalls zu Zeiten viel kürzer als eine Sekunde untersucht. Wir beschränken uns hier auf drei dieser Schwierigkeiten:

1. Die Isotropie der heute beobachtbaren Mikrowellenstrahlung, die aus Raumgebieten stammt, welche im alten Modell des Urknalls zur Zeit ihrer Emission nicht kausal verknüpft waren.

Die beobachtete kosmische Mikrowellenstrahlung besteht aus Photonen, die sich seit der Zeit der Entkopplung — 10^5 Jahre nach dem Urknall — ohne weitere Wechselwirkung im Kosmos bewegen. Zur Zeit der Entkopplung herrschte eine Temperatur von etwa 2000 K. Im

Temperaturgleichgewicht erwartet man deshalb eine Frequenzverteilung der Lichtwellen bzw. Energieverteilung der Photonen, die genau der Planckschen Strahlungsformel für diese Temperatur entspricht. Infolge der Expansionsbewegung im Kosmos tritt jedoch ein Doppler-Effekt auf, den wir auch als Rotverschiebung bei entfernten Galaxien beobachten.

Nun ist die Quelle der kosmischen Mikrowellenstrahlung der ursprüngliche kosmische Feuerball, d. h. das entfernteste Objekt, welches wir im Kosmos beobachten können; deshalb ist die Rotverschiebung dieses Photons auch viel größer. Bei der Expansionsbewegung bleibt die Frequenzverteilung der Photonen eine Planck-Verteilung, jedoch mit der wesentlich kleineren Temperatur von 3 K. Mit der heutigen Mikrowellentechnik läßt sich nicht nur überprüfen, daß die Mikrowellenstrahlung genau einer Planck-Verteilung entspricht, sondern es läßt sich auch prüfen, ob diese Strahlung aus verschiedenen Raumrichtungen genau gleiche Temperaturen hat.

Das Ergebnis ist: Die beobachtete kosmische Mikrowellenstrahlung aus allen möglichen Raumrichtungen entspricht Planck-Verteilungen mit Temperaturen, die sich um nicht mehr als 0.0003 K unterscheiden. Die Strahlung aus entgegengesetzten Raumrichtungen stammt jedoch aus Quellen, die zur Zeit der Emission etwa 90mal weiter voneinander entfernt waren als der kosmische Horizont im alten Modell des Urknalls zur Zeit der Emission (Abb. 15.9). Da nur Gebiete innerhalb des Horizonts kausal verknüpft sein können, ist es also im alten Modell des Urkanalls völlig unerklärlich, wieso die Mikrowellenstrahlung so isotrop ist.

2. Weshalb ist die Massendichte im Kosmos so nahe an der „kritischen Massendichte"?

Nach der Allgemeinen Relativitätstheorie kann der Raum im Kosmos gekrümmt sein. Die Art der Krümmung hängt von der Massen- oder Energiedichte im Kosmos ab. Für eine Massen-

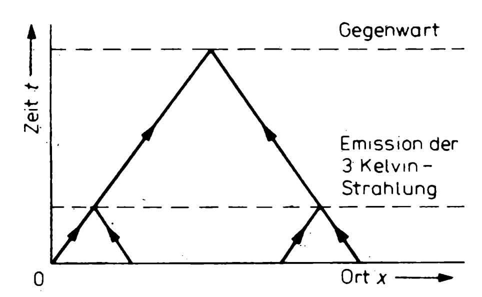


Abb. 15.9
Das Horizontproblem ist eine schwerwiegende Unzulänglichkeit der alten kosmologischen Theorie des Urknalls. In dieser nur zweidimensionalen Veranschaulichung der Raum-Zeit wird die Bahn eines Lichtstrahls durch eine Gerade mit der Neigung von 45° dargestellt. Unsere gegenwärtige Position ist die Spitze des sogenannten Vergangenheitslichtkegels. Da kein Signal schneller als mit Lichtgeschwindigkeit transportiert wird, erreichen uns nur Signale aus dem Vergangenheitslichtkegel. Ereignisse außerhalb des Vergangenheitslichtkegels eines bestimmten Punkts können mit den Ereignissen an diesem Punkt nicht kausal verknüpft sein. Die 3-Kelvin-Mikrowellenstrahlung entkoppelte, als der Kosmos etwa 10^5 Jahre alt war. Die Quellen der Mikrowellenstrahlung, welche uns aus entgegengesetzten Raumrichtungen erreicht, sind aber etwa 10^7 Lichtjahre voneinander entfernt. In der bisherigen Theorie des Urknalls können also diese Quellen nicht kausal miteinander oder mit einem anderen Ereignis der Vergangenheit verknüpft sein. Die Homogenität der 3-Kelvin-Strahlung muß in diesem Modell als unerklärbare Anfangsbedingung angenommen werden.

Zweifellos ziehen wir ein Modell vor, bei welchem sich die beobachtete Isotropie der Mikrowellenstrahlung natürlich erklärt — wie im neuen Modell der Inflation.

dichte oberhalb ihres kritischen Werts bezeichnet man das Universum als geschlossen. Für eine Massendichte unterhalb der kritischen bezeichnet man das Universum als offen. Der Raum ist ebenfalls gekrümmt, aber schließt sich nicht in sich selbst. Das Volumen ist in diesem Fall unendlich.

Wäre die Massendichte anfänglich genau gleich der kritischen Massendichte gewesen, dann bliebe sie für immer so. Die kleinsten anfänglichen Abweichungen von der kritischen Massendichte würden jedoch sofort sehr schnell anwachsen. Wäre die Massendichte heute, so wie aus der strahlenden Materie im Kosmos allein folgt, etwa 10% der kritischen Massendichte, dann wäre sie kurz nach dem Urknall bis auf die 50. Stelle nach dem Komma genau gleich der kritischen Massendichte gewesen.

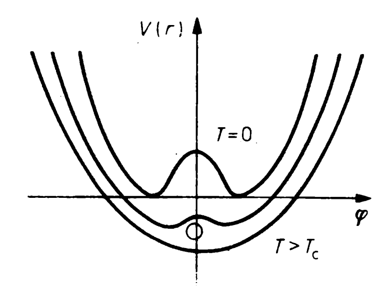


Abb. 15.10
Die spontane Brechung der Symmetrie einer Eichfeldtheorie hängt von der Form des Potentials der skalaren Higgs-Felder φ ab. Liegt das Minimum dieses Potentials bei $\varphi = 0$, dann ist die Symmetrie ungebrochen. Liegt das Minimum des Potentials bei $\varphi \neq 0$ (Kurve bei der Temperatur $T = 0$), tritt eine spontane Brechung der Symmetrie auf, und die Eichbosonen erhalten eine Masse.

Ein Vergleich, der sich anbietet, ist eine Kugel in einem Potentialtopf. Der Potentialtopf allein ist in jedem Fall symmetrisch um den Punkt $\varphi_0 = 0$. Wenn das Minimum wie bei der Kurve $T > T_c$ an der Stelle $\varphi = 0$ liegt, dann rollt die Kugel an die Stelle des stabilen Gleichgewichts $\varphi = 0$. Die Anordnung bleibt auch in Anwesenheit der Kugel symmetrisch, die Symmetrie bleibt ungebrochen. Für ein Potential der Form wie für $T = 0$ ist die Lage $\varphi = 0$ ein labiles Gleichgewicht; die Kugel wird früher oder später in eine der stabilen Gleichgewichtslagen (Minima des Potentials) bei $\varphi \neq 0$ rollen. Dadurch wird die Symmetrie der Anordnung in Anwesenheit der Kugel gebrochen; eine der stabilen Gleichgewichtslagen wird bevorzugt.

Die Form des Higgs-Potentials kann sich mit der Temperatur ändern. Anfänglich ($T > T_c$) befindet sich die Kugel in der stabilen Gleichgewichtslage bei $\varphi = 0$; die Symmetrie ist ungebrochen. Mit dem Abfall der Temperatur steigt das Potential an der Stelle $\varphi = 0$ an, es entsteht ein Maximum. Die Kugel bleibt zunächst bei $\varphi = 0$, das ist die labile Gleichgewichtslage (das „falsche Vakuum"). Im Laufe der Zeit rollt sie in eine stabile Gleichgewichtslage, die Symmetrie wird gebrochen.

Beispiele für solche Phasenübergänge:

1. Der Übergang von der großen einheitlichen Eichfeldtheorie (ungebrochene Symmetrie) zur getrennten starken und elektroschwacher Wechselwirkung (gebrochene Symmetrie) bei typischen Energien von etwa 10^{15} GeV.
2. Der Übergang von der einheitlichen elektroschwachen Wechselwirkung (ungebrochene Symmetrie) zur getrennten schwachen und elektromagnetischen Wechselwirkung (gebrochene Symmetrie) bei typischen Energien von 100 GeV. Die experimentelle Entdeckung der $W^{\pm}$- und Z^0-Eichbosonen, die durch den Physik-Nobelpreis 1984 geehrt wurde, muß gleichzeitig als experimentelle Bestätigung für die Existenz dieses Phasenübergangs im frühen Kosmos angesehen werden.

3. Weshalb findet man keine magnetischen Monopole im Kosmos?

Für die von der Elementarteilchenphysik im Lauf der vergangenen 10 Jahre entwickelten einheitlichen Theorien ist der frühe Kosmos mit seinen hohen Teilchenenergien das ideale Testobjekt. Hier gab es zu frühen Zeiten viel höhere Energien als an den derzeitigen Hochenergiebeschleunigern.

Der größte Erfolg der Gemeinschaftsarbeit von Elementarteilchenphysikern und Kosmologen ist die Theorie der Inflation. Bei hohen Energiedichten — so wie sie etwa 10^{-35} Sekunden nach dem Urknall im Kosmos herrschten — sagen die einheitlichen Theorien einen Phasenübergang der Materie voraus von dem Zustand, wo es nur eine einheitliche Wechselwirkung gibt, zu dem uns bekannten Zustand, wo sich die fundamentalen Wechselwirkungen unterscheiden (elektromagnetische Kraft, Kernkraft; Abb. 15.10). Bei diesem Phasenübergang kann der Kosmos zunächst in der „falschen" Phase (im „falschen Vakuum") bleiben.

Ähnliches beobachtet man als Siedeverzug auf der Erde beim Phasenübergang vom flüssigen Wasser zum Wasserdampf oder beim Unterkühlen des Wassers unterhalb des Gefrierpunkts. Unterkühltes oder überhitztes Wasser befindet sich in einem metastabilen Zustand und geht beim kleinsten Anstoß in den Eis- oder Wasserdampf-Zustand über.

In dem Zeitabschnitt, in dem sich der Kosmos in dem „falschen Vakuum" befindet, ist eine explosionsartige Expansion (die Inflationsphase) zu erwarten. Die Ausdehnung des Kosmos steigt dabei um den unvorstellbar großen Faktor 10^{50} an, bevor die richtige neue Phase erreicht wird (Abb. 15.11). Abb. 15.5 zeigt, welche Phasenübergänge und Materieformen nach den heutigen Eichfeldtheorien im frühen Kosmos zu finden sind. In Abb. 15.12 wird der Unterschied der beiden kosmologischen Modelle hinsichtlich des Horizont-Abstands und hinsichtlich des Radius des beobachtbaren Universums dargestellt.

Das Modell der Inflation beseitigt alle oben genannten Schwierigkeiten des alten Modells des Urknalls sowie weitere Schwierigkeiten, auf die wir hier nicht eingegangen sind. Nach der Inflationsphase — infolge der ungeheuren Expansion während dieser Zeit — ist der Kosmos

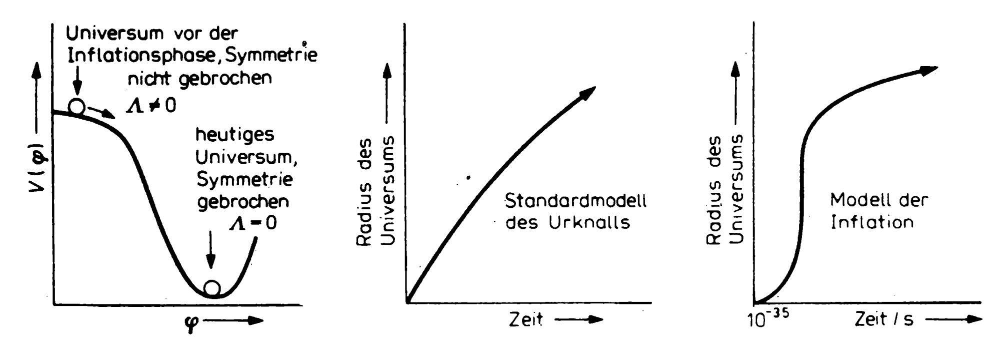


Abb. 15.11
Im kosmologischen Modell der Inflation befindet sich das Universum vor der Inflationsphase im „falschen Vakuum", d. h. in einer instabilen Gleichgewichtslage hinsichtlich des Higgs-Potentials. Gleichzeitig besitzt das Vakuum eine beträchtliche Energiedichte Λ. Während der Inflationsphase „rollt" das Universum in die stabile Gleichgewichtslage, und die Symmetrie wird spontan gebrochen. Die große ursprüngliche Energiedichte des Vakuums bewirkt eine exponentielle Expansionsbewegung des Kosmos während der Inflationsphase, die es im alten Modell des Urknalls nicht gab.

Das mittlere Teilbild veranschaulicht die Expansionsbewegung im alten Modell. Im rechten Teilbild ist dieser Verlauf im Modell der Inflation gezeichnet. Während der Inflationsphase ist die Expansionsrate im letzteren Modell wesentlich höher.

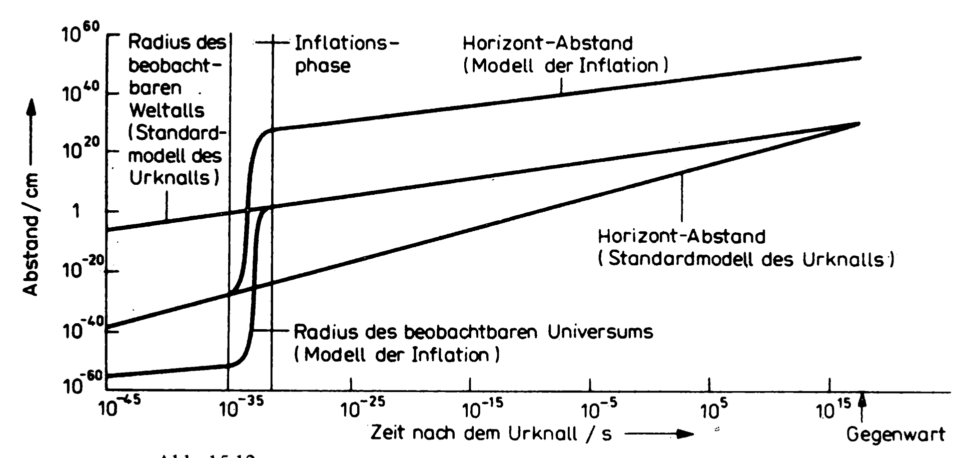


Abb. 15.12
Die Temperatur des Kosmos als Funktion der Zeit nach dem Urknall unterscheidet sich im Modell der Inflation nur kurzzeitig in der Inflationsphase von der Temperatur in der Standard-Urknall-Theorie. Wesentliche Unterschiede treten hinsichtlich des Radius des beobachtbaren Universums und des Horizontabstands auf. Nach der Inflationsphase ist der Radius des beobachtbaren Universums in beiden Modellen gleich. Vor der Inflationsphase ist der Horizontabstand in beiden Modellen gleich. Während der Inflationsphase expandiert das Universum um einen Faktor der Größenordnung 10^{50}. Demzufolge übersteigt nach der Inflationsphase der Horizont den Radius des beobachtbaren Universums um viele Größenordnungen. Das beobachtbare Universum ist nur ein winziger Teil des gesamten Kosmos.

flach, isotrop, homogen, kausal verknüpft, und die Dichte der magnetischen Monopole wurde außerordentlich verdünnt. Auch die Isotropie der Mikrowellenstrahlung wird sofort verständlich. Durch die schnelle Expansion des Kosmos während der Inflationsphase ist der kosmische Horizont um den oben genannten Faktor angewachsen. Wenn es diese Inflationsphase gegeben hat, ist der Kosmos als Ganzes unvorstellbar größer als der von uns beobachtbare Teil. Durch die kosmologische Theorie der Inflation wird darüber hinaus auch klar, daß sich die derzeitige Expansionsbewegung des Kosmos rückwärts nicht bis zu einem rätselhaften „Anfangspunkt“ zurückverfolgen läßt, sondern daß ein physikalischer Prozeß stattgefunden hat, dessen Natur nur die gründliche Forschungsarbeit, aber nicht die Spekulation enthüllen kann.

Die neuen Entwicklungen im Grenzgebiet zwischen Elementarteilchenphysik und Kosmologie sind in der Lage, unser Weltbild weiter zu ändern. Wir wissen erst seit 500 Jahren, daß die Erde nicht das Zentrum des Kosmos ist. Aus dem letzten Jahrhundert stammt die Kenntnis, daß die Sonne nicht im Zentrum der Galaxis steht und unsere Galaxis nicht als Zentrum des Universums angesehen werden kann, daß vielmehr alle Orte im Kosmos gleichberechtigt sind. Jetzt, durch das kosmologische Modell der Inflation, erfahren wir, daß der uns bekannte Teil des Kosmos nur ein winziger Teil des gesamten Kosmos ist.

Das kosmologische Modell der Inflation ist heute noch eine Hypothese; es muß weiter präzisiert und ausgearbeitet werden. Fortschritte wird es dabei sowohl durch Ergebnisse bei der experimentellen und theoretischen Untersuchung der Elementarteilchen als auch durch kosmologische Untersuchungen geben.

Literaturhinweise zu Kapitel 15
Amb 80, Če 78, Dav 82, Kir 78, Lin 84, Mur 70, Ran 84, Wag 77, Wei 78

Anhang A. Drehimpulse in der Quantenmechanik

A 1. Drehimpulsoperatoren

1. In der Quantenmechanik wird der klassische Drehimpuls $\boldsymbol{l} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}$ eines Teilchens durch einen hermiteschen Vektoroperator ersetzt, indem man für den Teilchenimpuls $\boldsymbol{p}$ den Differentialoperator $\frac{\hbar}{\mathrm{i}} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}$ einführt:

$$\boldsymbol{l} = \boldsymbol{r} \times \frac{\hbar}{\mathrm{i}} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}} = (l_x, l_y, l_z) \,. \tag{A. 1}$$

Die Operatoren der Drehimpulskomponenten l_x, l_y, l_z sind gegeben durch

$$\begin{aligned} l_x &= \frac{\hbar}{\mathrm{i}} \left(y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} \right), \\ l_y &= \frac{\hbar}{\mathrm{i}} \left(z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z} \right), \\ l_z &= \frac{\hbar}{\mathrm{i}} \left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right). \end{aligned} \tag{A. 2}$$

2. Beim Übergang von den kartesischen Koordinaten x, y, z zu Polarkoordinaten $x = r \times \sin \vartheta \cos \varphi$, $y = r \sin \vartheta \sin \varphi$, $z = r \cos \vartheta$ transformieren sich die Operatoren (A. 2) nach

$$\begin{aligned} l_x &= \mathrm{i}\hbar \left(\sin \varphi \frac{\partial}{\partial \vartheta} + \cot \vartheta \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \right), \\ l_y &= \mathrm{i}\hbar \left(-\cos \varphi \frac{\partial}{\partial \vartheta} + \cot \vartheta \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \right), \\ l_z &= -\mathrm{i}\hbar \frac{\partial}{\partial \varphi} \,. \end{aligned} \tag{A. 3}$$

Für das Quadrat des Drehimpulsoperators $\boldsymbol{l}^2 = l_x^2 + l_y^2 + l_z^2$ ergibt sich

$$\boldsymbol{l}^2 = -\hbar^2 \left[\frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right]. \tag{A. 4}$$

Aus (A. 3—4) ist ersichtlich, daß die Drehimpulsoperatoren bei Anwendung auf eine Funktion $f(\boldsymbol{r})$ nicht auf die Radialkoordinate r, sondern nur auf die Winkelvariablen ϑ, φ wirken. Der Operator l_z für die z-Komponente des Drehimpulses enthält lediglich eine Differentiation nach dem Azimutwinkel φ.

3. Mit Hilfe der Kommutationsbeziehungen für die Komponenten des Orts- und Impulsoperators lassen sich Vertauschungsrelationen für die Komponenten des Drehimpulsoperators ableiten:

$$[l_x, l_y] = i\hbar l_z\,, \qquad [l_y, l_z] = i\hbar l_x\,, \qquad [l_z, l_x] = i\hbar l_y\,. \tag{A. 5}$$

Während die Operatoren der Drehimpulskomponenten also nicht miteinander vertauschbar sind, kommutiert das Quadrat des Drehimpulsoperators mit dem Operator jeder Komponente:

$$[l^2, l_x] = [l^2, l_y] = [l^2, l_z] = 0\,. \tag{A. 6}$$

Die Vertauschungsrelationen (A. 5—6) bringen die wesentlichen Eigenschaften des Derehimpulses in der Quantenmechanik zum Ausdruck. Jeder Satz von Operatoren J_x, J_y, J_z, J^2, der diese Beziehungen erfüllt, kann als Drehimpuls aufgefaßt werden.

A 2. Eigenfunktionen der Drehimpulsoperatoren

1. Aus den Vertauschungsrelationen (A. 5—6) folgt, daß für die Operatoren l^2 und l_z (oder l^2 und eine der beiden anderen Komponenten) ein simultanes Eigenfunktionssystem existiert. Die Kugelfunktionen

$$Y_l^m(\vartheta, \varphi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}\,(-1)^m\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi}\,P_l^m(\cos\vartheta) \tag{A. 7}$$

mit den zugeordneten Legendreschen Polynomen ($0 \leqq m \leqq l$)

$$P_l^m(\cos\vartheta) = \frac{1}{2^l l!}(\sin\vartheta)^m \frac{\mathrm{d}^{l+m}}{(\mathrm{d}\cos\vartheta)^{l+m}}(\cos^2\vartheta - 1)^l \tag{A. 8}$$

bilden ein solches Eigenfunktionssystem mit den Eigenwerten $\hbar^2 l(l+1)$ für den Operator l^2 und $\hbar m$ für den Operator l_z

$$\begin{aligned} l^2 Y_l^m(\vartheta, \varphi) &= \hbar^2 l(l+1)\, Y_l^m(\vartheta, \varphi) \\ l_z Y_l^m(\vartheta, \varphi) &= \hbar m Y_l^m(\vartheta, \varphi)\,. \end{aligned} \tag{A. 9}$$

Die Quantenzahl l, die den Betrag $\hbar\sqrt{l(l+1)}$ des Drehimpulses bestimmt, kann alle ganzen Zahlen annehmen. Für einen vorgegebenen Wert von l durchläuft die Quantenzahl m, die die z-Komponente des Drehimpulses festlegt, alle ganzzahligen Werte zwischen $-l$ und $+l$.

$$l = 0, 1, 2, 3, \ldots \qquad m = -l, -l+1, \ldots, 0, \ldots, l-1, l\,. \tag{A. 10}$$

Die Wertbereiche (A. 10) für l und m bringen die Quantelung des Drehimpulses hinsichtlich Betrag und räumlicher Orientierung in bezug auf eine willkürlich wählbare Quantisierungsachse zum Ausdruck. Ein Zustand mit dem Drehimpuls l besitzt $2l + 1$ Einstellmöglichkeiten auf die Quantisierungsachse (Richtungsquantelung).

2. Die Wellenfunktion $Y_l^m(\vartheta, \varphi)$ beschreibt einen Zustand, in dem der Betrag des Drehimpulses und seine z-Komponente gleichzeitig einen scharfen Meßwert besitzen. Da die Operatoren der Drehimpulskomponenten nicht untereinander kommutieren, existiert kein simultanes Eigenfunktionssystem zu l_x, l_y, und die Erwartungswerte für die Messung der Komponenten l_x, l_y verschwinden:

$$\langle l^2 \rangle = \hbar^2 l(l+1)\,, \qquad \langle l_z \rangle = \hbar m\,, \qquad \langle l_x \rangle = \langle l_y \rangle = 0\,. \tag{A. 11}$$

Folglich ist in der Quantenmechanik die Richtung des Drehimpulses im Raum nicht vollständig festgelegt. Der Drehimpulszustand l, m läßt sich vielmehr durch einen in z-Richtung geöffneten Kegel geometrisch veranschaulichen (Abb. A.1). Der Drehimpulskegel wird aus den Vektoren der Länge $\hbar\sqrt{l(l+1)}$ gebildet, die alle die gleiche z-Komponente $\hbar m$ besitzen, deren x- und y-Komponenten aber in durch den Öffnungswinkel festgelegten Grenzen beliebige positive und negative Werte annehmen können.

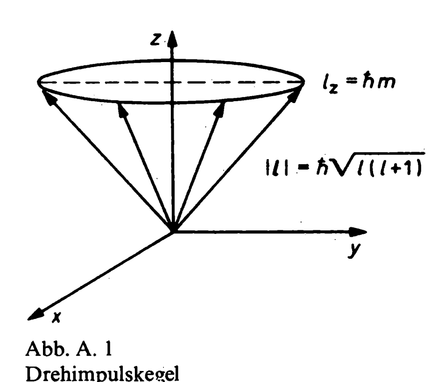


Abb. A. 1
Drehimpulskegel

Der Sachverhalt der Drehimpulsquantelung läßt sich auch in einem einfacheren Vektormodell (Abb. A. 2) darstellen, das allerdings die Folgerungen aus den Kommutationsbeziehungen nicht vollständig ausdrückt.

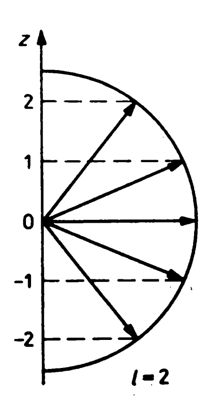


Abb. A. 2
Vektormodell für Richtungsquantelung

3. Die Kugelfunktionen niedrigster Ordnung sind in Tab. A. 1 angegeben. Für $l = m = 0$ wird die Kugelfunktion eine Konstante. Da nach (A. 7) die φ-Abhängigkeit nur als Phasenfaktor $e^{im\varphi}$ auftritt, reduzieren sich die Kugelfunktionen mit $m = 0$ auf die Legendreschen Polynome

$$Y_l^0(\vartheta) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}\, P_l(\cos\vartheta)\,. \tag{A. 12}$$

Tabelle A.1
Beispiele für Kugelfunktionen $Y_l^m(\vartheta, \varphi)$

l	m	$Y_l^m(\vartheta, \varphi)$
0	0	$1/\sqrt{4\pi}$
1	0	$\frac{1}{2}\sqrt{3/\pi}\cos\vartheta$
1	± 1	$\mp\frac{1}{2}\sqrt{3/2\pi}\sin\vartheta\, e^{\pm i\varphi}$
2	0	$\frac{1}{4}\sqrt{5/\pi}\,(3\cos^2\vartheta - 1)$
2	± 1	$\mp\frac{1}{2}\sqrt{15/2\pi}\cos\vartheta\sin\vartheta\, e^{\pm i\varphi}$
2	± 2	$\frac{1}{4}\sqrt{15/2\pi}\sin^2\vartheta\, e^{\pm 2i\varphi}$

Die komplexe Konjugation von $Y_l^m(\vartheta, \varphi)$ führt auf eine Kugelfunktion gleicher Ordnung mit umgekehrtem Vorzeichen von m und und eine Phase $(-1)^m$,

$$Y_l^{m*}(\vartheta, \varphi) = (-1)^m\, Y_l^{-m}(\vartheta, \varphi)\,. \tag{A. 13}$$

Eine Spiegelung am Nullpunkt $\boldsymbol{r} \to -\boldsymbol{r}$ $(\vartheta \to \pi - \vartheta,\ \varphi \to \pi + \varphi)$ ergibt wegen $e^{im(\pi+\varphi)} = (-1)^m e^{im\varphi}$ und $P_l^m(-x) = (-1)^{l+m} P_l(x)$

$$Y_l^m(\pi - \vartheta, \pi + \varphi) = (-1)^l\, Y_l^m(\vartheta, \varphi)\,. \tag{A. 14}$$

Die Parität eines Zustandes l, m ist folglich durch die Quantenzahl l bestimmt: Zustände mit geradzahligem (ungeradzahligem) Drehimpuls besitzen positive (negative) Parität.

Sind $\boldsymbol{r}_1$ und $\boldsymbol{r}_2$ zwei Vektoren mit den Polarwinkeln (ϑ_1, φ_1) und (ϑ_2, φ_2), dann gilt ein Additionstheorem für Kugelfunktionen in der Form

$$P_l(\cos\vartheta) = \frac{4\pi}{2l+1}\sum_{m=-l}^{l} Y_l^{m*}(\vartheta_1, \varphi_1)\, Y_l^m(\vartheta_2, \varphi_2)\,, \tag{A. 15}$$

wobei ϑ den von $\boldsymbol{r}_1$ und $\boldsymbol{r}_2$ eingeschlossenen Winkel bezeichnet.

Gelegentlich werden die Kugelfunktionen auch mit einer anderen Phasenbeziehung eingeführt

$$\tilde{Y}_l^m(\vartheta, \varphi) = i^l Y_l^m(\vartheta, \varphi)\,. \tag{A. 16}$$

Bei komplexer Konjugation gilt dann

$$\tilde{Y}_l^{m*}(\vartheta, \varphi) = (-1)^{l+m}\, \tilde{Y}_l^{-m}(\vartheta, \varphi)\,. \tag{A. 17}$$

Die Kugelfunktionen $Y_l^m(\vartheta, \varphi)$ bilden auf der Kugeloberfläche ein vollständiges Orthonormalsystem

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} Y_{l'}^{m'*}(\vartheta, \varphi)\, Y_l^m(\vartheta, \varphi)\sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi = \delta_{ll'}\delta_{mm'}\,. \tag{A. 18}$$

A 3. Spin

1. Der Spin $s = \frac{\hbar}{2}\sigma$ eines Nukleons ist ebenfalls ein Drehimpulsoperator.

$$[s_x, s_y] = i\hbar s_z, \quad [s_y, s_z] = i\hbar s_x, \quad [s_z, s_x] = i\hbar s_y$$
$$[s^2, s_x] = [s^2, s_y] = [s^2, s_z] = 0. \tag{A. 19}$$

Die Komponenten des Operators σ sind die Paulischen Spinmatrizen

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{A. 20}$$

Nach den Kommutationsbeziehungen (A. 19) ist lediglich σ_z eine Diagonalmatrix mit den Eigenwerten ± 1 auf der Hauptdiagonalen.

2. Der Betrag des Spins wird durch die Quantenzahl $s = 1/2$ bestimmt, so daß die z-Komponente nur die beiden Werte $m_s = \pm 1/2$ annehmen kann. Die zugehörigen orthonormalen Spinfunktionen $\chi_{m_s}(s)$ lassen sich durch Spaltenvektoren mit den Elementen 0 und 1 darstellen:

$$\chi_{m_s=+1/2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \chi_{m_s=-1/2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \langle \chi_{m_s'} \mid \chi_{m_s} \rangle = \delta_{m_s m_s'}. \tag{A. 21}$$

Die Spinfunktionen (A. 21) sind simultane Eigenfunktionen der Operatoren s^2, s_z.

$$s^2 \chi_{m_s}(s) = \hbar^2 \cdot \frac{3}{4} \cdot \chi_{m_s}(s)$$
$$s_z \chi_{m_s}(s) = \hbar m_s \chi_{m_s}(s). \tag{A. 22}$$

A 4. Vektorkopplung von Drehimpulsen

A 4.1. Clebsch-Gordan-Koeffizienten

1. Wir betrachten zwei Teilsysteme, deren Zustände durch die Drehimpulse j_1, j_2 mit bekannten Eigenfunktionen $\varphi_{j_1 m_1}$, $\varphi_{j_2 m_2}$ beschrieben werden:

$$j_i^2 \varphi_{j_i m_i} = \hbar^2 j_i(j_i + 1)\, \varphi_{j_i m_i} \quad (i = 1, 2),$$
$$j_{iz} \varphi_{j_i m_i} = \hbar m_i \varphi_{j_i m_i}. \tag{A. 23}$$

Durch Vektoraddition der Drehimpulse j_1, j_2 ergibt sich der Operator des Gesamtdrehimpulses

$$J = j_1 + j_2, \quad J_z = j_{1z} + j_{2z}. \tag{A. 24}$$

Gesucht werden nun die Funktionen Φ_{JM}, die simultane Eigenfunktionen zu den Operatoren $J^2 = (j_1 + j_2)^2$, J_z darstellen und so die möglichen Drehimpulszustände des Gesamtsystems charakterisieren:

$$J^2 \Phi_{JM} = \hbar^2 J(J + 1)\, \Phi_{JM}$$
$$J_z \Phi_{JM} = \hbar M \Phi_{JM}. \tag{A. 25}$$

In der klassischen Mechanik sind bei der Addition zweier Drehimpulse $\boldsymbol{j}_1, \boldsymbol{j}_2$ für den Gesamtdrehimpuls $\boldsymbol{J}$ kontinuierlich alle Werte zwischen der Parallel- und Antiparallelstellung von $\boldsymbol{j}_1$ und $\boldsymbol{j}_2$ möglich, da sich die beiden Drehimpulse in beliebigem Winkel zueinander ausrichten können. In der Quantenmechanik schränkt die Richtungsquantelung die Orientierungsmöglichkeiten der beiden Drehimpulskegel ein, so daß der Betrag des Gesamtdrehimpulses und seine z-Komponente wiederum gequantelt sind. Wir erwarten also, daß die Quantenzahlen J, M in Gl. (A.25) nur ganz bestimmte Werte annehmen können.

2. Die $(2j_1 + 1)(2j_2 + 1)$ Produktfunktionen $\varphi_{j_1m_1}\varphi_{j_2m_2}$ bilden ein simultanes Eigenfunktionssystem zu den Operatoren $\boldsymbol{j}_1^2$, j_{1z}, $\boldsymbol{j}_2^2$, j_{2z}. Sie stellen wegen der skalaren Addition der Komponenten k_{1z}, j_{2z} nach Gl. (A. 24) auch Eigenfunktionen von J_z zum Eigenwert $M = m_1 + m_2$ dar, $J_z\varphi_{j_1m_1}\varphi_{j_2m_2} = (j_{1z} + j_{2z})\,\varphi_{j_1m_1}\varphi_{j_2m_2} = \hbar(m_1 + m_2)\,\varphi_{j_1m_1}\varphi_{j_2m_2} = \hbar M\varphi_{j_1m_1} \times \varphi_{j_2m_2}$. Sie sind im allgemeinen aber nicht gleichzeitig auch Eigenfunktionen zu $\boldsymbol{J}^2 = \boldsymbol{j}_1^2 + \boldsymbol{j}_2^2 + 2\boldsymbol{j}_1\boldsymbol{j}_2$, da j_{1z} und j_{2z} wegen (A. 5) mit dem Operator $\boldsymbol{j}_1\boldsymbol{j}_2 = j_{1x}j_{2x} + j_{1y}j_{2y} + j_{1z}j_{2z}$ nicht kommutieren. Die gesuchten Eigenfunktionen Φ_{JM} lassen sich aber als eine Linearkombination aus den Produktfunktionen $\varphi_{j_1m_1}\varphi_{j_2m_2}$ aufbauen, wobei die Koeffizienten so gewählt werden müssen, daß die Eigenwertgleichungen (A. 25) erfüllt und die Funktionen Φ_{JM} normiert sind. Die Funktionen Φ_{JM} bleiben dabei Eigenfunktionen zu $\boldsymbol{j}_1^2, \boldsymbol{j}_2^2$:

$$\Phi_{(j_1j_2)JM} = \sum_{\substack{m_1, m_2 \\ m_1+m_2=M}} (j_1m_1j_2m_2 \mid JM)\,\varphi_{j_1m_1}\varphi_{j_2m_2}\,. \tag{A.26}$$

Die Summation über die Projektionsquantenzahlen m_1, m_2 wird durch die Bedingung $m_1 + m_2 = M$ eingeschränkt. Bei Parallelstellung der beiden Drehimpulse längs der positiven z-Richtung ($m_1 = j_1$, $m_2 = j_2$) ergibt sich der maximal mögliche Wert für die z-Komponente des Gesamtdrehimpulses $M = j_1 + j_2$. Man kann zeigen, daß diese Projektion einem Zustand entspricht, in dem der maximal mögliche Gesamtdrehimpuls längs der Quantisierungsachse ausgerichtet ist, $J_{\max} = j_1 + j_2$. Diesem J-Wert kann man alle $(2J_{\max} + 1)$-Zustände mit $M = j_1 + j_2, \ldots, -(j_1 + j_2)$ zuordnen. Sind die beiden Drehimpulse längs der Quantisierungsachse antiparallel ausgerichtet, dann führt $M = j_1 - j_2$ für $j_1 > j_2$ bzw. $M = j_2 - j_1$ für $j_2 > j_1$ auf den zum kleinsten Drehimpuls $J_{\min} = |j_1 - j_2|$ gehörenden Zustand mit Orientierung in positiver z-Richtung. Damit findet man weitere $2J_{\min} + 1$ Zustände mit $M = |j_1 - j_2|, \ldots, -|j_1 - j_2|$. Allgemein läßt sich zeigen, daß bei gegebenen Drehimpulsen $\boldsymbol{j}_1$, $\boldsymbol{j}_2$ für die möglichen Werte des Gesamtdrehimpulses $\boldsymbol{J}$ eine Dreiecksrelation $\triangle(j_1j_2J)$ gilt, die als höchsten J-Wert $j_1 + j_2$ und als kleinsten J-Wert $|j_1 - j_2|$ liefert. Aufeinanderfolgende Zwischenwerte unterscheiden sich um eins: $J = j_1 + j_2, j_1 + j_2 - 1, \ldots, |j_1 - j_2|$,

$$|j_1 - j_z| \leqq J \leqq j_1 + j_2\,, \qquad M = m_1 + m_2\,. \tag{A. 27}$$

Man überzeugt sich leicht, daß die Transformation (A. 26) die Zahl der Zustände (Dimension des Produktraums) nicht ändert,

$$\sum_{J=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} (2J + 1) = (2j_1 + 1)(2j_2 + 1)\,. \tag{A.28}$$

3. Da $\Phi_{(j_1j_2)JM}$ eine Linearkombination aus Eigenfunktionen von j_{1z}, j_{2z} zu verschiedenen Eigenwerten m_1, m_2 darstellt, besitzen die Projektionen der Drehimpulse $\boldsymbol{j}_1$, $\boldsymbol{j}_2$ im Zustand JM keine scharfen Meßwerte. Die Wahrscheinlichkeit, im Zustand JM eine bestimmte Orientierung m_1, m_2 der Drehimpulse $\boldsymbol{j}_1$, $\boldsymbol{j}_2$ zu messen, ist durch das Quadrat des entsprechenden Entwicklungskoeffizienten $(j_1m_1j_2m_2 \mid JM)^2$ gegeben. Diese Koeffizienten $(j_1m_1j_2m_2 \mid JM)$, die eine unitäre Transformation von der ungekoppelten Basis $\varphi_{j_1m_1}\varphi_{j_2m_2}$ zur vektorgekoppelten Basis $\Phi_{(j_1j_2)JM}$ vornehmen, bezeichnet man als Clebsch-Gordan-Koeffizienten.

In der Literatur verwendet man statt des Clebsch-Gordan-Koeffizienten verschiedentlich auch das Wignersche 3j-Symbol

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} = \frac{(-1)^{j_1-j_2-m_3}}{(2j_3+1)^{1/2}} (j_1m_1j_2m_2 \mid j_3 - m_3) \,,$$

das sich durch eine hohe Symmetrie in den Drehimpulsquantenzahlen auszeichnet.

4. Die Clebsch-Gordan-Koeffizienten vermitteln auch die Umkehrtransformation von (A. 26):

$$\varphi_{j_1m_1}\varphi_{j_2m_2} = \sum_{J=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} (j_1m_1j_2m_2|JM)\, \Phi_{(j_1j_2)JM} \,; \tag{A.29}$$

mit der Bedingung $M = m_1 + m_2$ ist dabei über alle Gesamtdrehimpulse J zu summieren, die der Dreiecksrelation $\triangle(j_1j_2J)$ genügen.

5. Für die Clebsch-Gordan-Koeffizienten lassen sich explizite Ausdrücke angeben, die jedoch nur für niedrige j-Werte eine einfache Form besitzen. Bei praktischen Rechnungen muß man auf Tabellenwerke oder Computerprozeduren zurückgreifen.

Die Clebsch-Gordan-Koeffizienten können reell gewählt werden. Sie befolgen eine Reihe von Orthogonalitäts- und Symmetrierelationen, zum Beispiel:

$$\begin{aligned}
&\sum_{m_1, m_2} (j_1m_1j_2m_2|JM)\,(j_1m_1j_2m_2|J'M') = \delta_{JJ'}\delta_{MM'} \\
&(j_1m_1j_2m_2\,|j_3m_3) = (-1)^{j_1+j_2-j_3}\,(j_2m_2j_1m_1\,|j_3m_3) \\
&(j_1m_1j_2m_2\,|j_3m_3) = (-1)^{j_1+j_2-j_3}\,(j_1-m_1j_2-m_2\,|j_3-m_3) \\
&(j_1m_1j_2m_2|j_3m_3) = (-1)^{j_1-m_1}\sqrt{\frac{2j_3+1}{2j_2+1}}\,(j_1m_1j_3-m_3|\,j_2-m_2)\,.
\end{aligned} \tag{A. 30}$$

6. Als Beispiel wird die Kopplung von Bahndrehimpuls $\boldsymbol{l}$ und Spin $\boldsymbol{s}$ betrachtet. Nach (A.27) treten nur zwei Werte des Gesamtdrehimpulses $\boldsymbol{j} = \boldsymbol{l} + \boldsymbol{s}$ auf, die der Parallelstellung ($j = l + 1/2$) und der Antiparallelstellung ($j = l - 1/2$) der beiden Drehimpulse entsprechen. Die Summe in dem Ausdruck für die Wellenfunktion

$$\Phi_{(l1/2)jm} = \sum_{m_l, m_s} (lm_l1/2m_s \mid jm)\, Y_l^{m_l}(\vartheta, \varphi)\, \chi_{m_s}(1/2) \tag{A. 31}$$

läuft nur über zwei Glieder mit den m_l, m_s-Kombinationen ($m_l = m - 1/2$, $m_s = 1/2$), ($m_l = m + 1/2$, $m_s = -1/2$). Eine explizite Konstruktion der Wellenfunktionen ist mit den in Tab. A.2 angegebenen Clebsch-Gordan-Koeffizienten möglich. Man erhält z. B. für

$l = 1\,;\quad j = 3/2,\, 1/2\,,\quad m = 1/2:$

$$\Phi_{(1\,1/2)\,3/2\,1/2} = \sqrt{\frac{2}{3}}\, Y_1^0(\vartheta, \varphi)\, \chi_{1/2} + \sqrt{\frac{1}{3}}\, Y_1^1(\vartheta, \varphi)\, \chi_{-1/2}\,,$$

$$\Phi_{(1\,1/2)\,1/2\,1/2} = -\sqrt{\frac{1}{3}}\, Y_1^0(\vartheta, \varphi)\, \chi_{1/2} + \sqrt{\frac{2}{3}}\, Y_1^1(\vartheta, \varphi)\, \chi_{-1/2}\,.$$

Tabelle A.2
Clebsch-Gordan-Koeffizienten $(lm - m_s\ 1/2\ m_s \mid jm)$

j	$m_s = +1/2$	$m_s = -1/2$
$l + \frac{1}{2}$	$\left[\frac{l + m + 1/2}{2l + 1}\right]^{1/2}$	$\left[\frac{l - m + 1/2}{2l + 1}\right]^{1/2}$
$l - \frac{1}{2}$	$-\left[\frac{l - m + 1/2}{2l + 1}\right]^{1/2}$	$\left[\frac{l + m + 1/2}{2l + 1}\right]^{1/2}$

A 4.2. Racah-Koeffizienten

1. Die Kopplung von drei Drehimpulsen $\boldsymbol{j}_1, \boldsymbol{j}_2, \boldsymbol{j}_3$ zu einem Gesamtdrehimpuls $\boldsymbol{J} = \boldsymbol{j}_1 + \boldsymbol{j}_2 + \boldsymbol{j}_3$ kann auf verschiedene Weise erfolgen, indem man zunächst aus zwei Drehimpulsen $\boldsymbol{j}_i, \boldsymbol{j}_k$ einen Zwischendrehimpuls $\boldsymbol{J}_{ik}$ bildet, um dann $\boldsymbol{j}_l$ und $\boldsymbol{J}_{ik}$ zum Gesamtdrehimpuls $\boldsymbol{J}$ zu koppeln:

$$\Phi_{(j_i j_k) J_{ik} M_{ik}} = \sum_{m_i, m_k} (j_i m_i j_k m_k \mid J_{ik} M_{ik})\, \varphi_{j_i m_i} \varphi_{j_k m_k},$$

$$\Phi_{((j_i j_k) J_{ik} j_l) JM} = \sum_{M_{ik}, m_l} (J_{ik} M_{ik} j_l m_l \mid JM)\, \Phi_{(j_i j_k) J_{ik} M_{ik}} \varphi_{j_l m_l}.$$

Zwei Eigenfunktionen $\Phi_{((j_i j_k) J_{ik} j_l) JM}$ und $\Phi_{((j'_i j'_k) J'_{ik} j'_l) JM}$, die sich nur in der Reihenfolge der Kopplung von $\boldsymbol{j}_1, \boldsymbol{j}_2, \boldsymbol{j}_3$ unterscheiden, sind durch eine unitäre Transformation verknüpft, deren Matrixelemente von den Projektionsquantenzahlen unabhängig sind:

$$\begin{aligned} &\langle ((j_1 j_2) J_{12} j_3) J \mid (j_1 (j_2 j_3) J_{23}) J \rangle \\ &= (-1)^{j_1 + j_2 + j_3 + J} \sqrt{(2J_{12} + 1)(2J_{23} + 1)} \begin{Bmatrix} j_1 j_2 J_{12} \\ j_3 J J_{23} \end{Bmatrix}. \end{aligned} \tag{A.32}$$

Die Beziehung (A. 32) definiert die Racah-Koeffizienten (6j-Symbole), die bei der Umkopplung von drei Drehimpulsen auftreten.

2. Der Racah-Koeffizient

$$\begin{Bmatrix} j_1 j_2 J_{12} \\ j_3 J J_{23} \end{Bmatrix}$$

ist nur dann von Null verschieden, wenn gleichzeitig vier Dreiecksrelationen erfüllt sind:

$$\triangle(j_1 j_2 J_{12}) \qquad \triangle(j_2 j_3 J_{23}) \qquad \triangle(j_1 J J_{23}) \qquad \triangle(j_3 J J_{12}).$$

Es gelten außerdem eine Reihe von Symmetrierelationen, z. B.:

$$\begin{Bmatrix} j_1 j_2 j_3 \\ j_4 j_5 j_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} j_2 j_3 j_1 \\ j_5 j_6 j_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} j_4 j_5 j_3 \\ j_1 j_2 j_6 \end{Bmatrix}.$$

A 4.3. Graphische Methode

1. Die Berechnung von Matrixelementen mit Vielteilchenwellenfunktionen, bei denen die Spins und Bahndrehimpulse der Teilchen über einen Satz von Zwischendrehimpulsen zu einem Gesamtdrehimpuls des Zustandes gekoppelt sind, führt auf komplizierte Mehrfachsummen über Produkte von Clebsch-

Gordan-Koeffizienten. Diese Summationen lassen sich in den meisten Fällen ausführen, wenn man die Symmetrie- und Orthogonalitätsrelationen der Clebsch-Gordan-Koeffizienten ausnutzt. Man erhält einfachere Ausdrücke, in denen neben Clebsch-Gordan-Koeffizienten auch andere Vektorkopplungskoeffizienten wie $6j$-Symbole auftreten können. Derartige Rechnungen können mit Hilfe einer graphischen Methode ohne umständliche Schreibarbeit durchgeführt werden, so daß man schnell einen Überblick über die Struktur des Resultats erhält und die auftretenden Phasen- und Zusatzfaktoren kontrollieren kann.

2. In der Graphentechnik ordnet man einem Clebsch-Gordan-Koeffizienten folgendes geometrisches Gebilde zu:

$$(j_1m_1j_2m_2 \mid j_3m_3) = \sqrt{2j_3+1}\,(-1)^{j_1-j_2+j_3}\; m_3 \xrightarrow{j_3} \bullet +$$

Jeder Drehimpuls wird durch einen Pfeil dargestellt, der durch die Projektionsquantenzahl m charakterisiert wird. Die drei Pfeile laufen in einem Knoten zusammen, der ein Vorzeichen trägt. Das positive (negative) Vorzeichen wird gewählt, wenn bei einem Umlauf um den Knoten in mathematisch positivem (negativem) Sinne die j-Werte in der gleichen Reihenfolge wie im Clebsch-Gordan-Koeffizienten erscheinen. Die Richtung der Pfeile hängt mit dem Vorzeichen der Projektionsquantenzahl zusammen:

$$\bullet\!\xrightarrow{\;j\;} +m = (-1)^{j+m}\,\bullet\!\xleftarrow{\;j\;} -m$$

3. Das Produkt zweier Clebsch-Gordan-Koeffizienten entspricht zwei aneinandergesetzten Graphen. Die Summation über die Projektionsquantenzahl eines gemeinsamen Drehimpulses wird graphisch durch eine Verbindung der entsprechenden Pfeile zu einer geschlossenen inneren Linie zwischen zwei Knoten zum Ausdruck gebracht.

$$\sum_m \succ\!\bullet\!\xrightarrow{\;j\;} m \;\; m \xrightarrow{\;j\;}\!\bullet\!\prec \;=\; \succ\!\bullet\!\xrightarrow{\;j\;}\!\bullet\!\prec$$

4. Setzt man auf diese Weise eine Summe über Produkte von Clebsch-Gordan-Koeffizienten in eine Figur um, dann ergeben sich im allgemeinen komplizierte Gebilde, die sich vereinfachen lassen, wenn man aus den Eigenschaften der Vektorkopplungskoeffizienten bestimmte Regeln für die Umformung der Graphen ableitet. Auf diese Weise zerfällt die Ausgangsfigur in geschlossene Graphen, die projektionsunabhängigen $(3n)j$-Symbolen entsprechen, und Graphen mit freien Enden, von denen projektionsabhängige Faktoren abgespaltet werden können. Zum Beispiel gilt

$$\begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_4 & j_5 & j_6 \end{Bmatrix} =$$

[Graph: Kasten mit freien Pfeilen $j_1 \leftarrow m_1$, $j_2 \leftarrow m_2$, $j_3 \leftarrow m_3$] $=$ [Kasten, dessen Linien j_1, j_2, j_3 in einem Knoten $+$ zusammenlaufen] $\cdot$ [Knoten $-$ mit herauslaufenden Pfeilen $j_1\ m_1$, $j_2\ m_2$, $j_3\ m_3$]

Eine ausführliche Darlegung der graphischen Methode für Drehimpulskopplungen findet man zusammen mit einem vollständigen Regelwerk und Anwendungsbeispielen in DÖNAU, F.; FLACH, G.: Gruppentheoretische Methoden im Schalenmodell der Kerne, Bd. II. — Berlin: Akademie-Verlag 1969.

A 5. Drehmatrizen

1. Wir betrachten eine beliebige dreidimensionale Drehung R, die ein Koordinatensystem $K(x, y, z)$ in ein neues Koordinatensystem $K'(x', y', z')$ überführt. Eine solche endliche Drehung läßt sich durch die Angabe von drei Eulerschen Winkeln (α, β, γ) parametrisieren, wobei man sich die Transformation $K(x, y, z) \to K'(x', y', z')$ in drei Schritten ausgeführt denkt (siehe

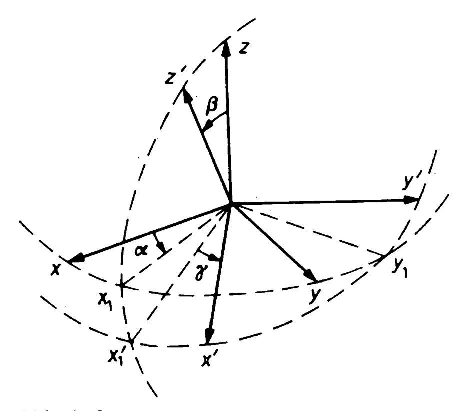


Abb. A. 3
Definition der Eulerschen Winkel

Abb. A. 3). Der erste Schritt ist eine Drehung um den Winkel α um die z-Achse, $K(x, y, z) \to K_1(x_1, y_1, z)$. Im zweiten Schritt erfolgt eine Drehung um den Winkel β um die neue y-Achse, $K_1(x_1, y_1, z) \to K_2(x_1', y_1, z')$. Die dritte Drehung um den Winkel γ um z'-Achse führt zum Koordinatensystem $K'(x', y', z')$, $K_2(x_1', y_1, z') \to K'(x', y', z')$.

2. Nach dieser Festlegung der Eulerschen Winkel ist der zugehörige Drehoperator $R(\alpha, \beta, \gamma)$ gegeben durch ein Produkt aus drei Operatoren, die nur von dem jeweiligen Drehwinkel und der entsprechenden Komponente des Drehimpulsoperators abhängen,

$$\begin{aligned} R(\alpha, \beta, \gamma) &= R(\gamma)\, R(\beta)\, R(\alpha) \\ &= \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\gamma L_{z'}}\, \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\beta L_{y_1}}\, \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\alpha L_z} \end{aligned} \tag{A.33}$$

Es läßt sich zeigen, daß R durch unitäre Transformationen auf die Form

$$R(\alpha, \beta, \gamma) = \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\gamma L_z}\, \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\beta L_y}\, \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\alpha L_z} \tag{A.34}$$

gebracht werden kann. Dabei sind L_y, L_z die y- bzw. z-Komponente des Drehimpulsoperators $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}$.

3. Wir untersuchen, wie sich die Drehimpulseigenfunktionen $\Phi = |lm\rangle_K$ bei Drehungen des Koordinatensystems $K \to K'$ verhalten. Die Funktion Φ' im neuen Koordinatensystem ergibt sich durch Anwendung des Drehoperators, $\Phi' = R(\alpha, \beta, \gamma)\, |lm\rangle_K$. Da der Operator $\boldsymbol{L}^2$ mit allen Komponenten L_x, L_y, L_z vertauschbar ist, kommutiert er auch mit dem Drehoperator R, so daß die Funktion im gedrehten Koordinatensystem wiederum Eigenfunktion von $\boldsymbol{L}^2$ zum gleichen Eigenwert l ist. Andererseits kommutiert der Operator L_z nicht mit dem Drehoperator, da in R der Operator L_y eingeht, so daß Φ' eine Linearkombination der Eigenfunktionen $|lm'\rangle_{K'}$ von $L_{z'}$ in K' wird. Es gilt

$$|lm\rangle_{K'} = \sum_{m'} \langle lm'|\, R(\alpha, \beta, \gamma)\, |lm\rangle\; |lm'\rangle_K\,. \tag{A.35}$$

Die Matrixelemente $\langle lm'|\, R\, |lm\rangle$ des Drehoperators bezeichnet man als Wignersche D-Funktion,

$$D^l_{m'm}(\alpha, \beta, \gamma) = \langle lm'|\, R(\alpha, \beta, \gamma)\, |lm\rangle\,. \tag{A.36}$$

Wegen $L_z |lm\rangle = \hbar m |lm\rangle, e^{-\frac{i}{\hbar}\alpha L_z} |lm\rangle = e^{-i\alpha m} |lm\rangle$ hängt die D-Funktion nur über eine Phasenbeziehung von den Winkeln γ, α ab,

$$D^l_{m'm}(\alpha, \beta, \gamma) = e^{-i\gamma m'} \langle lm'| e^{-\frac{i}{\hbar}\beta L_y} |lm\rangle e^{-i\alpha m} \equiv e^{-i(\gamma m' + \alpha m)} d^l_{m'm}(\beta) . \tag{A. 37}$$

Die verbleibenden (reellen) Funktionen $d^l_{m'm}(\beta) = \langle lm'| e^{-\frac{i}{\hbar}\beta L_y} |lm\rangle$ lassen sich ebenfalls explizit angeben. Bei festem l-Wert können die Funktionen $D^l_{m'm}$ zu einer Drehmatrix (D) zusammengefaßt werden, die bestimmten Drehwinkeln, also einem bestimmten Element der Drehgruppe zugeordnet ist. Auf diese Weise läßt sich eine $(2l + 1)$-dimensionale Darstellung der Drehgruppe gewinnen.

4. Die Drehmatrizen sind unitär, $D^+ = D^{-1}$, wobei die inverse Matrix D^{-1} der Umkehrtransformation entspricht,

$$D^+(\alpha, \beta, \gamma) = D^{-1}(\alpha, \beta, \gamma) = D(-\gamma, -\beta, -\alpha) . \tag{A. 38}$$

Folglich bedeutet die komplexe Konjugation der D-Funktionen

$$(D^l_{m'm}(\alpha, \beta, \gamma))^* = D^l_{mm'}(-\gamma, -\beta, -\alpha) . \tag{A. 39}$$

Für $m = 0$ (oder $m' = 0$) reduziert sich die D-Funktion auf eine Kugelfunktion

$$D^l_{m0}(\alpha, \beta, \gamma) = \left(\frac{4\pi}{2l + 1}\right)^{1/2} Y^{m*}_l(\beta, \alpha) . \tag{A. 40}$$

Die D-Funktionen bilden ein vollständiges Orthogonalsystem im Raum der von den Eulerschen Winkeln abhängigen Funktionen mit folgender Normierung

$$\int_0^\pi d\beta \sin \beta \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^{2\pi} d\gamma (D^l_{m'm}(\alpha, \beta, \gamma))^* D^{l'}_{n'n}(\alpha, \beta, \gamma) = \frac{8\pi^2}{2l + 1} \delta_{mn}\delta_{m'n'}\delta_{ll'} . \tag{A. 41}$$

Wir verweisen darauf, daß für die D-Funktionen eine Reihe von Symmetrierelationen gelten, die bei praktischen Rechnungen nützlich sind. Außerdem ist zu beachten, daß die Phasenwahl bei der Einführung der D-Funktionen in der Literatur nicht einheitlich gehandhabt wird.

5. Die Funktionen

$$|LMK\rangle = \sqrt{\frac{2L + 1}{8\pi^2}} D^L_{MK}(\alpha, \beta, \gamma) \tag{A. 42}$$

sind Eigenfunktionen zum Quadrat und zur z-Komponente des Drehimpulsoperators, bezogen auf das Koordinatensystem $K(x, y, z)$,

$$\boldsymbol{L}^2 |LMK\rangle = \hbar^2 L(L + 1) |LMK\rangle , \qquad L_z |LMK\rangle = \hbar M |LMK\rangle . \tag{A. 43}$$

Die Eigenwerte sind $\hbar^2 L(L + 1)$ bzw. $\hbar M$. Faßt man die kartesischen Komponenten L_x, L_y, L_z zu einem sphärischen Tensor vom Rang 1 zusammen,

$$(L_\mu) = (L_{-1}, L_0, L_1) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} (L_x - iL_y), L_z, -\frac{1}{\sqrt{2}} (L_x + iL_y)\right), \tag{A. 44}$$

dann kann der Drehimpulsoperator $\boldsymbol{I}$ im gedrehten Koordinatensystem nach (A. 35) angegeben werden:

$$I_\mu = \sum_\mu D^1_{\mu'\mu}(\alpha, \beta, \gamma)\, L_{\mu'} \,. \tag{A. 45}$$

Es läßt sich zeigen, daß die Funktionen $|LMK\rangle$ Eigenfunktionen zur Komponente I_3 des Drehimpulsoperators im gedrehten Koordinatensystem sind

$$I_3\,|LMK\rangle = \hbar K\,|LMK\rangle \,. \tag{A. 46}$$

Die Eigenwerte sind $\hbar K$. Die Quantenzahl K bedeutet die Projektion des Drehimpulses $\boldsymbol{L}$ auf eine zweite ausgezeichnete Raumrichtung im gedrehten System.

A 6. Irreduzible sphärische Tensoren. Wigner-Eckart-Theorem

1. Einen Operator T mit $2L + 1$ Komponenten T_{LM}, die sich bei einer Drehung $R(\alpha, \beta, \gamma)$ des Koordinatensystems untereinander transformieren wie die Kugelfunktionen Y_L^M, bezeichnet man als irreduziblen sphärischen Tensor vom Rang L,

$$T'_{LM} = \sum_{M'} D^L_{M'M}(\alpha, \beta, \gamma)\, T_{LM} \,. \tag{A. 47}$$

Diese Beziehung drückt die Komponenten von T' im gedrehten Koordinatensystem K' durch die Komponenten im ursprünglichen Koordinatensystem K aus.

Wir betrachten Matrixelemente eines sphärischen Tenors mit Wellenfunktionen ψ_{jm}, die Eigenfunktionen der Drehimpulsoperatoren $\boldsymbol{j}^2$, j_z sind. Die mathematische Grundlage für die praktische Auswertung solcher Matrixelemente bildet das Wigner-Eckart-Theorem. Nach diesem Theorem läßt sich das Matrixelement $\langle\psi_{j'm'}|\,T_{LM}\,|\psi_{jm}\rangle$ in zwei Anteile faktorisieren,

$$\langle\psi_{j'm'}|\,T_{LM}\,|\psi_{jm}\rangle = (jmLM\,|\,j'm')\,\langle j'\|\,T_L\,\|j\rangle \,. \tag{A. 48}$$

Der erste Faktor ist ein Clebsch-Gordan-Koeffizient, der die Drehimpulserhaltung liefert. Er enthält vollständig die Abhängigkeit des Matrixelements von den Projektionsquantenzahlen m, M, m', d. h. von der Orientierung des Systems. Der zweite Faktor $\langle j'\|\,T_L\,\|j\rangle$ wird als reduziertes Matrixelement bezeichnet. Das reduzierte Matrixelement hängt nur von den Beträgen der Drehimpulse j, L, j' ab; es enthält die dynamischen Eigenschaften des Systems. Da der Drehimpuls eine Erhaltungsgröße ist, bedeutet das Wigner-Eckart-Theorem auch: durch den Operator T_{LM} kann auf einen Zustand ψ_{jm} nur ein Drehimpuls übertragen werden, der den Auswahlregeln

$$\boldsymbol{j} + \boldsymbol{L} = \boldsymbol{j}' \,, \qquad |j - L| \leqq j' \leqq j + L \,, \qquad m + M = m' \tag{A. 49}$$

genügt, ansonsten verschwindet das Matrixelement.

2. Das reduzierte Matrixelement $\langle j'\|\,T_L\,\|j\rangle$ läßt sich berechnen, indem man das Gesamtmatrixelement $\langle\psi_{j'm'}|\,T_{LM}\,|\psi_{jm}\rangle$ bestimmt und den Clebsch-Gordan-Koeffizienten $(jmLM\,|\,j'm')$ abtrennt. Als Beispiel betrachten wir das Integral über drei Kugelfunktionen ($T_{LM} \equiv Y_L^M$),

$$\langle l'm'|\,Y_L^M\,|lm\rangle = \int \mathrm{d}\Omega\; Y_{l'}^{m'*}(\vartheta, \varphi)\, Y_L^M(\vartheta, \varphi)\, Y_l^m(\vartheta, \varphi) \,. \tag{A. 50}$$

Setzt man in (A.50) den Ausdruck

$$Y_L^M Y_l^m = \sum_\lambda Y_\lambda^\mu \cdot (lmLM\,|\,\lambda\mu)\,(l0L0\,|\,l'0)\,\sqrt{\frac{(2l+1)\,(2L+1)}{4\pi(2\lambda+1)}} \tag{A. 51}$$

ein, dann folgt aus der Orthogonalität der Kugelfunktionen

$$\langle l'm' \,|Y_L^M|\, lm\rangle = (lm\,LM\,|\,l'm')\,\langle l' \,\|\, Y_L \,\|\, l\rangle \tag{A.52}$$

mit dem reduzierten Matrixelement

$$\langle l' \| \, Y_L \, \| l\rangle = \sqrt{\frac{(2l+1)(2L+1)}{4\pi(2l'+1)}}\,(l0L0\,|\,l'0)\,. \tag{A. 53}$$

Der spezielle Clebsch-Gordan-Koeffizient $(l0L0 \mid l'0)$ ist nur dann von Null verschieden, wenn die Summe der Drehimpulse $l + L + l'$ ganzzahlig ist. Damit garantiert er die Paritätserhaltung, $(-1)^{l+L} = (-1)^{l'}$.

Literaturhinweise zu Anhang A
Bri 62, Dav 63, Edm 57, Ros 57, Var 75

Anhang B. Stoßprozesse und elastische Streuung

B 1. Einführende Betrachtungen

1. Die Umwandlungen der Kern- und Elementarteilchenphysik stellen Stoß- und Zerfallsprozesse von Mikroteilchen dar. Sie erfolgen in einer Wechselwirkungszone, die innerhalb der Reichweite der den Vorgang beeinflussenden Wechselwirkungsart liegt, d. h. innerhalb der Reichweite der starken, elektromagnetischen oder schwachen Wechselwirkung. Derartige Umwandlungsprozesse lassen sich durch ein Schema darstellen, wie es die Abb. B. 1 zeigt. Im Anfangszustand gibt es zwei freie, zunächst nicht miteinander wechselwirkende Teilchen X_1 und X_2. Im Falle eines spontanen Zerfalls ist es nur ein Teilchen X_0. Der Umwandlungs- oder Wechselwirkungsprozeß läuft in der bereits erwähnten Wechselwirkungszone ab. Oft reicht es aus, nicht genauer zu untersuchen, was im Detail in der Wechselwirkungszone vor sich geht. Man betrachtet sie dann als „schwarzen Kasten". Genauer erfaßt wird erst wieder der Endzustand mit im allgemeinen n freien, nicht miteinander wechselwirkenden Reaktions- oder Zerfallsprodukten X_3 bis X_n. Diese Umwandlung wird durch die Reaktionsgleichung

$$X_1 + X_2 \rightarrow X_3 + X_4 + \cdots X_n; \qquad X_2(X_1, X_i)\,X_3 \tag{B. 1}$$

beschrieben. Die elastische Streuung ist der Spezialfall mit der Reaktionsgleichung $X_2(X_1, X_1)\,X_2$. Eine Beschreibung über den Anfangs- und den Endzustand kann über die Erhaltungssätze erfolgen, ohne daß über die speziellen Vorgänge im schwarzen Kasten genauere Annahmen gemacht werden müssen. Die hieraus folgenden kinematischen Gesetze gelten genau so streng, wie die Erhaltungssätze selbst.

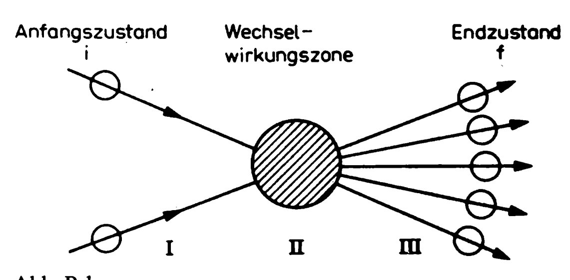


Abb. B.1
Schematische Darstellung des Eingangs- und der Ausgangskanäle einer Kernreaktion

2. In der kernphysikalischen Praxis und ebenso in der Elementarteilchenphysik spielt die Kinematik der Kernreaktionen eine große Rolle. Ihre Kenntnis ist sowohl bei der Planung von Experimenten als auch bei ihrer Auswertung erforderlich. Man benötigt die kinematischen Daten, d. h. die Impulse und Energien der Reaktionsprodukte als Funktionen von der Einschußenergie und vom Emissionswinkel, z. B. zur Auswahl und Konstruktion der Detektoren und Spektrometer, zur Erarbeitung der Bedingungen für die Trennung verschiedener Reaktionskanäle und -produkte oder zur Vorhersage der Teilchenspektren. Bei der Auswertung ist die

Reaktionskinematik zur Eliminierung von Untergrundeffekten, der Spektrenanalyse, der Berechnung von Q-Werten, der Identifikation neuer Nuklide, Niveaus oder Elementarteilchen unumgängliche Voraussetzung. Die Kenntnis der Reaktionskinematik gestattet ferner Aussagen über den Reaktionsmechanismus, über den Zwei- oder Mehrteilchencharakter in den Ausgangskanälen zu machen. Bei Mehrteilchenreaktionen gibt die Auswahl geeigneter kinematischer Parameter für die Experimente Möglichkeiten zur Untersuchung des Reaktionsmechanismus. Diese hier für die Kern- oder Elementarteilchenreaktionen formulierten Gedanken gelten ganz allgemein für alle Kernumwandlungen, d. h. auch für die Kern- und Elementarteilchenzerfälle.

B 2. Relativistische Energien und Impulse

Die in der Kern- und Elementarteilchenphysik zu betrachtenden Teilchen können relativistische Energien und Geschwindigkeiten haben. Es ist wichtig zu wissen, wie die relativistische Bewegung beschrieben wird, wie sich relativistische von nichtrelativistischen Effekten unterscheiden, unter welchen Bedingungen relativistische Effekte vernachlässigt werden können und welche Extremfälle es gibt. Zu diesem Zwecke tragen wir einige wichtige Beziehungen aus der relativistischen Mechanik zusammen.

1. Die Gesamtenergie E eines freien relativistischen Teilchens hängt mit seinem Impuls p und seiner Ruhmasse m_0 gemäß

$$E = \sqrt{(cp)^2 + (m_0 c)^2} = \sqrt{(cp)^2 + E_0^2} \tag{B.2}$$

zusammen. Für $p = 0$ ergibt sich die Ruhenergie E_0. Die Gesamtenergie setzt sich aus der kinetischen und der Ruhenergie zusammen. Daher gilt für die kinetische Energie

$$E_k = E - E_0 = \sqrt{(cp)^2 + E_0^2} - E_0 . \tag{B. 3a}$$

Im ultrarelativistischen Falle, wenn $c\,|\boldsymbol{p}| \gg E_0$ ist, kann man E_0 und E_0^2 in (B. 3a) vernachlässigen und erhält

$$E_k = c\,|\boldsymbol{p}| . \tag{B. 3b}$$

Kinetische Energie und Impuls sind hier direkt zueinander proportional. Im nichtrelativistischen Falle mit $c\,|\boldsymbol{p}| \ll E_0$ kann man den Wurzelausdruck in (B. 3a) in eine Reihe entwickeln und erhält nach Umformung

$$E_k = E_0 \sqrt{1 + \frac{(cp)^2}{E_0^2}} - E_0 \approx \frac{p^2}{2m_0} = \frac{p^2c^2}{2E_0} . \tag{B. 3c}$$

Das ist der aus der klassischen Mechanik wohlbekannte Zusammenhang, demgemäß die kinetische Energie proportional ist zum Quadrat des Impulses.

2. Für die Abhängigkeit des Impulses von der Energie folgt aus (B. 3a)

$$cp = \sqrt{E^2 - E_0^2} = E_0 \sqrt{\left(\frac{E_k}{E_0}\right)^2 + 2\left(\frac{E_k}{E_0}\right)} = \sqrt{E_k(E_k + 2E_0)} . \tag{B.4}$$

Auf der Grundlage von (B. 3b, 4) gibt man den Impuls oft in Einheiten von E_k/c an, z. B. in MeV/c oder GeV/c.

3. Die Geschwindigkeit als Funktion von der Energie kann auf der Grundlage der bekannten Beziehung

$$E = mc^2 = \frac{E_0}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} = \frac{E_0}{\sqrt{1-\beta^2}} = E_0\gamma \tag{B. 5}$$

mit

$$\beta = \frac{v}{c} = \frac{\sqrt{\gamma^2-1}}{\gamma}, \tag{B. 6}$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{E}{E_0} \tag{B. 7}$$

berechnet werden. Für die kinetische Energie folgt damit die Beziehung

$$E_k = (\gamma - 1)\, E_0\,. \tag{B. 8}$$

Aus dem relativistischen Impuls

$$p = mv = m_0\gamma v = \frac{E_0}{c}\,\beta\gamma = \beta\gamma m_0 c = \frac{E_0}{c}\sqrt{\gamma^2-1} \tag{B. 9a}$$

oder

$$cp = \beta\gamma E_0 \tag{B. 9b}$$

erhält man

$$v = \frac{p}{m} = \frac{pc^2}{E} = \frac{pc^2}{\sqrt{(cp)^2+E_0^2}} = \frac{c}{\sqrt{1+\left(\frac{E_0}{cp}\right)^2}}\,. \tag{B. 10}$$

Damit folgt

$$\beta = \frac{cp}{E} = \sqrt{1-\left(\frac{E_0}{E}\right)^2} = \frac{\sqrt{E_k(E_k+2E_0)}}{E_k+E_0}\,. \tag{B. 11}$$

Aus (B. 10) ergibt sich für $E_0 \neq 0$, daß immer $|\boldsymbol{v}| < c$ und daß $|\boldsymbol{v}| = c$ nur für $p \to \infty$ möglich ist. Bei den ruhmasselosen Teilchen wie Photonen und Neutrinos ist $E_0 = 0$. Für sie ergibt sich $v = c$ und

$$E = |\boldsymbol{p}|\, c\,. \tag{B. 12}$$

4. Relativistische Effekte können vernachlässigt werden, wenn die Ungleichungen

$$\beta \ll 1 \quad \text{oder} \quad p \ll E_0/c \quad \text{oder} \quad E/E_0 \ll 1\,. \tag{B. 13}$$

gelten. In der Elementarteilchenphysik sind diese Bedingungen selten erfüllt. Meist ist dort $\beta \lesssim 1$ und $E/E_0 > 1$. Anders ist das in der Kernphysik. In vielen Fällen sind β und E/E_0 von der Größenordnung 10^{-1} bis 10^{-3}. Daher lassen sich relativistische Effekte oft entweder vernachlässigen oder als Korrekturen behandeln.

5. Energie und Impuls können im Energie-Impuls-Vierervektor zusammengefaßt werden:

$$p = (p_0 \cdot p_1 \cdot p_2 \cdot p_3) = \left(\frac{E_0}{c},\, \boldsymbol{p}\right), \tag{B. 14}$$

$$p_0 = \frac{E}{c}, \qquad p_1 = p_x, \qquad p_2 = p_y, \qquad p_3 = p_z\,. \tag{B. 14}$$

Angenommen E und p beziehen sich auf ein Teilchen in einem gegebenen System, z. B. dem Laborsystem, dann findet man die Werte E', p' in einem anderen System, das sich

mit der Geschwindigkeit β' entlang der z-Achse bewegt durch die Lorentz-Transformation für den Vierervektor

$$\begin{pmatrix} p_0' \\ p_1' \\ p_2' \\ p_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma' & 0 & 0 & -\beta'\gamma' \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta'\gamma' & 0 & 0 & \gamma' \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}. \tag{B. 15}$$

Das invariante Quadrat des Energie-Impulsvektors ergibt

$$p^2 = p_0^2 - \boldsymbol{p}^2 = \gamma^2 m_0^2 c^2 - \gamma^2 \beta^2 m_0^2 c^2 = m_0^2 c^2 \tag{B. 16}$$

in allen Lorentz-Systemen. Die Vierervektorschreibweise und die Invarianten der Vierervektoren sind von großem Nutzen für viele einfache kinematische Rechnungen, wie z. B. zur Berechnung von Reaktionsschwellen, Zweiteilchenzerfällen, Beziehungen zwischen Laborsystem und Massenmittelpunktsystem (siehe auch 2.5.).

6. Eine andere wichtige Invariante der relativistischen Mechanik ist das Quadrat der Ruhenergie. Sie ist von der Wahl des Inertialsystems unabhängig. Durch Quadrieren von (B. 2) erhält man

$$E_0^2 = E^2 - (cp)^2 = m_0^2 c^4 = \text{invariant}. \tag{B. 17}$$

Wichtige Inertialsysteme sind wieder das Labor- und das Massenmittelpunktsystem.

B 3. Stoßkinematik

B 3.1. Labor- und Massenmittelpunktsystem

1. Zur rechnerischen Erfassung von Kern- und Elementarteilchenumwandlungen ist es notwendig, neben dem Laborsystem (L-System) noch das Massenmittelpunktsystem (M-System) zu verwenden. Beide sind in Abb. B. 2 für den Stoß zwischen zwei Teilchen im Eingangs- und zwei Teilchen im Ausgangskanal dargestellt. Die x-Achse ist in die Richtung des Gesamtimpulses der Teilchen des Eingangskanals gelegt.

Das L-System ist sehr anschaulich, da in ihm alle Meßgrößen gewonnen werden. Das M-System hat eine Reihe von Vorteilen für die Auswertung von Experimenten. Sie beruhen darauf, daß der Massenmittelpunkt in ihm ruht. Bei der physikalischen Auswertung stört die Bewegung des Massenmittelpunktes. Man kann sie später berücksichtigen, wenn die physikalisch gedeuteten Ergebnisse ins L-System zurücktransformiert werden.

Wir nehmen an, daß sich das Stoß- oder Inzidenzteilchen im L-System entlang der x-Achse bewege und daß das Targetteilchen in diesem System ruht. Es gelten dann die folgenden Bezeichnungen im L-System:

$$m_1, E_{01}, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{p}_1, E_{k1}, \beta, \gamma \quad \text{und} \quad m_2, E_{02}; \quad \boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{p}_2 = E_{k2} = \beta_2 = 0; \quad \gamma_2 = 1. \tag{B. 18}$$

Im M-System bewegen sich dann beide mit

$$\boldsymbol{v}_1^{(M)}, \boldsymbol{p}_1^{(M)}, E_{k1}^{(M)}, \boldsymbol{\beta}_1^{(M)}, \gamma_1^{(M)} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{v}_2^{(M)}, \boldsymbol{p}_2^{(M)}, E_{k2}^{(M)}, \boldsymbol{\beta}_2^{(M)}, \gamma_2^{(M)} \tag{B. 19}$$

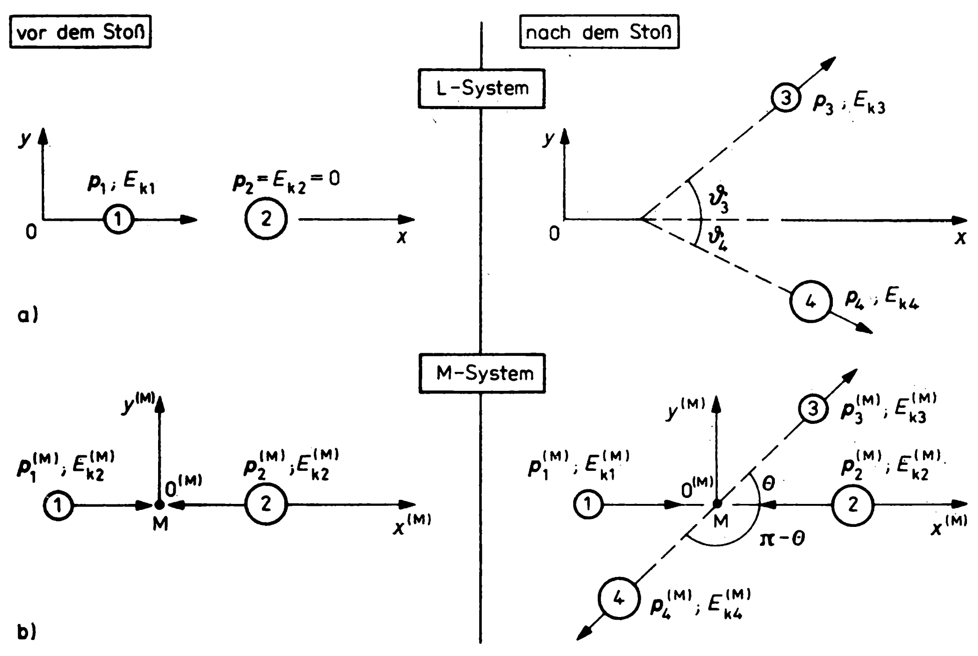


Abb. B.2
Kinematische Größen a) im Labor- und b) im Massenmittelpunktsystem

aufeinander zu. Damit der Massenmittelpunkt eine Erhaltungsgröße ist, sich also im M-System nicht bewegt, muß gefordert werden, daß die Summe der Impulse sowohl vor als auch nach dem Stoß verschwindet. In Übereinstimmung mit (B. 1) gilt

$$\boldsymbol{p}_1^{(M)} + \boldsymbol{p}_2^{(M)} = \boldsymbol{p}_3^{(M)} + \boldsymbol{p}_4^{(M)} = 0 . \tag{B.20a}$$

Also ist

$$|\boldsymbol{p}_1^{(M)}| = |-\boldsymbol{p}_2^{(M)}| = |\boldsymbol{p}_i^{(M)}| ; \qquad |\boldsymbol{p}_3^{(M)}| = |-\boldsymbol{p}_4^{(M)}| = |\boldsymbol{p}_j^{(M)}| \tag{B.20b}$$

mit

$$p_i^{(M)} = \frac{E_{0i}}{c} \beta_i^{(M)} \gamma_i^{(M)} ; \qquad p_j^{(M)} = \frac{E_{0j}}{c} \beta_j^{(M)} \gamma_j^{(M)} \tag{B.21}$$

$$\beta_i^{(M)} = \frac{v_i^{(M)}}{c} ; \qquad \beta_j^{(M)} = \frac{v_j^{(M)}}{c} \tag{B.22}$$

$$\gamma_i^{(M)} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta_i^{(M)2}}} ; \qquad \gamma_j^{(M)} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta_j^{(M)2}}} \tag{B.23}$$

und $i = 1, 2$ sowie $j = 3, 4$. Diese Gleichungen gelten allgemein für den Stoß. Im Spezialfall der elastischen Streuung bleibt der Absolutbetrag des Teilchenimpulses im M-System vor und nach dem Stoß erhalten; nur die Richtung ändert sich:

$$|\boldsymbol{p}_1^{(M)}| = |\boldsymbol{p}_3^{(M)}| = |-\boldsymbol{p}_2^{(M)}| = |-\boldsymbol{p}_4^{(M)}| . \tag{B.24}$$

Im Ergebnis führt die elastische Streuung im M-System nur zu einer Impulsumkehr der Teilchen und, wie das allgemein der Fall ist, zu einer Änderung der Impulsrichtungen im L-System. Wenn die Winkel im L-System nach dem Stoß ϑ_3 und ϑ_4 sind, dann entsprechen ihnen bei elastischer Streuung im M-System die Winkel Θ und $\pi - \Theta$. Praktisch tritt also im M-System nur der eine Winkel Θ auf. Hat man die Gleichungen für ein Teilchen im Ausgangskanal berechnet, dann erhält man die für das andere durch Vertauschen der Indizes und indem man $\cos\Theta$ durch $-\cos\Theta$ ersetzt.

Die Benutzung des M-Systems ist gleichbedeutend mit der Zurückführung des Zweikörperproblems im Eingangskanal einer Reaktion auf ein Einkörperproblem. Es werden nicht nur die Winkel ϑ_3 und ϑ_4 durch Θ ersetzt. Hinzu kommt, daß die Bewegung des Massenmittelpunktes mit der Geschwindigkeit V die Bewegung des gesamten Teilchensystems beschreibt und in diesem Sinne ist der Massenmittelpunkt als fiktives Teilchen mit Energie, Impuls und Ruhenergie,

$$E_M = \sum_i E_i; \qquad p_M = \sum_i p_i; \qquad \sqrt{\left(\sum_i E_i\right)^2 - \left(c \sum_i p_i\right)^2}, \tag{B. 25}$$

aufzufassen. Seine Geschwindigkeit berechnet man mit (B. 10) zu

$$V = \frac{p_M c^2}{E_M} = \frac{p_1 c^2}{E_1 + E_{02}} = \frac{c\sqrt{E_1^2 - E_{01}^2}}{E_1 + E_{02}}. \tag{B. 26}$$

Mit

$$k = \frac{E_{01}}{E_{02}}, \tag{B. 27}$$

ergibt sich

$$\beta_M = \frac{V}{c} = \frac{\sqrt{\gamma^2 - 1}}{\gamma + k^{-1}}, \tag{B. 28}$$

$$\gamma_M = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta_M^2}} = \frac{E_1 + E_{01}}{\sqrt{2E_1E_{01} + E_{01}^2 + E_{02}^2}} = \frac{\gamma + k^{-1}}{\sqrt{1 + 2\gamma k^{-1} + k^{-2}}}. \tag{B. 29}$$

Für den nichtrelativistischen Fall mit

$$\gamma = 1 \quad \text{und} \quad E_1 = \frac{m_1}{2} v_1^2 + E_{01} \gtrsim E_{01} \tag{B. 30}$$

erhält man

$$V\left(\frac{E_{k1}}{E_{01}} \ll 1\right) = v_1 \frac{E_{01}}{E_{01} + E_{02}} = v_1 \mu_1 \tag{B. 31}$$

mit

$$\mu_1 = \frac{E_{01}}{E_{01} + E_{02}}; \tag{B. 32a}$$

$$\mu c^2 = \frac{E_{01}E_{02}}{E_{01} + E_{02}}. \tag{B. 32b}$$

Die kinetische Energie des Massenmittelpunktes beträgt

$$E_k^{(M)} = \frac{E_{01} + E_{02}}{2c^2} V^2 = \frac{E_{01}E_{k1}}{E_{01} + E_{02}}. \tag{B. 33}$$

Im ultrarelativistischen Grenzfall mit

$$E_{k1} \gg E_{01}; \qquad 0 \neq E_{02} \ll E_{01} \tag{B. 34}$$

ergibt sich

$$\gamma_M \approx \sqrt{\frac{E_1}{2E_{02}}}; \qquad \gamma \approx 2\gamma_M^2 k^{-1}. \tag{B. 35}$$

2. Die Benutzung des L- und M-Systems erfordert die Kenntnis der Umrechnungsbeziehungen zwischen den Impulsen, Energien, Winkeln und Wirkungsquerschnitten in ihnen. Da relativistische Geschwindigkeiten nicht ausgeschlossen werden können und L- und M-System Inertialsysteme sind, die sich mit konstanter Geschwindigkeit gegeneinander bewegen, erfolgt die Umrechnung mit Hilfe der Lorentz-Transformation. Entsprechend unserer Vereinbarung bewegen sich L- und M-System mit V relativ zueinander nur in x- und $x^{(M)}$-Richtung, die beide zusammenfallen sollen. Dann ergeben sich die folgenden Komponentengleichungen der Lorentz-Transformation in der x,y-Ebene:

$$E = [E^{(M)} + Vp_x^{(M)}]\,\gamma_M, \tag{B. 36a}$$

$$p_x = \left[p_x^{(M)} + \frac{V}{c^2}E^{(M)}\right]\gamma_M; \tag{B. 36b}$$

$$p_y = p_y^{(M)} \tag{B. 36c}$$

$$E^{(M)} = [E - Vp_x]\,\gamma_M, \tag{B. 37a}$$

$$p_x^{(M)} = \left[p_x - \frac{V}{c^2}E\right]\gamma_M; \tag{B. 37b}$$

$$p_y^{(M)} = p_y. \tag{B. 37c}$$

Mit Hilfe von (B. 37) lassen sich die Energien, Impulse und Lorentz-Faktoren im M-System berechnen. Man erhält

$$E_1^{(M)} = \frac{E_1E_{02} + E_{01}^2}{\sqrt{2E_1E_{02} + E_{01}^2 + E_{02}^2}} = \frac{E_{01}(\gamma k^{-1} + 1)}{\sqrt{1 + 2\gamma k^{-1} + k^{-2}}}, \tag{B. 38a}$$

$$E_2^{(M)} = \frac{E_1E_{02} + E_{02}^2}{\sqrt{2E_1E_{02} + E_{01}^2 + E_{02}^2}} = \frac{E_{01}(\gamma k^{-1} + k^{-2})}{\sqrt{1 + 2\gamma k^{-1} + k^{-2}}}, \tag{B. 38b}$$

$$\gamma_1^{(M)} = \frac{1 + \gamma k^{-1}}{\sqrt{1 + 2\gamma k^{-1} + k^{-2}}}; \qquad \gamma_2^{(M)} = \gamma_M, \tag{B. 39a, b}$$

$$p_1^{(M)} = p_2^{(M)} = \frac{p_1E_{02}}{\sqrt{2E_1E_{02} + E_{01}^2 + E_{02}^2}} = \frac{E_{02}}{c}\,\frac{\sqrt{\gamma^2 - 1}}{\sqrt{1 + 2\gamma k^{-1} + k^{-2}}}. \tag{B. 40}$$

Im ultrarelativistischen Grenzfalle (B. 34) wird

$$E_1^{(M)} = E_2^{(M)} = cp_1^{(M)} = cp_2^{(M)} = \sqrt{\frac{E_1E_{02}}{2}} = \sqrt{\gamma\,\frac{E_{01}E_{02}}{2}}, \tag{B. 41a}$$

$$\gamma_1^{(M)} = \sqrt{\frac{\gamma}{2}k^{-1}}; \qquad \gamma_2^{(M)} = \sqrt{\frac{\gamma}{2}k}. \tag{B. 41b}$$

3. Die Energie des gestoßenen Teilchens im L-System erhält man durch Rücktransformation mit Hilfe von (B. 36). Das Ergebnis hängt von der Art des Stoßes ab, davon, ob es eine elastische

oder unelastische Streuung, eine Kernreaktion mit der Bildung neuer Teilchen ist, oder ob der Zerfall eines Teilchens vorliegt. Im Falle der elastischen Streuung liefert (B. 36)

$$E_2' = E_{02} + E_{02} \frac{E_1^2 - E_{01}^2}{2E_1E_{02} + E_{01}^2 + E_{02}^2} (1 - \cos\Theta) . \qquad \text{(B. 42a)}$$

Das zweite Glied stellt die dem gestoßenen Teilchen übertragene Energie dar. Die größte Energieübertragung ergibt sich für $\Theta = \pi$. Das ist der Fall des zentralen Stoßes. Mit $1 - \cos\pi = 2$ folgt

$$E'_{2\,\max} = E_{02} + \frac{2E_{02}(E_1^2 - E_{01}^2)}{2E_1E_{02} + E_{01}^2 + E_{02}^2} = E_{02} + E'_{k2\,\max} . \qquad \text{(B. 42b)}$$

Der maximale Anteil an kinetischer Energie, der vom Stoßteilchen auf das Targetteilchen übertragen werden kann, beträgt unter Berücksichtigung von (B. 42) und (B. 8)

$$\frac{E'_{k2\,\max}}{E_{k1}} = \frac{2E_{01}E_{02}(1 + \gamma)}{E_{01}^2 + 2\gamma E_{02}E_{01} + E_{02}^2} . \qquad \text{(B. 43a)}$$

Im nichtrelativistischen Falle mit $\gamma = 1$ wird

$$\frac{E'_{k2\,\max}}{E_{k1}} = \frac{4E_{01}E_{02}}{(E_{01} + E_{02})^2} = \alpha . \qquad \text{(B. 43b)}$$

In den drei Spezialfällen $E_{01} \ll E_{02}$; $E_{01} = E_{02}$ und $E_{01} \gg E_{02}$ ergibt sich $4E_{01}/E_{02}$, 1 und $4E_{02}/E_{01}$. Ganz andere Werte erhält man im ultrarelativistischen Falle mit $\gamma \gg 1$. Mit wachsendem E_{k1} geht (B. 43a) ausgehend von α bis hin zu 1 über. Das gilt auch für die drei Spezialfälle.

Die Energie des Teilchens 1 im L-System nach dem Stoß erhält man wegen Energieerhaltung aus

$$E_1' = E_1 - E_2' . \qquad \text{(B. 44)}$$

4. Die Energien und Impulse der Zweiteilchenreaktion mit X_1, X_2, X_3 und X_4 gemäß (B. 1) werden analog zu den bereits für den Eingangskanal bzw. die elastische Streuung gewonnenen Gleichungen hergeleitet. Die Ausdrücke sind allerdings weit komplizierter. Man führt daher neue Variable s und t, die Mandelstam-Variablen ein (2.32), um einfachere Ausdrücke zu bekommen:

$$s = E_{01}^2 + E_{02}^2 + 2E_1E_{02} = [E_1^{(M)} + E_2^{(M)}]^2 = [E_3^{(M)} + E_4^{(M)}]^2 , \qquad \text{(B. 45)}$$

$$\begin{aligned} t &= E_{02}^2 + E_{04}^2 - 2E_4E_{02} \\ &= E_{01}^2 + E_{03}^2 - 2[E_1^{(M)}E_3^{(M)} - c^2p_1^{(M)}p_3^{(M)} \cos\Theta_3] . \end{aligned} \qquad \text{(B. 46)}$$

Für das M-System errechnet man dann

$$E_3^{(M)} = \frac{s + E_{03}^2 - E_{04}^2}{2\sqrt{s}} ; \qquad E_4^{(M)} = \frac{s - E_{03}^2 + E_{04}^2}{2\sqrt{s}} , \qquad \text{(B. 47 a, b)}$$

$$p_3^{(M)} = p_4^{(M)} = \frac{\sqrt{(s - E_{03}^2 - E_{04}^2)^2 - 4E_{03}^2E_{04}^2}}{2c\sqrt{s}} . \qquad \text{(B. 48)}$$

Die entsprechenden Ausdrücke für das L-System findet man unter Berücksichtigung der Energieerhaltung

$$E_1 + E_{02} = E_3 + E_4 \qquad \text{(B. 49)}$$

zu

$$E_3 = \frac{s + t - E_{01}^2 - E_{04}^2}{2E_{02}}; \qquad E_4 = \frac{E_{02}^2 + E_{04}^2 - t}{2E_{02}}. \qquad \text{(B. 50a, b)}$$

Außerdem ist in s und t ausgedrückt

$$\beta_M = \frac{\sqrt{(s - E_{01}^2 - E_{02}^2)^2 - 4E_{01}^2 E_{02}^2}}{s - E_{01}^2 + E_{02}^2}; \qquad \gamma_M = \frac{s - E_{01}^2 + E_{02}^2}{2E_{02}\sqrt{s}}. \qquad \text{(B. 51, 52)}$$

B 3.2. Relativistische Impulsdiagramme

Kinematische Vorgänge lassen sich mit Impulsdiagrammen einfacher übersehen. Man versteht unter Impulsdiagramm die geometrischen Ortskurven der Impulsvektoren im L- und M-System als Funktion der Winkel. Für relativistische Geschwindigkeiten beschreiben die Impulsvektoren des L-Systems Ellipsen, für nichtrelativistische Kreise.

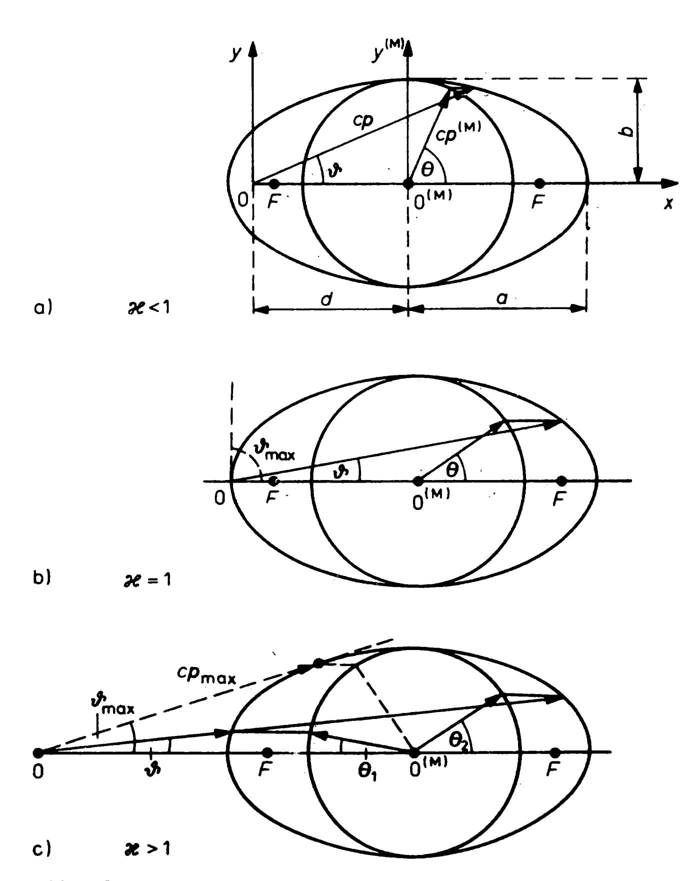


Abb. B.3
Relativistisches Impulsdiagramm für drei verschiedene Parameter $\varkappa$

Wir wollen hier nicht die Konstruktion der Impulsdiagramme herleiten, sondern lediglich die Parameter dieser Konstruktion angeben. Aus praktischen Gründen wird im relativistischen Impulsdiagramm nicht der Impuls selbst, sondern das Produkt cp abgetragen. In Abb. B. 3a sind L- und M-System in kartesischen Koordinaten dargestellt. Der Vektor $c\boldsymbol{p}^{(\mathrm{M})}$ beschreibt gemäß (B. 20) einen Kreis. Überführt man ihn mit Hilfe der Lorentztransformation (B. 36) in das L-System, dann entsteht eine Ellipse mit den Halbachsen

$$a = \gamma_\mathrm{M} c p^{(\mathrm{M})}; \qquad b = c p^{(\mathrm{M})}. \tag{B. 53a, b}$$

Der Abstand des Ellipsenzentrums $0^{(\mathrm{M})}$ vom Ursprung 0 des Stoßteilchens im L-System p_1 beträgt

$$d = \gamma_\mathrm{M} \beta_\mathrm{M} E^{(\mathrm{M})}. \tag{B. 54}$$

Die Brennpunkte befinden sich vom Ellipsenzentrum in einer Entfernung

$$f = \sqrt{a^2 - b^2} = c \gamma_\mathrm{M} \beta_\mathrm{M} p^{(\mathrm{M})}. \tag{B. 55}$$

Für ultrarelativistische Teilchen mit $E_0 = 0$ liegt der Koordinatenursprung des L-Systems 0 immer im Brennpunkt F. Impulsdiagramme sind bei der Analyse von Zweiteilchenreaktionen sehr nützlich. Die Ellipse hat hier für die Produktteilchen X_3 und X_4 gemäß (B. 48) und (B. 53) die gleichen Halbachsen. Unterschiedliche Werte kann aber der Parameter $\varkappa = d/a$ für die Produktteilchen haben. In Abhängigkeit von $\varkappa$ lassen sich drei Fälle unterscheiden. Für $\varkappa$ gilt

$$\varkappa = \frac{d}{a} = \frac{\beta_\mathrm{M} E_\mathrm{i}^{(\mathrm{M})}}{c p_\mathrm{i}^{(\mathrm{M})}} = \frac{\beta_\mathrm{M}}{\beta_i^{(\mathrm{M})}}. \tag{B. 56}$$

B 3.3. Winkelbeziehungen

1. Mit Hilfe der Impulsdiagramme ist es einfacher, die Beziehungen zwischen den Ablenkwinkeln herzuleiten. Wir suchen zuerst den Winkel ϑ als Funktion von Θ. Aus Abb. B. 3a liest man ab:

$$cp \cos \vartheta = \gamma_\mathrm{M} [c p^{(\mathrm{M})} \cos \Theta + \beta_\mathrm{M} E^{(\mathrm{M})}], \tag{B. 57a}$$

$$cp \sin \vartheta = c p^{(\mathrm{M})} \sin \Theta. \tag{B. 57b}$$

Für $\tan \vartheta$ erhält man damit

$$\tan \vartheta_\mathrm{i} = \frac{c p_\mathrm{i}^{(\mathrm{M})} \sin \Theta}{\gamma_\mathrm{M} [c p_\mathrm{i}^{(\mathrm{M})} \cos \Theta + \beta_\mathrm{M} E_\mathrm{i}^{(\mathrm{M})}]} = \frac{\sin \Theta}{\gamma_\mathrm{M} (\cos \Theta + \varkappa_i)}. \tag{B. 58}$$

Einen Ausdruck für die Abhängigkeit $\Theta(\vartheta)$ findet man durch Auflösung nach $\cos \Theta$:

$$\cos \Theta = \frac{-\varkappa_\mathrm{i} \gamma_\mathrm{M}^2 \tan^2 \vartheta_\mathrm{i} \pm \sqrt{1 + (1 - \varkappa_\mathrm{i}^2) \gamma_\mathrm{M}^2 \tan^2 \vartheta_\mathrm{i}}}{1 + \gamma_\mathrm{M}^2 \tan^2 \vartheta_\mathrm{i}}. \tag{B. 59}$$

In analoger Weise findet man

$$\tan \Theta = \frac{\sin \vartheta}{\gamma_\mathrm{M} \left(\cos \vartheta - \frac{\beta_\mathrm{M}}{\beta} \right)}. \tag{B. 60}$$

2. Wir betrachten nun einige Spezialfälle von (B. 58). In dem bereits im Zusammenhang mit (B. 42) diskutierten Falle $\Theta = \pi$ wird $\sin\Theta = 0$ und somit $\tan\Theta = 0$, also $\vartheta = 0$. Das ist der Fall der Vorwärtsstreuung oder des zentralen Stoßes.

Wir untersuchen nun den Einfluß von $\varkappa$ auf das Impulsdiagramm und die Winkelbeziehungen. Wenn $\varkappa < 1$ ist, liegt der Koordinatenursprung 0 innerhalb der Ellipse. Der Winkel ϑ kann dann beliebe Werte zwischen 0 und π annehmen. Der Ausdruck unter der Wurzel in (B. 59) ist hier immer positiv. Diese Verhältnisse zeigt Abb. B. 3a.

Für $\varkappa = 1$ liegt der Koordinatenursprung 0 auf dem Schnittpunkt der Ellipse mit der x-Achse. Der Winkel ϑ erfüllt die Bedingungen

$$\vartheta_{max} = \frac{\pi}{2}; \qquad \tan\vartheta = \frac{1}{\gamma_M}\tan\frac{\Theta}{2}. \tag{B. 61a, b}$$

Dieser Fall entspricht der elastischen Streuung mit $\beta_M = \beta^{(M)}$ und dem ultrarelativistischen Grenzfall $\beta_M = \beta^{(M)} = 1$.

Wenn $\varkappa > 1$ ist, liegt der Koordinatenursprung 0 des L-Systems, wie in Abb. B. 3c gezeigt, außerhalb der Ellipse. Der Winkel ϑ liefert für Θ und cp zwei Werte Θ_1, Θ_2 und $cp^{(1)}$, $cp^{(2)}$. ϑ kann einen Grenzwert

$$\vartheta_{max} < \frac{\pi}{2} \tag{B. 62a}$$

nicht überschreiten. Bei diesem Winkel wird der Vektor $c\boldsymbol{p}$ zur Tangente an der Ellipse. Der Wurzelausdruck in (B. 59) verschwindet. Man findet

$$\tan\vartheta_{max} = \frac{1}{\gamma_M\sqrt{\varkappa^2 - 1}}; \qquad \sin\vartheta_{max} = \frac{1}{\sqrt{1 + \gamma_M^2(\varkappa^2 - 1)}}. \tag{B. 62b, c}$$

Dem Winkel ϑ_{max} entspricht im M-System ein Winkel Θ_{max}, für den man durch Einsetzen von (B. 62b) in (B. 59) findet

$$\Theta_{max} > \frac{\pi}{2}; \qquad \cos\Theta_{max} = -\frac{1}{\varkappa}. \tag{B. 63a, b}$$

Wir betrachten noch den Fall $\Theta = \pi/2$. Aus (B. 58) folgt wegen $\sin\pi/2 = 1$ und $\cos\pi/2 = 0$

$$\tan\vartheta_i = \frac{1}{\varkappa_i\gamma_M}. \tag{B. 64a}$$

Im ultrarelativistischen Falle (B. 34, 35) erfolgt die Ablenkung in den spitzen Winkel

$$\vartheta_1 = \Theta\sqrt{\frac{2E_{02}}{E_{k1}}}. \tag{B. 64b}$$

Der Grenzwert ergibt sich mit Θ_{max} aus (B. 63b) zu

$$\vartheta_{1\,max} \approx \sqrt{\frac{2E_{02}}{E_{k1}}}. \tag{B. 64c}$$

Diese starke Asymmetrie der Winkelverteilung ist ein relativistisch-kinematischer Effekt.

Damit ein Teilchen in den Winkel $\vartheta = \pi/2$ gestreut wird, muß, wie aus (B. 58) wegen $\tan\pi/2 = \infty$ folgt, die Bedingung

$$\cos\Theta = -\varkappa \tag{B. 65}$$

erfüllt werden. Das ist nur möglich, wenn in Übereinstimmung mit (B. 56a) $V < v^{(M)}$ ist.

3. Im Falle der Kernreaktionen mit den Teilchen X_3 und X_4 im Ausgangskanal werden die Halbachsen der Ellipse ebenfalls durch γ_M und anstelle von $p_1^{(M)} = p_2^{(M)}$ durch $p_3^{(M)} = p_4^{(M)}$ bestimmt (B. 48):

$$a = \gamma_M c p_3^{(M)} = \gamma_M c p_4^{(M)}; \qquad b = c p_3^{(M)} = c p_4^{(M)}. \tag{B. 66a, b}$$

Den Mittelpunkt der Ellipse $0^{(M)}$ legt man so in den Vektor $\boldsymbol{p}$, daß dieser im Verhältnis

$$\frac{d_3}{d_4} = \frac{\gamma_M \beta_M E_3^{(M)}}{\gamma_M \beta_M E_4^{(M)}} \tag{B. 67}$$

geteilt wird. Wie aus Abb. B. 4 ersichtlich ist, enthält dann die obere Ellipsenhälfte die Winkel ϑ_3, ϑ_4, Θ_3, sowie auch den Winkel

$$\psi = \vartheta_3 + \vartheta_4 \tag{B. 68}$$

der von den Impulsvektoren der beiden Reaktionsprodukte eingeschlossen wird.

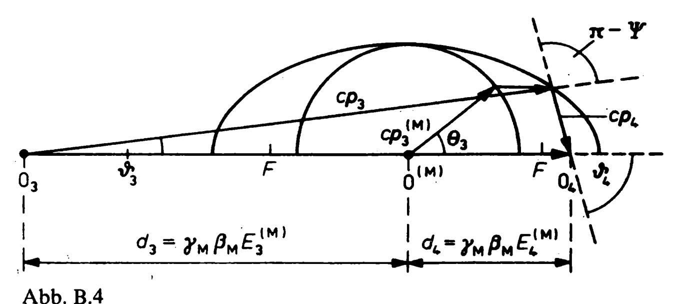


Abb. B.4
Relativistisches Impulsdiagramm für eine Zweiteilchenkernreaktion

Aus (B. 45) bis (B. 48) errechnet man die Winkel Θ_3 und ϑ_3 zu

$$\cos \Theta_3 = 1 + \frac{2st}{[s - (E_{03} + E_{04})^2][s - (E_{03} - E_{04})^2} \tag{B. 69}$$

$$\cos \vartheta_3 = \frac{[s - (E_{03} + E_{04})^2][s - (E_{03} - E_{04})^2] + t[s - E_{03}^2 + E_{04}^2]}{\sqrt{[s - (E_{03} + E_{04})^2][s - (E_{03} - E_{04})^2][s + t - (E_{03} + E_{04})^2][s + t - (E_{03} - E_{04})^2]}}. \tag{B. 70}$$

B 3.4. Nichtrelativistische Impulsdiagramme

1. Im nichtrelativistischen Falle sind $\beta_M \ll 1$ und $\beta^{(M)} \ll 1$. Daher geht die Ellipse des L-Systems mit den Halbachsen (B. 53a, b) in einen Kreis mit $a = b = p^{(M)}$ über. Im nichtrelativistischen Falle hat es keinen Sinn mehr, anstelle von p die Größe cp abzutragen. Oft zeichnet man sogar nur die Geschwindigkeiten ein und spricht vom Geschwindigkeitsdiagramm.

Die Festlegung des Kreismittelpunktes erfolgt durch Teilung von p_1 im Verhältnis E_{01}/E_{02}. Dann gilt

$$|p_1^{(M)}| = \frac{E_{02}}{E_{01} + E_{02}} p_1 = \frac{p_1}{1 + k} = |-p_2^{(M)}|. \tag{B. 71}$$

In Abhängigkeit von $k = E_{01}/E_{02}$ (B. 27) hat man auch hier wie im Falle der Ellipse drei Fälle zu unterscheiden. Für $k < 1$ folgt in Analogie zu $\varkappa < 1$, daß $p_1 < 2p_2^{(M)}$ ist. Der Ursprung des L-Systems liegt somit innerhalb des Kreises, wie es Abb. B. 5a zeigt. Der Fall $k = 1$ entspricht $\varkappa = 1$. Der Koordinatenursprung des L-Systems liegt dann, wie in Abb. B. 5b gezeigt, auf dem Kreis. Wenn $k > 1$ wird, ist $p_1 > 2p_2^{(M)}$ wie im Analogfall $\varkappa > 1$, so daß p_1 seinen Ursprung außerhalb des Impulskreises hat. Das zeigt Abb. B. 5c.

Alle uns interessierenden Größen können als Spezialfälle aus den relativistischen Gleichungen gewonnen werden. Um den Vorteil der Impulsdiagramme deutlicher werden zu lassen, werden wir einige von ihnen neu herleiten.

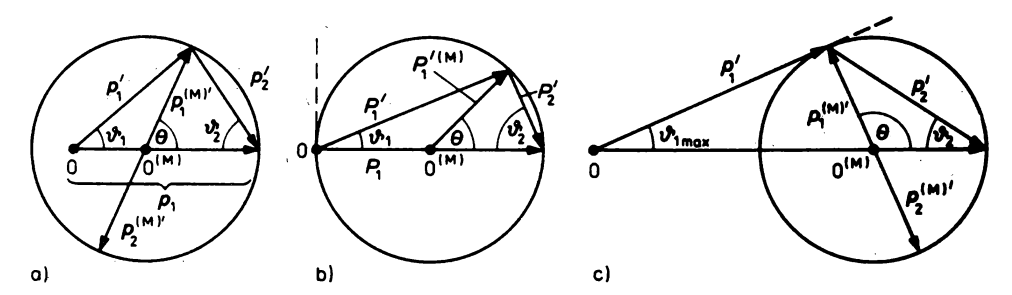


Abb. B.5
Nichtrelativistische Impulsdiagramme für verschiedene Werte des Parameters k

2. Wir betrachten zuerst die elastische Streuung und fragen nach der Energie des Stoßteilchens als Funktion von ϑ_3[1]). Der Energiesatz lautet hier für ein ruhendes Targetteilchen

$$E_{k1} = E'_{k1} + E'_{k2}\,. \tag{B. 72}$$

Man sieht aus Abb. B. 5b, daß der Kosinussatz in der Form

$$p_2'^2 = p_1^2 + p_1'^2 - 2p_1p_1' \cos\vartheta_3 \tag{B. 73}$$

gilt. Unter Verwendung der nichtrelativistischen Beziehung (B. 3c) $E_k = p^2/2m$ kann man durch Elimination von E'_{k2} und p'_2 einen Zusammenhang zwischen E'_{k1} und E_{k1} herleiten. Mit α gemäß (B. 43b) ergibt sich

$$E'_{k1} = E_{k1}\,\frac{\alpha k}{4}\,(\cos\vartheta_3 + \sqrt{k^{-2} - \sin^2\vartheta_3})^2\,. \tag{B. 74}$$

Die Rückstoßenergie des Targetteilchens errechnet man über (B. 72) und (B. 74) zu

$$E'_{k2} = E_{k1}\left[1 - \frac{\alpha k}{4}\,(\cos\vartheta_3 + \sqrt{k^{-2} - \sin^2\vartheta_3})^2\right]. \tag{B. 75}$$

Den Zusammenhang der Größen p'_2 und E'_{k2} mit dem Rückstoßwinkel ϑ_4 erhält man ebenfalls über die Impulsdreiecke und den Kosinussatz. Es ist

$$p_2'^2 = 2p_1'^{(M)2}(1 - \cos\Theta) = 2p_1'^{(M)2}(1 + 2\cos 2\vartheta_4)\,. \tag{B. 76}$$

[1]) Da bei der elastischen Streuung die beiden Stoßpartner im Ein- und Ausgangskanal unverändert bleiben, sind die Indizes 1 mit 3 und 2 mit 4 gleichzusetzen.

Dabei wurde berücksichtigt, daß $\vartheta_4 = (\pi - \Theta)/2$, also $\cos(\pi - 2\vartheta_4) = -\cos 2\vartheta_4$ ist. Zieht man noch (B. 3c) in Betracht, dann ergibt sich E'_{k2} mit $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$:

$$E'_{k2} = \frac{p_2'^2}{2m_2} = \frac{\alpha}{2} E_{k1}(1 + \cos\vartheta_4) = \alpha E_{k1}\cos^2\vartheta_4 . \tag{B. 77}$$

Als Extremwerte findet man für

$$\vartheta_3 = \pi,\ \vartheta_4 = 0:\quad E'_{k2\,max} = \alpha E_{k1} \tag{B. 78a}$$

$$\vartheta_4 = \pi/2:\ E'_{k2\,min} = 0 \tag{B. 78b}$$

$$\vartheta_4 = \pi/2:\ E'_{k1\,max} = E_{k1} \tag{B. 78c}$$

$$\vartheta_4 = 0:\quad E'_{k1\,min} = E_{k1}\left[\frac{E_{01} - E_{02}}{E_{01} + E_{02}}\right]^2 . \tag{B. 78d}$$

Die Streupartner bewegen sich unter einem Winkel

$$\psi = \vartheta_3 + \vartheta_4 . \tag{B. 79}$$

auseinander.

Für den Zusammenhang zwischen den Winkeln ϑ_3 und ϑ_4 berechnet man aus (B. 74) und (B. 76)

$$\cos^2\vartheta_4 = \frac{1}{\alpha} - \frac{k}{4}(\cos\vartheta_3 + \sqrt{k^{-2} - \sin^2\vartheta_3})^2 . \tag{B. 80}$$

Andere Winkelabhängigkeiten leiten wir als Spezialfälle aus den relativistischen Gleichungen ab. Die Gleichungen (B. 58) und (B. 59) vereinfachen sich unter Berücksichtigung von (B. 33) und (B. 56c, d) zu

$$\tan\vartheta_3 = \frac{\sin\Theta}{\cos\Theta + k} \tag{B. 81}$$

$$\cos\Theta = -k\sin^2\vartheta_3 \pm \cos\vartheta_3\sqrt{1 - k^2\sin^2\vartheta_3} . \tag{B. 82}$$

Aus (B. 81) folgt für den speziellen Fall $k = 1$

$$\vartheta_3 = \frac{\Theta}{2} . \tag{B. 83}$$

Für $k > 1$ vereinfacht sich (B. 62c) zu

$$\sin\vartheta_{3max} = k^{-1} , \tag{B. 84}$$

und es gilt der offensichtliche Zusammenhang

$$\Theta_{max} = \vartheta_{max} + \frac{\pi}{2} . \tag{B. 85}$$

Der spezielle Fall der Gleichung (B. 84) kommt oft vor, z. B. bei der Streuung eines Baryons an einem Elektron. Für ein α-Teilchen ergibt sich $\sin\vartheta_{max} = 0{,}511/3732{,}43 = 1{,}37 \cdot 10^{-4}$. Die α-Teilchen werden also praktisch nicht abgelenkt, während die Elektronen in einem Winkel von 90° aus der Streuzone emittiert werden. Davon wird bei der Ableitung der Formel für die Ionisationsbremsung in Abschnitt 4.2.2. mit Abb. 4.2 Gebrauch gemacht.

3. Für die Kernreaktionen mit den Teilchen X_3 und X_4 im Ausgangskanal sind die Ausdrücke für die Energien, Impulse und Winkel sehr kompliziert. Wir geben sie unter Berücksichtigung der Reaktionsenergie E_Q gemäß (2.25) an:

$$E_Q = E_{k3} \frac{E_{03} + E_{04}}{E_{04}} - E_{k1} \frac{E_{04} - E_{01}}{E_{04}} - \frac{2\sqrt{E_{01}E_{02}E_{k1}E_{k3}}}{E_{04}} \cos \vartheta_3 \tag{B. 86a}$$

$$E_Q = E_{k4} \frac{E_{03} + E_{04}}{E_{03}} - E_{k1} \frac{E_{03} - E_{01}}{E_{03}} - \frac{2\sqrt{E_{01}E_{04}E_{k1}E_{k4}}}{E_{03}} \cos \vartheta_4 \tag{B. 86b}$$

$$E_{k3} = \frac{E_{01}E_{03}E_{k1}}{(E_{03} + E_{04})^2} \left\{ \cos \vartheta_3 \pm \sqrt{\cos^2 \vartheta_3 + \frac{(E_{03} + E_{04})\left[(E_{04} - E_{01})\,E_{k1} + E_{04}E_Q\right]}{E_{01}E_{03}E_{k1}}} \right\}^2 \tag{B. 87a}$$

$$E_{k4} = \frac{E_{01}E_{04}E_{k1}}{(E_{03} + E_{04})^2} \left\{ \cos \vartheta_4 \pm \sqrt{\cos^2 \vartheta_4 + \frac{(E_{03} + E_{04})\left[(E_{03} - E_{01})\,E_{k1} + E_{03}E_Q\right]}{E_{01}E_{04}E_{k1}}} \right\}^2 . \tag{B. 87b}$$

Zwischen den Winkeln im L- und M-System besteht der Zusammenhang

$$\tan \vartheta_3 = \frac{\sin \Theta_3}{k_3 + \cos \Theta_3}; \qquad \tan \vartheta_4 = \frac{\sin \Theta_4}{k_4 + \cos \Theta_4} \tag{B. 88a, b}$$

mit

$$k_3 = \sqrt{\frac{\dfrac{E_{01}E_{03}(E_{03} + E_{04})}{E_{02}E_{04}(E_{01} + E_{02})}}{1 + \dfrac{(E_{01} + E_{02})\,E_Q}{E_{02}E_{k1}}}}; \qquad k_4 = \sqrt{\frac{\dfrac{E_{01}E_{04}(E_{03} + E_{04})}{E_{02}E_{03}(E_{01} + E_{02})}}{1 + \dfrac{(E_{01} + E_{02})\,E_Q}{E_{02}E_{k1}}}}. \tag{B. 89a, b}$$

Die Reaktionsprodukte bewegen sich unter dem Winkel

$$\psi = \vartheta_3 + \vartheta_4 \tag{B. 90}$$

aus der Reaktionszone.

B 3.5. Zwei- und Mehrteilchenzerfall

Mit den in Anhang B dargestellten kinematischen Beziehungen werden auch Teilchenzerfälle erfaßt. Sie treten in Targets auf, in denen instabile Reaktionsprodukte entstehen, sowie in ruhenden oder bewegten radioaktiven Quellen.

1. Wir betrachten zuerst zerfallende Reaktionsprodukte nach Targets. Meist wird die Frage nach der Energie- und Winkelverteilung der bewegten Zerfallsprodukte gestellt. Die Beantwortung geschieht auf anschauliche Weise mit Hilfe der Impulsdiagramme für den Zweiteilchenzerfall. Wegen $p_1^{(M)} = p_2^{(M)}$ ergibt sich für beide Zerfallsprodukte die gleiche Ellipse oder der gleiche Kreis. In der Abb. B. 6 sind der Zerfall $\pi^0 \to 2\gamma$ mit $E_k(\pi^0) = E_0(\pi^0)$ und der Zerfall $\pi^+ \to \mu^+ + \nu_\mu$ mit $E_k(\pi^+) = 3E_0(\pi^+)/2$ dargestellt. Im ersten Falle können alle Winkel ϑ_3 und ϑ_4 zwischen 0 und π vorkommen. Im zweiten Falle gibt es einen Grenzwinkel ϑ_{max}, der mit (B. 62b, c) berechnet werden kann.

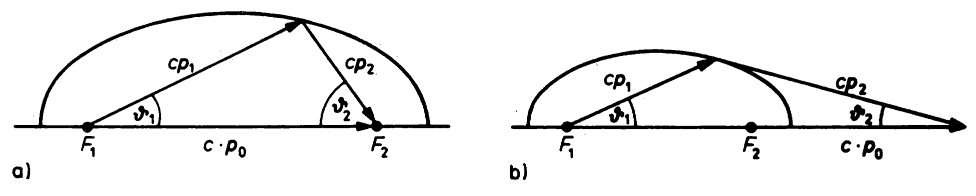


Abb. B.6
Impulsdiagramme der Zerfälle a) $\pi^0 \to 2\gamma$ und b) $\pi^+ \to \mu^+ + \nu_\mu$

2. Mit Hilfe der kinematischen Beziehungen kann man auf der Grundlage der Kenntnis der Form des Energiespektrums der Zerfallsprodukte die Frage beantworten, ob es sich um einen Zwei- oder einen Mehrteilchenzerfall handelt. Dazu betrachten wir zunächst die Energieverteilung der Zerfallsprodukte beim Zweiteilchenzerfall eines ruhenden Zerfallsteilchens. L- und M-System fallen hier zusammen. Wegen Impulserhaltung gilt (B. 20) und (B. 24) oder kürzer $\boldsymbol{p}_1 = -\boldsymbol{p}_2$. Die Zerfallsprodukte werden in entgegengesetzte Richtungen emittiert. Sind in einer Quelle viele Zerfallsteilchen enthalten, dann entsteht um sie eine isotrope Verteilung, da keine Raumrichtung bevorzugt sein kann, wenn keine besondere Vorzugsrichtung geschaffen wird. Für die Gesamtenergie der Zerfallsprodukte und für die Impulse gilt

$$E_1^2 = (cp)^2 + E_{01}^2\,; \qquad E_2^2 = (cp)^2 + E_{02}^2 \qquad \text{(B. 91 a, b)}$$

$$p_1^2 = p_2^2\,. \qquad \text{(B. 92)}$$

Durch Elimination der Impulse erhält man mit der Ruhenergie des Zerfallsteilchens E_{00}:

$$E_{k1} = \frac{(E_{00} - E_{01})^2 - E_{02}^2}{2E_{00}}\,; \qquad E_{k2} = \frac{(E_{00} - E_{02})^2 - E_{01}^2}{2E_{00}}\,. \qquad \text{(B. 93)}$$

Die kinetische Energie der Zerfallsprodukte hängt nur von Ruhenergien ab; es ergibt sich also ein konstanter Wert, mit anderen Worten, für eine Quelle solcher Teilchen ein Linienspektrum, wie es in Abb. B. 7a dargestellt ist. Typische Zweiteilchenzerfälle sind der α- und der γ-Zerfall.

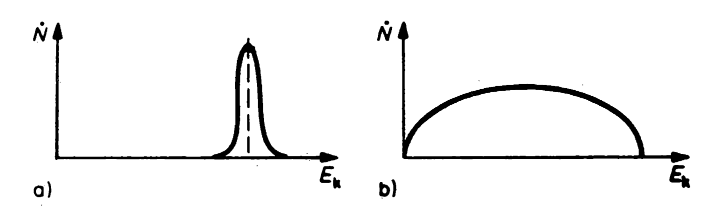


Abb. B.7
Linien- und Kontinuumsform der Teilchenspektren beim Zwei- und Mehrteilchenzerfall

Beim Drei- oder Mehrteilchenzerfall lassen Energie- und Impulssatz für die Energieverteilung weit mehr Möglichkeiten. Es erfolgt bei vielen Zerfallsteilchen in einer Quelle eine statistische Aufteilung der Impulse und Energien, so daß ein kontinuierliches Spektrum entsteht. Diese Verhältnisse kommen in Abb. B. 7b zum Ausdruck. Ein typisches Beispiel ist der Betazerfall.

B 3.6. Umrechnung von Raumwinkeln und Wirkungsquerschnitten

So wie Energien, Impulse und Winkel aus dem L- ins M-System und umgekehrt umgerechnet werden müssen, so ist es auch notwendig, den Raumwinkel und die Wirkungsquerschnitte beider Systeme ineinander umrechnen zu können. Wir führen dazu einige grundlegende Beziehungen an, allerdings nur für den nichtrelativistischen Fall.

Wie an Hand von Abb. 2.5 gezeigt wurde, ergibt sich der Raumwinkel $d\Omega$ des L-Systems aus der Differenz zweier Konusse mit gleichem Ursprung und den Winkeln ϑ sowie $\vartheta + d\vartheta$ zu

$$d\Omega = 2\pi \sin \vartheta \, d\vartheta \,. \qquad \text{(B. 94a)}$$

Im M-System gilt in Analogie dazu

$$d\Omega^{(M)} = 2\pi \sin \Theta \, d\Theta \,. \qquad \text{(B. 94b)}$$

Berücksichtigt man die Beziehung (B. 81), dann kann man $d\Omega$ als Funktion von $d\Omega^{(M)}$ darstellen. Es ist

$$d\Omega = \frac{1 + k \cos \Theta \, d\Omega^{(M)}}{(1 + 2k \cos \Theta + k^2)^{3/2}} \,. \qquad \text{(B. 95)}$$

Zur Umrechnung der Wirkungsquerschnitte gehen wir von den Teilchenströmen $\dot{N}(\vartheta)$ und $\dot{N}(\Theta)$ aus. Der Einfachheit halber wird angenommen, daß $\dot{N}(\Theta)$ isotrop ist, d. h. $\dot{N}(\Theta) = \text{const.}$ Dann kann man schreiben

$$\frac{\dot{N}(\vartheta)}{\dot{N}(\Theta)} = \frac{d\Omega^{(M)}}{d\Omega} = \frac{2\pi \sin \Theta \, d\Theta}{2\pi \sin \vartheta \, d\vartheta} = \frac{d(\cos \Theta)}{d(\cos \vartheta)} \,. \qquad \text{(B. 96 a)}$$

Den Differentialquotienten kann man ausgehend von (B. 81) bilden, denn es ist

$$\cos \Theta = -k \sin^2 \vartheta \pm \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \vartheta} \cos \vartheta \,. \qquad \text{(B. 96b)}$$

Damit wird

$$\frac{d(\cos \Theta)}{d(\cos \vartheta)} = 2k \cos \vartheta \mp \frac{1 - k^2 + 2k^2 \cos^2 \vartheta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \vartheta}} \,. \qquad \text{(B. 96 c)}$$

Da das Teilchenstromverhältnis positiv sein muß, läßt man die Lösung mit dem Minuszeichen weg und erhält:

$$\frac{\dot{N}(\vartheta)}{\dot{N}(\Theta)} = \frac{\sigma(\vartheta)}{\sigma(\Theta)} = \frac{(k \cos \vartheta + \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \vartheta})^2}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \vartheta}} \,. \qquad \text{(B. 97)}$$

B 3.7. Rutherford- oder Coulomb-Streuung

In der Kern- und Elementarteilchenphysik spielt die Streuung von Teilchen auf Grund ihrer elektrischen Ladung eine wichtige Rolle. Die nichtrelativistische Streuung am Coulomb-Potential wurde erstmals von E. Rutherford für Punktladungen untersucht. Für zwei Teilchen mit den Ruhenergien E_{01} und E_{02} und den Ladungen $Z_1 e$ und $Z_2 e$ gleichen Vorzeichens gilt für Kraft und Potential

$$F_C = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \,; \qquad V_C = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\varepsilon_0 r} \,. \qquad \text{(B. 98a, b)}$$

Dabei ist r der Abstand zwischen den Ladungen. Solange die Streuung nicht zur Anregung innerer Freiheitsgrade der Streupartner führt, handelt es sich um eine elastische Streuung, d. h., es ist

$$E_{k1} + E_{k2} = \text{const}. \tag{B. 99}$$

Bei der Ableitung des Wirkungsquerschnitts der Rutherford-Streuung nehmen wir zunächst an, daß die Ruhenergie des Stoßteilchens viel kleiner ist als die des gestoßenen Teilchens, so daß aus (B. 27) folgt:

$$k \ll 1. \tag{B. 100}$$

In diesem Falle kann man annehmen, daß das Streuzentrum ruht, und damit fallen L- und M-System zusammen.

Die gleichartige Ladung der Streupartner führt, wie experimentell gezeigt wurde, auf eine Hyperbelbahn des Inzidenzteilchens. Im Brennpunkt F_1 ist das Targetteilchen lokalisiert. Wie man aus Abb. B. 8 erkennen kann, gilt dann für den Ablenkwinkel

$$\vartheta = \pi - 2\varphi, \tag{B. 101}$$

wobei 2φ der Winkel zwischen den Hyperbelasymptoten ist. Der Energiesatz für den Hauptscheitel lautet

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} = \frac{m_1 v_s^2}{2} + \frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_0}. \tag{B. 102}$$

Darin bedeuten r_0 den Abstand zwischen F_1 und S_2 und v_S die Geschwindigkeit im Hauptscheitel. Daraus folgt mit dem Stoßparameter

$$\varrho = \frac{2Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\varepsilon_0 m_1 v_1^2}, \tag{B. 103}$$

d. h. dem kleinsten Abstand zwischen den Stoßpartnern bei zentralem Stoß mit $\varphi = 0$,

$$v_1^2 = v_S^2 + v_1^2 \frac{\varrho}{r_0}. \tag{B. 104}$$

Die Geschwindigkeit v_S kann man über den Drehimpulssatz berechnen. Für den Impaktparameter q, d. h. die Senkrechte von F_1 auf die Asymptote, und r_0 gilt damit

$$q v_1 = r_0 v_S; \qquad v_S = v_1 \frac{q}{r_0}. \tag{B. 105}$$

Auflösung nach q liefert

$$q^2 = r_0(r_0 - \varrho). \tag{B. 106}$$

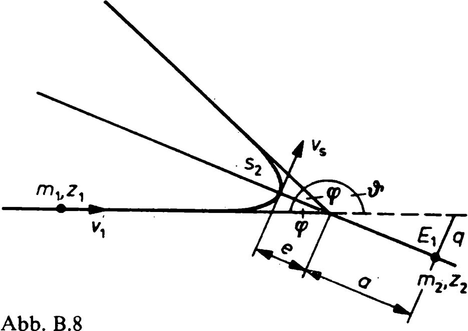


Abb. B.8
Bahnparameter bei Rutherford- oder Coulomb-Streuung (statt E_1 lies F_1)

Berücksichtigt man, daß die Teilchenbahn eine Hyperbel ist, dann kann r_0 durch q und φ ausgedrückt werden. Es ist

$$r_0 = e + a = e(1 + \cos\varphi) = q \operatorname{cosec}\varphi(1 + \cos\varphi) = q \cot\varphi/2 . \qquad \text{(B. 107)}$$

Damit folgt, in (B. 106) eingesetzt,

$$q^2 = q\cot(\varphi/2)\,(q\cot(\varphi/2) - \varrho) = q^2\cot(\varphi/2) - \varrho q\cot(\varphi/2), \qquad \text{(B. 108)}$$

so daß

$$\varrho = 2q\cot\varphi . \qquad \text{(B. 109)}$$

Mit dem Streuwinkel Θ gemäß (B. 101) ergibt sich der Zusammenhang

$$\varrho = 2q\tan(\Theta/2); \qquad q = \frac{\varrho}{2}\cot\frac{\Theta}{2}. \qquad \text{(B. 110a, b)}$$

Läßt man nun die Bedingung (B. 100) fallen, dann ist für m_1 die reduzierte Masse einzusetzen. Im M-System erhält man dann

$$\varrho = \frac{2Z_1Z_2e^2}{4\pi\varepsilon_0\mu v_1^2}; \qquad q = \frac{Z_1Z_2e^2}{4\pi\varepsilon_0\mu v_1^2}\cot\frac{\Theta}{2}. \qquad \text{(B. 110c, d)}$$

Mit diesen Ausdrücken läßt sich die Wahrscheinlichkeit der Coulomb-Streuung in einen Raumwinkel zwischen Θ und $\Theta + \mathrm{d}\Theta$ berechnen. Es ist

$$\left(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega^{(M)}}\right)_\Theta = 2\pi q\,\mathrm{d}q = 2\pi\frac{\varrho^2}{8}\cot\frac{\Theta}{2}\operatorname{cosec}\frac{\Theta}{2}\,\mathrm{d}\Theta$$
$$= \frac{\varrho^2}{16}\sin^{-4}(\Theta/2) = \left(\frac{Z_1Z_2e^2}{4\pi\varepsilon_0\mu v_1^2}\right)^2\sin^{-4}\frac{\Theta}{2}. \qquad \text{(B. 111)}$$

Das ist der differentielle Wirkungsquerschnitt der Coulomb-Streuung an einem Targetkern. Hat das Target eine Streuflächendichte N_S, dann erhält man für den makroskopischen Wirkungsquerschnitt mit $\mathrm{d}\Sigma = \mathrm{d}\dot N/\dot N = N_V\,\mathrm{d}\sigma$ im M-System

$$\left(\frac{\mathrm{d}\Sigma}{\mathrm{d}\Omega^{(M)}}\right)_\Theta = N_V\left(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega^{(M)}}\right)_\Theta = N_V\left(\frac{Z_1Z_2e^2}{4\pi\varepsilon_0\mu v_1^2}\right)^2\sin^{-4}\frac{\Theta}{2}. \qquad \text{(B. 112)}$$

B 4. Partialwellenmethode

1. Wir nehmen an, daß die starke Wechselwirkung eines Nukleons mit einem Kern durch ein Potential V endlicher Tiefe beschrieben werden kann, das außerhalb des Kernradius R stärker als das Coulomb-Potential gegen Null geht. Im Innengebiet soll V einen glatten Verlauf besitzen, der nicht näher festgelegt wird. Wir setzen außerdem voraus, daß das Potential nur vom Abstand r des Nukleons vom Kernmittelpunkt abhängt, so daß vom Spinfreiheitsgrad des Nukleons abgesehen werden kann. Die Coulomb-Kraft bleibt ebenfalls unberücksichtigt.

Unter diesen Bedingungen behandeln wir die Nukleon-Kern-Streuung auf der Grundlage der stationären quantenmechanischen Stoßtheorie.

2. Das vorliegende physikalische System läßt sich durch einen Hamilton-Operator beschreiben, der aus dem Operator der kinetischen Energie des einfallenden Teilchens (Masse m) und dem kugelsymmetrischen Potential $V(r)$ besteht,

$$H = \frac{\boldsymbol{p}^2}{2m} + V(r), \qquad \boldsymbol{p} \to \frac{\hbar}{\mathrm{i}}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}. \qquad \text{(B. 113)}$$

Die Streuzustände $\varphi(k, \boldsymbol{r})$ sind Lösungen der Schrödinger-Gleichung $(H - E_k)\,\varphi(k, \boldsymbol{r}) = 0$, wobei $E_k > 0$ die kinetische Energie $E_k = p^2/2m$ des mit dem Impuls $\boldsymbol{p} = \hbar\boldsymbol{k}$ einlaufenden Teilchens bezeichnet. Die Wellenfunktion $\varphi(k, \boldsymbol{r})$ genügt der Differentialgleichung

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial \boldsymbol{r}^2} + k^2 - \frac{2m}{\hbar^2} V(r)\right] \varphi(k, \boldsymbol{r}) = 0\,, \qquad k^2 = \frac{2m}{\hbar^2} E_k\,. \tag{B. 114}$$

Die Aufgabe besteht darin, Lösungen von (B. 114) zu suchen, die der physikalischen Situation bei Streuexperimenten entsprechen. Im Anfangszustand besitzt das Teilchen einen scharfen Impuls, so daß seine Wellenfunktion φ_e eine ebene Welle ist, die sich in Richtung $\boldsymbol{k}$ ausbreitet, $\varphi_e = e^{i\boldsymbol{kr}}$. Wir legen das Koordinatensystem so, daß die z-Achse mit der Ausbreitungsrichtung der ebenen Welle zusammenfällt. Nach der Streuung besteht die Gesamtwelle $\varphi(k, \boldsymbol{r})$ in großem Abstand vom Streuzentrum aus der einlaufenden ebenen Welle φ_e und einer Streuwelle φ_s, für die wir eine auslaufende Kugelwelle ansetzen, deren Amplitude von der Einschußenergie und den Streuwinkeln ϑ, φ (siehe Abb. B. 9) abhängt, $\varphi_s = f(k, \vartheta, \varphi)\, e^{ikr}/r$. Wir fordern also, daß die gesuchte Lösung der Schrödinger-Gleichung (B. 114) für $r \to \infty$ die Randbedingung

$$\varphi_{\boldsymbol{k}}^{(+)}(k, \boldsymbol{r}) \xrightarrow[r \to \infty]{} N(k) \left(e^{i\boldsymbol{kr}} + f(k, \vartheta, \varphi) \frac{e^{ikr}}{r}\right) \tag{B. 115}$$

erfüllt. Die Indizes von φ sollen ausdrücken, daß eine Lösung vorliegt, die sich infolge der Wechselwirkung aus dem Impulseigenzustand eines freien Teilchens entwickelt (unterer Index $\boldsymbol{k}$) und asymptotisch nur auslaufende Kugelwellen als Streuwellen enthält (oberer Index +). Eine einlaufende Kugelwelle würde den Radialteil e^{-ikr}/r besitzen. Der Faktor $N(k)$ ermöglicht eine von der Einschußenergie abhängige Normierung der Gesamtfunktion, während die Streuamplitude $f(k, \vartheta, \varphi)$ die gesamte Information über den Streuprozeß enthält.

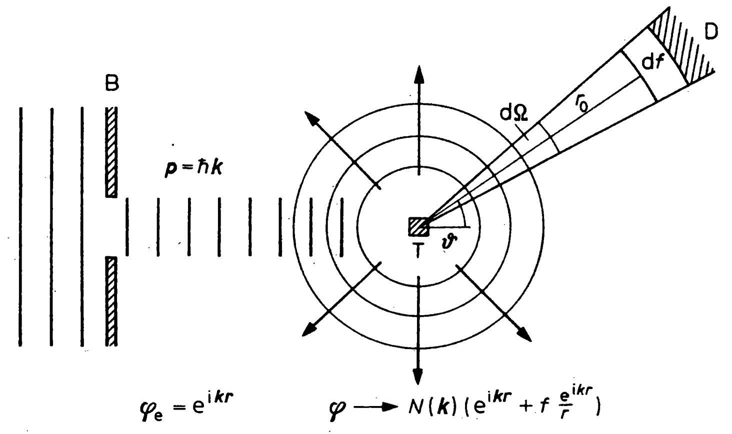


Abb. B.9
Schematische Darstellung eines Streuexperiments
B Blende, T Target, D Detektor, ϑ Streuwinkel, dΩ Raumwinkelelement
(Weitere Einzelheiten siehe Text)

3. Da der Hamilton-Operator (B. 113) mit dem Quadrat des Drehimpulsoperators und seiner z-Komponente kommutiert, $[H, \boldsymbol{l}^2] = [H, l_z] = 0$, bleiben nicht nur die Teilchenenergie sondern auch Betrag und Richtung des Teilchendrehimpulses während des Streuvorganges erhalten.

Die Linearität der Gl. (B. 114) erlaubt es dann, die Gesamtlösung $\varphi_k^{(+)}(k, r)$ aus Partialwellen $\varphi_{lm}(k, r)$ aufzubauen, die die Schrödinger-Gleichung erfüllen und gleichzeitig Eigenfunktionen von l^2 und l_z sind,

$$\varphi_k^{(+)}(k, r) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} c_{lm}(k)\, \varphi_{lm}(k, r), \qquad \varphi_{lm}(k, r) = \frac{u_l(k, r)}{r}\, Y_l^m(\vartheta, \varphi). \tag{B. 116}$$

Für die Radialfunktionen $u_l(k, r)$ gilt die Differentialgleichung

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2}\right] u_l(k, r) = \frac{2m}{\hbar^2}\, V(r)\, u_l(k, r)\,. \tag{B. 117}$$

Über die Entwicklungskoeffizienten $c_{lm}(k)$, die alle beliebig gewählt werden können, verfügen wir so, daß die Funktion (B. 116) der Randbedingung (B. 115) genügt.

4. Die Radialfunktionen $u_l(k, r)$ müssen für $r \to 0$ die Bedingung $u_l(k, 0) = 0$ erfüllen. Für $r \gg R$ verschwindet $V(r)$, so daß $u_l(k, r)$ außerhalb des Potentialbereiches aus zwei linear unabhängigen Lösungen der feldfreien Gleichung

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2}\right] z_l(k, r) = 0 \tag{B. 118}$$

aufbauen läßt. Die Gl. (B. 118) kann mit Hilfe der Transformationen $\varrho = kr, f_l(\varrho) = z_l/\varrho$ in eine Differentialgleichung für f_l überführt werden, die der Differentialgleichung der sphärischen Besselfunktionen entspricht. Zwei linear unabhängige Lösungen dieser Gleichung sind die sphärischen Bessel- und Neumannfunktionen $j_l(\varrho), n_l(\varrho)$. Für $r \gg R$ ergibt sich damit die Radialfunktion $u_l = \varrho f_l$ in der Form

$$u_l(k, r) = kr[c_{1l}(k)\, j_l(kr) + c_{2l}(k)\, n_l(kr)]\,, \tag{B. 119}$$

wobei c_{1l}, c_{2l} die beiden Integrationskonstanten bezeichnen. Verwendet man die asymptotische Form von $j_l(x)$, $n_l(x)$ für $x \to \infty$,

$$j_l(x) \to \frac{1}{x} \sin(x - l\pi/2)\,, \qquad n_l(x) \to \frac{1}{x} \cos(x - l\pi/2)\,, \tag{B. 120}$$

dann erhält man für den Radialteil der Partialwellen im Grenzfall $r \to \infty$

$$\begin{aligned} u_l(k, r) &\xrightarrow[r \to \infty]{} a_l(k) \sin(kr - l\pi/2 + \delta_l(k)) \\ &= \frac{a_l(k)}{2i} \left(e^{i(kr - l\pi/2)}\, e^{i\delta_l(k)} - e^{-i(kr - l\pi/2)}\, e^{-i\delta_l(k)}\right) \end{aligned} \tag{B. 121}$$

mit den neuen Konstanten

$$a_l(k) = \sqrt{c_{1l}^2 + c_{2l}^2}\,, \qquad \operatorname{tg} \delta_l(k) = -c_{2l}(k)/c_{1l}(k)\,. \tag{B. 122}$$

Aus der Beziehung (B. 121) kann man ablesen, daß sich $u_l(k, r)/r$ von der feldfreien Lösung $j_l(kr)$ durch eine reelle Phasenverschiebung $\delta_l(k)$ (Streuphase) unterscheidet, die nicht von r abhängt, aber eine Funktion der Einschußenergie darstellt. Für $\delta < 2\pi$ ergibt ein attraktives (repulsives) Potential ein positives (negatives) Vorzeichen der Streuphase (siehe Abb. B. 10). Die Streuphase wächst mit der Stärke des Potentials, da dann die Wellenfunktion im Potentialbereich stärker gekrümmt wird.

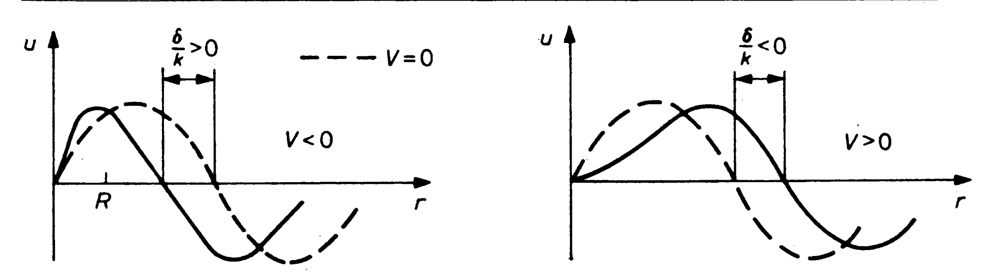


Abb. B.10
Definition der Streuphase
Schematische Skizze für ein Potential der Reichweite R

Nach (B. 121) läßt sich die Funktion $u_l(k, r)/r$ für $r \to \infty$ auch als Überlagerung von ein- und auslaufenden Kugelwellen darstellen,

$$\frac{u_l(k,r)}{r} \xrightarrow[r\to\infty]{} \tilde{a}_l(k)\left[(-1)^{l+1}\frac{e^{-ikr}}{r} + S_l(k)\frac{e^{ikr}}{r}\right], \tag{B. 123}$$

$$\tilde{a}_l(k) = a_l(k)(-1)^l\, i^{(l-1)}\, e^{-i\delta_l(k)}/2\,, \tag{B. 124}$$

$$S_l(k) = e^{2i\delta_l(k)}\,. \tag{B. 125}$$

Der Koeffizient $S_l(k)$ vor der auslaufenden Kugelwelle wird auch als Streufunktion bezeichnet. Aus Gl. (B. 123—125) ist ersichtlich, daß — verglichen mit der Amplitude der einlaufenden Kugelwelle — die Streuung am Potential V lediglich eine Phasenänderung bewirkt, $|S_l(k)| = 1$. Dabei hängt die Streufunktion nur von einem Index l ab, weil jede Partialwelle für sich gestreut wird. Wäre das Streupotential V nicht zentralsymmetrisch, dann könnte eine einlaufende Partialwelle l mit geändertem Drehimpuls $l' \neq l$ auslaufen. In diesem Fall wird die Streufunktion zur Streumatrix $S_{l'l}(k)$.

5. Die Randbedingung (B. 115) bedeutet, daß die Differenz der Gesamtlösung und der einfallenden Welle nur aus auslaufenden Kugelwellen bestehen darf. Um diese Differenz übersichtlich bilden zu können, entwickeln wir auch die ebene Welle nach Partialwellen:

$$e^{i\boldsymbol{k}\boldsymbol{r}} = e^{ikz} = \sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)\, i^l j_l(kr)\, P_l(\cos\vartheta)\,. \tag{B. 126}$$

Als Radialfunktionen treten die Lösungen $j_l(kr)$ der feldfreien Gleichung (B. 118) auf. Wenn man die Legendreschen Polynome P_l nach (A. 12) durch Kugelfunktionen $Y_l^0(\vartheta)$ ersetzt,

$$e^{i\boldsymbol{k}\boldsymbol{r}} = \sum_{l=0}^{\infty}\sqrt{4\pi(2l+1)}\, i^l j_l(kr)\, Y_l^0(\vartheta)\,, \tag{B. 127}$$

dann liefert ein Vergleich mit der allgemeinen Partialwellenentwicklung (B. 116) für die ebene Welle die Koeffizienten

$$c_{lm}^{(0)} = \sqrt{4\pi(2l+1)}\, i^l \delta_{m0}\,. \tag{B. 128}$$

Mit Gl. (B. 120) ergibt sich für die asymptotische Form der ebenen Welle

$$\varphi_e \to \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} c_{lm}^{(0)}\frac{1}{2ik}\left(\frac{1}{r}\, e^{i(kr-l\pi/2)} - \frac{1}{r}\, e^{-i(kr-l\pi/2)}\right) Y_l^m(\vartheta,\varphi)\,. \tag{B. 129}$$

6. Wir setzen den Ausdruck (B. 129) in die Randbedingung (B. 115) ein

$$\varphi_{\boldsymbol{k}}^{(+)}(k,\boldsymbol{r}) \rightarrow N(k)\left\{\left[\sum_{l,m} c_{lm}^{(0)} \frac{1}{2ik}\left(\frac{1}{r}e^{i(kr-l\pi/2)}-\frac{1}{r}e^{-i(kr-l\pi/2)}\right)Y_l^m(\vartheta,\varphi)\right]+f(k,\vartheta,\varphi)\frac{e^{ikr}}{r}\right\} \tag{B. 130}$$

und vergleichen mit der asymptotischen Form des Ansatzes (B. 116)

$$\varphi_{\boldsymbol{k}}^{(+)}(k,\boldsymbol{r}) \rightarrow \sum_{l,m} c_{lm}(k)\,\frac{a_l(k)}{2i}\left(\frac{1}{r}\,e^{i(kr-l\pi/2)}\,e^{i\delta_l(k)}-\frac{1}{r}\,e^{-i(kr-l\pi/2)}\,e^{i\delta_l(k)}\right)Y_l^m(\vartheta,\varphi)\,. \tag{B. 131}$$

Die Amplituden der einlaufenden Kugelwellen stimmen überein, wenn man für die Entwicklungskoeffizienten

$$c_{lm}(k) = \frac{1}{k}\,\frac{N(k)}{a_l(k)}\,e^{i\delta_l(k)}\,c_{lm}^{(0)} \tag{B. 132}$$

wählt. Aus dem Vergleich der Amplitude der auslaufenden Kugelwellen folgt

$$\begin{aligned}&\left[\sum_{l,m} c_{lm}^{(0)}\,\frac{1}{2ik}\,e^{-il\pi/2}\,Y_l^m(\vartheta,\varphi)\right]+f(k,\vartheta,\varphi)\\&=\frac{1}{N(k)}\left[\sum_{l,m} c_{lm}(k)\,\frac{a_l(k)}{2i}\,e^{-il\pi/2}\,e^{i\delta_l(k)}\,Y_l^m(\vartheta,\varphi)\right].\end{aligned} \tag{B. 133}$$

Führt man für $c_{lm}(k)$ in (B. 131) den Ausdruck (B. 132) ein, setzt (B. 130) und (B. 131) gleich und löst nach der Streuamplitude $f(k,\vartheta,\varphi)$ auf, dann ergibt sich

$$\begin{aligned}f(k,\vartheta) &= \frac{i}{2k}\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)\,(1-e^{2i\delta_l(k)})\,P_l(\cos\vartheta)\\&=\frac{i}{2k}\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)\,(1-S_l(k))\,P_l(\cos\vartheta)\end{aligned} \tag{B. 134}$$

oder mit $1-e^{2i\delta}=2e^{i\delta}\sin(\delta)/i$

$$f(k,\vartheta)=\frac{1}{k}\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)\,e^{i\delta_l(k)}\sin\delta_l(k)\,P_l(\cos\vartheta)\,. \tag{B. 135}$$

Die Streuamplitude hängt nicht von der Wahl der Normierung $N(k)$ für die Gesamtlösung ab. Aus Symmetriegründen ist sie auch unabhängig vom Azimutwinkel φ.

7. In der hier entwickelten Partialwellenmethode ergibt sich die Streuamplitude als eine Summe über Drehimpulse l. Aus dem Verhalten der sphärischen Besselfunktionen für $x \ll 1$,

$$j_l(x) \xrightarrow[x\to 0]{} x/(2l+1)!!\,, \tag{B. 136}$$

folgt, daß die Wahrscheinlichkeit, ein einfallendes Teilchen in der Nähe des Kernmittelpunktes zu finden, mit wachsendem Wert von l stark abfällt. Die Quantenzahl l entspricht damit dem klassischen Stoßparameter. Da das Potential eine endliche Reichweite R besitzt, werden Partialwellen mit hohem Drehimpuls ($kR < \sqrt{l(l+1)}$) durch das Potential nur wenig beeinflußt. Die Streuphase $\delta_l(k)$ geht dann gegen Null, so daß diese Partialwellen keinen Beitrag zur Streuamplitude liefern und die Summe in Gl. (B. 135) bei einem bestimmten l_{max} abgebrochen werden kann. Mit wachsender Einschußenergie sind immer höhere Partialwellen zu berücksichtigen.

8. Da die Streuamplitude keine meßbare Größe darstellt, müssen wir noch den Zusammenhang mit dem differentiellen Wirkungsquerschnitt finden.

In der Zeit $\mathrm{d}t$ registriert ein Detektor mit der effektiven Fläche $\mathrm{d}f$, der sich in der Entfernung r_0 vom Target befindet, $\mathrm{d}N_s$ Teilchen, die in den Raumwinkel $\mathrm{d}\Omega(\mathrm{d}f = r_0^2\,\mathrm{d}\Omega)$ gestreut wurden. Fallen in der gleichen Zeit, $\mathrm{d}t$, durch die gleiche Fläche, $\mathrm{d}f$, $\mathrm{d}N_0$ Teilchen ein, dann ist der differentielle Wirkungsquerschnitt gegeben durch

$$\sigma(\vartheta)\,\mathrm{d}\Omega = \frac{\mathrm{d}N_s/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}N_0/\mathrm{d}t\,\mathrm{d}f}. \tag{B. 137}$$

Die Teilchenzahlen berechnen wir mit Hilfe der Stromdichte

$$\boldsymbol{j} = \frac{\hbar}{2mi}\left(\varphi^* \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}\varphi - \varphi\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}\varphi^*\right). \tag{B. 138}$$

Setzt man für φ die asymptotische Form (B. 115) der Gesamtlösung ein, dann erhält man drei Anteile, die von der einfallenden Welle, der Streuwelle und dem Interferenzterm herrühren. Für die Stromdichte j_e der einfallenden ebenen Welle ergibt sich $j_e = \hbar k/m = v$. Bei der Streuwelle genügt es, nur die radiale Komponente des Gradienten zu berücksichtigen, da die Winkelkomponenten auf Ausdrücke von höherer Ordnung in $1/r$ führen, die für $r \to \infty$ wegfallen. Für die radiale Stromdichte der Streuwelle durch das Oberflächenelement $\mathrm{d}f$ einer Kugel mit dem Radius r_0 ergibt sich $j_s = |f|^2\,\hbar k/(r_0^2 m)$. Der Interferenzterm aus einfallender und Streuwelle verschwindet bei Integration über ein Intervall der Einschußenergie, das der Energieunschärfe in einem für Streuexperimente typischen Wellenpaket entspricht. Mit $\mathrm{d}N = j\,\mathrm{d}f\,\mathrm{d}t$ erhält man für den differentiellen Wirkungsquerschnitt $\sigma(\vartheta)\,\mathrm{d}\vartheta = (j_s/j_e)\,r_0^2\,\mathrm{d}\Omega$ insgesamt

$$\sigma(\vartheta) = |f(\vartheta)|^2\,. \tag{B. 139}$$

Setzt man in (B. 139) die Streuamplitude (B. 135) ein, dann ergibt sich

$$\begin{aligned}\sigma(\vartheta) = \frac{1}{k^2}\sum_{l=0}^{l_{\max}}\sum_{l'=0}^{l_{\max}}(2l+1)(2l'+1)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\delta_l(k)-\delta_{l'}(k))}\sin\delta_l(k)\sin\delta_{l'}(k)\\ \times P_l(\cos\vartheta)\,P_{l'}(\cos\vartheta)\,.\end{aligned} \tag{B. 140}$$

Man erkennt, daß der differentielle Wirkungsquerschnitt durch Interferenz der Partialwellen mit verschiedenem Drehimpuls bestimmt wird. Er kann also eine Beugungsstruktur mit ausgeprägten Maxima und Minima besitzen. Die Streuung verläuft für $E_k \to 0$ isotrop, da nur s-Wellen ($l = 0$) zur Streuamplitude beitragen ($P_0 = 1$). Für den differentiellen Wirkungsquerschnitt erhält man in diesem Fall $\sigma(\vartheta) = \frac{1}{k^2}\sin^2\delta_0(k)$.

Der totale Wirkungsquerschnitt der elastischen Streuung ergibt sich aus (B. 140) durch Integration über den Raumwinkel $\mathrm{d}\Omega$,

$$\sigma_{\mathrm{el}} = \int \mathrm{d}\Omega\,\sigma(\vartheta) = 2\pi\int_0^\pi \mathrm{d}\vartheta\,\sin\vartheta\,\sigma(\vartheta)\,. \tag{B. 141}$$

Da die Legendreschen Polynome zu verschiedenen l-Werten orthogonal sind,

$$\int_{-1}^{+1}\mathrm{d}x\,P_l(x)\,P_{l'}(x) = \frac{2}{2l+1}\,\delta_{ll'}\,, \tag{B. 142}$$

fallen Interferenzterme heraus, und der totale Streuquerschnitt wird eine Summe über Partialquerschnitte

$$\sigma_{el} = \sum_l \sigma_{el,l}\,, \qquad \sigma_{el,l} = \frac{\pi}{k^2}(2l+1)\,|1 - S_l(k)|^2 = \frac{4\pi}{k^2}(2l+1)\sin^2\delta_l(k)\,. \tag{B. 143}$$

9. Nach Gl. (B. 135) erhält man für die Streuamplitude in Vorwärtsrichtung ($\vartheta = 0$) wegen $P_l(1) = 1$

$$f(\vartheta = 0) = \frac{1}{k}\sum_l (2l+1)\,e^{i\delta_l(k)}\sin\delta_l(k)\,. \tag{B. 144}$$

Der Imaginärteil dieses Ausdrucks

$$\mathrm{Im}\, f(\vartheta = 0) = \frac{1}{k}\sum_l (2l+1)\sin^2\delta_l(k) \tag{B. 145}$$

stimmt nach (B. 143) bis auf einen Faktor mit dem totalen Wirkungsquerschnitt überein,

$$\sigma_{el} = \frac{4\pi}{k}\,\mathrm{Im}\, f(\vartheta = 0)\,. \tag{B. 146}$$

Diese Beziehung wird als optisches Theorem bezeichnet.

10. Wenn in der Wechselwirkung zwischen Projektil und Target neben der elastischen Streuung auch nichtelastische Prozesse möglich sind, dann ändert sich in der asymptotischen Form der Gesamtlösung nicht nur die Phase, sondern auch der Betrag der Amplitude der auslaufenden Kugelwelle gegenüber der Amplitude der einlaufenden Kugelwelle. Für die Streu-

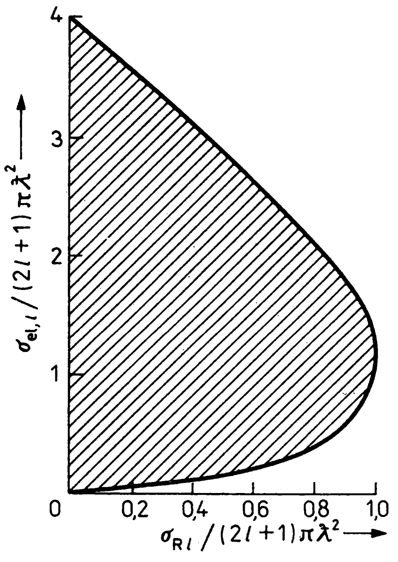


Abb. B.11
Zusammenhang von Streuquerschnitt $\sigma_{el,l}$ und Reaktionsquerschnitt $\sigma_{R,l}$ für Partialwelle l. Nur die im schraffierten Gebiet liegenden Werte sind möglich

funktion gilt $|S_l(k)| < 1$, weil ein Übergang in andere Reaktionskanäle erfolgt. Damit wird die Streuphase komplex, $\delta_l = \varkappa_l + i\varrho_l$, $\varrho_l \geqq 0$, so daß sich die Streufunktion in der Form

$$S_l(k) = \eta_l(k)\, e^{2i\varkappa_l(k)}, \qquad \eta_l(k) = e^{-2\varrho_l(k)} \tag{B. 147}$$

ansetzen läßt. Der totale Reaktionsquerschnitt σ_R ergibt sich aus der Stromdichte, die mit der Gesamtwelle verknüpft ist,

$$\sigma_R = \frac{\pi}{k^2} \sum_l (2l+1)(1 - |S_l(k)|^2)\,. \tag{B. 148}$$

Streu- und Reaktionsquerschnitt faßt man zum totalen Wirkungsquerschnitt zusammen,

$$\sigma_{tot} = \sigma_R + \sigma_{el}\,. \tag{B. 149}$$

Der Reaktionsquerschnitt für eine Partialwelle l nimmt für $S_l = 0$ einen Maximalwert $\sigma_{R,l} = \pi(2l+1)/k^2$ an. Er verschwindet für $|S_l| = 1$. Der maximale Streuquerschnitt wird für $S_l = -1$ erreicht, $\sigma_{el,l} = \frac{4\pi}{k^2}(2l+1)$. Dieser Wert ist um den Faktor 4 größer als der maximale Reaktionsquerschnitt. Den Zusammenhang von Streu- und Reaktionsquerschnitt veranschaulicht Abb. B. 11. Man erkennt, daß Kernreaktionen ohne elastische Streuung nicht möglich sind.

B 5. Streulänge und effektive Reichweite

1. Bei geringer kinetischer Energie der einfallenden Teilchen liegen die Verhältnisse besonders einfach, da nur die s-Welle in den Potentialbereich eindringt und gestreut wird. Wir zeigen, daß in diesem Fall die Energieabhängigkeit des Wirkungsquerschnitts durch lediglich zwei Parameter darstellbar ist, die die Tiefe und die Reichweite des Potentials charakterisieren.

Zunächst betrachten wir das Streuproblem bei gleichem Potential V für zwei verschiedene Energiewerte E_1, E_2. Die zugehörigen Wellenfunktionen der s-Welle u_1, u_2 genügen den Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} \frac{d^2u_1}{dr^2} + \frac{2m}{\hbar^2}[E_1 - V(r)]\,u_1 &= 0 \\ \frac{d^2u_2}{dr^2} + \frac{2m}{\hbar^2}[E_2 - V(r)]\,u_2 &= 0\,. \end{aligned} \tag{B. 150}$$

Subtraktionen der beiden Gleichungen und partielle Integration in den Grenzen 0 bis R liefert ($u' \equiv du/dr$)

$$(u_2u_1' - u_1u_2')|_0^R = (k_2^2 - k_1^2)\int_0^R dr\, u_1u_2\,. \tag{B. 151}$$

Wir führen nun zwei Vergleichsfunktionen v_1, v_2 ein, die für $r > R$ mit den exakten Lösungen u_1, u_2 übereinstimmen und deren Verlauf im Innengebiet $r < R$ sich so fortsetzt, wie das für den feldfreien Fall $V \equiv 0$ gelten würde.

Die Funktionen v_i können am Koordinatennullpunkt auf eins normiert werden:

$$v_i(r) = \frac{\sin(k_ir + \delta_0(k_i))}{\sin(\delta_0(k_i))}\,. \tag{B. 152}$$

Für die Vergleichsfunktionen v_i läßt sich eine zu (B. 151) analoge Gleichung ableiten,

$$(v_2 v_1' - v_1 v_2')|_0^R = (k_2^2 - k_1^2) \int_0^R dr\, v_1 v_2 \,. \qquad \text{(B. 153)}$$

Man subtrahiert (B. 151) von (B. 153) und erhält

$$(v_2 v_1' - v_1 v_2' - u_2 u_1' + u_1 u_2')|_0^R = (k_2^2 - k_1^2) \int_0^R dr (v_1 v_2 - u_1 u_2) \,.$$

Mit den Randbedingungen $u_1(0) = u_2(0) = 0$, $v_1(0) = v_2(0) = 1$ und $v_i'(0) = k_i \cot \delta_0(k_i)$ ergibt sich daraus

$$k_2 \cot \delta_0(k_2) - k_1 \cot \delta_0(k_1) = (k_2^2 - k_1^2) \int_0^\infty dr (v_1 v_2 - u_1 u_2) \,. \qquad \text{(B. 154)}$$

Die Integration auf der rechten Seite konnte dabei bis unendlich ausgedehnt werden, da der Integrand für $r > R$ wegen $v_1 = u_1$, $v_2 = u_2$ verschwindet.

Wir betrachten jetzt den Grenzfall $E_1 \to 0$, $E_2 \to E$. Die Schrödinger-Gleichung für die zu $E_1 \to 0$ gehörigen Funktionen u_0, v_0 geht für $r > R$ in die Gleichung für eine Gerade ($u_0'' = 0$, $v_0'' = 0$) über mit den Lösungen

$$u_0 = v_0 = 1 - r/a(0) \quad \text{für} \quad r > R \,. \qquad \text{(B. 154a)}$$

Der Parameter $a(0)$, der den Schnittpunkt der Geraden mit der r-Achse angibt, wird als Streulänge bezeichnet. Die Streulänge ist in freien Zuständen negativ (positiv) für anziehendes (abstoßendes) Potential. Für ein sehr schwach anziehendes Potential gilt $a(0) \approx 0$. Wird das Potential stärker, dann geht $a(0)$ gegen $-\infty$, bis sich ein gebundener Zustand mit sehr geringer Bindungsenergie einstellt, für den die Streulänge den Wert $+\infty$ annimmt. Wenn das Potential weiter wächst, dann verringert sich die Streulänge bis wiederum der Wert $a(0) \approx 0$ erreicht wird. Ein schwach gebundener Zustand besitzt immer eine positive Streulänge (siehe Abb. B. 12).

Einen Zusammenhang zwischen der Streulänge $a(0)$ und der Streuphase $\delta_0(k)$ läßt sich herstellen, indem man (B. 154a) mit der asymptotischen Form von (B. 152) vergleicht. Für $k \to 0$ geht $\sin(kr + \delta) = \sin kr \cos \delta + \cos kr \sin \delta$ wegen $\sin kr \approx kr$, $\cos kr \approx 1$ gegen $kr \cos \delta + \sin \delta$.

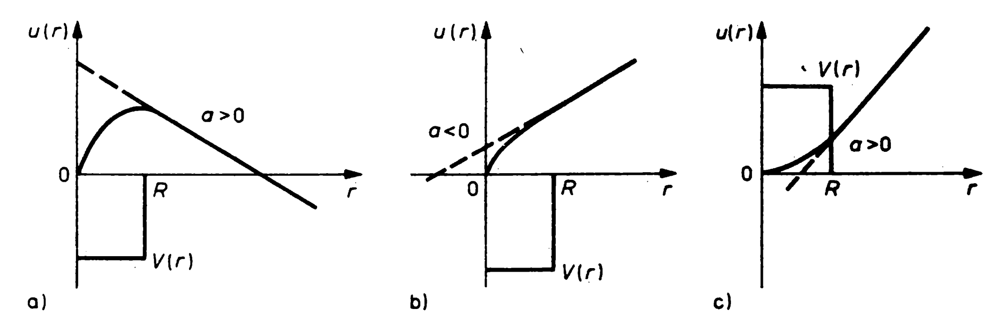


Abb. B.12
Definition der Streulänge
a) Anziehendes Potential, negative Streulänge (gebundener Zustand)
b) Anziehendes Potential, positive Streulänge (freier Zustand)
c) Abstoßendes Potential, R Reichweite des Potentials

Nach (B. 152) wird also $v_0 = kr \cot \delta + 1$. Ein Vergleich mit (B. 154a) ergibt

$$\lim_{k \to 0} k \cot \delta_0(k) = -\frac{1}{a(0)} . \tag{B. 155}$$

Das Integral auf der rechten Seite von (B. 154) wird als verallgemeinerte effektive Reichweite $\varrho(E_1, E_2)$ bezeichnet:

$$\varrho(E_1, E_2) = 2 \int_0^\infty dr(v_1 v_2 - u_1 u_2) .$$

Die Größe ϱ, die die Dimension einer Länge hat, variiert schwach mit der Einschußenergie, da die potentielle Energie überwiegt. Im Grenzfall $E_1 \to 0$, $E_2 \to E$ erhalten wir deshalb mit $u \approx u_0$, $v \approx v_0$

$$\varrho(0, E) \approx \varrho(0, 0) = 2 \int_0^\infty dr(v_0^2 - u_0^2) \equiv r_0 . \tag{B. 156}$$

In (B. 156) ist r_0 die effektive Reichweite. Nach (B. 154) gilt damit für die verallgemeinerte Streulänge $a(k)$

$$k \cot \delta_0(k) = -\frac{1}{a(k)} \tag{B. 157}$$

in der Näherung der effektiven Reichweite (Entwicklung von $k \cot \delta$ bis zum Glied zweiter Ordnung in k)

$$\frac{1}{a(k)} = \frac{1}{a(0)} - \frac{1}{2} k^2 r_0 .$$

Für den totalen Wirkungsquerschnitt der s-Welle erhalten wir

$$\sigma_{el} = \frac{4\pi}{k^2} \frac{1}{1 + \cot^2 \delta_0(k)} , \tag{B. 159}$$

also mit (B. 157) und (B. 158)

$$\sigma_{el} = \frac{4\pi}{k^2 + \left[\frac{1}{a(0)} - \frac{1}{2} k^2 r_0\right]^2} . \tag{B. 160}$$

Die Beziehung (B. 160) sagt aus, daß eine Analyse des Wirkungsquerschnittes der niederenergetischen Streuung nur zwei Parameter des Potentials, nicht aber Einzelheiten seines radialen Verlaufs zu bestimmen erlaubt. Der Grenzübergang $k \to 0$ in (B. 160),

$$\sigma_{el} = 4\pi a(0)^2 , \tag{B. 161}$$

zeigt, daß der Streuquerschnitt bei verschwindender Teilchenenergie vollständig durch die Streulänge bestimmt ist.

B 6. Greensche Funktion der Potentialstreuung

1. Die Lippmann-Schwinger-Gleichung

$$\psi_{\boldsymbol{k}}^{(+)}(\boldsymbol{r}) = \Phi_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{r}) + \int d\boldsymbol{r}' G^{(+)}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') \; U(\boldsymbol{r}) \, \psi_{\boldsymbol{k}}^{(+)}(\boldsymbol{r}) \tag{B.162}$$

für die Streuung am Potential $U(\boldsymbol{r})$ enthält die Greensche Funktion $G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')$, die der Gleichung

$$(E - H_0) \, G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') = \delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}') , \qquad E = \frac{\hbar^2}{2m} k^2 , \qquad H_0 = \frac{\boldsymbol{p}^2}{2m} \tag{B.163}$$

genügt. Die Greensche Funktion erfüllt eine homogene Gleichung für $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}'$, wird aber singulär, wenn der Aufpunkt $\boldsymbol{r}$ mit dem Quellpunkt $\boldsymbol{r}'$ zusammenfällt. Unter Verwendung von

$$\delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}') = \int \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{q}}{(2\pi)^3}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{q}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')} \tag{B. 164}$$

ergibt sich als formale Lösung der Gleichung (B.163)

$$G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') = \frac{1}{E - H_0} \int \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{q}}{(2\pi)^3}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{q}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')} . \tag{B. 165}$$

Da eine ebene Welle auch Eigenfunktion des inversen Operators $1/(E - H_0)$ ist,

$$(E - H_0)^{-1}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{q}\boldsymbol{r}} = \frac{1}{E - \dfrac{\hbar^2}{2m} q^2}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{q}\boldsymbol{r}} , \tag{B. 166}$$

erhält man für die Greensche Funktion

$$G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') = \frac{2m}{\hbar^2} \int \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{q}}{(2\pi)^3} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{q}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}}{k^2 - q^2} \equiv \frac{2m}{\hbar^2}\, \tilde{G}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') \tag{B. 167}$$

Der Integrand in (B.167) hat Pole bei $q = \pm k$, so daß eine Vorschrift angegeben werden muß, wie diese Pole zu behandeln sind, um dem Integral einen Sinn zu geben.

Zunächst ist es günstig, Polarkoordinaten mit der z-Achse in Richtung $\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}' = \boldsymbol{R}$ einzuführen,

$$\tilde{G}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') = (2\pi)^{-3} \int_0^\infty \mathrm{d}q\, q^2 \int_0^\pi \mathrm{d}\vartheta\, \sin\vartheta \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi\, \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}q\cos\vartheta}}{k^2 - q^2} , \tag{B. 168}$$

da dann über die Winkel ϑ, φ sofort integriert werden kann,

$$\tilde{G}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') = -(4\pi^2 R)^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}q\, \frac{q \sin(qR)}{q^2 - k^2} . \tag{B. 169}$$

Mit Hilfe von

$$\sin(qR) = \frac{1}{2\mathrm{i}} (\mathrm{e}^{\mathrm{i}qR} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}qR}) , \qquad \frac{q}{q^2 - k^2} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{q - k} + \frac{1}{q + k}\right] \tag{B. 170}$$

schreiben wir (B.169) um,

$$\begin{aligned} \tilde{G}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') &= -(16\pi^2\, \mathrm{i}R)^{-1} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}q\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}qR} \left[\frac{1}{q-k} + \frac{1}{q+k}\right] - \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}q\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}qR} \left[\frac{1}{q-k} + \frac{1}{q+k}\right] \right] \\ &\equiv -(16\pi^2\, \mathrm{i}R)^{-1}\, (I_1 - I_2) . \end{aligned} \tag{B. 171}$$

Die Integration über q führen wir in der komplexen q-Ebene aus,

$$q = q_1 + \mathrm{i}q_2 , \qquad \mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}qR} = \mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}q_1 R}\, \mathrm{e}^{\mp q_2 k} . \tag{B. 172}$$

Wählt man den Integrationsweg so, daß beide Pole umschlossen werden, dann besteht das Integral aus ein- und auslaufenden Kugelwellen. Um die Randbedingung (B.115) zu erfüllen, integrieren wir in der Weise, daß für $r \to \infty$ (oder $R \to \infty$) in G nur auslaufende Kugelwellen auftreten. Für das erste Integral in (B.171) wählen wir einen Integrationsweg längs der reellen Achse von $-\infty$ bis $+\infty$, wobei der Pol bei $-k$ links, der Pol bei $+k$ rechts umgangen wird. Diesen Integrationsweg schließen wir durch einen Halbkreis mit dem Radius ϱ in der oberen Halbebene ($q_2 > 0$), so daß nur der Pol bei $+k$ im Integrationsgebiet liegt und der Halbkreis wegen (B.172) für $\varrho \to \infty$ keinen Beitrag zum Integral liefert (vgl. Abb. 10.24). Das Residuum ist $\mathrm{e}^{\mathrm{i}qR}$, woraus nach dem Residuensatz für das erste Integral $I_1 = 2\pi\, \mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kR}$ folgt. Da der Integrand in I_2 einen Faktor $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}qR}$ enthält, muß man bei der Integration den Pol $-k$ erfassen, den Pol bei $+k$ ausschließen und den Integrationsweg in der unteren Halbebene schließen, um wiederum nur auslaufende Kugelwellen zu erhalten, $I_2 = -2\pi\, \mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kR}$.

Damit ergibt sich für die Greensche Funktion $G^{(+)}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')$ insgesamt

$$G^{(+)}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') = -\frac{2m}{\hbar^2} \cdot \frac{1}{4\pi} \frac{e^{ikR}}{R} = -\frac{\hbar^2}{2m} \cdot \frac{1}{4\pi} \frac{e^{ik|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} . \tag{B. 173}$$

2. Die Integrationsvorschrift für (B.167), die zum Ergebnis (B.179) führt, läßt sich einfacher formulieren, wenn wir die Pole entsprechend

$$q' = \pm(q + i\varepsilon') , \qquad \varepsilon' > 0 \tag{B.174}$$

$$q'^2 = q^2 + i\varepsilon + O(\varepsilon'^2) , \qquad \varepsilon = 2k\varepsilon' \tag{B.175}$$

verschieben, den in Abb. B.13 skizzierten Integrationsweg verwenden und nach Ausführung der Integration den Grenzübergang $\varepsilon \to 0$ bilden. In diesem Sinne ersetzen wir die Gleichung (B.167) durch

$$G^{(+)}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{2m}{\hbar^2} \int \frac{d\boldsymbol{q}}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\boldsymbol{q}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}}{k^2 - q^2 + i\varepsilon} . \tag{B. 176}$$

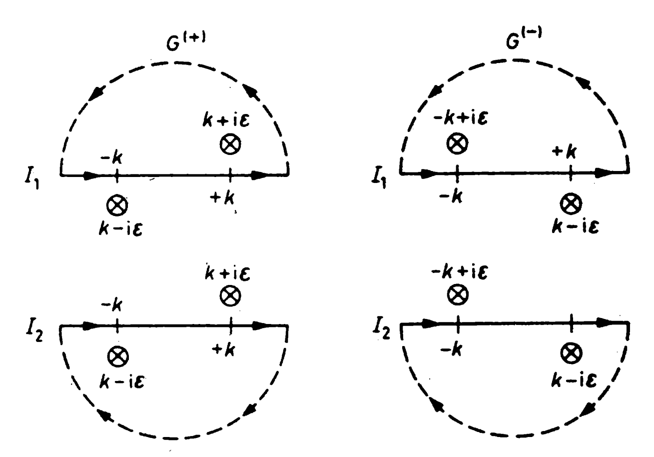


Abb. B.13
Integrationswege zur Berechnung der Greenschen Funktionen $G^{(+)}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')$

3. Analog läßt sich eine Greensche Funktion $G^{(-)}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')$ einführen, die asymptotisch nur aus auslaufenden Kugelwellen besteht. Dazu muß man z. B. bei der Berechnung von I_1 den Pol bei $-k$ rechts, den Pol bei $+k$ links umgehen, wenn man den Integrationsweg über die obere Halbebene schließt. Dieser Integrationsweg über die obere Halbebene schließt. Dieser Integrationsvorschrift entspricht

$$G^{(-)}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{2m}{\hbar^2} \int \frac{d\boldsymbol{q}}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\boldsymbol{q}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}}{k^2 - q^2 - i\varepsilon} , \tag{B. 177}$$

woraus folgt

$$G^{(-)}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') = -\frac{2m}{\hbar^2} \cdot \frac{1}{4\pi} \frac{e^{-ik|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} . \tag{B. 178}$$

4. Wir wollen nun explizit zeigen, daß die Greensche Funktionen (B.173) und (B.178) den Randbedingungen genügen, die durch oberen Index + oder — angedeutet sind. Dazu untersuchen wir als Beispiel den Integralterm in (B.162) mit $G^{(+)}$ aus (B.173) im Grenzfall $r \to \infty$. In dieser Grenze wird r sehr viel größer als die Reichweite des Potentials. Außerdem gilt

$$|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'| \approx r , \qquad k\,|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'| \approx kr - k\frac{\boldsymbol{r}}{r}\boldsymbol{r}' = kr - \boldsymbol{k}'\boldsymbol{r}' , \tag{B.179}$$

wobei $\boldsymbol{k}'$ ein Vektor zum Aufpunkt $\boldsymbol{r}$ ist, an dem wir die Wellenfunktion berechnen wollen. Damit enthält die asymptotische Form der Greenschen Funktion $G^{(+)}$,

$$G^{(+)} \xrightarrow[r\to\infty]{} -\frac{2m}{\hbar^2}\frac{1}{4\pi}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}'\boldsymbol{r}'}\,\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{r}\,, \tag{B. 180}$$

eine auslaufende Kugelwelle in r. Die asymptotische Form der Greenschen Funktion $G^{(-)}$,

$$G^{(-)} \xrightarrow[r\to\infty]{} -\frac{2m}{\hbar^2}\frac{1}{4\pi}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}'\boldsymbol{r}''}\,\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kr}}{r}\,, \tag{B. 181}$$

folgt analog.

Literaturhinweise zu Anhang B

Bal 59, Bal 68, Baz 71, Byc 73, Dav 63, Gol 67, Lan 73, Mac 59, Mar 71, New 66, Pos 71, Ran 76, Rod 67, Tay 72, Wu 62

Anhang C. Feynman-Diagramme

1. In QED und QCD läßt sich der Wirkungsquerschnitt eines Prozesses als Produkt des invarianten Matrixelements M und eines Phasenraumfaktors schreiben. Für spinlose Teilchen und Photonen gilt in natürlichen Einheiten

$$\mathrm{d}\sigma = \frac{1}{|\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2|} \left(\frac{1}{2\omega_{p_1}}\right) \left(\frac{1}{2\omega_{p_2}}\right) |M|^2 \frac{\mathrm{d}^3 k_1}{(2\pi)^3\, 2\omega_1} \cdots \frac{\mathrm{d}^3 k_n}{(2\pi)^3\, 2\omega_n}$$
$$\times (2\pi)^4\, \delta^4 \left(p_1 + p_2 - \sum_{i=1}^{n} k_i\right) S\,. \tag{C.1}$$

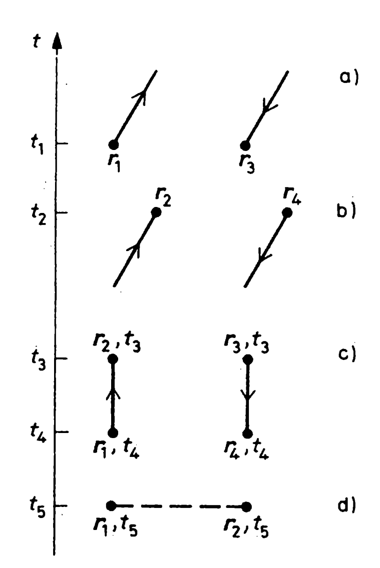


Abb. C.1
Elemente der Feynman-Diagramme für die Wechselwirkung eines Teilchens in einem Vielteilchensystem

a) Erzeugung eines Teilchens am Ort $\boldsymbol{r}_1$ zum Zeitpunkt t_1 (links), Erzeugung eines Lochs am Ort $\boldsymbol{r}_3$ zum Zeitpunkt t_1 (rechts)
b) Vernichtung eines Teilchens am Ort $\boldsymbol{r}_2$ zum Zeitpunkt t_2 (links), Vernichtung eines Lochs am Ort $\boldsymbol{r}_4$ zum Zeitpunkt t_2 (rechts)
c) Freie Ausbreitung eines Teilchens von $\boldsymbol{r}_1 t_1$ nach $\boldsymbol{r}_2 t_3$ (links), freie Ausbreitung eines Lochs von $\boldsymbol{r}_4 t_4$ nach $\boldsymbol{r}_3 t_3$ (rechts)
d) Wechselwirkung zwischen den Orten $\boldsymbol{r}_1$ und $\boldsymbol{r}_2$, $V(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2)$, zum Zeitpunkt t

Dabei sind die Größen $\omega_{p_i} = (p_i^2 + m_i^2)^{1/2}$ und v_i Energien und Geschwindigkeiten der kollinear einlaufenden Teilchen, k_i und ω_i sind die Impulse und Energien der Teilchen im Endzustand. Über die Impulse k_i aller nichtbeobachteten Teilchen wird integriert. Der Faktor S enthält für je m identische Teilchen einen Faktor $(m!)^{-1}$. Für Dirac-Teilchen sind in Tabelle C.1 alle Faktoren $1/2\omega_i$ durch m_i/E_i zu ersetzen.

Für die Zerfallswahrscheinlichkeit eines Teilchen der Masse m in seinem Ruhsystem gilt

$$d\Omega = \frac{1}{2m}\,|M|^2\,\frac{d^3k_1}{(2\pi)^3\,2\omega_1}\cdots\frac{d^3k_n}{(2\pi)^3\,2\omega_n}(2\pi)^4\,\delta^4\left(p - \sum_{i=1}^{n} k_i\right)S\,. \tag{C.2}$$

Für Fermionen werden $1/2m$ weggelassen und die Faktoren $1/2\omega_i$ wie oben ersetzt.

Über die Polarisationsrichtungen der Endzustände in (C. 1) und (C. 2) wird gegebenenfalls summiert, über die Polarisationsrichtungen der Anfangszustände gegebenenfalls gemittelt.

Man findet die invariante Amplitude M, indem man alle verbundenen Feynman-Graphen aufzeichnet und den Elementen der Graphen Faktoren zuordnet, die in Tabelle C.1 angegeben werden. Es bedeuten

$\mu, \nu, \lambda, \sigma$	Lorentz-Tensorindizes,
a, b, c, d	Gluonen-Farbindizes,
i, j	Quark-Farbindizes,
k, p, q, r	Viererimpulse,
f_{abc}	SU(3)-Strukturkonstanten,
$(L^a)_{ij}$	acht 3×3-Matrizen (Erzeugende der Gruppe $SU(3)$)
$u(p, s)$, $v(p, s)$	Dirac-Spinoren
$\varepsilon_\mu(k)$	Polarisationsvektoren von Photonen

Die Kopplungskonstante g der starken Wechselwirkung und α_s sind verknüpft durch die Beziehung $\alpha_s = g^2/4\pi$.

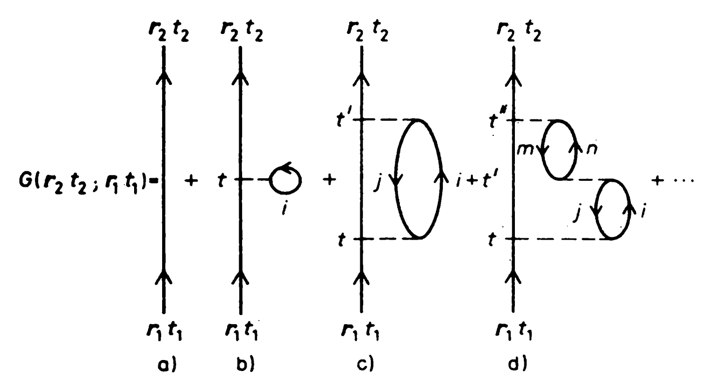
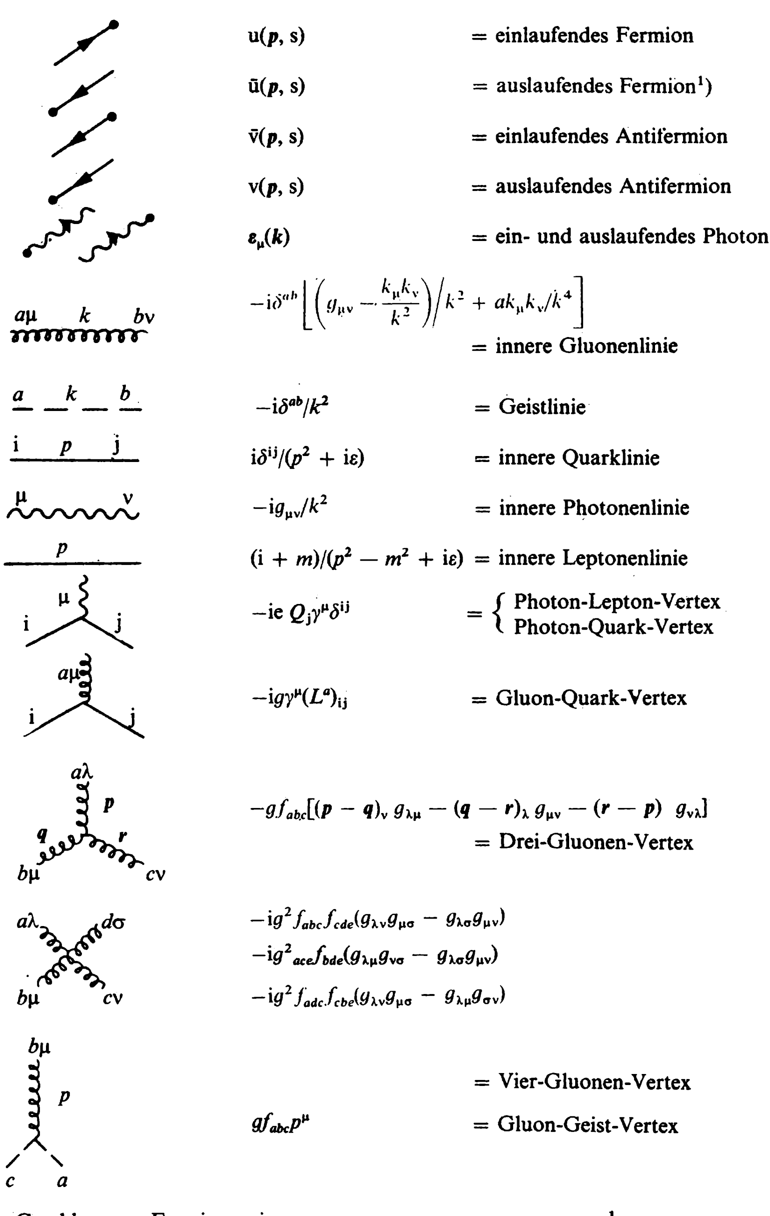


Abb. C.2
Feynman-Diagramme verschiedener Ordnung für die Störungsentwicklung des Propagators $G(r_2t_2; r_1t_1)$

a) Freie Ausbreitung
b) Wechselwirkung mit einem Teilchen im Zustand i
c) Erzeugung und Vernichtung eines Teilchen-Loch-Paares (ij) zu den Zeitpunkten t bzw. t'
d) Erzeugung des Teilchen-Loch-Paares (ij) zum Zeitpunkt t; Streuung des Teilchen-Loch-Paares (ij) in das Teilchen-Loch-Paar (nm) zum Zeitpunkt t'; Vernichtung des Teilchen-Loch-Paares (nm) zum Zeitpunkt t''

Tabelle C.1
Feynman-Regeln von QED und QCD



Ausdruck	Bedeutung
$u(p, s)$	= einlaufendes Fermion
$\bar{u}(p, s)$	= auslaufendes Fermion[1])
$\bar{v}(p, s)$	= einlaufendes Antifermion
$v(p, s)$	= auslaufendes Antifermion
$\varepsilon_\mu(k)$	= ein- und auslaufendes Photon
$-i\delta^{ab}\left[\left(g_{\mu\nu}-\frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right)/k^2 + a k_\mu k_\nu/k^4\right]$	= innere Gluonenlinie
$-i\delta^{ab}/k^2$	= Geistlinie
$i\delta^{ij}/(p^2 + i\varepsilon)$	= innere Quarklinie
$-ig_{\mu\nu}/k^2$	= innere Photonenlinie
$(i + m)/(p^2 - m^2 + i\varepsilon)$	= innere Leptonenlinie
$-ie\, Q_j\gamma^\mu\delta^{ij}$	= Photon-Lepton-Vertex, Photon-Quark-Vertex
$-ig\gamma^\mu(L^a)_{ij}$	= Gluon-Quark-Vertex
$-gf_{abc}[(p - q)_\nu\, g_{\lambda\mu} - (q - r)_\lambda\, g_{\mu\nu} - (r - p)\; g_{\nu\lambda}]$	= Drei-Gluonen-Vertex
$-ig^2 f_{abc}f_{cde}(g_{\lambda\nu}g_{\mu\sigma} - g_{\lambda\sigma}g_{\mu\nu})$ $-ig^2{}_{ace}f_{bde}(g_{\lambda\mu}g_{\nu\sigma} - g_{\lambda\sigma}g_{\mu\nu})$ $-ig^2 f_{adc}f_{cbe}(g_{\lambda\nu}g_{\mu\sigma} - g_{\lambda\mu}g_{\sigma\nu})$	= Vier-Gluonen-Vertex
$gf_{abc}p^\mu$	= Gluon-Geist-Vertex

Geschlossener Fermionenring	-1
Innerer Impuls q, der nicht durch Impulserhaltung an den Vertices festgelegt ist	$\int \frac{d^4q}{(2\pi)^4}$

[1]) Pfeilrichtung bei auslaufendem Fermion entgegengesetzt

2. Die Wechselwirkung eines Teilchens in einem Vielteilchensystem läßt sich ebenfalls mit Hilfe einer Diagrammtechnik veranschaulichen. Die Wahrscheinlichkeit, daß ein Teilchen, das sich zur Zeit t_1 am Punkt r_1 befindet, zur Zeit t_2 den Punkt r_2 erreicht, wird dabei durch den Propagator $G(r_2 t_2; r_1 t_1)$ beschrieben. Bei einer Störungsentwicklung von G, die verschiedene Möglichkeiten der Wechselwirkung des Teilchens auf dem Wege von r_1 nach r_2 verdeutlicht, kann man die Struktur der Glieder verschiedener Ordnung durch Feynman-Diagramme darstellen. Ihre Elemente sind in Abb. C.1 zusammengestellt. Einige Glieder dieser Entwicklung enthält die Abb. C.2. Wir haben Glieder erster, zweiter und vierter Ordnung in der Wechselwirkung herausgegriffen. Die gerade Linie a entspricht einer wechselwirkungsfreien Ausbreitung des Teilchens von r_1 nach r_2. Der Graph b repräsentiert die Wechselwirkung mit einem Teilchen im Zustand i (erste Ordnung). Nach dem Diagramm c (zweite Ordnung) erfolgt zum Zeitpunkt t die Erzeugung eines Teilchen-Loch-Paares (ij), das zur Zeit t' vernichtet wird. Berücksichtigt man bei $t' > t$ eine Streuung dieses Teilchen-Loch-Paares in den Teilchen-Loch-Zustand (mn), dann ergibt sich der Graph d (vierte Ordnung).

Literaturhinweise zu Anhang C

Baz 72, Bil 71, Bri 62, Mar 71, Šir 72

Anhang D. Tabellen

D 1. Einige Einheiten und deren Umrechnung*)

Längen $1\,\text{fm} = 10^{-15}\,\text{m} = \{1\,\text{Fermi (Fm)}\}$; $10^{-10}\,\text{m} = \{1\,\text{Å}\}$; {1 Lichtjahr} $= 9{,}460528 \cdot 10^{15}\,\text{m}$; {1 parsec} = 3,261633 Lichtjahre

Flächen $10^{-28}\,\text{m}^2 = 10^{-24}\,\text{cm}^2 = \{1\,\text{barn}\}$

Impulse $1\,\text{MeV}c^{-1} = 5{,}3443 \cdot 10^{-22}\,\text{kg ms}^{-1}$

Drehimpulse $\hbar = 6{,}582173 \cdot 10^{-22}\,\text{MeV s} = 1{,}9733 \cdot 10^{-13}\,\text{MeV m}c^{-1}$

Kräfte 1 Newton (N) $= 1\,\text{kg ms}^{-2}$; {1 kp} $= 9{,}80665\,\text{N} \approx 10\,\text{N}$

Drücke 1 Pascal (Pa) $= 1\,\text{Nm}^{-2}$; {1 Torr (Torr)} $= 1{,}333 \cdot 10^2\,\text{Pa}$ $= 1{,}333$ {mbar}

Temperaturen $0\,°\text{C} = 273{,}15\,\text{K}$

Zeiten {1 Tag} = 86400 s; {1 Jahr} $= 3{,}15569 \cdot 10^7\,\text{s}$

Mengen, atomare 1 Mol (mol) = Stoffmenge aus ebenso vielen Teilchen wie Atome in 0,012 kg des Nuklids ^{12}C enthalten sind.

Massen, atomare

— absolute Atom- (oder Molekül-)massen

$$1\,\text{u} = \text{m}_\text{u} = \frac{1}{12}\,\text{m}_\text{a}\,(^{12}\text{C}) = 10^{-3}\,\text{kg mol}^{-1}\,\text{N}_\text{A}^{-1} = 1{,}6605655 \cdot 10^{-27}\,\text{kg}$$

— relative Atom- (oder Molekül-)massen

$$\text{A}_\text{r}(\text{X}) = \frac{\text{m}_\text{a}(\text{X})}{\text{m}_\text{u}}; \qquad \text{M}_\text{r}(x) = \frac{\text{m}_\text{M}(x)}{\text{m}_\text{u}}$$

— Molmasse $\text{M}/\text{kg mol}^{-1} = \text{M}_\text{r} \cdot \text{m}_\text{u} \cdot \text{N}_\text{A}$

Energien 1 Ws = 1 Nm = 1 Joule (J) $= 6{,}242 \cdot 10^{12}\,\text{MeV}$; $1\,\text{MeV} = 1{,}6022 \cdot 10^{-13}\,\text{J} = 1{,}0735 \cdot 10^{-3}\,\text{u}c^2$; $1\,\text{u}c^2 = 931{,}5016\,\text{MeV}$

Elektrische Ladungen 1 Coulomb (C) = 1 As = {2,998 esE}

$$\{1\,\text{esE}\} = \{1\,\text{g}^{1/2}\,\text{cm}^{3/2}\,\text{s}^{-1}\} = \{1\,(\text{erg cm})^{1/2}\} = 2{,}49 \cdot 10^9\,(\text{MeV} \cdot \text{fm})^{1/2}$$

Elektrische Ströme 1 Ampere (A) $= 1\,\text{Cs}^{-1} = 6{,}241460 \cdot 10^{18}\,\text{s}^{-1}$

Elektrische Feldstärken Vm^{-1}

Elektrische Kapazität 1 Farad (F) $= 1\,\text{AsV}^{-1}$

Magnetische Feldstärken

$$1\,\text{Am}^{-1};\ \{1\,\text{Oerstedt (Oe)}\} = (4\pi)^{-1}\,\text{Am}^{-1} = 0{,}795 \cdot 10^2\,\text{Am}^{-1}$$

Magnetische Flüsse

$$1\,\text{Weber (Wb)} = 1\,\text{Vs} = 1\,\text{m}^2\,\text{kg s}^{-2}\,\text{A}^{-1}$$

---

*) In geschweiften Klammern sind SI-fremde Einheiten angegeben

Magnetische Induktionen

$$1 \text{ Tesla (T)} = 1 \text{ Wb m}^{-2} = \{10^4 \text{ Gauß (G)}\} = 1 \text{ Vs m}^{-2} = 1 \text{ kg s}^{-2} \text{ A}^{-1}$$

Magnetische Induktivitäten

$$1 \text{ Henry (H)} = 1 \text{ Vs A}^{-1} = 1 \text{ m}^2 \text{ kg s}^{-2} \text{ A}^{-2}$$

Aktivitäten

$$1 \text{ Becquerel (Bq)} = \text{s}^{-1} = \{2{,}7 \cdot 10^{-11} \text{ Ci}\}; \{1 \text{ Curie (Ci)}\} = 3{,}7 \cdot 10^{10} \text{ Bq}$$

Teilchenflußdichten

$$\text{m}^{-2} \text{ s}^{-1}$$

Teilchenfluenzen

$$\text{m}^{-2}$$

Energiedosis

$$1 \text{ Gray (Gy)} = 1 \text{ J kg}^{-1} = \{10^2 \text{ Rad (rd)}\}$$

Äquivalenzdosis

$$1 \text{ Sievert (Sv)} = \text{q}^{-1} \text{ Gy} = \text{q} \{10^2 \text{ rem}\}$$

Expositionsdosis (Ionendosis)

$$\text{C/kg} = \{3{,}876 \cdot 10^3 \text{ R}\}; \{1 \text{ Röntgen (R)}\} = 2{,}58 \cdot 10^{-4} \text{ C kg}^{-1} \text{ (Luft)}$$

Sogenannte „natürliche“ Einheiten der Elementarteilchenphysik, die sich aus der Festlegung

$$\hbar = c = 1$$

ergeben, werden manchmal zur Vereinfachung der Schreibweise von Formeln verwendet.

Dadurch haben unterschiedliche physikalische Größen die gleiche Einheit:

$$[\text{Masse}] = [\text{Impuls}] = [\text{Energie}] = [\text{Zeit}]^{-1} = [\text{Länge}]^{-1}$$

Zur Unterscheidung gibt man die Einheiten von Massen und Impulsen häufig in GeV/c^2 bzw. GeV/c an. Es gilt dann für die Längen

$$1 \text{ fm} = 10^{-13} \text{ cm} = (197{,}3 \text{ MeV})^{-1} \approx 5 \text{ GeV}^{-1}$$

und für die Zeiten

$$(1 \text{ GeV})^{-1} = 1{,}973 \cdot 10^{-14} \text{ cm} = 6{,}58 \cdot 10^{-25} \text{ s}\,.$$

Mit der Festlegung zur Boltzmannschen Konstante

$$k = 1$$

werden auch Temperaturen in GeV gemessen

$$1 \text{ GeV} = 1{,}16 \cdot 10^{13} \text{ K} = 1{,}78 \cdot 10^{-24} \text{ g}\,.$$

Vorsätze für dezimale Vielfache und Teile von Einheiten

Vorsatz	Zeichen	Zehnerpotenz
Exa	E	10^{18}
Peta	P	10^{15}
Tera	T	10^{12}
Giga	G	10^{9}
Mega	M	10^{6}
Kilo	k	10^{3}
Hekto	h	10^{2}
Deka	da	10^{1}
Dezi	d	10^{-1}
Zenti	c	10^{-2}
Milli	m	10^{-3}
Mikro	µ	10^{-6}
Nano	n	10^{-9}
Pico	p	10^{-12}
Femto	f	10^{-15}
Atto	a	10^{-18}

D 2. Wichtige Umrechnungsformeln

Alle Energien sind in MeV einzusetzen: E/MeV

1. Frequenzen und Wellenlängen

$$\nu = E/h \qquad \nu/\text{s}^{-1} = 2{,}418 \cdot 10^{20}\, E$$
$$\lambda = hc/E \qquad \lambda/\text{m} = 1{,}239 \cdot 10^{-12}\, E^{-1}$$
$$\lambdabar = \hbar c/E \qquad \lambdabar/\text{m} = 1{,}973 \cdot 10^{-13}\, E^{-1}$$

2. Geschwindigkeit in nichtrelativistischer Näherung ($E_k \ll E_0$)

$$v = c\sqrt{\frac{2E_k}{E_0}}; \qquad v/\text{ms}^{-1} = 4{,}22 \cdot 10^{8}\sqrt{\frac{E_k}{E_0}}$$

3. Impuls

a) in nichtrelativistischer Näherung ($E_k \ll E_0$)

$$p \approx \frac{\sqrt{2}}{c}\sqrt{E_0 E_k}; \qquad p/\text{MeV} \cdot c^{-1} \approx 4{,}74 \cdot 10^{-3}\sqrt{E_0 E_k}$$

b) in ultrarelativistischer Näherung ($E_k \gg E_0$)

$$p/\text{MeV} \cdot c^{-1} = \frac{E_k}{c}$$

4. Materiewellenlänge
   a) in nichtrelativistischer Näherung ($E_k \ll E_0$)

$$\lambda = \frac{\hbar c}{\sqrt{2E_0 E_k}} : \lambda/\mathrm{m} = 1{,}39 \frac{10^{-13}}{\sqrt{E_0 E_k}}$$

Nukleonen: $\lambda/\mathrm{m} = \dfrac{4{,}55 \cdot 10^{-15}}{\sqrt{E_k}}$

Elektronen: $\lambda/\mathrm{m} = \dfrac{1{,}95 \cdot 10^{-10}}{\sqrt{E_k}}$

   b) in ultrarelativistischer Näherung für $E_k \gg E_0$ oder für ruhenergielose Teilchen

$$\lambda = \frac{\hbar c}{E_k} \qquad \lambda/\mathrm{m} = \frac{1{,}967 \cdot 10^{-13}}{E_k}$$

5. Ablenkung im magnetischen Querfeld (p/MeV c^{-1})

$$\varrho B = \frac{p}{ze}$$

   a) im nichtrelativistischen Falle $\varrho B/\mathrm{Tm} = \dfrac{\sqrt{2E_k E_0}}{299z}$

   für Elektronen $\varrho B/\mathrm{Tm} = 3{,}372 \cdot 10^{-3} \sqrt{E_k}$

   für Protonen $\varrho B/\mathrm{Tm} = 1{,}445 \cdot 10^{-1} \sqrt{E_k}$

   b) im relativistischen Falle $\varrho B/\mathrm{Tm} = \dfrac{\sqrt{E_k(E_k + 2E_0)}}{299z}$

   c) im ultrarelativistischen Falle $\varrho B/\mathrm{Tm} = \dfrac{p}{299z}$

D 3. Nuklide

In der nachfolgenden Tabelle sind Kerneigenschaften von Isotopen und Isomeren auf und in der Nähe des β-Stabilitätsbandes auszugsweise für leichte, mittlere und schwere chemische Elemente zusammengestellt. Spalte 1 enthält außer der Kernladungszahl Z und dem Elementsymbol die Nukleonenzahl (Massenzahl) A für die stabilen Nuklide im Fettdruck, für die instabilen im Normaldruck (soweit sie in der Natur vorkommen, kursiv). Ein „m" an der Nukleonenzahl kennzeichnet ein Isomer. Spalte 2 gibt die Häufigkeit H des Isotops im natürlichen Mischelement bzw. bei instabilen Nukliden die Umwandlungsart an: α-, β^--, β^+-Strahlung, p Protonen-, n Neutronenemission, E Elektroneneinfang, I isomerer Übergang unter Emission von γ-Strahlung, Sp spontane Spaltung. Spalte 3 enthält die Nuklidmasse m_a in atomaren Masseneinheiten u. Spalte 4 enthält für instabile Nuklide die Energie E (bei β-Teilchen die Maximalenergie) der emittierten Teilchen; fette Hervorhebung eines Wertes bei mehreren Energiegruppen bedeutet, daß Teilchen dieser Gruppe zu mehr als 50% im Energiespektrum vertreten sind; Punkte vor, zwischen oder hinter den Zahlen bedeutet, daß weitere, in der Regel schwache, Energiegruppen auftreten. Spalte 5 enthält die Halbwertszeit des instabilen Nuklids oder Isomeren. In Spalte 6 ist das elektrische Quadrupolmoment Q in barn, kenntlich durch ein positives oder negatives Vorzeichen (± bedeutet: Vorzeichen unbekannt), sowie in Auswahl die Energie E_γ der emittierten γ-Linien angegeben. (Die bei allen β^+-Strahlern auftretende Vernichtungsstrahlung — 2 Quanten von je 0,511 MeV — ist nicht aufgeführt.

Der Vermerk „kein γ" bei einem β^+-Strahler bedeutet daher, daß neben der Vernichtungsstrahlung keine Kern-γ-Strahlung auftritt.) Spalte 7 enthält das magnetische Kernmoment μ_N in Kernmagnetonen $\mu_K = e\hbar/2m_p$. Außerdem wird bei einigen Nukliden in Spalte 6 oder 7 auf ein wichtiges instabiles Folgeprodukt hingewiesen.

Element *Z A*	*H* (%) bzw. Umw.	m_a u	*E* MeV	$T_{1/2}$	*Q* in barn; E_γ in MeV	$\frac{\mu_N}{\mu_K}$
0 **n**						
1	β	$1,008665_2$	0,78	12 min		−1,9131
1 **H**						
1	99,985	$1,007825_2$				+2,7928
(D) 2	0,015	$2,014102_2$			+0,0028	+0,8574
(T) 3	β^-	$3,016049_7$	0,018	12,3 a	kein γ	+2,9789
2 **He**						
3	0,00013	$3,016029_7$				−2,1276
4	≈100	$4,002603_3$				0
5	n	5,0122		$2 \cdot 10^{-21}$ s		
6	β^-	$6,01889_1$	3,51	0,80 s	kein γ	<0,2
3 **Li**						
5	p	5,0125		$\approx 10^{-21}$ s		
6	7,42	$6,01512_3$			$-0,001_1$	+0,8220
7	92,58	$7,01600_5$			−0,04	+3,2563
8	β^-	$8,02248_8$	≈13	0,84 s		+1,653
9	β^- + n	9,02680	β^- 13,6; n 0,8	0,17 s		
4 **Be**						
7	E	$7,01693_0$		53 d	0,48 (10%)	
8	2α	$8,00530_5$	$0,04_7$	$\approx 2 \cdot 10^{-16}$ s		0
9	100	$9,01218_3$			+0,03	−1,1774
10	β^-	$10,01353_5$	0,56	$1,6 \cdot 10^6$ a	kein γ	0
11	β^-	$11,0216_6$	**11,5**; 9,3 ···	14 s	2,1; 6,8; 4 ··· 8	
5 **B**						
8	β^+ + 2α	$8,02460_8$	β 14	0,77 s		
9	p	$9,01332_9$		$8 \cdot 10^{-19}$ s		
10	19,6	10,012939			+0,074	+1,8006
11	80,4	11,009305			+0,036	+2,6886
12	β^-(+ 3α)	12,014354	13,4	0,020 s	4,4 (≈1%)	
13	β^-	13,01778	13,4	0,019 s	3,7 (≈7%)	
6 **C**						
10	β^+	$10,0168_6$	1,9	19 s	**0,72**; 1,0	0
11	β^+(E)	$11,0114_3$	0,96	20,3 min	±0,03	±1,0
12	98,89	12 (Stand.)				0
13	1,11	13,003355				+0,7024
14	β^-	14,003242	0,156	5730 a	kein γ	0
15	β^-	$15,01060_0$	9,8; **4,5**	2,5 s	5,3 (68%)	
7 **N**						
12	β^+(β^+ + 3α)	$12,0186_2$	β **16,4**; 12,0	0,011 s	**4,4** (≈2%)	
13	β^+(E)	$13,00573_9$	1,2	10,0 min		±0,322
14	$99,63_5$	$14,003074_4$			+0,011	+0,4036
15	$0,36_5$	15,010109				−0,2831
16	β	16,00610	10,4; **4,3**	7,2 s	1,7 ··· 6,13 ··· 8,9	
17	β^- + n	$17,0084_5$	β 8,7; 7,8; **4,1** n 1,2; 0,4	4,1 s	2,2; 0,9	
8 **O**						
14	β^+	14,008597	4,1; **1,81**	71 s	2,3	
15	β^+(E)	$15,00307_1$	1,74	124 s	kein γ	±0,719

Element Z A	H (%) bzw. Umw.	m_a u	E MeV	$T_{1/2}$	Q in barn; E_γ in MeV	$\frac{\mu_N}{\mu_K}$
16	99,76	15,994915$_0$				0
17	0,037	16,99913$_3$			−0,03	−1,894
18	0,204	17,999160$_0$				0
19	β^-	19,00358	4,6; **3,2**	29 s	**1,4; 0,20**	
9 **F**						
17	β^+	17,002099	1,75	66 s	kein γ	+4,72
18	β^+(E 3%)	18,000937	0,64	110 min	kein γ	
19	100	18,998405				+2,629
20	β^-	19,99998$_3$	**5,4**	11 s	1,63	+2,09
10 **Ne**						
18	β^+	18,00571	**3,4**; 2,4	1,5 s	1,0	
19	β^+	19,00188$_1$	2,2	18 s	kein γ	−1,89
20	90,92	19,992440				0
21	0,257	20,99384$_7$			+0,09	−0,6618
22	8,82	21,991385				0
23	β^-	22,99447	**4,4**; 3,9	38 s	0,44	
11 **Na**						
21	β^+	20,9976$_5$	2,5	23 s	0,35 (≈2%)	+2,4
22	β^+(E 9%)	21,99444	**0,55**	2,6 a	**1,28**	+1,746
23	100	22,98977$_1$			+0,1	+2,2175
24	β^-	23,99096	**1,39**	15,0 h	**1,369; 2,754**	+1,69
24^m	I(β^-)		$\beta \approx 6$	0,02 s	**0,47**	
25	β^-	24,9899$_5$	**3,8**; 2,8	60 s	0,4 ··· 1,6	
26 **Fe**						
53	β^+	52,9453	**2,8**; 2,4	8,5 min	0,38	
54	5,81	53,93961				0
55	E	54,9383$_0$		2,7 a	kein γ	
56	91,7	55,9349$_2$				0
57	2,2	56,9353$_9$				+0,09
58	0,3	57,9332$_7$				0
59	β^-	58,9348$_7$	1,6; **0,47**; 0,27	45 d	··· 1,10; 1,29	
27 **Co**						
56	E, β^- 24%	55,9398$_4$	1,46; 0,4	78 d	**0,85; 1,2** ··· 3,5	+3,49
57	E	56,93629		270 d	**0,014; 0,122**; 0,136	±4,6
58	E, β^+ 15%	57,93575	0,47	71 d	**0,81**; 0,86; 1,67	±4,0
58^m	I			9,2 h	0,025	
59	100	58,93319			+0,4	+4,58
60	β^-	59,93381	0,32; (1,5 ≈ 1$^0/_{00}$)	5,26 a	**1,333; 1,173**	(+)3,75
60^m	I, $\beta^- < 1\%$		1,6 ···	10,5 min	0,059 ···	
28 **Ni**						
57	E, β^+ 41%	56,9397$_7$	0,85 ···	36 h	1,37; 0,12 ··· 1,9 ···	
58	67,8	57,93534				0
59	E	58,93434		$8 \cdot 10^4$ a	kein γ	
60	26,2	59,93078				0
61	1,2	60,93105				−0,75
62	3,7	61,92834				0
63	β^-	62,92966	0,066	92 a	kein γ	
64	1,1	63,9279$_6$				0
65	β^-	64,9300$_8$	2,14; 1,0; 0,66	2,54 h	0,4 ··· 1,12 ··· 1,48	
29 **Cu**						
61	β^+, E 40%	60,93346	**1,21**; 0,9 ···	3,4 h	··· 0,28 ··· 0,66 ··· 1,2	+2,2
62	β^+	61,9325$_7$	2,92 ···	9,8 min	0,88 ··· 1,2 ··· 2,1	
63	69,1	62,92959			±0,2	+2,226

Element Z A	H (%) bzw. Umw.	m_a u	E MeV	$T_{1/2}$	Q in barn; E_γ in MeV	$\frac{\mu_N}{\mu_K}$
64	E, β^- 39% β^+ 19%	63,92976	β^- 0,57; β^+ 0,65	12,7 h	1,35	±0,22
65	30,9	64,92779			−0,19	+2,385
66	β^-	65,92887	**2,6**; 1,6 ···	5,1 min	0,83; 1,04	±0,28
67	β^-	66,9277$_5$	0,58; 0,48; **0,40**	61 h	0,09; 0,18 ···	
30 **Zn**						
63	β^+, E	62,9332$_0$	**2,35**; 1,7 ···	39 min	0,67; 0,96 ···	
64	48,98	63,92915				0
65	E, β^+ 1,5%	64,92924	0,33	244 d	−0,03; 1,12	+0,759
66	27,81	65,92604				0
67	4,11	66,9271$_3$			+0,18	+0,876
68	18,57	67,9248$_5$				0
69	β^-	68,9265$_5$	0,92	58 min	kein γ	
69^m	I			14,0 h	0,439	
70	0,62	69,9253$_3$				0
71	β^-	70,9277$_2$	**2,81**; 2,3 ···	2,4 min	0,51 ··· 0,91 ···	
71^m	β^-		2,5 ··· 1,5 ···	3,9 h	··· **0,49** ··· 0,51 ··· **0,62** ···	
49 **In**						
113	4,28	112,9040$_9$			+0,75	+5,523
113^m	I			1,66 h	**0,392**	−0,211
114	β^-(E, β^+)	113,9049$_0$	β^- **1,98**; 0,67β^+ 0,4	72 s	(1,30)	+1,7
114^m	J, E 3,5%			50 d	**0,19**; 0,56; 0,72	+4,7
115	95, 7β^-	114,9038$_7$	0,5	6 · 10^{14} a	+1,14	+5,535
115^m	I, β^- 6%		0,84	4,5 h	0,34	−0,244
116	β^-	115,9052$_6$	3,3	13 s	kein γ	
116^m	β^-		1,0; 0,9; 0,6	54 min	**0,41**; 0,82; 1,09; 1,27 ···	+4,3
117	β^-	116,9045$_3$	0,74	45 min	**0,16; 0,57**	
117^m	β^-, J 47%		**1,8**; 1,6; (1,0)	1,93 h	0,16 ···	
50 **Sn**						
112	1,0	111,9048$_3$				0
113	E	112,9051$_9$		115 d	0,26	$\xrightarrow{100\%}$ ^{113}In^m
114	0,7	113,9027$_8$				0
115	0,3	114,9033$_5$				−0,918
116	14,3	115,90175				0
117	7,6	116,90296				−1,000
117^m	I			14 d	**0,16**	
118	24,0	117,90161				0
119	8,6	118,90332				−1,046
119^m	J			250 d	0,024; 0,065	+0,8
120	33,0	119,90221				0
121	β^-	120,9042$_4$	0,38	27 h	kein γ	
121^m	β^-		0,35	≈50 a	0,037	
122	4,7	121,90345				0
123	β^-	122,9057$_4$	1,42 ···	129 d	(1,1)	
123^m	β^-		1,26 ···	40 min	**0,16**	
124	6,0	123,9052$_8$				0
125	β^-	124,9077$_9$	2,36 ···	9,6 d	··· 0,62 ··· 1,07 ··· 1,09 ··· 2,0 ···	
125^m	β^-		2,06 ···	9,7 min	**0,33**; 1,4 ···	
51 **Sb**						
121	57,25	120,90382				+3,36
122	β^-(E, β^+)	121,90518	**2,0; 1,4** ··· β^+ 0,6	2,71 d	+0,5; **0,56** ··· **1,1**	−1,9
122^m	I			4,2 min	0,025; 0,061; 0,076	
123	42,75	122,90422			−0,7	+2,55
124	β^-	123,9059$_4$	2,3 ··· **0,6** ··· 0,2 ···	60 d	**0,6** ··· 1,7 ··· 2,1	

Element Z A	H (%) bzw. Umw.	m_a u	E MeV	$T_{1/2}$	Q in barn; E_γ in MeV	$\frac{\mu_N}{\mu_K}$
124^{m_1}	I, β^- 20%	E_a 11 keV	1,2 ···	93 s	**0,011**; 0,5; 0,6; 0,65	
124^{m_2}	I	E_a 35 keV		21 min	**0,025; 0,11**	
125	β^-	124,9052$_5$	0,62···0,30···0,13	2,8 a	0,43; 0,46; 0,60 ···	$\xrightarrow{23\%}$ $^{115}Te^m$
60 **Nd**						
142	27,1	141,9077$_7$				0
143	12,2	142,9098$_6$			(−0,48)	−1,1
144	23,8α	143,9101$_3$	1,8	2,1 · 10^{15} a		0
145	8,3	144,9126$_1$			(−0,25)	−0,65
146	17,2	145,9131$_5$				0
147	β^-	146,9161$_3$	**0,81** ··· 0,37 ···	11,1 d	**0,091** ··· 0,53 ···	±0,58
148	5,73	147,9169$_3$				0
149	β^-	148,9201$_5$	1,5; 1,1; 1,0	1,9 h	··· 0,11 ··· **0,21** ··· **0,24** ···	
150	5,62	149,9209$_2$				0
151	β^-	150,9238$_9$	2,1; 1,8 ···	12 min	··· 0,12 ··· 0,14 ··· 0,26 ··· 1,2 ···	
61 **Pm**						
145	E, (α)	144,9127$_9$	2,2	18 a	0,067; 0,072	
147	β^-	146,9151$_7$	0,22	2,62 a	±0,9 (0,12)	+2,8
149	β^-	148,9183$_6$	1,07; 0,78 ···	53 h	0,28 ··· 0,85	±3,3
62 **Sm**						
144	3,1	143,9120$_7$				0
145	E	144,9134$_8$		340 d	**0,061**; (0,50)	
146	α	145,9131$_0$	2,50	1,0 · 10^8 a		
147	15,0α	146,9149$_3$	2,23	1,1 · 10^{11} a	−0,21	−0,8
148	11,2	147,9148$_5$				0
149	13,8(α?)	148,9172$_1$			+0,06	−0,6
150	7,4	149,9173$_0$				0
151	β^-	150,9199$_6$	0,076; 0,0054	93 a	0,022	
152	26,6	151,9197$_6$				0
153	β^-	152,9221$_2$	0,80; 0,70; 0,64	47 h	(+) 0,7; ··· 0,07 ··· 0,103 ···	(−)0,04
154	22,7	153,9222$_2$				0
155	β^-	154,9246$_5$	**1,53; 1,4**	22 min	**0,104; 0,14**; 0,25	
63 **Eu**						
151	47,8	150,9198$_8$			+1,0	+3,46
152	E, β^- 24% (β^+)	151,9217$_8$	β^- 1,5 ··· β^+ 0,7 ···	13,6 a	0,12 ··· 0,34 ··· 1,41 ···	+1,9
152^m	β^-, E 23% (β^+)		β^- 1,88 ··· β^+ 0,9 ···	9,3 h	0,12 ··· 0,84 ··· 0,96 ···	
153	52,2	152,9212$_6$			+2,4	+1,53
154	β^-	153,9230$_1$	1,86 ··· 0,26	8 a	+3,3; 0,12 ··· 0,72 ···	(+)2,0
155	β^-	154,9229$_0$	0,25 ··· 0,14	5,0 a	0,02 ··· 0,087 ··· 0,105	
71 **Lu**						
175	97,4	174,9408$_0$			+5,5	+2,2
176	2,6β^-	175,9427$_1$	0,42	,2 · 10^{10} a	+8; 0,31; 0,20; 0,088	+3,2
176^m	β^-		1,3; **1,2**	3,7 h	0,088	
177	β^-	176,9437$_8$	**0,50** ··· 0,18	6,7 d	+5,5; 0,11 ··· 0,21 ···	+2,2
72 **Hf**						
174	0,18α	173,9401$_4$	2,5	2 · 10^{15} a		0
175	E	174,9414$_5$		70 d	··· 0,089 ··· **0,343** ···	
176	5,2	175,9414$_3$				0
177	18,6	176,9432$_4$			+3	+0,6
178	27,1	177,9437$_2$				0
179	13,7	178,9458$_4$			+3	−0,5
179^m	I			19 s	··· 0,16 ··· 0,22 ···	

Element Z A	H (%) bzw. Umw.	m_a u	E MeV	$T_{1/2}$	Q in barn; E_γ in MeV	μ_N/μ_K
180	35,2	179,9465$_8$				0
180^m	I			5,5 h	**0,06; 0,09; 0,22; 0,33; 0,44;** 0,50	
181	β^-	180,9491$_3$	**0,408**; 0,404	43 d	··· **0,133**; 0,136; 0,346; 0,482 ···	
73 **Ta**						
180	0,012	179,9475$_7$				
180^m	E, β^- 13%		0,71; 0,62	8,1 h	**0,093**; 0,102	
181	99,99	180,9480$_3$			+4	+2,35
182	β^-	181,9501$_8$	(1,48) ··· 0,52 ··· 0,43 ···	115 d	**0,068** ··· **0,100** ··· 1,12 ··· 1,19 ···	
182^m	I			16 min	0,15; 0,17; 0,18; 0,32; 0,36	
74 **W**						
180	0,14	179,946$_7$				0
181	E	180,9482$_3$		121 d	0,006; 0,136; 0,153	
182	26,4	181,9482$_5$				0
183	14,4	182,9502$_7$				+0,1172
184	30,6	183,9509$_8$				0
185	β^-	184,9534$_7$	**0,43** (0,30)	75 d	(0,125)	
185^m	I			1,6 min	0,06 ··· 0,13; 0,18	
186	28,4	185,9544$_0$				0
187	β^-	186,9572$_0$	1,3 ··· **0,6** ··· 0,3	24 h	0,07 ··· 0,13 ··· 0,48 ··· 0,69 ···	
79 **Au**						
196	E, β^- 7%	195,9665$_6$	0,26	6,2 d	0,333 ··· **0,356** ··· 0,426 ···	±0,6
197	100	196,9665$_5$			+0,6	+0,145
198	β^-	197,9682$_2$	(1,37); **0,96** ··· 0,29	2,70 d	**0,412**; 0,68; 1,1	±0,6
199	β^-	198,9687$_6$	(0,45); **0,29**; 0,25	3,14 d	0,05; **0,158**; 0,21	±0,6
80 **Hg**						
196	0,15	195,9658$_2$				0
197	E	196,9669$_9$		64,1 h	0,077; 0,19	+0,524
197^m	I, E 6%			24 h	+1,6; ··· **0,134** ··· **0,165** ···	
198	10,0	197,9667$_5$				0
199	16,8	198,9682$_8$				+0,503
200	23,1	199,9683$_2$				0
201	13,2	200,9703$_0$			+0,5	−0,557
202	29,8	201,9706$_4$				0
203	β^-	202,9728$_8$	0,21	46,7 d	±0,5; **0,279**	
204	6,9	203,9735$_0$				0
205	β^-	204,9760$_8$	**1,53**; 1,3 ···	5,2 min	0,20 ···	
81 **Tl**						
200	E(β^+)	199,9709$_6$	1,44; 1,06	26 h	**0,37** ··· **0,58** ··· **1,21** ···	<0,15
201	E	200,970$_7$		73 h	··· 0,135 ··· 0,167	±1,6
202	E	201,9719$_7$		12 d	**0,44**; 0,52; (0,96)	<0,15
203	29,5	202,9723$_5$				+1,612
204	β^-, E 2,6%	203,9738$_7$	0,76	3,8 a	kein γ	±0,09
205	70,5	204,9744$_4$				+1,628
206	β^-	205,9761$_2$	1,53 (0,73)	4,2 min	(0,80)	
207	β^-	206,9774$_4$	**1,44** ···	4,8 min	0,898	AcC″
208	β^-	207,9820$_2$	(2,4); **1,8**; 1,5; 1,3 ···	3,1 min	··· 0,51 ··· 0,58 ··· 2,615	ThC″
210	β^-	209,9901$_0$	2,34; **1,87**; 1,32	1,30 min	**0,296** ··· **0,795** ··· 1,31 ··· 2,4	RaC″

Element Z A	H (%) bzw. Umw.	m_a u	E MeV	$T_{1/2}$	Q in barn; E_γ in MeV	$\frac{\mu_N}{\mu_K}$
82 **Pb**						
203	E	202,9734$_0$		52 h	**0,28**; 0,40; (0,68)	
204	1,4	203,9730$_5$				0
205	E	204,9744$_9$		1,4 · 10^7 a	kein γ	
206	25,1	205,9744$_8$				0; RaG
207	21,7	206,9759$_0$				+0,590; AcD
207^m	I			0,8 s	**0,57; 1,06**	
208	52,3	207,9766$_6$				0; ThD
209	β$^-$	208,9811$_0$	0,64	3,3 h	kein γ	
210	β$^-$	209,9842$_0$	0,06; **0,017**	22,0 a	0,047	RaD
211	β$^-$	210,9887$_7$	**1,38** ··· 0,54 ···	36,1 min	0,40; 0,43 ··· 0,83 ···	AcB
212	β$^-$	211,9919$_0$	0,57; **0,33** ···	10,64 h	0,115 ··· 0,24 ··· 0,30 ···	ThB
214	β$^-$	213,9998$_4$	1,03; 0,74; 0,69	26,8 min	0,053 ··· 0,24 ··· 0,30 ··· **0,35** ···	RaB
83 **Bi**						
206	E(β$^+$)	205,9784$_0$	(1,0)	6,24 d	—0,2; 0,18 ··· 0,54 ··· **0,80** ··· **0,89** ··· **1,72**	+4,6
207	E(β$^+$)	206,9784$_9$		38 a	0,57 ··· 1,77	$\xrightarrow{84\%}$ ^{207}Pb^m
209	100	208,9804$_0$			—0,4	+4,08
210	β$^-$(α)	209,9841$_3$	β$^-$ 1,161 (α 4,7)	5,01 d	±0,1	±0,044; RaE
210^m	α(β$^-$)		α **4,96**; 4,92 ···	3,5 · 10^6 a	0,26; 0,30 ···	
211	α(β$^-$)	210,9872$_9$	α **6,62**; 6,3	2,13 min	0,35	AcC
212	β$^-$, α 36%	211,9912$_9$	β 2,25 α 6,09; **6,05** ···	60,6 min	0,040 ··· 0,72 ··· 1,8	ThC
214	β$^-$(α 0,02%)	213,9987$_3$	β ··· 3,27 ··· 1,5 ··· α 5,51; 5,45 ···	19,8 min	··· 0,61 ··· 1,12 ··· 1,76 ··· 3,2	RaC
215	β$^-$	215,001$_9$	2,2	7,4 min		
90 **Th**						
227	α	227,0277$_3$	6,04 ··· 5,97 ···	18,5 d	··· 0,030 ··· 0,24 ···	RdAc
228	α	228,0287$_4$	**5,42**; 5,34 ···	1,91 a	0,084 ···	0; RaTh
229	α	229,0317$_8$	(5,1) ··· 4,9 ··· 4,8 ···	7,3 · 10^3 a	—3; ··· 0,15 ··· 0,20 ···	+0,3
230	α	230,0331$_6$	**4,68**; 4,62 ···	7,5 · 10^4 a	0,068 (··· 0,24)	Io
231	β$^-$	231,0363$_2$	**0,30** ··· (0,14)	25,5 h	0,026 ··· 0,059 ··· 0,084 ···	UY
232	100α	232,0380$_7$	**4,01**; 3,95	1,40 · 10^{10} a	0,059	0; Th
233	β$^-$	233,0416$_0$	1,24 ···	22,2 min	0,029 ··· 0,057 ···	
234	β$^-$	234,0436$_3$	**0,19**; 0,10	24,1 d	0,029; 0,063; 0,092	UX$_1$ → ^{234}Pa^m
91 **Pa**						
231	α	231,0359$_0$	5,06 ··· 4,67	3,44 · 10^4 a	±3; 0,019 ··· 0,38	+2,0
232	β$^-$	232,0886$_0$	1,3; **0,32**	1,31 d	··· 0,87; 0,97	
233	β$^-$	233,0402$_7$	0,57; 0,26; 0,23···	27,0 d	—3; 0,03 ··· **0,31** ···	+3
234	β$^-$	234,0433$_5$	1,25 ··· 0,7 ··· **0,49** ···	6,7 h	**0,043** ··· 1,5	UZ
234^m	β$^-$, I 0,13%		2,29 ···	1,2 min	(··· 0,77 ··· 1,00 ···)	UX$_2$
92 **U**						
230	α	230,0339$_5$	5,89; 5,82 ···	20,8 d	0,072 ···	
232	α, Sp	232,0371$_5$	5,32; 5,26 ···	72 a	0,058; (0,13 ···)	
233	α	233,0396$_5$	4,82 ··· 4,78 ···	1,59 · 10^5 a	±3,0; 0,042 ···	±0,5
234	0,0057α	234,0409$_8$	4,77; 4,72 ···	2,48 · 10^5 a	0,053; (0,121)	0; U II
235	0,72α Sp	235,0439$_7$	4,60 ··· 4,39 ··· 4,36 ···	7,1 · 10^8 a	±3,8 ··· 0,185 ···	±0,35; AcU
236	α, Sp	236,0455$_8$	**4,49; 4,44** ···	2,4 · 10^7 a	0,050; (0,11)	
237	β$^-$	237,0487$_5$	**0,25** ···	6,8 d	··· 0,060 ··· 0,208 ···	
238	99,27α, Sp	238,0508$_1$	**4,20**; 4,15 ···	4,5 · 10^9 a	0,048; (0,16)	U I
239	β$^-$	239,0543$_3$	1,29; **1,21** ···	23,5 min	0,044 ··· **0,075** ···	
240	β$^-$	240,0566$_2$	**0,36**	14,1 h	0,044	$\xrightarrow{100\%}$ ^{240}Np^m

Element Z A	H (%) bzw. Umw.	m_a u	E MeV	$T_{1/2}$	Q in barn; E_γ in MeV	$\frac{\mu_N}{\mu_K}$
93 **Np**						
237	α	237,0481$_9$	4,87 ··· 4,79 ··· 4,77 ···	2,1 · 10^6 a	0,029 ··· 0,056 ··· 0,087 ···	+2,5
238	β^-	238,0509$_7$	1,24 ··· 0,27 ···	2,12 d	0,044 ··· 0,98 ··· 1,03 ···	
239	β^-	239,0529$_5$	0,71 ··· 0,44 ··· **0,33** ···	2,36 d	0,06 ··· **0,11** ··· 0,23 ··· 0,28 ···	
240	β^-	240,056$_1$	0,84	60 min	0,56; 0,44 ···	
240^m	β^-(I)		2,18; 2,14 ··· 1,6 ···	7,4 min	0,043; 0,55 ··· 0,60 ···	
94 **Pu**						
238	α, Sp	238,0495$_8$	**5,50**; 5,45 ···	88 a	0,043 ···	
239	α, Sp	239,0521$_8$	5,15; 5,14 ··· 5,10 ···	2,44 · 10^4 a	0,013 ··· 0,039 ··· 0,052 ···	+0,20
240	α, Sp	240,0538$_8$	**5,17**; 5,12 ···	6,54 · 10^3 a	0,045 ···	
241	$\beta^-(\alpha 2 \cdot 10^{-5})$	241,0568$_7$	β 0,02; α ··· **4,9** ···	15 a	+6; (0,15 ···)	+0,7
242	α, Sp	242,0587$_7$	**4,90**; 4,85	3,87 · 10^5 a	0,045	
243	β^-	243,0620$_3$	0,57 ··· 0,51 ···	5,0 h	0,042; 0,084 ···	
244	α, Sp	244,0642$_3$	**4,58; 4,54**	8,3 · 10^7 a	0,044	

aus: Physikalisches Taschenbuch. Hrsg.: H. EBERT. — Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften 1976.

D 4. Elementarteilchen (Daten korrigiert gemäß P. R. D. 45, 11, (Juni 1992))

Gruppe	Teilchen	$T^G(I^P)\,C$	Masse/MeV c^{-2}	Lebensdauer/s	Wichtige beobachtete Zerfallskanäle
Eichbosonen	γ	$0,1(1^-)$—	$< 3 \cdot 10^{-33}$	stabil	—
	$w^\pm$	—	80220 ± 260	Γ < 2,12 ± 0,11 GeV	eν
	z^0	—	91173 ± 20	Γ < 2,487 ± 0,10 GeV	e^+e^-, $\mu^+\mu^-$
Leptonen	ν_e	I = 1/2	$<4,6 \cdot 10^{-6}$	stabil	—
	e	I = 1/2	51099906 0,00000015	stabil	—
	ν_μ	I = 1/2	< 0,27	stabil	—
	μ	I = 1/2	105,6583893 ± 0,000034	(2,19703 ± 0,00004) · 10^{-6}	$e^\pm\bar{\nu}\nu$ (≲ 100 %)
	ν_τ	I = 1/2	< 35		
	τ	I = 1/2	$1784,1 \pm^{2,7}_{3,6}$	(05 ± 0,06) · 10^{-13}	$\mu^\pm\bar{\nu}\nu$ (18,5 %) $e^\pm\bar{\nu}\nu$ (16,5 %) Hadronen und neutrale T.

Gruppe	Teilchen	$T^G(I^P)\ C$	Masse/MeVc^{-2}	Lebensdauer/s	Wichtige beobachtete Zerfallskanäle	
Mesonen	$\pi^\pm$	$1^\pm(0^-)$	139,5673 ± 0,0007	(2,6030 ± 0,0023) · 10^{-8}	$\mu^\pm\nu$	(≲100%)
	π^0	$1^-(0^-)+$	134,9630 ± 0,0038	(0,83 ± 0,06) · 10^{-16}	$\gamma\gamma$ $\nu e^- e^+$	(98,8%) (1,2%)
	η	$0^-(0^-)$	547,45± 0,19	Γ = (1,19 ± 0,11)	$\gamma\gamma$ $3\pi^0$ $\pi^+\pi^-\pi^0$	(39%) (31,8%) (23,7%)
Mesonen mit Seltsamkeit	$K^\pm$	$1/2(0^-)$	493,667 ± 0,015	(1,2371 ± 0,0026) · 10^{-8}	$\mu^\pm\nu$ $\pi^\pm\pi^0$	(63,5%) (21,2%)
$S = 1{:}K^+, K^0$ $S = -1{:}K^-, \bar{K}^0$	K^0 $\bar{K}^0$	$1/2(0^-)$	497,67 ± 0,13		50% K_S^0 50% K_L^0	
	K_S^0	$1/2(0^-)$		(0,8923 ± 0,0022) · 10^{-10}	$\pi^+\pi^-$ $\pi^0\pi^0$	(68,6%) (31,4%)
	K_L^0	$1/2(0^-)$	$m_{K_L} - m_{K_S}$ = (3,521 ± 0,014) · 10^{-12} MeV	(5,183 ± 0,040) · 10^{-8}	$\pi^0\pi^0\pi^0$ $\pi^+\pi^-\pi^0$ $\pi^\pm\mu^\mp\nu$ $\pi^\pm e^\mp\nu$	(21,5%) (12,4%) (27,1%) (38,7%)
Mesonen mir Charm $C = 1{:}D^+, D^0$ $C = -1{:}D^-, \bar{D}^0$	$D^\pm$	$1/2(0^-)$	1869,3 ± 0, 5	(10,66 ± 0,13) · 10^{-13}	$e^\pm + \cdots$ $K^\pm + \cdots$ $K^0, (\bar{K}^0) \ldots$	(19%) (16%) (48%)
	D^0 $\bar{D}^0$	$1/2(0^-)$	1864,7 ± 0,6	(4,2 ± 0,08) · 10^{-13}	$e^\pm + \cdots$ $K^\pm + \cdots$ $\bar{K}^0(K^0) + \cdots$	(5,3%) (44%) (33%)
Mesonen mit Charm und Seltsamkeit $F^+, S = 1, C = 1$	$D_s^\pm$	$0(0^-)$	1968,8 ± 0,7	$\left(4{,}5 \pm {}^{0,3}_{0,26}\right) \cdot 10^{-13}$	$\Phi\pi^\pm$	
Mesonen mit Bottom	$B^\pm$	$1/2(0^-)$	5278,6 ± 3,0	(12,9 ± 0,5) · 10^{-13} nicht separiert	$\bar{D}^0\pi^\pm$	(4,2%)
$B = 1{:}B^+, B^0$ $B = -1{:}\bar{B}, \bar{B}^0$	B^0 $\bar{B}^0$	$1/2(0^-)$	5278,7 ± 0,2		$\bar{D}^0\pi^+\pi^-$	(13%)
Baryonen $S = 0{:}p, n$	p	$1/2(1/2^+)$	938,2796 ± 0,0027	stabil (> 10^{32} a)	—	
	n	$1/2(1/2^+)$	939,5731 ± 0,0027	889,1 ± 2,1	$pe^-\bar{\nu}$	(100%)
Baryonen mit Seltsamkeit	Λ	$0(1/2^+)$	1115,60 ± 0,05	(2,632 ± 0,0020) · 10^{-10}	$p\pi^-$ $n\pi^0$	(64,2%) (35,8%)
$S = -1{:}\Lambda, \Sigma$ $S = -2{:}\Xi$	Σ^+	$1(1/2^+)$	1189,36 ± 0,06	(0,800 ± 0,004) · 10^{-10}	$p\pi^0$ $n\pi^+$	(51,6%) (48,4%)
$S = -3{:}\Omega^-$	Σ^0	$1(1/2^+)$	1192,46 ± 0,08	(5,8 ± 1,3) · 10^{-20}	$\Lambda\gamma$	(100%)
(Hyperonen)	Σ^-	$1(1/2^+)$	1197,34 ± 0,05	(1,482 ± 0,011) · 10^{-10}	$n\pi^-$	(100%)
	Ξ^0	$1/2(1/2^+)$	1314,9 ± 0,6	(2,90 ± 0,10) · 10^{-10}	$\Lambda\pi^0$	(100%)

Gruppe	Teilchen	$T^G(I^P)\,C$	Masse/MeVc^{-2}	Lebensdauer/s	Wichtige beobachtete Zerfallskanäle	
	Ξ^-	$1/2(1/2^+)$	$1321{,}32 \pm 0{,}13$	$(1{,}641 \pm 0{,}016) \cdot 10^{-10}$	$\Lambda\pi^-$	(100%)
	Ω	$0(3/2^+)$	$1672{,}45 \pm 0{,}32$	$(0{,}819 \pm 0{,}027) \cdot 10^{-10}$	ΛK^-	(68,6%)
					$\Xi^0\pi^-$	(23,4%)
					$\Xi^-\pi^0$	(8%)
Baryonen mit Charm $C = 1$	Λ_c^+	$0(1/2^+)$	$2284{,}9 \pm 0{,}6$	$\left(1{,}91 \begin{smallmatrix} +0{,}15 \\ -0{,}12 \end{smallmatrix}\right) \cdot 10^{-13}$	$\Lambda + \cdots$	(33%)
					$e^+ + \cdots$	(4,5%)
Mesonenresonanzen	$\varrho(770)$	$1^+(1^-)-$	769 ± 3	$\Gamma = (154 \pm 5)$ MeV	$\pi\pi$	(100%)
	$\omega(783)$	$0^-(1^-)-$	$782{,}6 \pm 0{,}2$	$\Gamma = (9{,}9 \pm 0{,}3)$ MeV	$\pi^+\pi^-\pi^0$	(89,9%)
					$\pi^0\gamma$	(8,8%)
	$\eta'(958)$	$0^+(0^-)+$	$957{,}57 \pm 0{,}25$	$\Gamma = (0{,}29 \pm 0{,}05)$ MeV	$\eta\pi\pi$	(65,3%)
					$\varrho^0\gamma$	(30,0%)
	$\Phi(1020)$	$0^-(1^-)-$	$1019{,}5 \pm 0{,}1$	$\Gamma = (422 \pm 0{,}13)$ MeV	K^+K^-	(49,3%)
					K_LK_S	(34,7%)
					$\pi^+\pi^-\pi^0$	(14,8%)
	$\eta_c(2980)$	$0^+(0^-)+$	2981 ± 6	$\Gamma = 20$ MeV	$\eta\pi^+\pi^-$	
	J/Ψ (3100)	$0^-(1^-)-$	$3096{,}9 \pm 0{,}1$	$\Gamma = (0{,}063 \pm 0{,}009)$ MeV	e^+e^-	(7,4%)
					$\mu^+\mu^-$	(7,4%)
					Hadronen + ⋯	(85%)
	$\Psi(3685)$	$0^-(1^-)-$	$3686{,}0 \pm 0{,}1$	$\Gamma = (0{,}215 \pm 0{,}040)$ MeV	e^+e^-, $\mu^+\mu^-$	(1,7%)
					Hadronen	(98,1%)
					J/Ψ, $\pi\pi$	(50%)
	$\Upsilon(9460)$	$(1^-)-$	$9460{,}0 \pm 0{,}3$	$\Gamma = (0{,}0443 \pm 0{,}0006)$ MeV	$\mu^+\mu^-$	(2,9%)
					e^+e^-	(1,1%)
					$\tau^+\tau^-$	(3,4%)
	$\Upsilon(10025) = \Upsilon(25)$	$(1^+)-$	$10023{,}4 \pm 0{,}3$	$\Gamma = (0{,}0296 \pm 0{,}0005)$ MeV	$\mu^+\mu^-$	(1,9%)
					e^+e^-	(1,6%)
					$\gamma(9460)\,\pi\pi$	(19,5%)
Mesonenresonanzen mit Seltsamkeit	K*(892)	$1/2(1^-)$	$892{,}1 \pm 0{,}4$	$\Gamma = (51{,}3 \pm 1)$ MeV	$K\pi$	
Nukleonenresonanzen mit $S = 0$	N(1440)	$1/2(1/2^+)$	1400—1480	$\Gamma = (120$—$350)$ MeV	$N\pi$	(50—70%)
					$N\eta$	(8—18%)
					$N\pi\pi$	(≈30%)
	N(1520)	$1/2(1/2^-)$	1510—1530	$\Gamma = (100$—$140)$ MeV	$N\pi$	(50—60%)
					$N\eta$	(~0,1%)
					$N\pi\pi$	(35—50%)
Baryonenresonanzen	$\Delta(1232)$	$3/2(3/2^+)$	1230—1234	$\Gamma = (110$—$120)$ MeV	$N\pi$	(99,4%)
					$N\gamma$	(0,6%)
	$\Delta(1620)$	$3/2(3/2^-)$	1600—1650	$\Gamma = (120$—$160)$ MeV	$N\pi$	(≈70%)
					$N\pi\pi$	

Literaturhinweise zu Anhang D

Ebe 76, Par 84, San 77

NOTIZEN

NOTIZEN

Weiterführende Literatur

1. Liste von Tabellen-, Schemata- und Nachschlagewerken
ABC 73, Ard 87, Ato 7, Ban 78, Cho 84, Dže 63, Dže 72, Dže 80, Gar 76, Led 67, Leo 81, Nem 75, Nuc A, Nuc B, Nuc 71, Par 84, San 77, See 74, Sel 82, Sie 66, Vyl 80, Vyl 80/83, Wap 71, Wap 85, Weis 70

2. Liste ausgesuchter Lehrbücher, Monographien, Artikel, Nachschlage-, Tabellen- und Schematawerke

ABC 73 — ABC Physik. — Leipzig: VEB F. A. Brockhaus Verlag 1973.
Abe 73 — ABEND, K.; VOGELSANG, E.: Nukleare Elektronik. — München: Verlag Karl Thiemig 1973.
Aber 73 — ABERS, E. S.; LEE, B. W.: Physics Rep. *9C* (1973), Nr. 1, 1.
Abr 77 — ABRAMOV, A. I.; KAZANSKIJ, JU. A.; MATUSEVIČ, E. S.: Grundlagen der experimentellen Methoden der Kernphysik. — Moskva: Atomizdat 1977 (in Russ.).
Abr 84 — ABRAMIVIČ, M. D.; VOTINOV, S. N.; JALTUCHOVSKIJ, A. G.: Strahlenmaterialkunde in Kernkraftwerken. — Moskva: Energoatomizdat 1984 (in Russ.).
Ada 67 — ADAMS, F.: Atomic Energy Rev. *5* (1967) 31.
Ait 82 — AITCHINSON, I. J. R.; HEY, A. J. G.: Gauge Theories in Particle Physics. — Bristol: Adam Hilger 1982.
Aki 67 — AKIMOV, JU. K. u. a.: Halbleiterdetektoren für Kernteilchen und ihre Anwendungen. — Moskva: Atomizdat 1967 (in Russ.).
Ale 84 — ALEKSANDROV, A. P. (Hrsg.): Kernenergie, Mensch und Umwelt. — Moskva: Energoatomizdat 1984, 2. Aufl. (in Russ.).
All 71 — ALLKOFER, O. C.: Teilchen-Detektoren. — München: Verlag Karl Thiemig 1971.
Amb 80 — AMBARCUMJAN, V. A.: Probleme der modernen Kosmogonie. — Berlin: Akademie-Verlag 1980.
Ang 82 — ANGERSTEIN, W.; GURSKI, S.; HEGEWALD, H.: Grundlagen der Strahlenphysik und radiologischen Technik in der Medizin. — Leipzig: Georg Thieme 1982.
Ani 84 — ANISOVICH, V. V.; KOBRINSKY, N. N.; NYIRI, J.; SHABELSKI, Y. N.: Quark Models and High Energy Physics. — Singapore: World Scientific 1984.
Arc 82 — ARCIMOVIČ, L. A.; LUK'ANOV, S. JU.: Die Bewegung geladener Teilchen in elektrischen und magnetischen Feldern. — Moskva: Izd. Nauka 1972 (in Russ.).
Ard 87 — v. ARDENNE, M.; MUSIOL, G.; REBALL, S. (Hrsg.): Effekte der Physik und ihre Anwendungen. — Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften 1987.
Ato 71 — Atomic Data and Nuclear Data Tables. Ed.: A. Li-Scholz. — New York: Academic Press, 1971 ff.
Aus 70 — AUSTERN, N.: Direct Nuclear Reaction Theory. — New York: John Wiley & Sons 1970.

Bai 82 — BAILIN, D.: Weak Interactions. — Bristol: Adam Hilger 1982.
Bal 59 — BALDIN, A. M.; GOLDANSKIJ, V. L.; ROSENTAL, I. L.: Kinematik der Kernreaktionen. — Moskva: Fizmatgiz 1959 (in Russ.); — Berlin: Akademie-Verlag 1963 (in Deutsch).
Bal 68 — BALDIN, A. M.; GOLDANSKIJ, V. I.; MAKSIMENKO, V. M.; ROSENTAL, I. L.: Kinematik der Kernreaktionen. — Moskva: Atomizdat 1968 (in Russ.).
Bal 79 — BALDO CEOLIN, M. (Ed.): Weak Interactions. — Amsterdam: North-Holland Publ. Co. 1979.

Bal 78 BALAŠOV, V. V.; KORENMAN, G. JA.; ERAMŽAN, R. A.: Mesoneneinfang durch Atomkerne. — Moskva: Atomizdat 1978 (in Russ.).

Ban 78 BAND, J. M.; TRZASKOVSKAJA, M. B.: Tabellen der Koeffizienten der inneren Konversion der Gammastrahlen an der K-, L- und M-Schale, $10 \leqq Z \leqq 104$. — Leningrad: Izd. Nauka 1978 (in Russ.).

Bar 80 BARB, D.: Grundlagen und Anwendungen der Mößbauer-Spektroskopie. — Berlin: Akademie-Verlag 1980.

Bar 77 BARAŠENKOV, W. S.: Neue Berufe der schweren Ionen. — Moskva: Atomizdat 1977 (in Russ.).

Barb 77 BARBOUR, I. M.; DAVIES, A. T. (Ed.): Fundamentals of Quark Models. — Edinbourgh: Proc. Scott. Univ. Summer Scool in Physics 1977.

Bas 80 BASS, R.: Nuclear Reactions with Heavy Ions. — Berlin/Heidelberg/New York: Springer-Verlag 1980.

Bat 82 BATJA, G. A.: Grundlagen der Theorie und Methoden der Berechnung von Kernenergiereaktoren. — Moskva: Energizdat 1982.

Bat 85 BATJ, G. A.; KOČENOV, A. S.; KABANOV, L. P.: Forschungskernreaktoren. — Moskva: Energoatomizdat 1985 (in Russ.).

Bau 68 BAUMGÄRTNER, G.; SCHUCK, P.: Kernmodelle. — Mannheim: Bibliographisches Institut 1968.

Baz 71 BAZ', A. I., ŽEL'DOVIČ, JA, B.; PERELOMOV, A. M.: Streuung, Reaktionen und Zerfälle in der nichtrelativistischen Quantenmechanik. — Moskva: Izd. Nauka 1971 (in Russ.).

Baz 72 EL BAZ, E.; CASTEL, B.: Graphical Methods of Spin Algebras in Atomic-, Nuclear and Particle Physics. — New York: M. Dekker, Inc. 1972; Moskva: Izd. Mir 1974.

Bec 81 BECKER, P.; BÖHM, M.; JOOS, H.: Eichtheorien der starken und elektroschwachen Wechselwirkung. — Stuttgart: B. G. Teubner 1981.

Bec 64 BECKURTS, K. H.; WIRTS, K.: Neutron Physics. — Berlin/Heidelberg/New York: Springer-Verlag 1964.

Ben 64 DE BENEDETTI, S.: Nuclear Interactions. — New York/London/Sydney: John Wiley & Sons 1964. — Moskva: Atomizdat 1968 (in Russ.).

Ber 66 BERESTETZKI, W. B.; LIFSCHITZ, E. M.; PILAJEWSKI, L. P.: Relativistische Quantenfeldtheorie. — Berlin: Akademie-Verlag 1966.

Ber 72 BERLOVIČ, E. E.; VASILENKO, S. S.; NOVIKOV, JU. N.: Lebensdauern von Anregungszuständen der Atomkerne. — Leningrad: Izd. Nauka 1972 (in Russ.).

Bet 71 BETHE, H.: Theorie der Kernmaterie. — Moskva: Izd. Mir 1974 (in Russ.); Ann. Rev. nuclear Sci. *21* (1971) 93.

Bet 78 BETHGE, K. (Ed.): Experimental Methods in Heavy Ion Physics. — Berlin/Heidelberg/New York: Springer-Verlag 1978.

Bet 86 BETHGE, K.; SCHRÖDER, M.: Elementarteilchen. — Darmstadt: Wiss. Buchgesellschaft 1986.

Bil 71 BILENKIJ, S. M.: Einführung in die Technik der Feynman-Diagramme. — Moskva: Atomizdat 1971 (in Russ.).

Bir 64 BIRKS, J. B.: The Theory and Practice of Scintillation Counting. — Oxford/London: Pergamon Press 1964.

Bjo 65 BJORKEN, J. D.; DRELL, S. D.: Relativistic Quantum Fields. — New York: McGraw Hill 1965.

Bla 52/59 BLATT, J. M.; WEISSKOPF, V. F.: Theoretical Nuclear Physics. — Berlin/Heidelberg/New York: Springer-Verlag 1952; — Leipzig BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft 1959.

Bli 73 BLIN-STOYLE, R. I.: Fundamental Interactions and the Nucleus. — Amsterdam: North-Holland Publ. Co. 1973; Moskva: Izd. Mir 1976 (in Russ.).

Boc 79/80 BOCK, R.: Heavy Ion Collisions. Vol. 1, 2. — Amsterdam: North-Holland Publ. Co. 1979/80.

Bod 72/78 BODENSTEDT, E.: Experimente der Kernphysik und ihre Deutung. Teil 1, 2, 3, — Mannheim/Wien/Zürich: Bibliographisches Institut 1972/1978.

Bog 76 BOGOLJUBOV, N. N.; SHIRKOV, D. V.: Einführung in die Quantenfeldtheorie. — Moskva: Izd. Nauka 1976 (in Russ.); — Reading/Mass.: Benjamin/Cummings 1983 (in Engl.).

Boh 69/75 BOHR, A.; MOTTELSON, B. R.: Nuclear Structure. Vol. I, II. — New York/Amsterdam: W. A. Benjamin. Inc. 1969/1975; — Berlin: Akademie-Verlag 1975/1980; — München: Hanser 1980/1980; — Moskva: Izd. Mir 1971/1977.

Bri 62 BRINK, D. M.; SATCHLER, G. R.: Angular Momentum. — Oxford: Clarendon Press 1962.

Bri 71 BRINK, D. M.: Nuclear Forces. — London/Oxford: Pergamon Press 1971; Kernkräfte. Berlin: Akademie-Verlag 1971.

Brow 64 BROWN, G. E.: Unified Theory of Nuclear Models. — Amsterdam: North-Holland Publ. Co. 1964.

Bro 76 BROWN, G. E.; JACKSON, A. D.: The Nucleon-Nucleon-Interaction. — Amsterdam: North-Holland Publ. Co. 1976.

Bru 77 BRUSSAARD, P. J.; GLAUDEMANS, P. W. H.: Shell-Model Applications in Nuclear Spectroscopy. — Amsterdam: North-Holland Publ. Co. 1977.

Buc 73 BUCKA, H.: Atomkerne und Elementarteilchen. — Berlin 1973.

Buc 81 BUCKA, H.: Nukleonenphysik. — Berlin: W. de Gruyter 1981.

Büc 71 BÜCKER, H.: Theorie und Praxis der Halbleiterdetektoren für Kernstrahlung. — Berlin: Springer-Verlag 1971.

Byc 73 BYCKLING, E.; KAJANTIE, K.: Particle Kinematics. — New York: John Wiley & Sons 1973; Moskva: Izd. Mir 1975.

Cha 76 CHARPAK, G.: Wire Chambers: A Review and Forecast. Comm. Nuclear Particle Phys. *6* (1976) 00.

Cha 78 CHARPAK, G.: Multi Wire and Drift Proportional Chambers. Phys. today, *31* (1978) 10.

Če 78 ČEČEV, V. P.; KRAMAROVSKIJ, JA. M.: Die Radioaktivität in der Evolution des Weltalls. — Moskva: Izd. Nauka 1978 (in Russ.).

Cho 84 CHOLNOV, JU, B. u. a. (Hrsg.): Handbuch für eingeschätzte Werte kernphysikalischer Charakteristika radioaktiver Nuklide, die in der Technik und Medizin eingesetzt werden. — Moskva: Energoatomizdat 1984 (in Russ.).

Cho 81 CHOPPIN, C. R.; RYDBERG, J.: Nuclear Chemistry. — London/Oxford: Pergamon Press 1981.

Chr 83 CHRAMOV, JU. A.: Biographie der Physik. Ein chronologisches Nachschlagewerk. — Kiew: Technika 1983 (in Russ.).

Cit 84 CITOVIČ, A. P.: Kernelektronik. — Moskva: Energoatomizdat 1984 (in Russ.).

Clo 79 CLOSE, F. E.: An Introduction to Quarks and Partons. — London/New York: Academic Press 1979.

Cra 82 CRAIGIE, N. S.; GODDARD, P.; NAHM, W. (Hrsg.): Monopoles in Quantum Field Theory. Singapore: World Scientific 1982.

Cre 83 CREUTZ, M.: Quarks, Gluons and Lattices. — Cambridge: Cambridge University Press 1983.

Dan 74 DANIEL, H.: Beschleuniger. — Stuttgart: B. G. Teubner 1974.

Dav 63 DAVYDOV, A. S.: Quantenmechanik. — Moskva: Gos. Izd. Fiz.-Mat. Lit. 1963 (in Russ.); — Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften 1981.

Dav 58 DAVYDOV, A. S.: Theorie des Atomkerns. — Moskva: Gos. Izd. Fiz.-Mat. Lit. 1958 (in Russ.); — Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften 1963.

Dav 67 DAVYDOV, A. S.: Angeregte Kernzustände. — Moskva: Atomizdat 1967 (in Russ.).

Dav 82 DAVIES, P. C. W.: The Accidental Universe. — Cambridge/London/New York/New Rechelle/Melbourne/Sydney: Cambridge Univ. Press 1982; — Moskva: Izd. Mir 1985 (in Russ.).

Dec 78 DECONNINCK, G.: Introduction to Radioanalytical Physics. — Budapest: Akademiai Kiado 1978.

Del 85 DELJAGIN, N. N., u. a.: Hyperfein-Wechselwirkungen und Kernstrahlungen. — Moskva: Izd. Mosk. Univ. 1985 (in Russ.).

Did 77 DIDENKO, A. N.; GRIGOREV, V. P.; UZOV, V. P.: Intensive Elektronenstrahlen und ihre Anwendungen. — Moskva: Atomizdat 1977 (in Russ.).

Dol 82 DOLEŽAL, N. A. (Hrsg.): Konstruktion von Kernreaktoren. — Moskva: Energoizdat 1982 (in Russ.).

Dol 81 DOLGOV, A. D.; ZELDOVICH, YA. B.: Rev. mod. Phys. *53* (1981) 1.

Dör 79 DÖRSCHEL, B.; HERFORTH, L.: Neutronen-Personendosimetrie. — Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften 1979; Basel: Birkhäuser-Verlag 1979.

Dor 79 DORFMAN, JA. G.: Weltgeschichte der Physik (in Russ.). — Moskva/Leningrad: Izd. Nauka 1979.

Dže 63 DŽELEPOV, B. S.; PEKER, L. K.; SERGEEV, V. O.: Decay Schemas of Radioactive Nuclei. A > 100, Bd. 2. — Leningrad: Izd. AN SSSR 1963 (in Engl. u. Russ.).

Dže 66 DŽELEPOV, B. S.; PEKER, L. K.: Decay Schemas of Radioactive Nuclei, A ≦ 100, Bd. 1. — Leningrad: Izd. AN SSSR 1966 (in Engl. u. Russ.).

Dže 72 DŽELEPOV, B. S.; ZYR'ANOVA, L. N.; SUSLOV, JU. P.: Beta-Prozesse. Funktionen zur Analyse der Beta-Spektren und des Elektroneneinfangs. — Leningrad: Izd. Nauka 1972 (in Russ.).

Dže 81 DŽELEPOV, B. S.; DAVYDOV, A. S. u. a.: Starke und schwache Aussagen der Kernspektroskopie und Kerntheorie. — Leningrad: Izd. Nauka 1981 (in Russ.).

Dže 80 DŽELEPOV, B. S.; ŠESTOPALOVA, S. A.: Kernspektroskopische Normale. — Moskva: Atomizdat 1980 (in Russ.).

Ebe 76 EBERT, H. (Hrsg.): Physikalisches Taschenbuch. 5. Aufl. — Braunschweig: Friedr. Vieweg & Sohn GmbH. 1976; Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften 1976.

Edm 57 EDMONDS, A. R.: Drehimpulse in der Quantenmechanik. — London/New York: Academic Press 1957 (in Engl.); Mannheim: Bibliographisches Institut 1964.

Eis 70/72 EISENBERG, J. M.; GREINER, W.: Nuclear Theory. Vol. 1, 2, 3. — Amsterdam: North-Holland Publ. Co. 1970/1972; — Moskva: Atomizdat 1975/1976.

End 59 ENDT, P. M.; DEMEUR, M.: Nuclear Reactions. Vol. 1, 2. — Amsterdam: North-Holland Publ. Co. 1959.

Eng 74 ENGLAND, J. B. A.: Techniques in Nuclear Structure Physics. Part 1, 2. — London: McMillan Press 1974.

Fad 78 FADDEEV, L. D.; SLAVNOV, A. A.: Gauge Fields. Introduction to Quantum Theory. — Moskva: Izd. Nauka 1978 (in Russ.); Reading/Mass.: Benjamin/Cummings 1980 (in Engl.).

Far 82 FARKI, E.; JACKIW, R.: Dynamical Gauge Symmetry Breaking. — Singapore: World Scientific 1982.

Fra 71 FRATZSCHER, W.; FELKE, H.: Einführung in die Kernenergetik. — Leipzig: VEB Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie 1971.

Fra 74 FRAUENFELDER, H.; HENLEY, E. M.: Subatomic Physics. — Englewood Cliffe: Prentice-Hall, Inc. 1974; Moskva: Izd. Mir 1979 (in Russ.).

Fra 66 FRAZER, W. R.: Elementary Particles. — Englewood Cliffe: Prentice-Hall 1966.

Fra 79 FRAZER, W.; HENYCY, F. (Ed.): Quantum Chromodynamics. — New York: American Institut of Physics 1979.

Fra 86 FRAUENFELDER, H.; HENLEY, E. M.: Teilchen und Kerne. — München: Oldenbourg 1986.

Fel 77 FELDMAN, G.; PERL, M. L.: Physics. Rep. *33* (1977) 285.

Fen 69 FENYVES, E.; HAIMAN, O.: The Physical Principles of Nuclear Radiation Measurements. — Budapest: Akademiai Kiado 1969.

Fer 50 FERMI, E.: Nuclear Physics. — Chicago: University Press 1950; Moskva: Izd. Inostr. Lit. 1951 (in Russ.).

Fey 72 FEYNMAN, R. P.: Photon-Hadron-Interactions. — Reading/Mass.: Benjamin/Cummings 1972.

Fis 71 FISCHER, H.; WERNER, G.: Autoradiographie. — Berlin: Walter de Gruyter & Co. 1971.

Fle 70 FLEROV, G. N.; DRUIN, V. A.; PLEVE, A. A.: Die Stabilität der schweren Kerne und die Grenzen des periodischen Systems der Elemente. Uspechi fiz. Nauk. *100* (1970) 1, 45.

Fle 75 FLEROV, G. N.; BARASENKOV, V. S.: Strahlen schwerer Ionen. Grundlagen und Einsatzmöglichkeiten. Wiss. u. Fortschr. *25* (1975) 10, 460; 11, 512.

Fle 81 FLEROV, G. N.; ILJINOV, A. S.: Gibt es superschwere Elemente? — Leipzig: VEB Fachbuchverlag 1881.

Fre 78 FREEDMAN, D. Z.; VAN NIEUWENHUIZEN, P.: Supergravity and the Unification of the Laws of Physics. Sci. Amer. *238* (1978) 2, 126; Uspechi fiz. Nauk *128* (1979) 1, 135

Fri 2 FRIES, D.; ZEITNITZ, B.: Quarks and Nuclear Forces. — Berlin/Heidelberg/New York: Springer-Verlag 1982.

Fün 59 FÜNFER, E.; NEUERT, H.: Zählrohre und Szintillationszähler. — Karlsruhe: Verlag G. Braun 1959.

Gai 83 GAILLARD, M. K.; STORA, R. (Ed.): Gauge Theories in High Energy Physics, Vol. 1, 2. — Amsterdam: North-Holland Publ. Co. 1983.

Gar 76 GARBER, D. I.; KINSEY, R. R.: Neutron Cross Sections, BNL 325. — Springfield: National Technical Information Service 1976.

Gas 67 GASIOROWICZ, S.: Elementary Particle Physics. — New York: John Wiley & Sons 1967; Moskva: Izd. Nauka 1969.

Gel 64 GELL-MANN, M.; NE'EMAN, Y.: The Eightfold Way. — New York: W. A. Benjamin, Inc. 1964.

Geo 82 GEORGI, H.: Lie Algebras in Particle Physics, from Isospin to Unified Theories. — Reading/Mass.: Benjamin/Cummings 1982.

Ger 82 GERASIMOV, W. W.; MONACHOV, A. S.: Werkstoffe der Kerntechnik. — Moskva: Energoizdat 1982 (in Russ.).

Gib 76 GIBSON, W. M.; POLLAND, B. R.: Symmetry Principles in Elementary Particle Physics. — Cambridge: Cambridge University Press 1976.

Gib 80 GIBSON, W. M.: The Physics of Nuclear Reactions. — London/Oxford: Pergamon Press 1980.

Glä 72 GLÄSER, W.: Einführung in die Neutronenphysik. — München: Verlag Karl Thiemig 1972.

Gol 69 GOLDANSKIJ, V. I. u. a.: Zählstatistik beim Nachweis von Kernteilchen. — Moskva: Izd. Nauka 1969 (in Russ.).

Gol 67 GOLDBERGER, M. L.; WATSON, K. M.: Collision Theory. — NewYork: John Wiley & Sons 1964; — Moskva: Izd. Mir 1967.

Gop 80 GOPYČ, P. M.; ZALJUBOVSKIJ, I. I.: Kernspektroskopie. — Charkov: Izd. Vistša škola 1980 (in Russ.).

Gor 82 GORN, L. S.; CHAZANOV, B. I.: Positionsempfindliche Detektoren. — Moskva: Energoizdat 1982.

Got 68 GOTT, V. S.: Über die Unerschöpflichkeit der materiellen Welt. — Moskva: Izd. Znanie 1968 (in Russ.).

Got 74 GOTT, V. S.; TJUCHTIN, V. S.; ČUDINOV, E. M.: Philosophische Probleme der modernen Naturwissenschaft. — Moskva: Vysša škola 1974 (in Russ.).

Gri 74 GRIGOR'EV, E. P.; SOLOV'EV, W. G.: Struktur der geradzahligen deformierten Kerne. — Moskva: Izd. Nauka 1974.

Gur 65 GUREWIČ, J. J.; TARASOV, L. W.: Physik mit Neutronen niedriger Energien. — Moskva: Izd. Nauka 1965 (in Russ.).

Hag 77 HAGLER, M. O.; KRISTIANSEN, M.: An Introduction to Controlled Thermonuclear Fusion. — Lexington: D. C. Heath & Co. 1977; Moskva: Izd. Mir 1980.

Hal 84 HALZEN, F.; MARTIN, A. D.: Quarks and Leptons. — New York: John Wiley & Sons 1984.

Han 76 HANLE, W. (Hrsg.): Isotopentechnik. — München: Verlag Karl Thiemig 1976.

Har 81 VAN DER HARDT, P.; RÖTTGER, H. (Ed.): Handbook of Materials Testing Reactors and Associated Hot Laboratories in the European Community. — Dortrecht/Boston/London: D. Reidel Publishing Company 1981.

Har 72 HART, H.: Flüssigkeitsdichtemessung mit Hilfe von Kernstrahlung. — Leipzig: BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft 1972.

Har 69 HARTMANN, W. (Hrsg.): Meßverfahren unter Anwendung ionisierender Strahlung (Bd. 5 in: Handbuch der Meßtechnik in der Betriebskontrolle). — Leipzig: Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig K.-G. 1969.

Hen 74 HENNIG, K.; WOLLER, P.: Nuklearmedizin. — Dresden: Verlag Theodor Steinkopf 1974.

Her 81 HERFORTH, L.; HÜBNER, K.; KOCH, H.: Praktikum der Radioaktivität und der Radiochemie. — Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften 1981; Basel: Birkhäuser Verlag 1984; Moskva: Izd. Mir 1984.

Her 66 HERTZ, G. (Hrsg.): Lehrbuch der Kernphysik, Bd. I: Experimentelle Verfahren. — BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft 1966.

Her 60 HERTZ, G. (Hrsg.): Lehrbuch der Kernphysik, Bd. II: Physik der Atomkerne. — Leipzig: BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft 1960.

Her 62 HERTZ, G. (Hrsg.): Lehrbuch der Kernphysik, Bd. III: Angewandte Kernphysik. — Leipzig: BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft 1962.

Hod 63 HODGESON, P. E.: The Optical Model of Elastic Scattering. — Oxford: Oxford University Press 1963.

Hol 75 HOLTHEY, J.: Aktivierungsanalyse (Anwendungen in der Metallurgie). — Leipzig: VEB Deutscher Verlag der Grundstoffindustrie 1975.

Hor 75 HORNYAK, W. F.: Nuclear Structure. — New York: Academic Press 1975.

Hoy 75 HOYLE, F.: Astronomy and Cosmology. A modern Course. — San Francisco: Freeman 1975.

Hör 64 HÖRZ, H.: Atome, Kausalität, Quantensprünge. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften 1964.

Hör 71 HÖRZ, H.: Physik und Weltanschauung. — Leipzig/Jena/Berlin: Urania-Verlag 1971.

Hua 82 HUANG, K.: Quarks, Leptons and Gauge Fields. — Singapore: World Scientific 1982.

Hum 76 HUMPERT, B.: Dynamical Concepts on Scaling Violation and the New Resonances in e^+e^-Annihilation. — Berlin/Heidelberg/New York: Springer-Verlag 1976.

Hyd 64 HYDE, E. K.; PERLMAN, I.; SEABORG, G. T.: The Nuclear Properties of Heavy Elements, Vol. 1—5. — Englewood Cliffs (N.Y.): Prentice Hall, Inc. 1964; Moskva: Izd. Inostr. Lit. 1968.

Igo 75 IGONON, V. V.: Das Atom in der UdSSR: Die Entwicklung der sowjetischen Kernphysik. — Saratow: Izd. Saratovskogo Universiteta 1975 (in Russ.).

Ind 82 Industrial Applications of Radioisotops and Radiation Technology. Proc. Internat. Conf. Grenoble 28. 9.—2. 10. 1981. Vienna: International Atomic Energy Agency 1982.

Itz 80 ITZYKSON, C.; ZUBER, J.-B.: Quantum Field Theory. — New York: McGraw Hill Publ. Co. 1980.

Jae 84 JAEGER, R. G.; HÜBNER, W. (Hrsg.): Dosimetrie und Strahlenschutz. — Stuttgart: Georg Thieme Verlag 1974.

Jud 81 JUDD, A.: Fast Breeder Reactors. — London/Oxford: Pergamon Press 1981; Moskva: Energoatomizdat 1984.

Kal 66 KALAŠNIKOVA, V. I.; KOZODAEV, M. S.: Detektoren für Elementarteilchen. — Moskva: Izd. Nauka 1966 (in Russ.).

Kam 79 KAMKE, D.: Einführung in die Kernphysik. — Braunschweig: Friedr. Vieweg & Sohn GmbH. 1979.

Kar 81 KARNAUCHOV, V. A.; PETROV, L. A.: Kerne weit ab vom Stabilitätsband. — Moskva: Energoizdat 1981.

Kau 84 KAUZANSKIJ, D. A.; KUZIN, A. M.: Strahlenbiologische Technologie. — Moskva: Energoatomizdat 1984 (in Russ.).

Ked 73 KEDROV, B. M.: Die Lehre über die Radioaktivität. — Moskva: Izd. Nauka 1973 (in Russ.).

Ker 80 Kernphysikalische Analysenmethoden zur Umweltkontrolle (in Russ. u. Engl.); 1. Allunionskonf. 23.—26. 10. 1979 in Taschkent. — Leningrad: Hydrometeoizdat 1980.

Ker 85 Kernphysikalische Analysenmethoden zur Umweltkontrolle (in Russ.). 2. Allunionskonf. 20.—22. 4. 1982 in Riga. — Leningrad: Hydrometeoizdat 1985.

Kes 83 KESSLER, G.: Nuclear Fission Reactors. Potential Role and Risks of Converters and Breeders. — Wien/New York: Springer-Verlag 1986; — Moskva: Energoatomizdat 1986 (in Russ.).

Kie 72 KIEFER, H.; MAUSHART, R.: Radiation Protection Measurements. — London/Oxford: Pergamon Press 1972.

Kim 71 KIM, Y. N.: Mesic Atoms and Nuclear Structure. — Amsterdam: North-Holland Publ. Co. 1971; Moskva: Atomizdat 1975.

Kir 80 KIRILLOV-UGRJUMOV, V. G.; NIKITIN, JU. P.; SERGEEV, F. M.: Atome und Mesonen. — Moskva: Atomizdat 1980 (in Russ.).

Kir 78 KIRSTEN, T.: Time in the Solar System (Hrsg. S. F. Dermott). — London/New York/ Sydney: 1978

Kle 79 KLEIMOV, V. F.; KOBLIK, JU. N.; KUZ'MIN, V. N.; MOŽITOV, B. S.: Koordinatenempfindliche Detektoren. — Taschkent: Izd. FAN UzSSR 1979 (in Russ.).

Kle 84 KLEINKNECHT, K.: Detektoren für Teilchenstrahlung. — Stuttgart: B. G. Teubner Verlagsgesellschaft 1984.

Kme 63 KMENT, V.; KUHN, A.: Technik des Messens radioaktiver Strahlung. — Leipzig: Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig K.-G. 1963.

Kok 69 KOKKEDEE, J. J. J.: The Quark Model. — Reading/Mass.: W. A. Benjamin Inc. 1969.

Kol 62 KOLLATH, R.: Teilchenbeschleuniger. — Braunschweig: Friedr. Vieweg & Sohn GmbH. 1962; Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften 1963.

Kolo 62 KOLOMENSKIJ, A. A.; LEBEDEV, A. N.: Theorie der zyklischen Beschleuniger. — Moskva: Gos. Izd. Fiz.-Mat. Lit. 1962 (in Russ.).

Kolo 80 KOLOMENSKIJ, A. A.: Physikalische Grundlagen der Teilchenbeschleunigungsmethoden. — Moskva: Izd. Mosk. Univ. 1980 (in Russ.).

Kon 66 KONOPINSKI, E. J.: The Theory of Beta-Radioactivity. — Oxford: Clarendon Press 1966.

Kop 56 KOPFERMANN, H.: Kernmomente. — Frankfurt: Akademische Verlagsgesellschaft 1956; Moskva: Izd. Inostr. Lit. 1960.

Kor 54 KORSUNSKIJ, M. J.: Isomerie der Atomkerne. — Moskva: Gos. Izd. Techn.-Theor. Lit. 1954 (in Russ.); Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften 1957 (in Deutsch).

Kow 70 KOWALSKI, E.: Nuclear Electronics. — Berlin/Heidelberg/New York: Springer-Verlag 1970.

Kra 73 KRAVCOV, V. A.: Atommassen und Bindungsenergien. — Moskva: Atomizdat 1973 (in Russ.).

Kud 82 KUDRJAVCEV, P. S.: Kurs der Geschichte der Physik. — Moskva: Izd. Prosveščenie 1982 (in Russ.).

Kur 75 KUROČKIN, S. S.; MURIN, I. D.: Moderne Methoden der Kernelektronik, Teil 1,2. — Moskva: Atomizdat 1975 (in Russ.).

Kuz 81 KUZIN, A. M.; KAUZANSKIJ, D. A.: Angewandte Strahlenbiologie. — Moskva: Energoizdat 1981 (in Russ.).

Lan 64 LANE, A. M.: Nuclear Theory. — New York: W. A. Benjamin. Inc. 1964; — Moskva: Atomizdat 1967.

Lan 73 LANDAU, L. D.; LIFŠITZ, E. M.: Theoretische Physik, Bd. I: Mechanik, Bd. II: Feldtheorie. — Moskva: Izd. Nauka 1973 (in Russ.); Berlin: Akademie-Verlag 1980 (in Deutsch).

Lan 81 LANIUS, K.: Physik der Elementarteilchen. — Berlin: Akademie-Verlag 1981.

Law 77 LAWSON, J. D.: The Principles of Charged Particle Beams. — Oxford: Clarendon Press 1977; Moskva: Izd. Mir 1980.

Lea 82 LEADER, E.; PREDAZZI, E.: An Introduction to Gauge Theories and the New Physics. — Cambridge: Cambridge University Press 1982.

Leb 81 LEBEDEV, A. N.; SALNOV, A. V.: Grundlagen der Beschleunigerphysik und -technik, Bd. 1, 2. — Moskva: Energoizdat 1981 (in Russ.).

Led 67 LEDERER, M.; HOLLANDER, J.; PERLMAN, I.: Table of Isotopes. 6. Edit. — New York: John Wiley & Sons 1967.

Led 78 LEDERER, C. M.; SHIRLEY, V. S.: Table of Isotopes. 7. Edit. — New York: John Wiley & Sons 1978.

Lee 65 LEE, T. D.; WU, C. S.: Weak Interactions. — Ann. Rev. nuclear Sci. *15* (1965), 381, *16* (1966), 471; — Moskva: Izd. Mir 1968.

Lee 81 LEE, T. D.: Particle Physics and Introduction to Field Theory. — Chuv: Harward Academic Publ. 1981.

Leo 82 LEONHARD, J. (Hrsg.): Taschenlexikon Radioaktivität. — Leipzig: VEB Bibliographisches Institut 1982.

Leu 80 LEUTZ, H.; MINTEN, A.: Nachweisgeräte der Hochenergiephysik. Phys. Zeit *11* (1980), 36—42 und 78—82.

Lin 79 LINDE, A. D.: Phase transitions in gauge Théories and Cosmology. Rep. Progr. Phys. *42* (1979) 389.

Lin 84 LINDE, A. D.: The inflationary universe. Rep. Progr. Phys. *49* (1984).

Lin 84 LINDE, A. D.: Elementary Particles and Cosmology. Proc. XXIII. Internat. Conf. on High Energy Physics, Leipzig, July 19—25, 1984, Vol. II, p. 125—148. — Zeuthen: AdW der DDR, Inst. für Hochenergiephysik 1984.

Liv 63 LIVINGOOD, J. J.: Principles of Cyclic Particle Accelerators. — Princeton: van Nostrand Co. Inc. 1961; Moskva: Izd. Inostr. Lit. 1963.

Loc 70 LOCK, W. O.; MEASDAY, D. F.: Intermediate Energy Nuclear Physics. — London: Methuen & Co. Ltd. 1970.

Loh 81 LOHRMANN, E.: Hochenergiephysik. 2. Aufl. — Stuttgart: B. G. Teubner 1981.

Lon 73 LONGO, M. J.: Fundamentals of Elementary Particle Physics. — New York: McGraw-Hill 1973.

Luk 75 LUK'ANVOV, S. Ju.: Heißes Plasma und steuerbare Kernfusion. — Moskva: Izd. Nauka 1975 (in Russ.).

Mac 59 MACKE, W.: Quanten. — Leipzig: Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig K.-G. 1959.

Mah 69 MAHAUX, C.; WEIDENMÜLLER, H. A.: Shell-Model Approach to Nuclear Reactions. — Amsterdam: North-Holland Publ. Co. 1969.

Maj 82 MAJER, V.: Grundlagen der Kernchemie. — Leipzig: Johann Ambrosius Barth Verlag 1982.

May 79 MAYER-KUCKUK, T.: Kernphysik. 3. Aufl. — Stuttgart: B. G. Teubner 1979.

Mar 71 MARMIERE, P.; SHELDON, E.: Physics of Nuclei and Particles, Vol. 1, 2. — New York/London: Academic Press 1971.

Mei 69 MEILING, W.; STARY, F.: Nano Second Pulse Techniques. — Berlin: Akademie-Verlag 1969; New York: Gordon & Beach 1969.

Mei 78 MEIER, V. A.; VAGANO, P. A.: Grundlagen der Kerngeophysik. — Leningrad: Izd. Leningr. Univ. 1978 (in Russ.).

Mei 75 MEILING, W.: Kernphysikalische Elektronik. — Berlin: Akademie-Verlag 1975.

Mei 84 MEILING, W.: Fortschritte der kernphysikalischen Meß- und Experimentiertechnik durch Anwendung der Mikroelektronik. Kernenergie *27* (1984) 1, 1; 2, 49; 4, 133.

Mig 67 MIGDAL, A. B.: Nuclear Theory — The Quasiparticle Method. — Moskva: Izd. Nauka 1967 (in Russ.); — Amsterdam: 1968 (in Engl.).

Mos 75 MOSTEPANENKO, A. M.: Raum-Zeit und die physikalische Erkenntnis. — Moskva: Atomizdat 1975 (in Russ.).

Muc 74 MUCHIN, K. N.: Experimentelle Kernphysik. Bd. 1: Physik des Atomkerns; Bd. 2: Physik der Elementarteilchen. — Moskva: Atomizdat 1974 (in Russ.).

Mui 65 MUIRHEAD, H.: The Physics of Elementary Particles. — London/Oxford: Pergamon Press 1965.

Mur 70 MURSIN, V. C.: Physik der kosmischen Strahlen. — Moskva: Izd. Mosk. Univ. 1970 (in Russ.).

Mus 80/1 MUSIOL, G.; LÖFFLER, H.: Mikrophysik, Teil 2: Kern- und Elementarteilchenphysik. 2. Aufl. — Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften 1980.

Mus 80/2 MUSIOL, G.; REIF, R.; SEELIGER, D.: Kern- und Elementarteilchenphysik, Teil 1. — Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften 1980.

Nac 86 NACHTMANN, O.: Phänomene und Konzepte der Elementarteilchenphysik. — Wiesbaden: Vieweg 1986.

Nam 84 NAMBU, Y.: Quarks. — Singapore: World Scientific 1984.

Nar 73 NARGOLWALLA, S.-S.; PRZYBILOWICZ, E. P.: Activation Analysis with Neutron Generators. — New York: John Wiley & Sons 1973.

Nat 67 NATAF, R.: Les Modelles en Spectroscopic Nucleaire. — Paris: Dunod 1967; — Moskva: Izd. Mair 1968.

Nau 84 NAUMOV, A. I.: Physik des Atomkerns und der Elementarteilchen. — Moskva: Izd. Prosveštšenie 1984 (in Russ.).

Nem 75 NEMEC, O. F.; GOFMAN, JU. V.: Nachschlagwerk zur Kernphysik. — Kiew: Izd. Naukova Dumka 1975 (in Russ.).

New 66 NEWTON, R. G.: Scattering Theory of Waves and Particles. — New York: McGraw-Hill Book Co. 1966; Moskva: Izd. Mir 1969.

Nik 81 NIKIFOROV, JU. N.; FEDOTOV, J. L.; CALITIS, V. A.: Radionuklid-Meßwandler für Automatisierungssysteme zur Wägung in der Leichtindustrie. — Moskva: Energoizdat 1981 (in Russ.).

Nör 76 NÖRENBERG, W.; WEIDENMÜLLER, H. A.: Introduction to the Theory of Heavy Ion Collisions. — Berlin/Heidelberg/New York: Springer-Verlag 1976.

Nuc A Nuclear Data Section A: Tables. Ed. K. Way. — New York 1965ff.

Nuc B Nuclear Data Section B: Sheets. Ed. Nuclear Data Group ORNL. — New York: 1966ff.

Nuc 71 Nuclear Data Sheets, Ed. J. K. Tuli. — New York: Academic Press 1971 ff.

Oku 63 OKUN, L. B.: Die schwache Wechselwirkung der Elementarteilchen. — Moskva: Fizmatgiz 1963 (in Russ.).

Oku 81 OKUN, L. B.: Leptonen und Quarks. — Moskva: Izd. Nauka 1981 (in Russ.).

Oku 84 OKUN, L. B.: Physik der Elementarteilchen. — Moskva: Izd. Mir 1984 (in Russ.).

Ome 62 OMELJANENKOVSKIJ, M. E.: Philosophische Probleme der Quantenmechanik. — Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften 1962.

Osm 70 OSMANOV, N. O.: Philosophische Fragen des Modernen Atomismus. — Wladimir: Allunions-Maschinenbau-Institut 1970 (in Russ.).

Ott 85 OTTO, R.; HECHT, P.: Radionuklidgeneratoren. Wiss. u. Fortschr. *35* (1985) 6, 160.

Par 84 Particles Data Group. Wohl, C. G., et al.: Review of Particle Properties. Rev. mod. Phys. *56* (1984) 81.

Pas 69 PASEČNIK, M. V.: Neutronenphysik. — Kiew: Izd. Naukova Dumka 1969 (in Russ.).

Pau 69 PAUL, E. B.: Nuclear and Particle Physics. — Amsterdam: North-Holland Publ. Co. 1969.

Per 72 PERKINS, D. H.: Introduction to High Energy Physics. — Reading/Mass.: Addison Wesley Publ. Co. 1972; Moskva: Izd. Mir 1975.

Per 74 PERL, M. L.: High Energy Hadron Physics. — New York: John Wiley & Sons 1974.

Per 57 PERLMAN, I.; RASMUSSEN, J. O.: Alpha-Radioactivity. — Berlin/Göttingen/Heidelberg: Springer-Verlag 1957; Moskva: Izd. Inostr.-Lit. 1959.

Pet 73 PETROSJANC, A. M.: Das Atom — Forschung, Nutzung. — Berlin: Akademie-Verlag 1973.

Pet 76 PETROSJANC, A. M.: Moderne Probleme der Atomwissenschaft und -technik in der UdSSR. — Moskva: Atomizdat 1976 (in Russ.).

Pet 81 PETROSJANC, A. M.: Kernenergetik. — Moskva: Izd. Nauka 1981 (in Russ.).

Pip 78 PIPPEL, W.: Verweilzeitanalyse in technischen Strömungssystemen. — Berlin: Akademie-Verlag 1978.

Poh 70 POHL, E.: Kerntechnik im Bauwesen. — Berlin: Akademie-Verlag 1970.

Pol 77 POLIKANOV, S. M.: Formisomerie der Atomkerne. — Moskva: Atomizdat 1977 (in Russ.).

Pol 74 POLITZER, H. D.: Physics Rep. *14C* 1974, 129.

Pos 81 POSE, H.: Einführung in die Physik des Atomkerns. — Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften 1971.

Pre 62 PRESTON, M. A.: Physics of the Nucleus. — Reading/Mass.: Addison Wesley Publ. Co. 1962; — Moskva: Izd. Mir 1964.

Pro 73 Proceedings of the International Conference on Modern Trends in Activation Analysis, Oct. 2—6, 1972, Sacley. — Budapest: Akademiai Kiado, 1973; Amsterdam/New York: Elsevier Publ. Co. 1973.

Qui 81 QUIGG, C.: Gauge Theories of the Strong, Weak and Electromagnetic Interactions. — Reading/Mass.: Benjamin/Cummings 1981.

Ram 81 RAMOND, P.: Field Theory, a Modern Primer. — Reading/Mass.: Benjamin/Cummings 1981.

Ran 76 RANFT, G.; RANFT, J.: Elementarteilchen, Teil 1, 2. — Leipzig: BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft 1976/77.

Ran 79 RANFT, G.; RANFT, J.: Teilchenerzeugungsprozesse bei großen Transversalimpulsen (in Russ.). Dubna: Physik der Elementarteilchen und Atomkerne *10* (1979) 1.

Ran 84 RANFT, J.: Elementarteilchenphysik und Kosmologie. — Wiss. u. Fortschr. *34* (1984) 11, 285.

Reb 83 REBBI, C.: Lattice Gauge Theories and Monte Carlo Simulation. — Singapore: World Scientific 1983.

Rez 82 REZVANOV, R. A.: Radioaktive und andere nichtelektrische Methoden der Untersuchung von Bohrlöchern. — Moskva: Nedra 1982 (in Russ.).

Rin 80 — RING, P.; SCHUCK, P.: The Nuclear Many Body Problem. — Berlin/Heidelberg/New York: Springer-Verlag 1980.

Rja 80 — RJABUCHIN, JU. S.; SAL'NOV, A. V.: Beschleunigte Strahlen und ihre Anwendungen. — Moskva: Atomizdat 1980 (in Russ.).

Rod 67 — RODBERG, L. S.; THALER, R. M.: Introduction to the Quantum Theory of Scattering. — New York: Academic Press 1967.

Ros 57 — ROSE, M. E.: Elementary Theory of Angular Momentum. — New York: John Wiley & Sons 1957.

Ros 78 — ROSEL, F.; et al., Atomic Data and Nuclear Data Tables *21* (1978) 91.

Ros 49 — ROSSI, R.; STAUB, H.: Ionisation Chambers and Counters. — New York: McGraw-Hill Publ. Co. 1949.

Roy 67 — ROY, R. R.; NIGAM, B. P.: Nuclear Physics. — New York: John Wiley & Sons 1967.

San 77 — SANDERS, J. M.; WAPSTRA, A. H.: Proc. fifth Internat. Conf. on Atomic Masses and Fundamental Constants 1977. — London/New York: Plenum Press 1977.

Sar 79 — SARANCEV, V. P.; PERELSTEIN, E. A.: Kollektive Ionenbeschleunigung durch Elektronenringe. — Moskva: Atomizdat 1979 (in Russ.).

Šir 72 — ŠIROKOV, JU. M.; JUDIN, N. P.: Kernphysik. — Moskva: Izd. Nauka 1972 (in Russ.).

Sch 73 — SCHNEIDER, W.: Neutronenmeßtechnik. — Berlin/New York: Walter de Gruyter & Co. 1973.

Sch 75 — SCHURICHT, V., u. a.: Strahlenschutzphysik. — Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften 1975.

Sch 80 — SCHURICHT, V.: Fusionsreaktoren und Umwelt. — Berlin: Akademie-Verlag 1980.

Sch 83 — SCHURICHT, V.; STEUER, J.: Praktikum der Strahlenschutzphysik. — Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften 1983.

Scha 85 — SCHATZ, G.; WEIDINGER, A.: Nukleare Festkörperphysik. Kernphysikalische Meßmethoden und ihre Anwendungen. — Stuttgart: B. G. Teubner 1985.

Schü 80 — SCHÜTTE, D.; HALINDE, K.; BLEULER, K.: The Meson Theory of Nuclear Forces and Nuclear Matter. — Mannheim/Wien/Zürich: Bibliographisches Institut 1980.

See 74ff — SEELMANN-EGGEBERT, W.; PFENNIG, G.; MÜNZEL, H.: Nuklidkarte. 4. Aufl. — Karlsruhe: Gesellschaft für Kernforschung m.b.H. 1974.

Seg 53 — SEGRE, E.: Experimental Nuclear Physics, Vol. 1—3. — New York/London: John Wiley & Sons 1953; — Moskva: Izd. Inostr. Lit. 1975.

Sel 82 — SELINOV, I. P.; CHOL'NOV, I. V.; KUZ'MENKO, N. K.: Nuklidkarte. — Moskva: Zentrum für Atomare und Subatomare Daten, AN SSSR and GKAE SSSR.

Sha 63 — DE SHALIT, A.; TALMI, I.: Nuclear Shell Theory. — New York: Academic Press 1963.

Sha 74 — DE SHALIT, A.; FESHBACH, H.: Theoretical Nuclear Physics, Vol. 1. — New York: John Wiley & Sons 1974.

Sie 66 — SIEGBAHN, K. (Ed.): Alpha-, Beta- und Gamma-Ray Spectroscopy. Vol. I, II. Amserdam: North-Holland Publ. Co. 1966.

Sit 72 — SITENKO, A. G.; TARKAKOVSKIJ, V. N.: Vorlesungen zur Kerntheorie. — Moskva: Atomizdat 1972 (in Russ.).

Sok 68 — SOKOLOV, A. A.: Elementarteilchen. — Berlin: Akademie-Verlag 1968.

Sol 71 — SOLOVEV, V. G.: Theory of Complex Nuclei. — Moskva: Izd. Nauka 1971 (in Russ.); — London/Oxford: Pergamon Press 1976.

Sol 81 — SOLOVEV, V. G.: Theorie des Atomkerns-Kernmodelle. Moskva: Energoizdat 1981 (in Russ.).

Sto 76/78 — STOLZ, W.: Radioaktivität, Bd. I: Grundlagen, Bd. II: Messung und Anwendung. — Leipzig: BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft 1976/1978.

Sto 81 — STOLZ, W.; BERNHARDT, R.: Dosimetrie ionisierender Strahlung. — Berlin: Akademie-Verlag 1981; Riga: Zinatne 1982.

Sto 85 — STOLZ, W.: Messung ionisierender Strahlung. — Berlin: Akademie-Verlag 1985.

Str 67/68 — STRUTINSKIJ, V. M.: Nuclear Phys. *A95* (1967) 420; *A122* (1968) 1.

Syt 84 — SYTIN, V. P.; TEPLOV, F. P.; ČEREVATENKO, G. A.: Radioaktive Quellen ionisierender Strahlungen. — Moskva: Energoatomizdat 1984 (in Russ.).

Tas 77 — TASSIE, L. J.: Physik der Elementarteilchen. — München/Wien: Oldenburg-Verlag 1977.

Tay 72 TAYLOR, R.: Scattering Theory — The Quantum Theory of Nonrelativistic Collisions. — New York: John Wiley & Sons 1972; Moskva: Izd. Mir 1975.

Tay 76 TAYLOR, J. C.: Gauge Theories of Weak Interactions. — Cambridge: Cambridge University Press 1976.

Tel 85 TELDEŠI, Ju.; JAKOVLEV, Ju. V.; BILIMOVIČ, G. N.: Umweltdiagnostik mit Radioanalytischen Methoden. — Moskva: Energoatomizdat 1985 (in Russ.).

Tob 61 TOBOCMAN, W.: Theory of Direct Nuclear Reactions. — Oxford: Oxford University Press 1961.

Tri 74 TRIFONOV, D. N.; KRIVOMAZOV, A. N.; LIZNEVSKIJ, JU. I.: Die Lehre über die Periodizität und Radioaktivität. — Moskva: Atomizdat 1974 (in Russ.).

Tur 77 TURZUNOV, A.: Philosophie der modernen Kosmologie. — Moskva: Izd. Pol. Lit. 1977 (in Russ.).

Uzy 85 UZYNIN, G. B.; KUZMARCEV, E. V.: Reaktoren mit schnellen Neutronen. — Moskva: Energoatomizdat 1985 (in Russ.).

Var 75 VARZALOVIČ, D. A.; MOSKALEV, A. N.; CHERSONSKIJ, V. K.: Quantentheorie des Drehimpulses. — Leningrad: Izd. Nauka 1975 (in Russ.).

Vie 82 Vierte Konferenz über die Anwendung neuer kernphysikalischer Methoden zur Lösung wissenschaftlich-technischer Aufgaben. Dubna, 20.—23. 10. 1981. — Dubna P18-82-177, 1982 (in Russ. u. Engl.).

Vyl 80 VYLOV, C., u. a.: Strahlungsspektren radioaktiver Nuklide. — Taschkent: Izd. FAN UzSSR 1980 (in Russ.).

Vyl 80/83 VYLOV, C.; et al.: Spectra of Radioactive Nuclides Radiation, Measured with Semiconductor Detectors. — Rossendorf/DDR: ZfK 399, 1980, Teil I; ZfK 505, 1983, Teil 2.

Vja 61 VJAZEMSKIJ, V. O.; u. a.: Szintillationsmethoden in der Radiometrie. — Moskva: Atomizdat 1961 (in Russ.).

Vol 82 VOLKOV, V. V.: Tiefunelastische Kernreaktionen. — Moskva: Energoizdat 1982 (in Russ.).

Wag 77 WAGONER, V.; SCHRAMM, D. N.: Element Production in the Early Universe. Ann. Rev. nuclear Phys. *27* (1977), 37—74.

Wap 71 WAPSTRA, A.; GOVE, N., Nuclear Data Tables *A9* (1971) 265.

Wap 85 WAPSTRA, A. H.; AUDI, G.: 1983 Atomic Mass Table. Nuclear Phys. *A234* (1985) 1.

Wei 78 WEINBERG, S.: The First Three Minutes. — New York: John Wiley & Sons 1978; Moskva: Energoizdat 1981.

Wei 70 WEINZIERL, P.; DROSG, M.: Lehrbuch der Nuklearelektronik. — Wien/New York: Springer-Verlag 1970.

Wei 71 WEISE, L.: Statistische Auswertung von Kernstrahlungsmessungen. — München/Wien: R. Oldenbourg Verlag 1971.

Weis 70 WEISSMANTEL, CH. (Hrsg.): Kleine Enzyklopädie Struktur der Materie. — Leipzig: VEB Bibliographisches Institut 1970.

Wes 83 WESS, J.; BAGGER, J.: Supersymmetry and Supergravity. — New Jersey: Princeton University Press 1983.

Wet 85 WETZEL, K.; HÜBNER, G.: Strahlenbehandlung von Lebensmitteln. Wiss. u. Fortschr. *35* (1985) 9, 231.

Wii 76 WIIK, B. H.; WOLF, G.: Electron-Positron Interactions. — Berlin/Heidelberg/New York: Springer-Verlag 1976.

Wil 77 WILDERMUTH, K.; TANG, Y. C.: A Unified Theory of the Nucleus. — Braunschweig: Friedr. Vieweg & Sohn GmbH. 1977.

Wil 63 WILSON, R.: Nucleon-Nucleon Interactions. — New York: Interscience Publ. 1963; Moskva: Izd. Mir 1965 (in Russ.).

Wil 69 WILKINSON, D. H.: Isospin in Nuclear Physics. — Amsterdam: North-Holland Publ. Co. 1969.

Wla 59 WLASSOW, N. A.: Neutronen. — Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften 1959; — Moskva: Izd. Nauka 1971. 2. Aufl. (in Russ.).

Wu 62 WU, T.-Y.; OHMURA, T.: Quantum Theory of Scattering. — Englewood Cliffs (N.J.): Prentice Hall, Inc. 1962.

Wu 66 — Wu, C. S.; Moszkowski, S. A.: Beta-Decay. — New York: John Wiley & Sons 1966; — Moskva: Atomizdat 1970 (in Russ.).

Zan 78 — Zanevskij, Ju. V.: Drahtdetektoren für Elementarteilchen. — Moskva: Atomizdat 1978 (in Russ.).

Žda 80 — Ždanov, G. S.; Iljušin, A. S.; Nikitina, S. W.: Diffraktions- und Resonanz-Strukturanalyse, Röntgen-, Elektronen-, Neutronen- und Mößbauer-Spektroskopie. — Moskva: Izd. Nauka 1980 (in Russ.).

Zee 82 — Zee, A.: Unity of Forces in the Universe. Vol. 1 and 2. — Singapore: World Scientific 1982.

Zel 82 — Zel'dovič, A. G. (Hrsg.): Kryogene Geräte und Anlagen in der Kernphysik. — Moskva: Energoizdat 1982 (in Russ.).

Zem 83 — Zemljanuchin, V. I., u. a.: Radiochemische Verarbeitung von Kernbrennstoffen der Kernkraftwerke. — Moskva: Energoatomizdat 1983 (in Russ.).

Zie 75 — Ziegler, J. F.: New Yuses of Accelerators. — New York/London: Plenum Press 1975.

Namenverzeichnis

Sachverzeichnis

Konstanten und charakteristische Größen

(Korrigiert gemäß Rev. Mod. Phys. 59, Nr. 4, Okt. 1987)

Avogadro-Konstante	N_A	$= 6{,}022136 \cdot 10^{23}\ \text{mol}^{-1}$
Atomare Masseneinheit	m_u	$= 1\ \text{u} = (\text{g mol}^{-1})/N_A = 1{,}6605402 \cdot 10^{-27}\ \text{kg}$
		$= 931{,}49432\ \text{MeV}\ c^{-2} = 1822{,}89\ m_e$
Bohrsches Magneton	μ_B	$= e\hbar/2m = 9{,}2740 \cdot 10^{-24}\ \text{J T}^{-1}$
		$= 9{,}2740 \cdot 10^{-24}\ \text{Am}^2 = 5{,}788 \cdot 10^{-11}\ \text{MeV T}^{-1}$
Bohrscher Radius	a_0	$= \hbar^2/E_0(e)\, e^2 = r_e/\alpha^2 = 5{,}2917 \cdot 10^{-11}\ \text{m}$
Boltzmann-Konstante	k	$= R_0/N_A = 1{,}3806 \cdot 10^{-23}\ \text{J K}^{-1}$
		$= 8{,}617 \cdot 10^{-11}\ \text{MeV K}^{-1}$
Compton-Wellenlänge	λ_c	$= \hbar/mc$
des Elektrons	λ_e	$= 3{,}861593 \cdot 10^{-13}\ \text{m}$
des Pions	λ_π	$= 1{,}4139 \cdot 10^{-15}\ \text{m}$
des Protons	λ_p	$= 2{,}103089$
des Neutrons	λ_n	$= 2{,}100194 \cdot 10^{-16}\ \text{m}$
Elementarladung	e	$= 1{,}6021 \cdot 10^{-19}\ \text{C} = \{4{,}8032 \cdot 10^{-10}$ esE oder $(\text{erg cm})^{1/2}\ 1{,}200\ (\text{MeV fm})^{1/2}\}$
Fallbeschleunigung	g	$= 9{,}806 \cdot 10^4\ \text{ms}^{-2}$ (45° NN)
Faraday-Konstante	F	$= N_A e = 9{,}6485 \cdot 10^4\ \text{C mol}^{-1}$
Feinstrukturkonstante	α	$= \mu_0 c e^2/2h = 7{,}2973 \cdot 10^{-3};\ 1/\alpha = 137{,}035$
Fermi-Kopplungskonstante	$G_F/(\hbar c)^3$	$= 1{,}16637 \cdot 10^{-5}\ \text{GeV}^{-2}$
Gaskonstante, universelle	R_0	$= N_A k = 8{,}3145\ \text{J K}^{-1}\ \text{mol}^{-1}$
Gravitationskonstante	G	$= 6{,}67259 \cdot 10^{-11}\ \text{Nm}^2\ \text{kg}^{-2}$
Induktionskonstante	μ_0	$= 1{,}2566 \cdot 10^{-6}\ \text{Hm}^{-1} = 1{,}2566 \cdot 10^{-6}\ \text{Vs/Am}$
Influenzkonstante	ε_0	$= 8{,}854 \cdot 10^{-12}\ \text{Fm}^{-1} = 8{,}854 \cdot 10^{-12}\ \text{As/Vm}$
Kernmagneton	μ_k	$= e\hbar/2m_p = 5{,}050 \cdot 10^{-27}\ \text{J T}^{-1}$
		$= 3{,}152 \cdot 10^{-14}\ \text{MeV T}^{-1}$
Kernradius	R	$= r_0 A^{1/3};\ r_0 = (1{,}2 \ldots 1{,}4)\ \text{fm};$
		$1 \leqq A \leqq 250\colon r_0 \lesssim R \lesssim 9\ \text{fm}$
Kernzeit	τ_k	$= r_0/v = 1{,}3 \cdot 30 \cdot 10^{-15}/c \approx 1{,}4 \cdot 10^{-22}\ \text{s}$
klassischer Elektronenradius	r_e	$= \alpha^2 a_0 = 2{,}8179\ \text{fm}$
Lichtgeschwindigkeit im Vakuum	c	$= 2{,}9979 \cdot 10^8\ \text{m s}^{-1}$
Loschmidt-Konstante	n_0	$= N_A/V_m = 2{,}686763 \cdot 10^{25}\ \text{m}^{-3}$
Magische Zahlen	N_m, Z_m	$= 2, 8, 20, 28, 50, 82;$
	N_m	$= 126$, eventuell 184; $Z_m =$ eventuell 114, 126
Magnetisches Moment		
des Elektrons	μ_e	$= 1{,}00116\mu_B = 9{,}2848 \cdot 10^{-24}\ \text{J T}^{-1}$
des Protons	μ_p	$= +2{,}7928473\mu_K = +1{,}4106076 \cdot 10^{-26}\ \text{J T}^{-1}$
des Neutrons	μ_n	$= -1{,}913\mu_K$
Molarvolumen	V_m	$= R_0 T_0/p_0 = 2{,}241410 \cdot 10^{-2}\ \text{m}^3\ \text{mol}^{-1}$
Plancksche Konstante	h	$= 6{,}626075 \cdot 10^{-34}\ \text{J s} = 4{,}1356692 \cdot 10^{-21}\ \text{MeV s}$
	$\hbar$	$= 1{,}054726 \cdot 10^{-34}\ \text{J s} = 6{,}582122 \cdot 10^{-22}\ \text{MeV s}$
	$\hbar c$	$= 1{,}9733 \cdot 10^{-13}\ \text{MeV m}$

Ruhmasse		
des Elektrons	m_e	$= 9{,}109389 \cdot 10^{-31}$ kg $= 5{,}4857990 \cdot 10^{-4}$ u
des Protons	m_p	$= 1{,}6726231 \cdot 10^{-27}$ kg $= 1836{,}15270\, m_e$
		$= 1{,}007276470$ u
des Neutrons	m_n	$= 1{,}6749286 \cdot 10^{-27}$ kg $= 1838{,}6 m_e$
		$= 1{,}008664904$u
des Pions	$m_{\pi^\pm}$	$= 2{,}488 \cdot 10^{-28}$ kg $= 273{,}19 m_e$
	m_{π^0}	$= 2{,}406 \cdot 10^{-28}$ kg $= 264{,}20 m_e$
des Myons	$m_{\mu^\pm}$	$= 1{,}883532 \cdot 10^{-28}$ kg $= 206{,}76262\, m_e$
Ruhenergie		
des Elektrons	$E_0(e)$	$= 0{,}5109990$ MeV
des Protons	$E_0(p)$	$= 938{,}2723$ MeV
des Neutrons	$E_0(n)$	$= 939{,}5656$ MeV
des Pions	$E_0(\pi^\pm)$	$= 139{,}57$ MeV; $E_0(\pi^0) = 134{,}972$ MeV
des Myons	$E_0(\mu^\pm)$	$= 105{,}6583$ MeV
der atomaren Masseneinheit	$E_0(u)$	$= 931{,}49432$ MeV

Dieses Buch stellt die Kern- und Elementarteilchenphysik als einheitliches Ganzes dar. Sowohl in den experimentellen Kapiteln, in denen die Autoren Beschleuniger, Methoden zum Nachweis von Mikroteilchen, kernphysikalische Grundlagen der Kernenergetik sowie Anwendungen der Kern- und Elementarteilchenphysik beschreiben, als auch in den theoretischen Abschnitten (Grundeigenschaften von Kernteilchen, Kernmodelle, Wechselwirkung der Elektronen, Quarks und Leptonen) erläutern sie neue Begriffe an Beispielen aus beiden Teilgebieten. Immer wieder führen sie auch Rechnungen explizit durch, um sie für den Leser anschaulich zu halten. Das Buch setzt Kenntnisse voraus, wie sie beim Physikstudenten zum Vordiplom vorhanden sein sollten. Es ist jedoch nicht nur als Einführung für den Kern- und Elementarteilchenphysiker gedacht, sondern auch zur Weiterbildung für Studenten und Forscher anderer Gebiete der Physik sowie für Physiklehrer an allgemeinbildenden Schulen.

ISBN 3-8171-1404-4